2005年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共6小题,每小题4分,满分24分.把答案填在题中横线上)

(1)曲线 $y=\dfrac{x^2}{2x+1}$ 的斜渐近线方程为 ______.

(2)微分方程 $xy'+2y=x\ln x$ 满足 $y(1)=-\dfrac{1}{9}$ 的解为______.

(3)设函数 $u(x,y,z)=1+\dfrac{x^2}{6}+\dfrac{y^2}{12}+\dfrac{z^2}{18}$,单位向量 $\vec{n}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\{1,1,1\}$,则 $\left.\dfrac{\partial u}{\partial n}\right|_{(1,2,3)}$=.______.

(4)设 Ω 是由锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 与半球面 $z=\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 围成的空间区域,Σ 是 Ω 的整个边界的外侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+ydzdx+zdxdy=$______.

(5)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 均为3维列向量,记矩阵

$$\mathbf{A}=(\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3),\ \mathbf{B}=(\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2+4\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_1+3\boldsymbol{\alpha}_2+9\boldsymbol{\alpha}_3),$$

如果 $|\mathbf{A}|=1$,那么 $|\mathbf{B}|=$____.

(6)从数1,2,3,4中任取一个数,记为 X, 再从 $1,2,\cdots,X$ 中任取一个数,记为 Y, 则 $P\{Y=2\}$=______.

二、选择题(本题共8小题,每小题4分,满分32分.每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7)设函数 $f(x)=\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{1+|x|^{3n}}$,则 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内

(A)处处可导　　(B)恰有一个不可导点

(C)恰有两个不可导点　　(D)至少有三个不可导点

(8)设 $F(x)$ 是连续函数 $f(x)$ 的一个原函数,"$M\Leftrightarrow N$"表示"M 的充分必要条件是 N",则必有

(A) $F(x)$ 是偶函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是奇函数　　(B) $F(x)$ 是奇函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是偶函数

(C) $F(x)$ 是周期函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是周期函数　　(D) $F(x)$ 是单调函数 $\Leftrightarrow f(x)$ 是单调函数

(9)设函数 $u(x,y)=\varphi(x+y)+\varphi(x-y)+\int_{x-y}^{x+y}\psi(t)dt$, 其中函数 φ 具有二阶导数,ψ 具有一阶导数,则必有

(A) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = -\dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(B) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(C) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial y^2}$

(D) $\dfrac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}$

(10)设有三元方程 $xy - z\ln y + \mathrm{e}^{xz} = 1$,根据隐函数存在定理,存在点 $(0,1,1)$ 的一个邻域,在此邻域内该方程

(A)只能确定一个具有连续偏导数的隐函数 $z = z(x, y)$

(B)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $z = z(x, y)$

(C)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $y = y(x, z)$ 和 $z = z(x, y)$

(D)可确定两个具有连续偏导数的隐函数 $x = x(y, z)$ 和 $y = y(x, z)$

(11)设 λ_1, λ_2 是矩阵 $\mathbf{A}$ 的两个不同的特征值,对应的特征向量分别为 $\boldsymbol{\alpha}_1, \boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\boldsymbol{\alpha}_1$, $\mathbf{A}(\boldsymbol{\alpha}_1 + \boldsymbol{\alpha}_2)$ 线性无关的充分必要条件是

(A) $\lambda_1 \neq 0$

(B) $\lambda_2 \neq 0$

(C) $\lambda_1 = 0$

(D) $\lambda_2 = 0$

(12)设 $\mathbf{A}$ 为 $n(n \geq 2)$ 阶可逆矩阵,交换 $\mathbf{A}$ 的第 1 行与第 2 行得矩阵 $\mathbf{B}$.$\mathbf{A}^*$, $\mathbf{B}^*$ 分别为 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 的伴随矩阵,则

(A)交换 $\mathbf{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $\mathbf{B}^*$

(B)交换 $\mathbf{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $\mathbf{B}^*$

(C)交换 $\mathbf{A}^*$ 的第 1 列与第 2 列得 $-\mathbf{B}^*$

(D)交换 $\mathbf{A}^*$ 的第 1 行与第 2 行得 $-\mathbf{B}^*$

(13)设二维随机变量 (X, Y) 的概率分布为

X \ Y	0	1
0	0.4	a
1	b	0.1

已知随机事件 $\{X = 0\}$ 与 $\{X + Y = 1\}$ 相互独立,则

(A) $a = 0.2, b = 0.3$

(B) $a = 0.4, b = 0.1$

(C) $a=0.3, b=0.2$

(D) $a=0.1, b=0.4$

(14)设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n\geq 2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值, S^2 为样本方差,则

(A) $n\overline{X} \sim N(0,1)$

(B) $nS^2 \sim \chi^2(n)$

(C) $\dfrac{(n-1)\overline{X}}{S} \sim t(n-1)$

(D) $\dfrac{(n-1)X_1^2}{\sum\limits_{i=2}^{n} X_i^2} \sim F(1,n-1)$

三 、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 11 分)

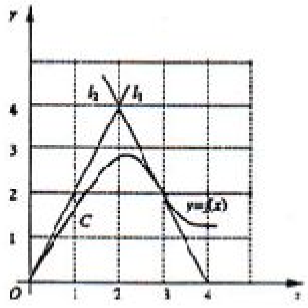
设 $D=\{(x,y)\big| x^2+y^2\leq\sqrt{2}, x\geq 0, y\geq 0\}$, $[1+x^2+y^2]$ 表示不超过 $1+x^2+y^2$ 的最大整数. 计算二重积分 $\iint\limits_D xy[1+x^2+y^2]dxdy.$

(16)(本题满分 12 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(1+\dfrac{1}{n(2n-1)})x^{2n}$ 的收敛区间与和函数 $f(x)$.

(17)(本题满分 11 分)

如图,曲线 C 的方程为 $y=f(x)$,点 $(3,2)$ 是它的一个拐点,直线 l_1 与 l_2 分别是曲线 C 在点 $(0,0)$ 与 $(3,2)$ 处的切线,其交点为 $(2,4)$.设函数 $f(x)$ 具有三阶连续导数,计算定积分 $\int_0^3 (x^2+x) f'''(x)dx.$



(18)(本题满分 12 分)

已知函数 $f(x)$ 在$[0,1]$上连续,在$(0,1)$内可导,且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明:

(1)存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$.

(2)存在两个不同的点 $\eta,\zeta \in (0,1)$,使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

(19)(本题满分 12 分)

设函数 $\varphi(y)$ 具有连续导数,在围绕原点的任意分段光滑简单闭曲线 L 上,曲线积分 $\oint_L \frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$ 的值恒为同一常数.

(1)证明:对右半平面 $x>0$ 内的任意分段光滑简单闭曲线 C, 有 $\oint_C \frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}=0$.

(2)求函数 $\varphi(y)$ 的表达式.

(20)(本题满分 9 分)

已知二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=(1-a)x_1^2+(1-a)x_2^2+2x_3^2+2(1+a)x_1x_2$ 的秩为 2.

(1)求 a 的值;

(2)求正交变换 $x=\mathbf{Q}y$,把 $f(x_1,x_2,x_3)$ 化成标准形.

(3)求方程 $f(x_1,x_2,x_3)$=0 的解.

(21)(本题满分 9 分)

(22)已知 3 阶矩阵 $\mathbf{A}$ 的第一行是 $(a,b,c),a,b,c$ 不全为零,矩阵 $\mathbf{B}=\begin{bmatrix}1&2&3\\2&4&6\\3&6&k\end{bmatrix}$($k$ 为常数),且 $\mathbf{AB}=\mathbf{O}$,求线性方程组 $\mathbf{A}x=0$ 的通解.

