

Tema 6: Diagonalización de matrices

La intención en este tema es, dada una matriz cuadrada, ver si existe otra matriz semejante a ella que sea diagonal. Recordemos del Tema 5 que dos matrices cuadradas de orden n , A y D , se dice que son semejantes cuando existe otra matriz cuadrada de orden n , P , invertible, tal que

$$A = PDP^{-1}$$

Recordemos también que el concepto de semejanza va íntimamente ligado al de endomorfismos pues dos matrices son semejantes si y sólo si van asociadas a un mismo endomorfismo. Así si las matrices anteriores A y D son semejantes existirá un endomorfismo f de \mathbb{R}^n y bases B y B' del espacio tales que

$$A = M_{B \rightarrow B}(f) \quad \text{y} \quad D = M_{B' \rightarrow B'}(f)$$

Por tanto el problema de la diagonalización puede enfocarse desde el punto de vista de endomorfismos: dado un endomorfismo f de \mathbb{R}^n se trata de ver si existe una base del espacio respecto de la cual la matriz asociada sea diagonal. Realmente ambos problemas son equivalentes, pues en primer lugar dado

$$f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$$

podemos tomar como matriz

$$A = M_{B \rightarrow B}(f)$$

la matriz asociada a cierta base B de \mathbb{R}^n , y viceversa, dada A podemos tomar f de modo que se cumpla la misma relación anterior

$$A = M_{B \rightarrow B}(f)$$

(ver **Tema 5: Aplicaciones lineales**). En tal caso, puede comprobarse que una matriz es semejante a A si y sólo si va asociada a f respecto de alguna base de \mathbb{R}^n .

1. Valores propios y vectores propios

Definición: Sea A una matriz cuadrada de orden n , λ un escalar del cuerpo y v un vector-columna no nulo del espacio vectorial \mathbb{R}^n . Si se cumple que

$$Av = \lambda v$$

entonces se dirá que λ es un **valor propio** (o autovalor) de A y que v es un **vector propio** (o autovector) de A . Es más se dirá que λ es un valor propio de A asociado al vector propio v , y que v es un vector propio de A asociado al valor propio λ .

Sea

$$f : V \rightarrow V$$

un endomorfismo de un espacio vectorial V , λ un escalar del cuerpo y v un vector no nulo del espacio vectorial. Si se cumple que

$$f(v) = \lambda v$$

entonces se dirá que λ es un **valor propio** (o autovalor) de f y que v es un **vector propio** (o autovector) de f . Es más se dirá que λ es un valor propio de f asociado al vector propio v , y que v es un vector propio de f asociado al valor propio λ .

En las siguientes propiedades estaremos refiriéndonos a valores o vectores propios indistintamente para matrices o endomorfismos.

Observaciones:

1. Observemos que mientras un vector propio v debe ser no nulo (el vector 0 no se considera vector propio) un valor propio λ sí puede ser nulo (el escalar $\lambda = 0$ sí puede ser valor propio). Así que habrá algunas matrices (y endomorfismos) que sí tengan el valor propio 0.
2. Todo vector propio v va asociado a un único valor propio λ (se dirá que λ es el valor propio asociado al vector propio v).
3. Dado un vector propio v asociado al valor propio λ y un escalar no nulo α se tiene que el vector αv es también un vector propio y además va asociado al mismo valor propio λ . En general se cumple que dados vectores propios v_1, v_2, \dots, v_k asociados al mismo valor propio resulta que toda CL no nula de ellos $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \dots + \alpha_k v_k$ es también un vector propio con el mismo valor propio asociado λ .

Ejemplos:

1. Comprobar que $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix}$$

y determinar cuál es su valor propio asociado.

Como

$$Av = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \end{pmatrix} = 5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 5v$$

se tiene que v es un vector propio de A asociado al valor propio 5.

2. Sea f el endomorfismo de \mathbb{R}^3 cuya expresión analítica es

$$f(x, y, z) = (x + 2y - z, 3y, 4x - y - 4z)$$

Comprobar que $v = (1, 0, 1)$ es un vector propio del endomorfismo y hallar el valor propio correspondiente.

Como

$$f(v) = f(1, 0, 1) = (0, 0, 0) = 0 \cdot (1, 0, 1) = 0 \cdot v$$

se tiene que el vector $(1, 0, 1)$ es un vector propio de f asociado al valor propio 0.

