2013 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 c,k 为常数，且 $c\neq 0$，则（　）

（A）$k=2,c=-\dfrac{1}{2}$

（B）$k=2,c=\dfrac{1}{2}$

（C）$k=3,c=-\dfrac{1}{3}$

（D）$k=3,c=\dfrac{1}{3}$

（2）曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（　）

（A）$x-y+z=-2$

（B）$x+y+z=2$

（C）$x-2y+z=-3$

（D）$x-y-z=0$

（3）设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,\ldots)$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则 $S(-\dfrac{9}{4})=$（　）

（A）$\dfrac{3}{4}$

（B）$\dfrac{1}{4}$

（C）$-\dfrac{1}{4}$

（D）$-\dfrac{3}{4}$

（4）设 $l_1:x^2+y^2=1,l_2:x^2+y^2=2,l_3:x^2+2y^2=2,l_4:2x^2+y^2=2$ 为四条逆时针的平面曲线，记

$I_i=\oint_{l_i}(y+\dfrac{y^3}{6})dx+(2x-\dfrac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$，则 $MAX(I_i)=$（　）

（A） I_1

（B） I_2

（C） I_3

（D） I_3

（5）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB=C$,则B可逆，则

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价
（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价
（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价
（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

（6）矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$相似的充分必要条件为

（A） $\mathrm{a}=0, \mathrm{b}=2$

（B） $a=0, b$为任意常数

（C） $a=2, b=0$

（D） $a=2, b$为任意常数

（7）设 X_1，X_2，X_3 是随机变量，且 $X_1 \sim N(0,1)$，$X_2 \sim N(0,2^2)$ ，$X_3 \sim N(5,3^2)$，

$P_j=P\{-2 \le X_j \le 2\}\ (j=1,2,3)$，则（　　）

（A） $P_1>P_2>P_3$

（B） $P_2>P_1>P_3$

（C） $P_3>P_1>P_2$

（D） $P_1>P_3>P_2$

（8）设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$，给定 $a(0<a<0.5)$，常数 c 满足 $P\{X>c\}=a$，则 $P\{Y>c^2\}=$（　）

（A） α
（B） $1-\alpha$
（C） 2α
（D） $1-2\alpha$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty}n(f(\frac{1}{n})-1)=$ ________.

(10) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程的通解为 $y=$ ________.

(11) 设 $\begin{cases}x=\sin t\\ y=t\sin t+\cos t\end{cases}$（$t$ 为参数），则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$ ________.

(12) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$ ________.

(13) 设 $A=(a_{ij})$ 是三阶非零矩阵，$|A|$ 为 A 的行列式，A_{ij} 为 a_{ij} 的代数余子式，若 $a_{ij}+A_{ij}=0(i,j=1,2,3)$，则 $|A|=$ ____

(14) 设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布，a 为常数且大于零，则 $P\{Y\le a+1\mid Y>a\}=$ ________。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$，其中 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(t+1)}{t}dt$

(16)（本题满分 10 分）

设数列 $\{a_n\}$ 满足条件：$a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\ge 2)$，$S(x)$ 是幂级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ 的和函数，

(I) 证明：$S''(x)-S(x)=0$，

(II) 求 $S(x)$ 的表达式.

(17)（本题满分 10 分）

求函数 $f(x,y)=(y+\dfrac{x^3}{3})e^{x+y}$ 的极值.

(18)（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1$，证明：

(I) 存在 $\xi\in(0,1)$，使得 $f'(\xi)=1$

(II) 存在 $\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

（19）（本题满分 10 分）

设直线 L 过 $A(1,0,0),B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 Z 轴旋转一周得到曲面 Σ，Σ 与平面 $z=0,z=2$ 所围成的立体为 Ω，

（I） 求曲面 Σ 的方程

（II） 求 Ω 的形心坐标.

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix},B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C。

（21）（本题满分 11 分）

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$，记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix},\beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$。

（I）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha^T\alpha+\beta^T\beta$；

（II）若 α,β 正交且均为单位向量，证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型 $2y_1^2+y_2^2$。

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x^2 & 0<x<3\\ 0 & \text{其他}\end{cases}$，令随机变量 $Y=\begin{cases}2 & x\le 1\\ x & 1<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$，

（I）求 Y 的分布函数

（II）求概率 $P\{X\le Y\}$

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & \text{其它.}\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\ldots X_N$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 θ 的矩估计量；

（2）求 θ 的最大似然估计量.