(22)(本题满分 9 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}1 & 0<x<1,0<y<2x\\0 & 其它\end{cases}$$

求:(1) (X,Y) 的边缘概率密度 $f_X(x),f_Y(y)$.

(2) $Z=2X-Y$ 的概率密度 $f_Z(z)$.

(23)(本题满分 9 分)

设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n>2)$ 为来自总体 $N(0,1)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 为样本均值,记 $Y_i = X_i - \overline{X}, i=1,2,\cdots,n.$

求:(1) Y_i 的方差 $DY_i, i=1,2,\cdots,n$.

(2) Y_1 与 Y_n 的协方差 $\mathrm{Cov}(Y_1, Y_n)$.

2006 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、填空题(本题共 6 小题,每小题 4 分,满分 24 分.把答案填在题中横线上)

(1) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x\ln(1+x)}{1-\cos x}=$________.

(2)微分方程 $y'=\dfrac{y(1-x)}{x}$ 的通解是________.

(3)设 Σ 是锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ $(0\le z\le 1)$的下侧,则 $\iint\limits_{\Sigma} xdydz+2ydzdx+3(z-1)dxdy=$________.

(4)点 $(2,1,0)$ 到平面 $3x+4y+5z=0$ 的距离 $z=$________.

(5)设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2 & 1\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, $\mathbf{E}$ 为 2 阶单位矩阵,矩阵 $\mathbf{B}$ 满足 $\mathbf{BA}=\mathbf{B}+2\mathbf{E}$,则 $|\mathbf{B}|=$________.

(6)设随机变量 X 与 Y 相互独立,且均服从区间 $[0,3]$ 上的均匀分布,则 $P\left\{\max\{X,Y\}\le 1\right\}=$________.

二、选择题(本题共 8 小题,每小题 4 分,满分 32 分. 每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内)

(7)设函数 $y=f(x)$ 具有二阶导数,且 $f'(x)>0,\ \ f''(x)>0$, Δx 为自变量 x 在 x_0 处的增量, Δy 与 dy 分别为 $f(x)$ 在点 x_0 处对应的增量与微分,若 $\Delta x>0$,则

(A) $0<dx<\Delta y$　　(B) $0<\Delta y<dy$

(C) $\Delta y<dy<0$　　(D) $dy<\Delta y<0$

(8)设 $f(x,y)$ 为连续函数,则 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta\int_0^1 f(r\cos\theta,r\sin\theta)rdr$ 等于

(A) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_x^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$　　(B) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dx\int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x,y)dy$

(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_y^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$　　(C) $\int_0^{\frac{\sqrt{2}}{2}}dy\int_0^{\sqrt{1-y^2}} f(x,y)dx$

(9)若级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛,则级数

(A) $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|$ 收敛　　(B) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 收敛

(C) $\sum_{n=1}^{\infty}a_n a_{n+1}$ 收敛　　(D) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n+a_{n+1}}{2}$ 收敛

(10)设 $f(x,y)$ 与 $\varphi(x,y)$ 均为可微函数,且 $\varphi_y^1(x,y)\neq 0$.已知 (x_0,y_0) 是 $f(x,y)$ 在约束条件 $\varphi(x,y)=0$ 下的一个极值点,下列选项正确的是

(A)若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)=0$　　(B)若 $f_x'(x_0,y_0)=0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

(C)若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f_y'(x_0,y_0)=0$　　(D)若 $f_x'(x_0,y_0)\neq 0$,则 $f_y'(x_0,y_0)\neq 0$

(11)设 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,均为 n 维列向量,$\mathbf{A}$ 是 $m\times n$ 矩阵,下列选项正确的是

(A)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,线性相关,则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_s$,线性相关

(B)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,线性相关,则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_s$,线性无关

(C)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,线性无关,则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_s$,线性相关

(D)若 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\boldsymbol{\alpha}_s$,线性无关,则 $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2,\cdots,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_s$,线性无关.

(12)设 $\mathbf{A}$ 为 3 阶矩阵,将 $\mathbf{A}$ 的第 2 行加到第 1 行得 $\mathbf{B}$,再将 $\mathbf{B}$ 的第 1 列的-1 倍加到第 2 列得 $\mathbf{C}$,记 $\mathbf{P}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$,则

(A) $\mathbf{C}=\mathbf{P}^{-1}\mathbf{A}\mathbf{P}$　　(B) $\mathbf{C}=\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{-1}$

(C) $\mathbf{C}=\mathbf{P}^{T}\mathbf{A}\mathbf{P}$　　(D) $\mathbf{C}=\mathbf{P}\mathbf{A}\mathbf{P}^{T}$

(13)设 A,B 为随机事件,且 $P(B)>0,\ P(A|B)=1$,则必有

(A) $P(A\cup B)>P(A)$　　(B) $P(A\cup B)>P(B)$

(C) $P(A\cup B)=P(A)$　　(D) $P(A\cup B)=P(B)$

(14)设随机变量 X 服从正态分布 $N(\mu_1,\sigma_1^2)$,Y 服从正态分布 $N(\mu_2,\sigma_2^2)$,

且 $P\{|X-\mu_1|<1\}>P\{|Y-\mu_2|<1\}$, 则

(A) $\sigma_1<\sigma_2$　　(B) $\sigma_1>\sigma_2$

(C) $\mu_1 < \mu_2$

(D) $\mu_1 > \mu_2$

三、解答题(本题共 9 小题,满分 94 分.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(15)(本题满分 10 分)

设区域 D=$\left\{(x,y)\middle| x^2+y^2\le 1, x\ge 0\right\}$,计算二重积分 $I=\iint\limits_D \frac{1+xy}{1+x^2+y^2}dxdy$.

(16)(本题满分 12 分)

设数列$\{x_n\}$满足$0<x_1<\pi, x_{\pi+1}=\sin x_n\ (n=1,2,...)$.

求:(1)证明$\lim\limits_{x\to\infty} x_n$存在,并求之.

(2)计算$\lim\limits_{x\to\infty}\left(\frac{x_{n+1}}{x_n}\right)^{\frac{1}{x_n^2}}$.

(17)(本题满分 12 分)

将函数 $f\left(x\right)=\dfrac{x}{2+x-x^2}$ 展开成 x 的幂级数.

(18)(本题满分 12 分)

设函数 $f\left(u\right)$ 在 $\left(0,+\infty\right)$ 内具有二阶导数,且 $z=f\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$ 满足等式 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\dfrac{\partial^2 z}{\partial y^2}=0$.

(1)验证 $f''\left(u\right)+\dfrac{f'\left(u\right)}{u}=0$.

(2)若 $f\left(1\right)=0,\ f'\left(1\right)=1,$ 求函数 $f(u)$ 的表达式.

(19)(本题满分 12 分)

设在上半平面 $D=\left\{\left(x,y\right)\middle|y>0\right\}$ 内,数 $f\left(x,y\right)$ 是有连续偏导数,且对任意的 $t>0$ 都有 $f\left(tx,ty\right)=t^2f\left(x,y\right)$.

证明: 对 L 内的任意分段光滑的有向简单闭曲线 L,都有 $\oint_L yf(x,y)dx-xf(x,y)dy=0$.