Observación: Sea f un endomorfismo de \mathbb{R}^n y A la **matriz asociada a f respecto de la base canónica C** de \mathbb{R}^n . Entonces **los valores propios (y los vectores propios) de f y de A son los mismos**. Esto se debe a que (como ya se sabe) para todo vector-columna $v \in \mathbb{R}^n$ se cumple que

$$f(v) = Av$$

Si tenemos una matriz A de orden $n \times n$ recordemos que se llamaba **núcleo de A** al siguiente conjunto de vectores

$$\ker A = \{v \in \mathbb{R}^n : Av = 0\}$$

Éste es el conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones lineales homogéneo cuya matriz de coeficientes es precisamente A (este sistema tiene n ecuaciones y n incógnitas). Entonces $\ker A$ es un subespacio de \mathbb{R}^n cuyas ecuaciones implícitas tienen por matriz de coeficientes A . Además, por el Teorema de Rouché-Fröbenius se tiene que

$$\dim \ker A = n - r(A)$$

Nota: Recordemos que si f es un endomorfismo de \mathbb{R}^n tal que A es la matriz asociada a f respecto de la base canónica, entonces

$$\ker A = \ker f$$

2. Polinomio característico

Sea λ un escalar del cuerpo y A una matriz cuadrada de orden n e I la matriz identidad de ese tamaño. Entonces λ es un valor propio de A si y sólo si existe un vector no nulo $v \in \mathbb{R}^n$ tal que $Av = \lambda v$. Ahora bien la igualdad anterior equivale a $Av - \lambda v = 0$ y a $Av - \lambda Iv = 0$, y ésta a su vez a $(A - \lambda I)v = 0$, lo cual significa que $v \in \ker(A - \lambda I)$. Así λ es un valor propio de A si y sólo si $\ker(A - \lambda I) \neq 0$. Y como $\dim \ker(A - \lambda I) = n - r(A - \lambda I)$, lo anterior equivale a que $r(A - \lambda I) < n$. Finalmente esta última condición puede traducirse en que $|A - \lambda I| = 0$. En definitiva obtenemos que

$$\lambda \in \mathbb{R} \text{ es un valor propio de la matriz } A \text{ si y sólo si } |A - \lambda I| = 0$$

Si A es una matriz cuadrada de orden n se llama **polinomio característico** de A al polinomio

$$\phi_A(\lambda) = |A - \lambda I|$$

(en el que denotamos por λ la variable). En consecuencia **este polinomio es de grado n y sus raíces son precisamente los valores propios de la matriz**.

Sea λ un valor propio de una matriz A . Se llama **multiplicidad** de λ como valor propio de la matriz a la multiplicidad que tiene como raíz del polinomio característico. Se denotará $m(\lambda)$. Como la suma de las multiplicidades de todas las raíces de un polinomio es como mucho su grado, **la suma de las multiplicidades de los valores propios de la matriz es como mucho el grado del polinomio característico, o sea, el tamaño de la matriz**.

Ejemplo: Hallar el polinomio característico y los valores propios de las siguientes matrices:

$$A_1 = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 3 & 7 \end{pmatrix} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 4 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{pmatrix} \quad A_3 = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$A_4 = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad A_5 = \begin{pmatrix} 4i & 0 & 0 \\ 4 & -7 & 0 \\ 8 & 0 & 6-2i \end{pmatrix}$$

Para la primera se tiene que el polinomio característico vale

$$\begin{aligned} \phi_{A_1}(\lambda) &= |A_1 - \lambda I| = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 5 \\ 3 & 7-\lambda \end{vmatrix} = (5-\lambda)(7-\lambda) - 15 = \\ &= 35 - 12\lambda + \lambda^2 - 15 = 20 - 12\lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

Sus raíces valen $\frac{12 \pm \sqrt{144-80}}{2} = \frac{12 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{12 \pm 8}{2} = 2, 10$. Así que los valores propios de A_1 son 2 y 10.

