PRACTICA II
SEGUNDO EXAMEN PARCIAL

OPERACIONES CON VECTORES

1. Con respecto a los vectores en IR^3 $u=(-1,1,0), v=(1,0,2), w=(-2,4,4)$. Calcule, si es posible:

a) $\dfrac{\left\|\Pr oy_{3u}^{(-4v)}\right\|}{u\cdot w}$

b) $(u\times w)+\|(v+w)\times(v-w)\|=$

c) $u-5w+\|v\|(3u\times w)=$

d) ¿Es el vector ($u\times v$) paralelo al vector ($u-2v$)? *Justifique*.

2. Dados los siguientes vectores $a=(2,4,5)$, $b=(7,-2,4)$, $c=(3,0,-1)$ de IR^3. Calcule de ser posible

a) $a\times(2b+c)=$

b) $a-5b+\|c\|(3a\times b)=$

c) Calcule la medida del ángulo interno determinado por los vectores a y c.

3. Dados los siguientes vectores $a=(3,\ 1,\ -4)$, $b=(2,\ 5,\ 6)$, $w=(1,\ 4,\ 8)$. Calcule de ser posible

a) $3c-a\times(b\times c)=$

b) $(a\cdot c)b-(a\cdot b)c=$

c) $\left\|\dfrac{2(b\times a)}{\|a\|}\right\|=$

4. Determine tres vectores $A=(a,3,2)$, $B=(2,b,1)$ y $C=(4,-1,c)$. Tal que A sea perpendicular a B, B sea perpendicular a C y C sea perpendicular a A.

5. Dados los siguientes vectores $a=(2,4,5)$, $b=(7,-2,4)$, $c=(3,0,-1)$, calcule de ser posible

a) a) $\|a\times(2b+c)\|=$

b) b) $5b+(3a\times b)=$

6. Los siguientes son tres puntos en el espacio IR^3 $P=(3,-2,1)$, $Q=(4,5,-2)$, $R=(-2,3,4)$

a) Calcule la proyección del vector $\overrightarrow{PQ}$ sobre el vector $\overrightarrow{PR}$.

b) Obtenga en IR^3 un vector V que sea unitario y paralelo al vector $\overrightarrow{PQ}$.

c) Calcule la medida del ángulo interno del triángulo cuyo vértice es el punto Q.

7. Sean $A=(-3,5)$, $B=(2,1)$ y $C=\left(\frac{3}{2},\frac{11}{2}\right)$ los vértices de un triángulo. Determine:

a) Determine si el ΔABC es isósceles o no.
b) Encuentre el área del ΔABC.
c) ¿Es recto el ángulo cuyo vértice corresponde al punto A?

8. Con respecto a los vectores en IR^3: $u=(-1,1,0), v=(1,0,2), w=(-2,4,4)$

a) Determine si los vectores $\left(u-\frac{1}{2}w\right)$ y $(3v\times u)$ son ortogonales.

b) Calcule, si es posible:

i. $\dfrac{\left\|\operatorname{Proy}_u^{(-5v)}\right\|}{u\cdot w}$

ii. $(u\times u)+(u\cdot u)$

iii. ¿Es el ángulo comprendido entre los vectores u y v un ángulo agudo? *Justifique*.

TRIANGULOS Y ANGULOS

9.Considere el triángulo determinado por los vértices $A=(2,-1,0)$, $B=(5,-4,3)$, $C=(1,-3,2)$ encuentre:

a) Area
b) La medida en grados del ángulo interno B

10. Calcule el volumen del paralelepípedo (caja con lados paralelos) que tiene un vértice en el origen y otros tres vértices en los puntos $A=(4,3,-7)$, $B=(-3,5,6)$ y $C=(5,-4,3)$.

11. Calcule el área del triángulo de vértices $A=(4,3,-7)$, $B=(-3,5,6)$ y $C=(5,-4,3)$. ¿Cuál es la medida del ángulo interno con vértice en el punto A ,en el punto B y en el punto C?