(20)(本题满分 9 分)

已知非齐次线性方程组

$$\begin{cases} x_1+x_2+x_3+x_4=-1 \\ 4x_1+3x_2+5x_3-x_4=-1 \\ ax_1+x_2+3x_3-bx_4=1 \end{cases}$$

有 3 个线性无关的解,

(1)证明方程组系数矩阵 $\mathbf{A}$ 的秩 $r\left(\mathbf{A}\right)=2$.

(2)求 a,b 的值及方程组的通解.

(21)(本题满分 9 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的各行元素之和均为 3,向量 $\boldsymbol{\alpha}_1=\left(-1,2,-1\right)^T$, $\boldsymbol{\alpha}_2=\left(0,-1,1\right)^T$ 是线性方程组 $\mathbf{A}x=0$ 的两个解.

(1)求 $\mathbf{A}$ 的特征值与特征向量.

(2)求正交矩阵 $\mathbf{Q}$ 和对角矩阵 $\mathbf{A}$,使得 $\mathbf{Q}^T\mathbf{A}\mathbf{Q}=\mathbf{A}$.

(22)(本题满分 9 分)

随机变量 x 的概率密度为 $f_x\left(x\right)=\begin{cases}\frac{1}{2},-1<x<0\\ \frac{1}{4},0\le x<2\\ 0,其它\end{cases}$ 令 $y=x^2,F\left(x,y\right)$ 为二维随机变量 (X,Y) 的分布函数.

(1)求 Y 的概率密度 $f_Y\left(y\right)$.

(2) $F\left(-\frac{1}{2},4\right)$.

(23)(本题满分 9 分)

设总体 X 的概率密度为 $F(X,0)=\begin{cases}\theta & 0<x<1\\ 1-\theta & 1\le x<2\\ 0 & 其它\end{cases}$,其中 θ 是未知参数 $(0<\theta<1)$, $X_1,X_2...,X_{\mathrm{n}}$ 为来自总体 X 的简单随机样本,记 N 为样本值 $x_1,x_2...,x_n$ 中小于 1 的个数,求 θ 的最大似然估计.

2007年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(本题共10小题,每小题4分,满分40分,在每小题给的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后括号内)

(1)当 $x \to 0^+$ 时,与 $\sqrt{x}$ 等价的无穷小量是

(A) $1-\mathrm{e}^{\sqrt{x}}$　　　(B) $\ln\frac{1+x}{1-\sqrt{x}}$

(C) $\sqrt{1+\sqrt{x}}-1$　　　(D) $1-\cos\sqrt{x}$

(2)曲线 $y=\frac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$,渐近线的条数为

(A)0　　　(B)1

(C)2　　　(D)3

(3)如图,连续函数 $y=f(x)$ 在区间 $[-3,-2],[2,3]$ 上的图形分别是直径为1的上、下半圆周,在区间 $[-2,0],[0,2]$ 的图形分别是直径为2的上、下半圆周,设 $F(x)=\int_0^x f(t)dt$.则下列结论正确的是

(A) $F(3)=-\frac{3}{4}F(-2)$　　　(B) $F(3)=\frac{5}{4}F(2)$

(C) $F(3)=\frac{3}{4}F(2)$　　　(D) $F(3)=-\frac{5}{4}F(-2)$

(4)设函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,下列命题错误的是

(A)若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$　　　(B)若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)+f(-x)}{x}$ 存在,则 $f(0)=0$

(C)若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)=0$　　　(D)若 $\lim\limits_{x\to 0}\frac{f(x)-f(-x)}{x}$ 存在,则 $f'(0)=0$

(5)设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上具有二阶导数,且 $f''(x)>0$, 令 $u_n=f(n)=1,2,\cdots,n,$ 则下列结论正确的是

(A)若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛　　　(B)若 $u_1>u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散

(C)若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必收敛　　　(D)若 $u_1<u_2$,则 $\{u_n\}$ 必发散

(6)设曲线 $L: f(x,y)=1$ ($f(x,y)$ 具有一阶连续偏导数),过第2象限内的点 M 和第Ⅳ象限内的点 N,Γ 为 L 上从

点 M 到 N 的一段弧,则下列小于零的是

(A) $\int_{\Gamma}(x,y)dx$ (B) $\int_{\Gamma} f(x,y)dy$

(C) $\int_{\Gamma} f(x,y)ds$ (D) $\int_{\Gamma} f'_x(x,y)dx+f'_y(x,y)dy$

(7)设向量组 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 线性无关,则下列向量组线形相关的是

(A) $\boldsymbol{\alpha}_1-\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-\boldsymbol{\alpha}_1$ (B) $\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$

(C) $\boldsymbol{\alpha}_1-2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2-2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3-2\boldsymbol{\alpha}_1$ (D) $\boldsymbol{\alpha}_1+2\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+2\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+2\boldsymbol{\alpha}_1$

(8)设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix},\mathbf{B}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}$,则 $\mathbf{A}$ 与 $\mathbf{B}$

(A)合同,且相似 (B)合同,但不相似

(C)不合同,但相似 (D)既不合同,也不相似

(9)某人向同一目标独立重复射击,每次射击命中目标的概率为 $p\left(0<p<1\right)$,则此人第 4 次射击恰好第 2 次命中目标的概率为

(A) $3p(1-p)^2$ (B) $6p(1-p)^2$

(C) $3p^2(1-p)^2$ (D) $6p^2(1-p)^2$

(10)设随即变量 (X,Y) 服从二维正态分布,且 X 与 Y 不相关, $f_X(x)$, $f_Y(y)$ 分别表示 X,Y 的概率密度,则在 $Y=y$ 的条件下, X 的条件概率密度 $f_{X|Y}(x|y)$ 为

(A) $f_X(x)$ (B) $f_Y(y)$

(C) $f_X(x)\ f_Y(y)$ (D) $\dfrac{f_X(x)}{f_Y(y)}$

二、填空题(11－16 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上)

(11) $\int_1^2\frac{1}{x^3}e^{\frac{1}{x}}dx=$_______.

(12)设 $f(u,v)$ 为二元可微函数, $z=f(x^y,y^x)$,则 $\frac{\partial z}{\partial x}=$______.

(13)二阶常系数非齐次线性方程 $y''-4y'+3y=2e^{2x}$ 的通解为 $y=$___________.

(14)设曲面$\sum:|x|+|y|+|z|=1$,则$\oiint\limits_{\Sigma}(x+|y|)ds=$_____________.

(15)设矩阵$\mathbf{A}=\begin{pmatrix}0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\\0&0&0&0\end{pmatrix}$,则$\mathbf{A}^3$的秩为________.

(16)在区间$(0,1)$中随机地取两个数,则这两个数之差的绝对值小于$\frac{1}{2}$的概率为________.

三、解答题(17－24 小题,共 86 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤)

(17)(本题满分 11 分)

求函数 $f(x,y)=x^2+2y^2-x^2y^2$在区域$D=\{(x,y)\,|\,x^2+y^2\le 4, y\ge 0\}$上的最大值和最小值.

(18)(本题满分 10 分)

计算曲面积分$I=\iint\limits_{\Sigma}xzdydz+2zydzdx+3xydxdy$, 其中 $\sum$为曲面$z=1-x^2-\frac{y^2}{4}(0\le z\le 1)$的上侧.

(19)(本题满分 11 分)

设函数 $f(x), g(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 内具有二阶导数且存在相等的最大值, $f(a)=g(a), f(b)=g(b)$,证明:存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f''(\xi)=g''(\xi)$.

(20)(本题满分 10 分)

设幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内收敛,其和函数 $y(x)$ 满足

$$y''-2xy'-4y=0, y(0)=0, y'(0)=1.$$

(1)证明: $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n, n=1,2,\cdots.$

(2)求 $y(x)$ 的表达式.