Para la segunda se tiene que el polinomio característico vale

$$\begin{aligned} \phi_{A_2}(\lambda) &= |A_2 - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 & 1 \\ 4 & 2-\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 6-\lambda \end{vmatrix} = \\ &= (6-\lambda) \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 4 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (6-\lambda)(2-\lambda)(2-\lambda) \end{aligned}$$

De aquí obtenemos que sus raíces (y por tanto los valores propios de A_2) son

$$6, 2, 2$$

o dicho de otro modo

$$2 \text{ con multiplicidad } 2 \text{ y } 6 \text{ con multiplicidad } 1$$

Para la tercera se tiene que el polinomio característico vale

$$\begin{aligned} \phi_{A_3}(\lambda) &= |A_3 - \lambda I| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -2 \\ 2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(3-\lambda) + 4 = \\ &= 9 - 6\lambda + \lambda^2 + 4 = 13 - 6\lambda + \lambda^2 \end{aligned}$$

Sus raíces (o lo que es lo mismo, los valores propios de la matriz A_3) valen

$$\frac{6 \pm \sqrt{36-52}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{-16}}{2} = \frac{6 \pm 4i}{2} = 3 \pm 2i$$

Para la cuarta se tiene que el polinomio característico vale

$$\phi_{A_4}(\lambda) = |A_4 - \lambda I| = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 0 & 2 \\ 0 & -1-\lambda & 3 \\ 0 & 0 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (-1-\lambda)(-1-\lambda)(-1-\lambda)$$

Ahora sus raíces (o lo que es lo mismo, los valores propios de la matriz A_4) son, de modo inmediato

$$-1, -1, -1$$

Para la quinta se tiene que el polinomio característico vale

$$\phi_{A_5}(\lambda) = |A_5 - \lambda I| = \begin{vmatrix} 4i-\lambda & 0 & 0 \\ 4 & -7-\lambda & 0 \\ 8 & 0 & 6-2i-\lambda \end{vmatrix} = (4i-\lambda)(-7-\lambda)(6-2i-\lambda)$$

Ahora sus raíces (o lo que es lo mismo, los valores propios de la matriz A_5) son, de modo inmediato

$$4i, -7, 6 - 2i$$

Observación: Razonando como con las matrices A_4 y A_5 del ejemplo (así podrá hacerse en la matriz C del ejercicio que viene a continuación) puede verse que **los valores propios de una matriz triangular (superior o inferior) son los elementos de la diagonal principal.**

Observación: Llegado este punto es conveniente que el alumno repase la parte dedicada a la obtención de raíces de polinomios. Dicha parte estaba en un apéndice del Tema 1, pero la hemos vuelto a incluir en un apéndice de presente tema.

Ejemplo: Hallar el polinomio característico y los valores propios de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$
$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

Solución:

$$\phi_A(\lambda) = \lambda^2 - 2\lambda - 35 \longrightarrow \text{los valores propios de } A \text{ son } -5, 7$$

$$\phi_B(\lambda) = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 12\lambda \longrightarrow \text{los valores propios de } B \text{ son } 0, 3, 4$$

$$\phi_C(\lambda) = (3 - \lambda)^2(2 - \lambda) \longrightarrow \text{los valores propios de } C \text{ son } 2, 3, 3$$

$$\phi_E(\lambda) = (\lambda - 9)(5 - \lambda)^2 \longrightarrow \text{los valores propios de } E \text{ son } 9, 5, 5$$

Propiedad: Dos matrices semejantes tienen el mismo polinomio característico.

Del resultado anterior deducimos que **matrices semejantes tienen los mismos valores propios y las mismas multiplicidades.** Además, tiene sentido definir **el polinomio característico de un endomorfismo** como el de cualquiera de sus matrices asociadas, ya que todas ellas son semejantes.

Observación: En la propiedad anterior cuando hablamos de matrices asociadas a un endomorfismo, en el contexto de este tema, se entiende que son matrices en las que se toma la misma base repetida. Es decir, del tipo $M_{B \rightarrow B}(f)$ para cierta base B .