12. Se llaman ángulos directores de un vector v a los ángulos que forma el vector con cada uno de los semiejes positivos x, y, z. Los cosenos directores son los cosenos de los ángulos directores.

a) Calcule la medida de los tres ángulos directores del vector $v=(4,-2,4)$
b) Calcule la medida de los tres cosenos directores de $v=(4,-2,4)$

13. Dados los puntos $A=(2,-1,0)$, $B=(5,-4,3)$ y $C=(1,-3,2)$, los cuales corresponden a los vértices de un triangulo, entonces:

a) Encuentre el área del triángulo ΔABC

b) Encuentre el perímetro del triángulo ΔABC

RECTAS Y PLANOS EN EL ESPACIO

14. Determine la ecuación del plano que contiene a los puntos $P=(2,3,0)$, $Q=(-1,0,0)$ y al punto de intersección de las rectas ℓ_1 y ℓ_2, cuyas ecuaciones están dadas por

$$\ell_1:\ x=2-3t;\quad y+4=t;\quad z=t$$

y

$$\ell_2:\ x+1=t;\quad y=-3-4t;\quad z-1=-6t$$

15. Determine las ecuaciones paramétricas de la recta L que contiene al punto $A=(4,-3,3)$ y que es perpendicular al plano con ecuación $3x-3y+2z=12$. ¿Pertenece el punto $C=(2,-1,5)$ a la recta L? *Explique.*

16. Determine la ecuación del plano π que contiene a los puntos $B=(-1,-2,7)$, $D=(-3,0,3)$ y que es paralelo a la recta con ecuaciones simétricas $\dfrac{x+2}{2}=y=\dfrac{z-1}{-4}$.

17. Determine el punto de intersección de la recta que contiene los puntos $A=(-1,2,2)$ y $B=(3,-1,6)$ con el plano xz.

18. Dados los puntos $P=(1,1,-4)$, $Q=(2,-2,3)$ y $R=(-3,1,4)$, determine la ecuación normal del plano que los contiene.

19. Escriba la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas dadas por

$$x = 2t,\ \ y = 3,\ \ z = 1 + 4t,\ \ t \in IR$$

y contiene al punto de intersección de las rectas de ecuaciones

$$L_1 : \frac{x+1}{2} = y - 1 = -\frac{z}{2} \quad \text{y} \quad L_2 : x - 2 = \frac{y-5}{2} = -(z+3)$$

20. Escriba la ecuación del plano que contiene a la recta de ecuaciones paramétricas dadas por

$$x = -1 + 3t,\ \ y = 5 + 2t,\ \ z = 2 - t,\ \ t \in IR$$

y es perpendicular al plano de ecuación $2x - 4y + 2z = 9$.

21. Indique si las rectas se intersecan, son paralelas o son alabeadas (oblicuas); si se intersecan, indique cuál es el punto de intersección.

a) $N : \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{3} = z + 3$ y $R : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z}{2}$

b) $\ell_1 : x = 2 - 3t;\ \ y + 4 = t;\ \ z = t$
$\ell_2 : x + 1 = t;\ \ y = -3 - 4t;\ \ z - 1 = -6t$

c) $L : \begin{cases} x = 2 - 3t \\ y = 2t \\ z = 3 + t \end{cases}$ y $M : \dfrac{x-1}{2} = y - 3 = \dfrac{z}{-4}$

d) $L : \dfrac{x-2}{3} = \dfrac{y+2}{4} = \dfrac{z}{2}$ y $M : \dfrac{x+1}{4} = \dfrac{y}{3} = z + 3$

22. Encuentre la Ecuación del plano que contiene a la recta $(x, y, z) = (4, -11, 8) + t(5, 4, 2)$ y es paralelo al segmento que une los puntos $P = (3, -1, 5)$ y $Q = (-7, 4, 8)$

23. Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto $A = (4, 5, -3)$ y es paralelo al plano $3x - 2y + 5z = 4$

24. Considere las ecuaciones de las dos rectas ℓ_1 y ℓ_2

$$\ell_1:\ x = 2-3t;\quad y+4=t;\quad z=t$$
$$\ell_2:\ x+1=t;\quad y=-3-4t;\quad z-1=-6t$$

a) Determine si ambas rectas se intersecan. Cuál es el punto de intersección en caso de que ambas rectas se intersequen?
b) Cuál es la medida del ángulo que se determina entre las dos rectas?
c) Escriba una ecuación cartesiana para el plano que contiene a ambas rectas.
d) Escriba las ecuaciones simétricas de una tercera recta perpendicular a las dos rectas dadas, en su punto de intersección.