(21)(本题满分 11 分)

设线性方程组

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_1 + 2x_2 + ax_3 = 0 \\ x_1 + 4x_2 + a^2 x_3 = 0 \end{cases},$$

与方程

$$x_1 + 2x_2 + x_3 = a - 1,$$

有公共解,求 a 的值及所有公共解.

(22)(本题满分 11 分)

设 3 阶实对称矩阵 $\mathbf{A}$ 的特征向量值 $\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=-2.\boldsymbol{\alpha}_1=(1,-1,1)^T$ 是 $\mathbf{A}$ 的属于特征值 λ_1 的一个特征向量,记 $\mathbf{B}=\mathbf{A}^5-4\mathbf{A}^3+\mathbf{E}$, 其中 $\mathbf{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(1)验证 $\boldsymbol{\alpha}_1$ 是矩阵 $\mathbf{B}$ 的特征向量,并求 $\mathbf{B}$ 的全部特征值与特征向量.

(2)求矩阵 $\mathbf{B}$.

(23)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 (X,Y) 的概率密度为

$$f(x,y)=\begin{cases}2-x-y,0<x<1,0<y<1\\ 0,其他\end{cases}$$

(1)求 $P\{X>2Y\}$.

(2)求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

(24)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为

$$f(x;\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{2\theta},0<x<\theta\\ \dfrac{1}{2(1-\theta)},\theta\le x<1\\ 0,\text{其他}\end{cases}$$

$X_1,X_2\cdots,X_n$ 是来自总体 x 的简单随机样本, $\overline{X}$ 是样本均值

(1)求参数 θ 的矩估计量 $\hat{\theta}$.

(2)判断 $4\overline{X}^2$ 是否为 θ^2 的无偏估计量,并说明理由.

2008年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(1-8小题,每小题4分,共32分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)设函数 $f(x)=\int_0^{x^2}\ln(2+t)dt$ 则 $f'(x)$ 的零点个数

(A)0 (B)1

(C)2 (D)3

(2)函数 $f(x,y)=\arctan\frac{x}{y}$ 在点 $(0,1)$ 处的梯度等于

(A) $\boldsymbol{i}$ (B)- $\boldsymbol{i}$

(C) $\boldsymbol{j}$ (D) $-\boldsymbol{j}$

(3)在下列微分方程中,以 $y=C_1e^x+C_2\cos 2x+C_3\sin 2x$ (C_1,C_2,C_3 为任意常数)为通解的是

(A) $y'''+y''-4y'-4y=0$ (B) $y'''+y''+4y'+4y=0$

(C) $y'''-y''-4y'+4y=0$ (D) $y'''-y''+4y'-4y=0$

(4)设函数 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内单调有界, $\{x_n\}$ 为数列,下列命题正确的是

(A)若 $\{x_n\}$ 收敛,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛 (B)若 $\{x_n\}$ 单调,则 $\{f(x_n)\}$ 收敛

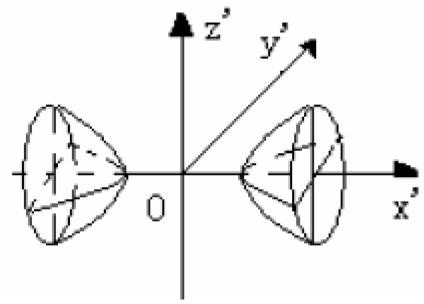
(C)若 $\{f(x_n)\}$ 收敛,则 $\{x_n\}$ 收敛 (D)若 $\{f(x_n)\}$ 单调,则 $\{x_n\}$ 收敛

(5)设 $\mathbf{A}$ 为 n 阶非零矩阵, $\mathbf{E}$ 为 n 阶单位矩阵. 若 $\mathbf{A}^3=0$,则

(A) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 不可逆, $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 不可逆 (B) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 不可逆, $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 可逆

(C) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆, $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 可逆 (D) $\mathbf{E}-\mathbf{A}$ 可逆, $\mathbf{E}+\mathbf{A}$ 不可逆

(6)设 $\mathbf{A}$ 为3阶实对称矩阵,如果二次曲面方程 $(x,y,z)\mathbf{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=1$ 在正交变换下的标准方程的图形如图,则 A 的正特征值个数为



(A)0

(B)1

(C)2

(D)3

(7)设随机变量 X,Y 独立同分布且 X 分布函数为 $F(x)$,则 $Z=\max\{X,Y\}$ 分布函数为

(A) $F^2(x)$

(B) $F(x)F(y)$

(C) $1-[1-F(x)]^2$

(D) $[1-F(x)][1-F(y)]$

(8)设随机变量 $X\sim N(0,1)$, $Y\sim N(1,4)$ 且相关系数 $\rho_{XY}=1$,则

(A) $P\{Y=-2X-1\}=1$

(B) $P\{Y=2X-1\}=1$

(C) $P\{Y=-2X+1\}=1$

(D) $P\{Y=2X+1\}=1$

二、填空题(9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9)微分方程 $xy'+y=0$ 满足条件 $y(1)=1$ 的解是 $y=$ _________.

(10)曲线 $\sin(xy)+\ln(y-x)=x$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程为_________.

(11)已知幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x+2)^n$ 在 $x=0$ 处收敛,在 $x=-4$ 处发散,则幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-3)^n$ 的收敛域为_________.

(12)设曲面 Σ 是 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 的上侧,则 $\iint\limits_{\Sigma}xydydz+xdzdx+x^2dxdy=$ _________.

(13)设 $\mathbf{A}$ 为 2 阶矩阵, $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2$ 为线性无关的 2 维列向量, $\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_1=0,\mathbf{A}\boldsymbol{\alpha}_2=2\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2$,则 $\mathbf{A}$ 的非零特征值为_________.

(14)设随机变量 X 服从参数为 1 的泊松分布,则 $P\{X=EX^2\}=$ _________.

三、解答题(15－23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)求极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{[\sin x-\sin(\sin x)]\sin x}{x^4}$.

(16)(本题满分 10 分)

计算曲线积分$\int_L \sin 2xdx+2\left(x^2-1\right)ydy$,其中$L$是曲线$y=\sin x$上从点$\left(0,0\right)$到点$\left(\pi,0\right)$的一段.

(17)(本题满分 10 分)

已知曲线$C:\begin{cases}x^2+y^2-2z^2=0\\x+y+3z=5\end{cases}$,求曲线$C$距离$XOY$面最远的点和最近的点.

(18)(本题满分 10 分)

设 $f\left(x\right)$ 是连续函数,

(1)利用定义证明函数 $F\left(x\right)=\int_0^x f\left(t\right)dt$ 可导,且 $F'\left(x\right)=f\left(x\right)$.

(2)当 $f\left(x\right)$ 是以 2 为周期的周期函数时,证明函数 $G\left(x\right)=2\int_0^x f(t)dt-x\int_0^2 f(t)dt$ 也是以 2 为周期的周期函数.

(19)(本题满分 10 分)

$f\left(x\right)=1-x^2(0\le x\le \pi)$,用余弦级数展开,并求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\left(-1\right)^{n-1}}{n^2}$ 的和.

(20)(本题满分 11 分)

$\mathbf{A}=\boldsymbol{\alpha}\boldsymbol{\alpha}^T+\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\beta}^T$, $\boldsymbol{\alpha}^T$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置, $\boldsymbol{\beta}^T$ 为 $\boldsymbol{\beta}$ 的转置.证明:

(1) $r(\mathbf{A})\le 2$.