Ejemplo: Calcular los valores propios del endomorfismo de \mathbb{R}^3 cuya expresión analítica es:

$$f(x, y, z) = (-2x + 3y + z, -2y + 6z, 4z)$$

Basta calcular los valores propios de cualquiera de sus matrices asociadas. Tomaremos por sencillez la matriz asociada de f respecto de la base canónica. Ésta es

$$\begin{pmatrix} -2 & 3 & 1 \\ 0 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

y como hemos dicho con anterioridad, los valores propios de una matriz triangular (superior o inferior) son los elementos de la diagonal principal, en este caso

$$-2, -2, 4$$

3. Subespacios propios

Dado un valor propio λ de una matriz cuadrada A , llamaremos **subespacio propio** de la matriz A asociado al valor propio λ a

$$N_\lambda = \ker(A - \lambda I) = \{v \in K^n | (A - \lambda I)v = 0\} = \{v \in K^n | Av = \lambda v\}$$

Cuando vimos que las raíces del polinomio característico son los valores propios de una matriz A deducimos que un vector no nulo $v \in K^n$ era un vector propio de A asociado al valor propio λ si y sólo si $v \in \ker(A - \lambda I)$. De este modo, **el subespacio propio de la matriz A asociado al valor propio λ está formado por todos los vectores propios de la matriz A asociados al valor propio λ , además del vector 0.**

Propiedades: Para cada valor propio λ de una matriz cuadrada A de orden n se tiene que:

1. $\ker(A - \lambda I) \neq 0$ (es decir, $\dim(\ker(A - \lambda I)) \geq 1$).
2. $\dim[\ker(A - \lambda I)] \leq m(\lambda)$.
3. $\dim[\ker(A - \lambda I)] = n - r(A - \lambda I)$.

Propiedad: Vectores propios asociados a distintos valores propios son LI; o dicho de otro modo, **la suma de los subespacios propios es directa**. Esto se traduce en que la unión de bases de cada subespacio propio resulta ser una base de la suma de los subespacios propios.

Ejemplo: Hallar los subespacios propios de la matrices A , B , C y E del Ejemplo 2, determinando una base de cada uno de ellos.

Solución: Para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 9 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios eran -5 y 7 se tiene que

$$\begin{aligned} \ker(A + 5I) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -5 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \right\} \\ \text{es decir } \ker(A + 5I) &\equiv \begin{cases} x + 9y = -5x \\ 4x + y = -5y \end{cases} \equiv \begin{cases} 6x + 9y = 0 \\ 4x + 6y = 0 \end{cases} \\ \text{y } \ker(A - 7I) &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : (A - 7I) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0 \right\} \equiv \begin{cases} -6x + 9y = 0 \\ 4x - 6y = 0 \end{cases} \end{aligned}$$

Para la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios eran 0, 3 y 4 se tiene que

$$\begin{aligned}\ker B &\equiv \begin{cases} 2x + y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \\ 3x + 2y + 3z = 0 \end{cases} \\ \ker(B - 3I) &\equiv \begin{cases} -x + y = 0 \\ 4x - y = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \\ \ker(B - 4I) &\equiv \begin{cases} -2x + y = 0 \\ 4x - 2y = 0 \\ 3x + 2y - z = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Para la matriz

$$C = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios eran 3, 3 y 2 se tiene que

$$\begin{aligned}\ker(C - 3I) &\equiv \begin{cases} -x = 0 \\ x = 0 \\ 3x + 2y = 0 \end{cases} \\ \ker(C - 2I) &\equiv \begin{cases} 0 = 0 \\ x + y = 0 \\ 3x + 2y + z = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

Para la matriz

$$E = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 0 \\ 3 & 8 & 0 \\ 2 & 2 & 5 \end{pmatrix}$$

cuyos valores propios eran 5, 5 y 9 se tiene que

$$\begin{aligned}\ker(E - 5I) &\equiv \begin{cases} x + y = 0 \\ 3x + 3y = 0 \\ 2x + 2y = 0 \end{cases} \\ \ker(E - 9I) &\equiv \begin{cases} -3x + y = 0 \\ 3x - y = 0 \\ 2x + 2y - 4z = 0 \end{cases}\end{aligned}$$

4. Matrices diagonalizables

Una matriz cuadrada se dice que es **diagonalizable** si es semejante a una matriz diagonal. Un endomorfismo de \mathbb{R}^n se dice **diagonalizable** si la matriz asociada respecto de alguna base del espacio es una matriz diagonal. En ambos casos la matriz diagonal se llamará **matriz diagonal asociada**, y su **diagonal principal estará formada por los valores propios de la matriz A** (o del endomorfismo f), como veremos a continuación. Esta matriz no tiene por qué ser única, pues

depende del orden en el que elijamos los valores propios (será única si elegimos un orden concreto para los escalares de la diagonal, por ejemplo, el orden natural de los números). Además, como ya hemos visto al principio del tema, dados un endomorfismo f de \mathbb{R}^n y A la matriz asociada a f respecto de la base canónica de \mathbb{R}^n , se tiene que f es diagonalizable si y sólo si A es diagonalizable.