25. Encuentre las <u>ecuaciones paramétricas y ecuaciones simétricas</u> de la recta de intersección de los planos:

(1) $3x-4y+14z=7$ y $2x+3y-19z=-18$
(2) $2x-3y+5z=4$ y $-5x+6y-3z=-2$
(3) $-x+2y+z=0$ y $2x-y+2z=-8$

26. Halle la ecuación del plano que contiene los puntos $A=(4,3,-7)$, $B=(-3,5,6)$ y $C=(5,-4,3)$.

27. Encuentre una ecuación para el plano que contiene a las rectas L y M de ecuaciones

$$L:\begin{cases} x=2-3t \\ y=2t \\ z=3+t \end{cases} \qquad M:\frac{x-1}{2}=y-3=\frac{z}{-4}$$

28. Si la recta de ecuaciones paramétricas

$$\ell=\begin{cases} x=2+3t \\ y=-4t \\ z=5+t \end{cases}$$

interseca al plano que pasa por los puntos $P=(1,0,2)$, $Q=(3,-1,6)$ y $R=(5,2,4)$. Encuentre el ángulo que se forma entre la recta y plano.

29. Encuentre la <u>ecuación del plano</u> que contiene a los puntos $A=(3,-1,5)$, $B=(-7,4,8)$ y es paralelo a la recta $(x,y,z)=(4,-11,8)+t(5,4,2)$.

ESPACIOS Y SUBESPACIOS VECTORIALES

30. Considere el conjunto $IR^2 - \{(x,0)\}$ para el cual se define la operación $\oplus$ como

$$(x,y)\oplus(z,w)=(3+x+z,yw)$$

a) Demuestre que $\oplus$ es una operación conmutativa.
b) Calcule, si existe, el elemento neutro de la operación $\oplus$.
c) Determine, si existe el elemento inverso bajo la operación $\oplus$.
d) Determine, si existe, el elemento inverso de $(2,3)$.

31. En IR^2 se define una operación $*$ así:

$$(a,b)*(m,n)=(am+bn,b+n)$$

a) Determine si la operación $*$ es conmutativa.
b) Obtenga el elemento inverso aditivo de (a,b) sabiendo que el neutro de la operación $*$ es el vector $(1,0)$.

32. Considere el conjunto $V = IR^2$, para el cual se define una operación interna $\oplus$ como

$$(x,y)\oplus(z,w)=(2x,3w+y)$$

a) Calcule $(2,-1)\oplus(3,2)$
b) Demuestre que $\oplus$ es una operación conmutativa.
c) Calcule, si existe, el elemento neutro de la operación $\oplus$.
d) Determine, si existe el elemento inverso bajo la operación $\oplus$.
e) Determine, si existe, el elemento inverso de $\left(\frac{4}{9},-1\right)\oplus\left(-3,\frac{5}{2}\right)$.

33. Considere el conjunto $V = IR^2$, para el cual se define una operación interna $\oplus$ como

$$(x,y)\oplus(z,w)=(2x-z,y+3w)$$

a) Es conmutativa la operación?
b) Es asociativa la operación?

34. En IR^3 se define una operación cerrada $\oplus$ así:

$$(x,y,z)\oplus(a,b,c)=(x+a\,,\,y+b+2\,,\,2zc)$$

a) Calcule $(3,2,-2)\oplus(1,0,-1)$
b) Es conmutativa la operación?
c) Es asociativa la operación?
d) Demuestre que $\left(0\,,-2\,,\frac{1}{2}\right)$ es el elemento neutro de la operación $\oplus$
e) Calcule, si existe, el elemento inverso de un vector arbitrario (x,y,z) bajo la operación $\oplus$.

35. En IR^3 se define una operación cerrada $\oplus$ así:

$$(x,y,z)\oplus(m,n,p)=(x+2m\,,\,y-n+2,-zp)$$

a) Demuestre que $\left(0\,,-2\,,\frac{1}{2}\right)$ es el elemento neutro derecho de la operación $\oplus$
b) ¿Cuál es el elemento inverso derecho de un vector arbitrario (x,y,z) bajo la operación $\oplus$.