(2)若 $\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\beta}$ 线性相关,则 $r(\mathbf{A})<2$.

(21)(本题满分 11 分)

设矩阵 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix} 2a & 1 & & \\ a^2 & 2a & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ & & a^2 & 2a \end{pmatrix}_{n\times n}$,现矩阵 $\mathbf{A}$ 满足方程 $\mathbf{AX}=\mathbf{B}$,其中 $\mathbf{X}=\left(x_1,\cdots,x_n\right)^T$, $\mathbf{B}=\left(1,0,\cdots,0\right)$,

(1)求证 $\left|\mathbf{A}\right|=\left(n+1\right)a^n$.

(2) a 为何值,方程组有唯一解,求 x_1 .

(3) a 为何值,方程组有无穷多解,求通解.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 与 Y 相互独立，X 的概率分布为 $P\left\{X=i\right\}=\frac{1}{3}\left(i=-1,0,1\right)$，$Y$ 的概率密度为 $f_Y\left(y\right)=\begin{cases}1 & 0\le y\le 1\\ 0 & 其它\end{cases}$,记 $Z=X+Y$,

(1)求 $P\left\{Z\le\frac{1}{2}\middle|X=0\right\}$.

(2)求 Z 的概率密度.

(23)(本题满分 11 分)

设 $X_1,X_2,\cdots,X_n$ 是总体为 $N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本.

记 $\overline{X}=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}X_i$, $S^2=\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i-\overline{X})^2$, $T=\overline{X}^2-\frac{1}{n}S^2$

(1)证明 T 是 μ^2 的无偏估计量.

(2)当 $\mu=0,\sigma=1$ 时 ,求 DT .

2009 年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

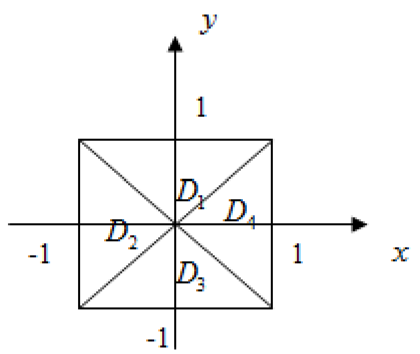
一、选择题(1-8 小题,每小题 4 分,共 32 分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)当 $x \to 0$ 时, $f(x) = x - \sin ax$ 与 $g(x) = x^2 \ln(1-bx)$ 等价无穷小,则

(A) $a=1, b=-\frac{1}{6}$ (B) $a=1, b=\frac{1}{6}$

(C) $a=-1, b=-\frac{1}{6}$ (D) $a=-1, b=\frac{1}{6}$

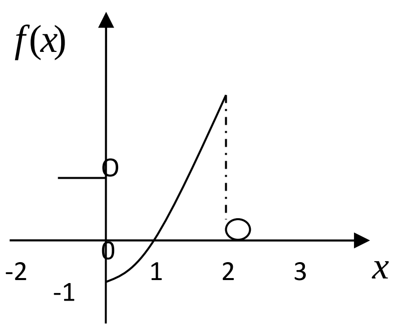
(2)如图,正方形 $\{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$ 被其对角线划分为四个区域 $D_k(k=1,2,3,4)$, $I_k = \iint\limits_{D_k} y\cos x dxdy$,则 $\max\limits_{1\le k\le 4}\{I_k\} =$



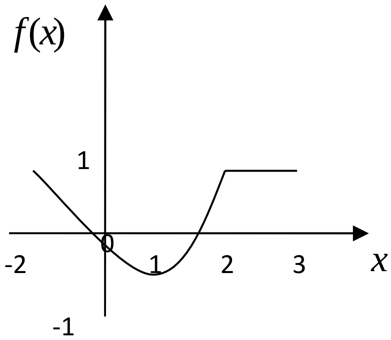
(A) I_1 (B) I_2

(C) I_3 (D) I_4

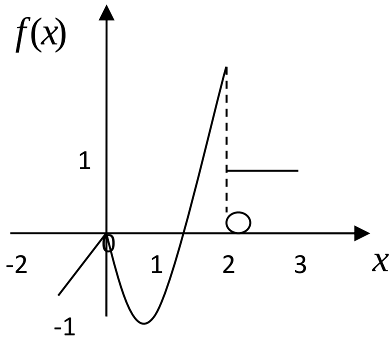
(3)设函数 $y = f(x)$ 在区间 $[-1,3]$ 上的图形为



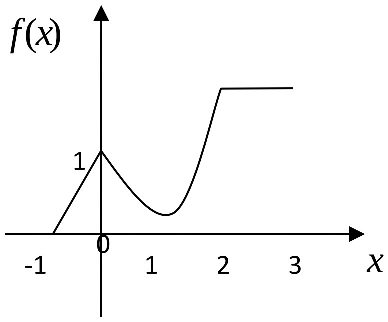
则函数 $F(x) = \int_0^x f(t)dt$ 的图形为



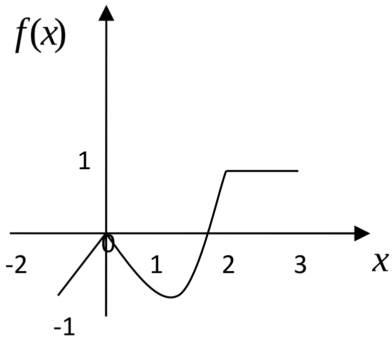
(A)



(B)



(C)



(D)

(4)设有两个数列$\{a_n\},\{b_n\}$,若$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$,则

(A)当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$收敛.

(B)当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n b_n$发散.

(C)当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$收敛时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$收敛.

(D)当$\sum\limits_{n=1}^{\infty} |b_n|$发散时,$\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n^2 b_n^2$发散.

(5)设$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$是3维向量空间$\mathbf{R}^3$的一组基,则由基$\boldsymbol{\alpha}_1,\frac{1}{2}\boldsymbol{\alpha}_2,\frac{1}{3}\boldsymbol{\alpha}_3$到基$\boldsymbol{\alpha}_1+\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_2+\boldsymbol{\alpha}_3,\boldsymbol{\alpha}_3+\boldsymbol{\alpha}_1$的过渡矩阵为

(A)$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \end{pmatrix}$

(B)$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 3 \end{pmatrix}$

(C)$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{6} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{4} & \frac{1}{6} \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{4} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(D)$\begin{pmatrix} \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} \\ -\frac{1}{6} & \frac{1}{6} & \frac{1}{6} \end{pmatrix}$

(6)设 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 均为 2 阶矩阵, $\mathbf{A}^*, \mathbf{B}^*$ 分别为 $\mathbf{A}, \mathbf{B}$ 的伴随矩阵,若 $|\mathbf{A}|=2, |\mathbf{B}|=3$,则分块矩阵 $\begin{pmatrix} O & A \\ B & O \end{pmatrix}$ 的伴随矩阵为

(A) $\begin{pmatrix} O & 3B^* \\ 2A^* & O \end{pmatrix}$

(B) $\begin{pmatrix} O & 2B^* \\ 3A^* & O \end{pmatrix}$

(C) $\begin{pmatrix} O & 3A^* \\ 2B^* & O \end{pmatrix}$

(D) $\begin{pmatrix} O & 2A^* \\ 3B^* & O \end{pmatrix}$

(7)设随机变量 X 的分布函数为 $F(x)=0.3\Phi(x)+0.7\Phi\left(\frac{x-1}{2}\right)$,其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数,则 $EX=$

(A)0

(B)0.3

(C)0.7

(D)1

(8)设随机变量 X 与 Y 相互独立,且 X 服从标准正态分布 $N(0,1)$, Y 的概率分布为 $P\{Y=0\}=P\{Y=1\}=\frac{1}{2}$,记 $F_Z(z)$ 为随机变量 $Z=XY$ 的分布函数,则函数 $F_Z(z)$ 的间断点个数为

(A)0

(B)1

(C)2

(D)3

二、填空题(9-14 小题,每小题 4 分,共 24 分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9)设函数 $f(u,v)$ 具有二阶连续偏导数, $z=f(x,xy)$,则 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}=$__________.