Condición 1: Un endomorfismo (o una matriz) es diagonalizable si y sólo si existe una base del espacio vectorial (que para el caso de la matriz será \mathbb{R}^n) formada por vectores propios del endomorfismo (o de la matriz).

Cuando tengamos una matriz A diagonalizable tendremos

$$A = PDP^{-1}$$

donde D es una matriz diagonal y P es invertible. A D la llamaremos **matriz diagonal semejante a A** y a P y a su inversa **matrices de paso o matrices cambio de base**. Entonces si tomamos el endomorfismo f de \mathbb{R}^n tal que

$$M_{C \rightarrow C}(f) = A$$

(con C la base canónica de \mathbb{R}^n), para la descomposición $A = PDP^{-1}$ pueden tomarse

$$D = M_{B \rightarrow B}(f) \text{ y } P = M_{B \rightarrow C}$$

con B una base de \mathbb{R}^n formada por vectores propios de A . Ahora bien, ¿cómo podemos hallar esta base de vectores propios? Veamos el siguiente resultado.

Condición 2: Una matriz cuadrada A de orden n con coeficientes sobre el cuerpo \mathbb{R} es diagonalizable sobre el cuerpo si y sólo si \mathbb{R}^n es la suma (directa) de todos los subespacios propios de la matriz si y sólo si la suma de las dimensiones de dichos subespacios propios es n .

Como consecuencia de este resultado obtenemos, como ya adelantamos con anterioridad, que la base de vectores propios se puede hallar uniendo bases de cada uno de los subespacios propios de A .

Condición 3: Sea A una matriz cuadrada de orden n con coeficientes sobre el cuerpo \mathbb{R} . Entonces A es diagonalizable sobre el cuerpo si y sólo si se verifican las siguientes condiciones:

1. El polinomio característico ϕ_A tiene sólo raíces reales. Esto equivale a que la suma de las multiplicidades de todos los valores propios reales de la matriz es n .
2. Para cada valor propio λ de la matriz A se tiene que

$$\dim[\ker(A - \lambda I)] = m(\lambda)$$

Es una sencilla observación que si λ es un valor propio de una matriz cuadrada A tal que $m(\lambda) = 1$, entonces $\dim[\ker(A - \lambda I)] = 1$. Esto es consecuencia de que

$$1 \leq \dim[\ker(A - \lambda I)] \leq m(\lambda) = 1$$

Deducimos de esto el siguiente criterio, el cual nos proporciona una situación en la que una matriz es diagonalizable; esta situación no tiene por qué darse en todos los casos de matrices diagonalizables, pero cuando se da es más sencillo observar que la matriz lo es.

Condición 4: Sea A una matriz cuadrada de orden n con coeficientes sobre el cuerpo \mathbb{R} . Si A posee n valores propios de multiplicidad 1 en \mathbb{R} , entonces A es diagonalizable sobre \mathbb{R} .

Ejercicio: Determinar si son diagonalizables o no las matrices que se dan a continuación, y en caso afirmativo, obtener una matriz diagonal asociada y una matriz de paso, que permita descomponer la matriz inicial:

1. Las matrices A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 del Ejemplo 2.

2. Las matrices A, B, C, E del Ejemplo 2.

3.

$$\begin{aligned} F &= \begin{pmatrix} 0 & -1 & 8 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & G &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \\ H &= \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} & J &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 8 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ L &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 2 & -4 \end{pmatrix} & M &= \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 4 \\ 3 & 3 & 7 \end{pmatrix} \\ Q &= \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & 2 \end{pmatrix} & R &= \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Solución: 1) Sobre \mathbb{R} sólo es diagonalizable A_1 . Sobre \mathbb{C} también son diagonalizables A_3 y A_5 .

2) Sobre \mathbb{R} son diagonalizables A, B y E .

3) Valores propios:

De F son $0, 0, 3$; de G es $4, \pm i$; de H son $0, 1, 3$; de J son $1, 1, 1$; de L son $2, 2, -4$; de M son $1, 1, 10$; de Q son $0, 0, 2, 2$; de R son $-1, -1, -1, 5$.