36. En el conjunto de las $M_{2\times 2}$ se define la operación $\oplus$ así:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\oplus\begin{bmatrix} m & n \\ p & q \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} am & b+n-2 \\ c+p & d+q+2dq \end{bmatrix}$$

a) Es conmutativa la operación?
b) Es asociativa la operación?
c) Encuentre la matriz (elemento) neutro de la operación $\oplus$
d) Encuentre la matriz inversa de la operación $\oplus$

37. En IR^2 se define una operación interna $\oplus$ así:

$$(x,y)\oplus(m,n)=(x+2m\,,\,y+n-4)$$

a) Es conmutativa la operación?
b) Es asociativa la operación?
c) Halle, si existe, el elemento neutro derecho de la operación $\oplus$
d) Calcule el elemento inverso derecho de cada vector bajo esta operación $\oplus$

38. Sea $U=\{A\in M\,(3,IR)\,/\,A\,es\,diagonal\}$. Muestre que U es subespacio vectorial de $M_{3\times 3}$.

39. Sea $S=\{(x,y,z)\in IR^3 / y=3x,\ z=-2x\}$. ¿Es S subespacio vectorial de IR^3 con la suma usual de vectores y la multiplicación usual de vector por escalar?¿Por qué?

40. Sea $S=\{(x,y,z)\in IR^3 / z=2x-y\}$. ¿Es S subespacio vectorial de IR^3 con la suma usual de vectores y la multiplicación usual de vector por escalar?

41. Sea $S=\{(x,y,z)\in IR^3 / x-2y-z=0\}$. ¿Es S subespacio vectorial de IR^3 con la suma usual de vectores y la multiplicación usual de vector por escalar?

42. Considere el conjunto $W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} / 2a+b=0 \ \wedge \ c+d=1\right\}$. Analice las propiedades que debería de cumplir W para ser subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$ bajo las operaciones usuales de suma de matrices y multiplicación escalar matricial.

43. Considere M, $M=\left\{\begin{bmatrix} a & b+c \\ -b+c & a \end{bmatrix} / a,b\in IR\right\}$, subconjunto de $M_{2\times 2}$. Determine si el conjunto M es subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$.

44. Muestre que si $A\in M\left(n,m,IR\right)$, entonces $S=\left\{x\in IR^m / Ax=0_n\right\}$ es un subespacio de IR^m.

45. Muestre que el conjunto H, $H=\left\{A=A^T / A\in M_{2\times 2}\right\}$ es un subespacio vectorial de $M_{2\times 2}$, bajo las operaciones usuales de suma de matrices y multiplicación por escalar definidas como se conocen.

46. Considere M, $M=\left\{p(x)=ax^2+bx+c / c=2ab\right\}$ subconjunto de los polinomios de grado menor o igual a 2.Determine si el conjunto M es subespacio vectorial de P_2.

47. Considere el conjunto $W=\left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \ / \ 2a+b=0 \ \wedge \ c+d=1\right\}$.Determine si W es subespacio vectorial del espacio vectorial $M_{2\times 2}$ bajo las operaciones usuales de suma de matrices y multiplicación escalar matricial.

48. Considere el conjunto $W, W \subset M_{2\times 2}$, $W = \left\{ \begin{bmatrix} a & d \\ c & b \end{bmatrix} ; a, b \in IR \wedge ab \leq 0\,, c + d = 1 \right\}$.
Determine si W es subespacio vectorial del espacio vectorial $M_{2\times 2}$ bajo las operaciones usuales de suma de matrices y multiplicación escalar matricial.

COMBINACION LINEAL, DEPENDENCIA E INDEPENDENCIA LINEAL

49. Escriba si es posible el vector $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}$ como combinación lineal de los vectores $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \right\}$

50. Escriba, si es posible, el vector $\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$ como combinación lineal del conjunto de vectores $\left\{ \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 9 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} \right\}$

51. Sean $u = (4, 2{,}6)$, $l = (2, 5{,}1)$ y $m = (1{,}-1{,}0)$ vectores de IR^3.¿Es $(5{,}-2{,}4)$ combinación lineal de los vectores u, l, m?