(10)若二阶常系数线性齐次微分方程 $y''+ay'+by=0$ 的通解为 $y=(C_1+C_2x)e^x$,则非齐次方程 $y''+ay'+by=x$ 满足条件 $y(0)=2, y'(0)=0$ 的解为 $y=$__________.

(11)已知曲线 $L: y=x^2 \left(0 \le x \le \sqrt{2}\right)$,则 $\int_L x ds=$____________.

(12)设 $\Omega=\left\{(x,y,z) \middle| x^2+y^2+z^2 \le 1\right\}$,则 $\iiint\limits_{\Omega} z^2 dxdydz=$____________.

(13)若 3 维列向量 $\boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\beta}$ 满足 $\boldsymbol{\alpha}^T\boldsymbol{\beta}=2$,其中 $\boldsymbol{\alpha}^T$ 为 $\boldsymbol{\alpha}$ 的转置,则矩阵 $\boldsymbol{\beta}\boldsymbol{\alpha}^T$ 的非零特征值为____________.

(14)设 $X_1, X_2, \cdots, X_m$ 为来自二项分布总体 $B(n,p)$ 的简单随机样本, $\overline{X}$ 和 S^2 分别为样本均值和样本方差.若 $\overline{X}+kS^2$ 为 np^2 的无偏估计量,则 $k=$____________.

三、解答题(15－23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步

骤.)

(15)(本题满分 9 分)

求二元函数 $f(x,y)=x^2\left(2+y^2\right)+y\ln y$ 的极值.

(16)(本题满分 9 分)

设 a_n 为曲线 $y=x^n$ 与 $y=x^{n+1}\left(n=1,2,.....\right)$ 所围成区域的面积,记 $S_1=\sum_{n=1}^{\infty}a_n, S_2=\sum_{n=1}^{\infty}a_{2n-1}$,求 S_1 与 S_2 的值.

(17)(本题满分 11 分)

椭球面 S_1 是椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 绕 x 轴旋转而成,圆锥面 S_2 是过点 $(4,0)$ 且与椭圆 $\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{3}=1$ 相切的直线绕 x 轴旋转而成.

(1)求 S_1 及 S_2 的方程.

(2)求 S_1 与 S_2 之间的立体体积.

(18)(本题满分 11 分)

(1) 证明拉格朗日中值定理:若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,在 (a,b) 可导,则存在 $\xi\in(a,b)$,使得 $f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$.

(2)证明:若函数 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续,在 $(0,\delta)(\delta>0)$ 内可导,且 $\lim\limits_{x\to0^+}f'(x)=A$,则 $f'_+(0)$ 存在,且 $f'_+(0)=A$.

(19)(本题满分 10 分)

计算曲面积分 $I=\oiint\limits_{\Sigma}\frac{xdydz+ydzdx+zdxdy}{\left(x^2+y^2+z^2\right)^{\frac{3}{2}}}$,其中 $\sum$ 是曲面 $2x^2+2y^2+z^2=4$ 的外侧.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 1 & 1\\ 0 & -4 & -2\end{pmatrix},\boldsymbol{\xi}_1=\begin{pmatrix}-1\\ 1\\ -2\end{pmatrix}$

(1)求满足 $\mathbf{A}\boldsymbol{\xi}_2=\boldsymbol{\xi}_1$ 的 $\boldsymbol{\xi}_2$. $\mathbf{A}^2\boldsymbol{\xi}_3=\boldsymbol{\xi}_1$ 的所有向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$.

(2)对(1)中的任意向量 $\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 证明 $\boldsymbol{\xi}_1,\boldsymbol{\xi}_2,\boldsymbol{\xi}_3$ 无关.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=ax_1^2+ax_2^2+\left(a-1\right)x_3^2+2x_1x_3-2x_2x_3$.

(1)求二次型 f 的矩阵的所有特征值;

(2)若二次型 f 的规范形为 $y_1^2+y_2^2$,求 a 的值.

(22)(本题满分 11 分)

袋中有 1 个红色球,2 个黑色球与 3 个白球,现有回放地从袋中取两次,每次取一球,以 X,Y,Z 分别表示两次取球所取得的红球、黑球与白球的个数.

(1)求 $p\left\{X=1 \middle| Z=0\right\}$.

(2)求二维随机变量 $\left(X,Y\right)$ 概率分布.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\lambda^2 xe^{-\lambda x}, x>0\\ 0,其他\end{cases}$,其中参数 $\lambda(\lambda>0)$ 未知,$X_1,X_2,\ldots X_n$ 是来自总体 X 的简单随机样本.

(1)求参数 λ 的矩估计量.

(2)求参数 λ 的最大似然估计量.

2010年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(1-8小题,每小题4分,共32分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

(1)极限 $\lim\limits_{x\to\infty}\left[\dfrac{x^2}{(x-a)(x+b)}\right]^x=$

(A)1　　(B) e　　(C) e^{a-b}　　(D) e^{b-a}

(2)设函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $F(\dfrac{y}{x},\dfrac{z}{x})=0$ 确定,其中 F 为可微函数,且 $F_2'\neq 0$, 则 $x\dfrac{\partial z}{\partial x}+y\dfrac{\partial z}{\partial y}=$

(A) x　　(B) z　　(C) $-x$　　(D) $-z$

(3)设 m,n 为正整数,则反常积分 $\int_0^1\dfrac{\sqrt[m]{\ln^2(1-x)}}{\sqrt[n]{x}}dx$ 的收敛性

(A)仅与 m 取值有关　　(B)仅与 n 取值有关

(C)与 m,n 取值都有关　　(D)与 m,n 取值都无关

(4) $\lim\limits_{x\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\sum\limits_{j=1}^{n}\dfrac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}=$

(A) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$　　(B) $\int_0^1dx\int_0^x\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$

(C) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y)}dy$　　(D) $\int_0^1dx\int_0^1\dfrac{1}{(1+x)(1+y^2)}dy$

(5)设 $\mathbf{A}$ 为 $m\times n$ 型矩阵, $\mathbf{B}$ 为 $n\times m$ 型矩阵,若 $\mathbf{AB}=\mathbf{E}$, 则

(A)秩 $(\mathbf{A})=m$, 秩 $(\mathbf{B})=m$　　(B)秩 $(\mathbf{A})=m$, 秩 $(\mathbf{B})=n$

(C)秩$(\mathbf{A})=n$, 秩$(\mathbf{B})=m$　　(D)秩$(\mathbf{A})=n$, 秩$(\mathbf{B})=n$

(6)设$\mathbf{A}$为4阶对称矩阵,且$\mathbf{A}^2+\mathbf{A}=0$, 若$\mathbf{A}$的秩为3,则$\mathbf{A}$相似于

(A)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(B)$\begin{pmatrix}1&&&\\&1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(C)$\begin{pmatrix}1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$　　(D)$\begin{pmatrix}-1&&&\\&-1&&\\&&-1&\\&&&0\end{pmatrix}$

(7)设随机变量X的分布函数$F(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ \dfrac{1}{2} & 0\le x\le 1,\\ 1-\mathrm{e}^{-x} & x>2\end{cases}$则$P\{X=1\}=$

(A)0　　(B)1　　(C)$\dfrac{1}{2}-\mathrm{e}^{-1}$　　(D)$1-\mathrm{e}^{-1}$

(8)设$f_1(x)$为标准正态分布的概率密度, $f_2(x)$为$[-1,3]$上均匀分布的概率密度,

$$f(x)=\begin{cases}af_1(x) & x\le 0\\ bf_2(x) & x>0\end{cases}\quad (a>0,b>0)$$

为概率密度,则a,b应满足

(A)$2a+3b=4$　　(B)$3a+2b=4$

(C)$a+b=1$　　(D)$a+b=2$

二、填空题(9-14小题,每小题4分,共24分,请将答案写在答题纸指定位置上.)