Son diagonalizables sobre \mathbb{R} las matrices H, L, M , y R . Sobre \mathbb{C} es diagonalizable además G . <<el que conviene hacer en clase es el L, con la suma de las dimensiones (porque es de un valor propio doble), y el H, en el que son todos simples, se resuelve con la condición automática>>>> Vamos a hacer el desarrollo completo con las matrices H y L .

Empezando por la primera, el polinomio característico es

$$\begin{aligned} \phi_H(\lambda) &= |H - \lambda I| = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & -2 & 0 \\ 0 & -\lambda & 5 \\ 0 & 0 & 3 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (1 - \lambda)(-\lambda)(3 - \lambda) \end{aligned}$$

de donde deducimos que los valores propios de H son

$$1, 0, 3$$

(con multiplicidad uno todos). Entonces según uno de nuestros criterios la matriz es diagonalizable, pues es de orden 3 y tiene 3 valores propios distintos. Una matriz diagonal asociada sería

$$D_1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Halleamos una base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de la matriz. Para ello tenemos que hallar una base de cada uno de los subespacios propios:

En primer lugar tenemos que

$$H - 0I = H = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\text{luego } \ker H \equiv \begin{cases} x - 2y = 0 \\ -5z = 0 \\ 3z = 0 \end{cases}$$

y una base de este espacio vectorial es

$$\{(2, 1, 0)\}$$

Después tenemos que

$$H - 1I = H - I = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{luego } \ker(H - I) \equiv \begin{cases} -2y = 0 \\ -y - 5z = 0 \\ 2z = 0 \end{cases}$$

y una base de este espacio vectorial es

$$\{(1, 0, 0)\}$$

En último lugar tenemos que

$$H - 3I = \begin{pmatrix} -2 & -2 & 0 \\ 0 & -3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{luego } \ker(H - 3I) \equiv \begin{cases} -2x - 2y = 0 \\ -3y - 5z = 0 \\ 0 = 0 \end{cases}$$

y una base de este espacio vectorial es

$$\{(-5, 5, -3)\}$$

Así tenemos la siguiente base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de H

$$B_1 = \{(2, 1, 0), (1, 0, 0), (-5, 5, -3)\}$$

Entonces denotando por C a la base canónica de \mathbb{R}^3 se tiene la siguiente descomposición

$$H = P_1 D_1 P_1^{-1}$$

donde

$$P_1 = M_{B_1 \rightarrow C} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -5 \\ 1 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$$

Ahora vamos con la matriz L . Su polinomio característico es

$$\phi_L(\lambda) = |L - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & 2 - \lambda & 0 \\ 4 & 2 & -4 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)^2(-4 - \lambda)$$

de donde deducimos que los valores propios de L son

$$-4, 2, 2$$

Para comprobar que la matriz es diagonalizable sobre \mathbb{R} habría que ver en primer lugar que hay tantos valores propios reales (se cuenta cada uno repetido según su multiplicidad, es decir el -4 una vez y el 2 dos veces) como tamaño tiene la matriz, 3 , lo cual es claro que se cumple. Ahora habría que comprobar que cada valor propio tiene igual multiplicidad que dimensión su subespacio propio. Como el valor propio -4 tiene multiplicidad 1 para él ya sabemos que la coincidencia se da. Vayamos a realizar la comprobación sobre el valor propio doble: el 2 . Como la matriz es

$$L - 2I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & -6 \end{pmatrix}$$

es claro que

$$\dim[\ker(L - 2I)] = 3 - r(L - 2I) = 3 - 1 = 2 = m(2)$$

por lo que ya está comprobada la coincidencia para todos los valores propios. Una matriz diagonal asociada sería

$$D_2 = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Hallems una base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de la matriz. Para ello tenemos que hallar una base de cada uno de los subespacios propios:

En primer lugar tenemos que

$$L - (-4)I = L + 4I = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 4 & 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{luego } \ker(L + 4I) \equiv \begin{cases} 6x = 0 \\ 6y = 0 \\ 4x + 2y = 0 \end{cases}$$

y una base de este espacio vectorial es

$$\{(0, 0, 1)\}$$

A partir de la matriz $L - 2I$ calculada anteriormente tenemos que

$$\text{luego } \ker(L - 2I) \equiv \begin{cases} 0 = 0 \\ 0 = 0 \\ 4x + 2y - 6z = 0 \end{cases}$$

y una base de este espacio vectorial es (despejando $y = -2x + 3z$)

$$\{(1, -2, 0), (0, 3, 1)\}$$

Así tenemos la siguiente base de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de L

$$B_2 = \{(0, 0, 1), (1, -2, 0), (0, 3, 1)\}$$

Entonces denotando por C a la base canónica de \mathbb{R}^3 se tiene la siguiente descomposición

$$L = P_2 D_2 P_2^{-1}$$

donde

$$P_2 = M_{B_2 \rightarrow C} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Aplicaciones de la diagonalización

5.1. Cálculo de potencias de matrices

Supongamos que pretendemos calcular diferentes potencias de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

Entonces se tiene que

$$A^2 = \begin{pmatrix} -5 & 6 \\ -9 & 10 \end{pmatrix}, A^3 = \begin{pmatrix} -19 & 18 \\ -27 & 26 \end{pmatrix}, A^4 = \begin{pmatrix} -29 & 30 \\ -45 & 46 \end{pmatrix}$$

Ahora bien, ¿qué ocurre si pretendemos calcular potencias altas de la matriz? ¿O bien obtener de forma genérica la expresión de A^k ? La diagonalización puede ser empleada para resolver esta cuestión. Veamos cómo:

Si A es una matriz diagonalizable cuya descomposición es

$$A = P D P^{-1}$$

(donde D es la matriz diagonal asociada y P la matriz de paso) entonces se cumple para cada índice natural k que

$$A^k = P D^k P^{-1}$$

Además si D es una matriz diagonal con elementos

$$\{\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n\}$$

en la diagonal principal, para cada $k = 1, 2, 3, \dots$ se tiene que D^k es también una matriz diagonal, y los elementos de la diagonal principal son

$$\{\lambda_1^k, \lambda_2^k, \dots, \lambda_n^k\}$$

Ejemplo: En el ejemplo anterior para la matriz

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 6 \\ -9 & 8 \end{pmatrix}$$

hallemos A^{100} .

Empecemos calculando su polinomio característico

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} -7 - \lambda & 6 \\ -9 & 8 - \lambda \end{vmatrix} =$$

$$= (-7 - \lambda)(8 - \lambda) + 54 = \lambda^2 - \lambda - 2 = (\lambda + 1)(\lambda - 2)$$

luego los valores propios de A son $\lambda = -1, \lambda = 2$. Entonces es diagonalizable (dos valores propios distintos para una matriz de orden 2) y una matriz diagonal asociada es

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Los subespacios propios son

$$\ker(A + I) \equiv \begin{cases} -6x + 6y = 0 \\ -9x + 9y = 0 \end{cases}, \text{ con base } \{(1, 1)\}$$

y

$$\ker(A - 2I) \equiv \begin{cases} -9x + 6y = 0 \\ -9x + 6y = 0 \end{cases}, \text{ con base } \{(2, 3)\}.$$

De este modo a partir de la base

$$B = \{(1, 1), (2, 3)\}$$

de \mathbb{R}^2 formada por vectores propios, puede obtenerse la matriz de paso

$$P = M_{B \rightarrow C} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

que nos permite tener la descomposición

$$A = PDP^{-1}$$

En este caso

$$P^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$\begin{aligned}
 A^{100} &= PD^{100}P^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)^{100} & 0 \\ 0 & 2^{100} \end{pmatrix} P^{-1} = \\
 &= \begin{pmatrix} 1 & 2^{101} \\ 1 & 3 \cdot 2^{100} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 - 2^{101} & -2 + 2^{101} \\ 3 - 3 \cdot 2^{100} & -2 + 3 \cdot 2^{100} \end{pmatrix}
 \end{aligned}$$

5.2. Diagonalización de matrices simétricas reales

Tiene especial interés la diagonalización de matrices simétricas. Supongamos que tenemos una matriz cuadrada real A de orden n que es simétrica (recordemos que esto significa que $A = A^t$). Vamos a considerar el espacio vectorial euclídeo \mathbb{R}^n , en el que se considera el producto escalar euclídeo. Entonces:

1. A es siempre diagonalizable sobre \mathbb{R} , en particular sus valores propios son todos reales (no hay valores propios imaginarios).
2. Vectores propios de la matriz asociados a distintos valores propios son ortogonales.
3. Puede encontrarse una base ortogonal (e incluso ortonormal) de \mathbb{R}^n formada por vectores propios de la matriz.