52. Sea $S = \{(2{,}2{,}1), (1{,}3{,}1), (3{,}7{,}2)\}$. Escriba el vector $(4{,}3{,}1)$ como combinación lineal de los vectores de S.

53. Investigue si el conjunto N, $N_{3\times 2}$ es linealmente dependiente o independiente. Justifique su respuesta de acuerdo con la definición.

$$N = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 3 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 3 \\ -7 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 & 1 \\ 1 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 1 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \right\}$$

54. Determine si el conjunto $P = \{(3{,}1{,}-1), (2{,}2{,}1)\}$ es linealmente independiente o linealmente dependiente. Explique.

55. Sean $u=(4,2,6)$, $l=(2,5,1)$ y $m=(1,-1,0)$ vectores de IR^3. ¿Es $\{u,l,m\}$ un conjunto linealmente independiente? Justifique

56. Considere el conjunto $G=\{1-3x+2x^2, 1+x+4x^2, 1-7x\}$ que es subconjunto de P_2.

a) Utilice la definición para determinar si G genera o no a P_2.
b) Utilice la definición para determinar si G es linealmente dependiente o linealmente independiente.

BASES Y CONJUNTO GENERADOR

57. Sean $u=(4,2,6)$, $l=(2,5,1)$ y $m=(1,-1,0)$ vectores de IR^3. ¿Es $\{u,l,m\}$ un conjunto generador de IR^3? Justifique

58. Sea $K=\{(1,2,-1),(-2,1,-3),(6,2,4)\}$, ¿Es K un conjunto generador de IR^3?. Justifique su respuesta de acuerdo con la definición.

59. Sea $S=\{(2,2,1),(1,3,1),(3,7,2)\}$. Determine si S es un conjunto generador de IR^3

60. Determine si el conjunto $W=\{(1,-1),(2,3)\}$ es base de IR^2. Explique.

61. Sean $u=(4,2,6)$, $l=(2,5,1)$ y $m=(1,-1,0)$ vectores de IR^3. ¿Es $\{u,l,m\}$ una base de IR^3?

62. Sea $S=\{(1,3,1),(2,7,3),(1,2,2)\}$

a) Demuestre que S es un conjunto generador de IR^3
b) Utilice el resultado en (a) y escriba el vector $(4,5,6)$ como combinación lineal de los vectores de S.
c) Es S una base de IR^3

63. Encuentre una base y la dimensión para el subespacio solución del sistema homogéneo dado por

$$\begin{cases} x-3y+z=0 \\ -2x+2y-3z=0 \\ 4x-8y+5z=0 \end{cases}$$

64. Considere el conjunto $G=\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&0\\1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\-1&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2&1\\0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\0&-1\end{pmatrix}\right\}$ que es subconjunto de IM_{2X2} (matrices de tamaño 2×2).

a) Utilice la definición para determinar si G genera o no a $M_{2\times 2}$

b) Utilice la definición para determinar si G es linealmente dependiente o linealmente independiente.

65. Encuentre una base y la dimensión para el subespacio de IR^3 dado por

$$H=\left\{(x,y,z)/\,2x-3y-4z=0\right\}$$

66. Considere el conjunto $G=\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\-2\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ que es subconjunto de IR^4 .

a) Utilice la definición para determinar si G genera o no a IR^4

b) Utilice la definición para determinar si G es linealmente dependiente o linealmente independiente.

67. Considere el conjunto $M=\left\{x^2+3,4x,-x+5\right\}$ que es subconjunto de P_2 :

a) Determine si M es linealmente dependiente o linealmente independiente.

b) Determine, usando la definición, si M genera a P_2 .

c) ¿Es M base de P_2 ? _Justifique_.

68. Considere el conjunto, S, $S=\{A_1,A_2,A_3,A_4\}$ que es subconjunto $M_{2\times 2}$. Con

$$A_1=\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix}\qquad A_2=\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix}\qquad A_3=\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}\qquad A_4=\begin{bmatrix}0&1\\0&1\end{bmatrix}$$

a) Determine si M es linealmente dependiente o linealmente independiente.

b) Determine, usando la definición, si S genera a $M_{2\times 2}$.

c) ¿Es S base de $M_{2\times 2}$? _Justifique_.