(9)设$x=\mathrm{e}^{-t}$, $y=\int_0^t\ln(1+u^2)du$, 求$\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=0}=$__________.

(10)$\int_0^{\pi^2}\sqrt{x}\cos\sqrt{x}dy=$__________.

(11)已知曲线L的方程为$y=1-|x|\{x\in[-1,1]\}$,起点是$(-1,0)$, 终点是$(1,0)$,

则曲线积分$\int_L xydx+x^2dy=$_____________.

(12)设$\Omega=\{(x,y,z)\,|\,x^2+y^2\le z\le 1\}$,则$\Omega$的形心的竖坐标$\overline{z}=$_____________.

(13) 设 $\boldsymbol{\alpha}_1=(1,2,-1,0)^T,\boldsymbol{\alpha}_2=(1,1,0,2)^T,\boldsymbol{\alpha}_3=(2,1,1,\alpha)^T$, 若由 $\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$ 形成的向量空间的维数是 2, 则 $\alpha=$____________.

(14)设随机变量 X 概率分布为 $P\{X=k\}=\dfrac{C}{k!}(k=0,1,2,\cdots)$, 则 $EX^2=$____________.

三、解答题(15－23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.)

(15)(本题满分 10 分)

求微分方程 $y''-3y'+2y=2x\mathrm{e}^x$ 的通解.

(16)(本题满分 10 分)

求函数 $f(x)=\int_1^x(x^2-t)\mathrm{e}^{-t^2}\,dt$ 的单调区间与极值.

(17)(本题满分 10 分)

(1)比较 $\int_0^1 \left|\ln t\right|[\ln(1+t)]^n dt$ 与 $\int_0^1 t^n \left|\ln t\right| dt(n=1,2,\cdots)$ 的大小,说明理由.

(2)记 $u_n=\int_0^1 \left|\ln t\right|[\ln(1+t)]^n dt(n=1,2,\cdots)$, 求极限 $\lim\limits_{x\to\infty} u_n$.

(18)(本题满分 10 分)

求幂级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{2n-1}x^{2n}$ 的收敛域及和函数.

(19)(本题满分 10 分)

设 P 为椭球面 $S: x^2+y^2+z^2-yz=1$ 上的动点,若 S 在点 P 的切平面与 xoy 面垂直,求 P 点的轨迹 C, 并计算曲面积分 $I=\iint\limits_{\Sigma}\frac{(x+\sqrt{3})\left|y-2z\right|}{\sqrt{4+y^2+z^2-4yz}}dS$, 其中 Σ 是椭球面 S 位于曲线 C 上方的部分.

(20)(本题满分 11 分)

设 $\mathbf{A}=\begin{pmatrix}\lambda & 1 & 1\\ 0 & \lambda-1 & 0\\ 1 & 1 & \lambda\end{pmatrix}, \boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}a\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, 已知线性方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 存在两个不同的解.

(1)求 λ, a.

(2)求方程组 $\mathbf{A}\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ 的通解.

(21)(本题满分 11 分)

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=\boldsymbol{x}^T\mathbf{A}\boldsymbol{x}$ 在正交变换 $x=\mathbf{Q}y$ 下的标准形为 $y_1^2+y_2^2$, 且 $\mathbf{Q}$ 的第三列为 $(\frac{\sqrt{2}}{2},0,\frac{\sqrt{2}}{2})^T$.

(1)求 $\mathbf{A}$.

(2)证明 $\mathbf{A}+\mathbf{E}$ 为正定矩阵,其中 $\mathbf{E}$ 为 3 阶单位矩阵.

(22)(本题满分 11 分)

设二维随机变量 $(X+Y)$ 的概率密度为 $f(x,y)=A\mathrm{e}^{-2x^2+2xy-y^2}$, $-\infty<x<\infty,-\infty<y<\infty$, 求常数及 A 条件概率密度 $f_{Y|X}(y\mid x)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的概率分布为

X	1	2	3
P	$1-\theta$	$\theta-\theta^2$	θ^2

其中 $\theta\in(0,1)$ 未知,以 N_i 来表示来自总体 X 的简单随机样本(样本容量为 n)中等于 i 的个数 $(i=1,2,3)$, 试求常数

a_1,a_2,a_3, 使 $T=\sum_{i=1}^{3}a_iN_i$ 为 θ 的无偏估计量,并求 T 的方差.

2011年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题(1-8小题,每小题4分,共32分,下列每小题给出的四个选项中,只有一项符合题目要求,把所选项前的字母填在题后的括号内.)

1、 曲线$y=x(x-1)(x-2)^2(x-3)^3(x-4)^4$的拐点是（　）

A （1，0）　　B （2，0）　　C （3 ，0）　　D （4，0）

2、设数列$\{a_n\}$单调减少，且$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$。$S_n=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i$无界，则幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n(x-1)^n$的收敛域为（　　）

A（$-1\quad 1]$　　B $[-1\quad 1)$　　C $[0\quad 2)$　　D $(0\quad 2]$

3、 设函数$f(x)$具有二阶连续的导数，且$f(x)>0$. $f'(0)=0$。则函数$z=\ln f(x)f(y)$在点$(0,0)$处取得极小值的一个充分条件是（　）

A　$f(0)>1\quad f''(0)>0$　　　　B　$f(0)>1\quad f''(0)<0$

C　$f(0)<1\quad f''(0)>0$　　　　D　$f(0)<1\quad f''(0)<0$

4、设$I=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx\quad J=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cot xdx\quad K=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx$，则　$I\quad J\quad K$的大小关系是（　　）

A　$I<J<K$　　B　$I<K<J$　　C　$J<I<K$　　D　$K<J<I$

5、设A为3阶矩阵，把A的第二列加到第一列得到矩阵B ，再交换B的第二行与第3行得到单位阵E，记$P_1=\begin{pmatrix}1&0&0\\1&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$P_2=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&1\\0&1&0\end{pmatrix}$，则A=（　　）

A　P_1P_2　　B　$P_1^{-1}P_2$　　C　P_2P_1　　D　$P_2^{-1}P_1$

6、设$A=(\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4)$是4阶矩阵，$A^*$为A的伴随矩阵。若$(1,0,1,0)^T$是$Ax=0$的一个基础解系，则$A^*x=0$的基础解系可为（　　）

A　$\alpha_1\quad\alpha_3$　　B　$\alpha_1\quad\alpha_2$　　C　$\alpha_1\quad\alpha_2\quad\alpha_3$　　D　$\alpha_2\quad\alpha_3\quad\alpha_4$