Recordemos que una matriz cuadrada A se dice que es ortogonal cuando es invertible y $A^{-1} = A^t$. En referencia a esto se tiene que una matriz cuadrada es ortogonal si y sólo si sus vectores-fila (o sus vectores-columna) forman una base ortonormal de espacio \mathbb{R}^n , para el producto escalar euclídeo, y que la matriz cambio de base entre dos bases ortonormales (según el producto escalar euclídeo) es siempre una matriz ortogonal.

Sea A una matriz cuadrada real simétrica. Según lo anterior A es diagonalizable y podemos encontrar una base ortonormal B de \mathbb{R}^n (respecto al producto escalar euclídeo) formada por vectores propios de la matriz (esto se hará **escogiendo en cada subespacio propio una base ortonormal y uniendo dichas bases**). Entonces en la descomposición $A = PDP^{-1}$ de A , donde $P = M_{B \rightarrow C}$, siendo C la base canónica, se tiene que P es una matriz ortogonal, ya que es la matriz cambio de base entre dos bases ortonormales, B y C , con lo que $P^{-1} = P^t$. En esto consiste lo que denominaremos la **diagonalización ortogonal** de la matriz real simétrica A , en hacer la diagonalización mediante una matriz de paso ortogonal.

Ejemplo: Diagonalizar ortogonalmente la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -4 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

hallando la matriz diagonal asociada, los subespacios propios, una base ortonormal de vectores propios, y las matrices de paso que permiten la descomposición de la matriz inicial.

Como

$$\begin{aligned} |A - \lambda I| &= \begin{vmatrix} 3 - \lambda & 0 & 0 \\ 0 & -4 - \lambda & 2 \\ 0 & 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda) \begin{vmatrix} -4 - \lambda & 2 \\ 2 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \\ &= (3 - \lambda)[(-4 - \lambda)(-1 - \lambda) - 4] = (3 - \lambda)(\lambda^2 + 5\lambda) = (3 - \lambda)\lambda(\lambda + 5) \end{aligned}$$

los valores propios son $\lambda = 3, 0, -5$. La matriz diagonal asociada es

$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -5 \end{pmatrix}$$

Halleemos una base ortonormal de cada subespacio propio.

Para el valor propio $\lambda = 3$ se tiene que

$$\ker(A - 3I) \equiv \left\{ \begin{array}{l} 0 = 0 \\ -7y + 2z = 0 \\ 2y - 4z = 0 \end{array} \right\} = \langle (1, 0, 0) \rangle$$

Para el valor propio $\lambda = 0$ se tiene que

$$\ker A \equiv \left\{ \begin{array}{l} 3x = 0 \\ -4y + 2z = 0 \\ 2y - z = 0 \end{array} \right\} = \langle (0, 1, 2) \rangle$$

Para el valor propio $\lambda = -5$ se tiene que

$$\ker(A + 5I) \equiv \left\{ \begin{array}{l} 8x = 0 \\ y + 2z = 0 \\ 2y + 4z = 0 \end{array} \right\} = \langle (0, -2, 1) \rangle$$

Luego las bases ortonormales de los subespacios propios son:

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{(1, 0, 0)}{\|(1, 0, 0)\|} \right\} &= \{(1, 0, 0)\} \\ \left\{ \frac{(0, 1, 2)}{\|(0, 1, 2)\|} \right\} &= \left\{ \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right) \right\} \\ \left\{ \frac{(0, -2, 1)}{\|(0, -2, 1)\|} \right\} &= \left\{ \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\} \end{aligned}$$

Entonces una base ortonormal de \mathbb{R}^3 formada por vectores propios de la matriz es

$$\left\{ (1, 0, 0), \left(0, \frac{1}{\sqrt{5}}, \frac{2}{\sqrt{5}}\right), \left(0, -\frac{2}{\sqrt{5}}, \frac{1}{\sqrt{5}}\right) \right\}$$

por tanto las matriz de paso son

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & -\frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix} \text{ y } P^{-1} = P^t = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{\sqrt{5}} & \frac{2}{\sqrt{5}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{5}} & \frac{1}{\sqrt{5}} \end{pmatrix}$$