7、设 $F_1(x)$ $F_2(x)$ 为两个分布函数，且连续函数 $f_1(x)$ $f_2(x)$ 为相应的概率密度，则必为概率密度的是（ ）

A $f_1(x)f_2(x)$ B $2f_2(x)F_1(x)$ C $f_1(x)F_2(x)$ D $f_1(x)F_2(x)+f_2(x)F_1(x)$

8、设随机变量 X,Y 相互独立，且 EX,EY 都存在，记 $U=\max\{X,Y\}V=\min\{X,Y\}$，则 $EUV=$（ ）

A $EU\cdot EV$ B $EX\cdot EY$ C $EU\cdot EY$ D $EX\cdot EV$

二、填空题：9—14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定的位置上。

9、曲线 $y=\int_0^x \tan t dt \quad (0\le x\le \frac{\pi}{4})$ 的弧长为____________

10、微分方程 $y'+y=e^x\cos x$ 满足条件 $y(0)=0$ 的解为______________

11、设函数 $F(x,y)=\int_0^{xy}\frac{\sin t}{1+t^2}dt$，则 $\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}|_{\substack{x=0\\y=2}}=$ ______________

12、设 L 是柱面方程 $x^2+y^2=1$ 与平面 $z=x+y$ 的交线，从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向，则曲线积分

$\oint_L xzdx+xdy+\frac{y^2}{2}dz=$ _________

13、若二次曲面的方程 $x^2+3y^2+z^2+2axy+2xz+2yz=4$，经正交变换化为 $y_1{}^2+y_2{}^2=4$，则 $a=$ _______

14、设二维随机变量 $(X,Y)\sim N(\mu,\mu,\sigma^2,\sigma^2,0)$，则 $E(XY^2)=$ ____________

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定的位置上，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

15、（本题满分 10 分） 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{\ln(1+x)}{x})^{\frac{1}{e^x-1}}$

16、（本题满分 9 分）

设函数 $z=f(xy,yg(x))$，其中 f 具有二阶连续的偏导数，函数 $g(x)$ 可导且在 $x=1$ 处取得极值 $g(1)=1$.求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}\Big|_{\substack{x=1\\y=1}}$$

17、（本题满分 10 分）

求方程 $k\arctan x-x=0$ 的不同实根的个数，其中 k 为参数。

18、（本题满分 10 分）

①证明：对任意的正整数n，都有$\frac{1}{n+1} < \ln(1+\frac{1}{n}) < \frac{1}{n}$成立；

②设$a_n = 1+\frac{1}{2}+ \ldots\ldots\ldots\ldots + \frac{1}{n} - \ln n \quad (n=1,2\ldots\ldots)$，证明数列$\{a_n\}$收敛.

19、（本题满分 11 分）

已知函数$f(x,y)$具有二阶连续的偏导数，且$f(1,y)=f(x,1)=0, \iint\limits_D f(x,y)dxdy = a$，其中$D=\{(x,y)\,|\,0\le x\le 1, 0\le y\le 1\}$计算二重积分$\iint\limits_D xyf''_{xy}(x,y)dxdy$

20、（本题满分 11 分）

设向量组$\alpha_1=(1,0,1)^T$，$\alpha_2=(0,1,1)^T$，$\alpha_3=(1,3,5)^T$不能由向量组$\beta_1=(1,1,1)^T$，$\beta_2=(1,2,3)^T$，$\beta_3=(3,4,a)^T$线性表示；

（1） 求a的值；

（2） 将β_1,β_2,β_3用$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$线性表示；

21、（本题满分 11 分）

A 为 3 阶实对称矩阵，A 的秩为 2，且$A\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\\ -1 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 0 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$

求（1）A 的特征值与特征向量 （2） 矩阵 A

22、（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 的概率分布分别为

X	0	1
P	$1/3$	$2/3$

Y	-1	0	1
P	$1/3$	$1/3$	$1/3$

且 $P\left\{X^2 = Y^2\right\} = 1$

求（1）二维随机变量（X，Y）的概率分布；

（2）$Z = XY$ 的概率分布

（3）X 与 Y 的相关系数 ρ_{XY}

23、（本题满分 11 分）

设 $X_1, X_2 \cdots X_n$ 是来自正态总体 $N(\mu_0, \sigma^2)$ 的简单随机样本，其中 μ_0 已知，$\sigma^2 > 0$ 未知. $\overline{X}, S^2$ 为样本均值和样本方差.

求（1）求参数 σ^2 的最大似然估计 $\hat{\sigma}^2$

(2) 计算 E$\hat{\sigma}^2$ 和 D$\hat{\sigma}^2$

2012 年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题解析

一、选择题：1～8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）曲线 $y=\dfrac{x^2+x}{x^2-1}$ 渐近线的条数为（）

（A）0　（B）1　（C）2　（D）3

（2）设函数 $f(x)=(e^x-1)(e^{2x}-2)\cdots(e^{nx}-n)$，其中 n 为正整数，则 $f'(0)=$

（A）$(-1)^{n-1}(n-1)!$　（B）$(-1)^n(n-1)!$　（C）$(-1)^{n-1}n!$　（D）$(-1)^n n!$

（3）如果 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处连续，那么下列命题正确的是（　　）

（A）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（B）若极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在，则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微

（C）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在

（D）若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微，则极限 $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ y\to 0}}\dfrac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在

（4）设 $I_k=\int_e^k e^{x^2}\ \sin x dx(k=1,2,3)$,则有 D

（A）$I_1< I_2 <I_3.$　　(B) $I_2< I_2< I_3.$

(C) $I_1< I_3 <I_1,$　　(D) $I_1< I_2< I_3.$

（5）设 $\alpha_1=\begin{pmatrix}0\\0\\c_1\end{pmatrix},\alpha_2=\begin{pmatrix}0\\1\\c_2\end{pmatrix},\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\-1\\c_3\end{pmatrix},\alpha_4=\begin{pmatrix}-1\\1\\c_4\end{pmatrix}$ 其中 c_1,c_2,c_3,c_4 为任意常数，则下列向量组线性相关的是（　　）

（A）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$　　（B）$\alpha_1,\alpha_2,\alpha_4$

（C）$\alpha_1,\alpha_3,\alpha_4$　　（D）$\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4$

（6）设 A 为 3 阶矩阵，P 为 3 阶可逆矩阵，且 $P^{-1}AP=\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$，$P=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$，$Q=\left(\alpha_1+\alpha_2,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 则

$Q^{-1}AQ=$（　　）

（A）$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$　　（B）$\begin{pmatrix}1 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$

（C）$\begin{pmatrix}2 & & \\ & 1 & \\ & & 2\end{pmatrix}$　　（D）$\begin{pmatrix}2 & & \\ & 2 & \\ & & 1\end{pmatrix}$

（7）设随机变量 x 与 y 相互独立，且分别服从参数为 1 与参数为 4 的指数分布，则 $p\{x<y\}=$（）

$(A)\frac{1}{5}$　　$(B)\frac{1}{3}$　　$(C)\frac{2}{5}$　　$(D)\frac{4}{5}$

（8）将长度为 1m 的木棒随机地截成两段，则两段长度的相关系数为（）$(A)\quad 1\quad (B)\quad \frac{1}{2}\qquad (C)\quad -\frac{1}{2}\quad (D)\quad -1$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

（9）若函数 $f(x)$ 满足方程 $f''(x)+f'(x)-2f(x)=0$ 及 $f'(x)+f(x)=2e^x$，则 $f(x)=$________。

（10）$\int_0^2 x\sqrt{2x-x^2}dx$ ________。

（11）$\operatorname{grad}\left(xy+\frac{z}{y}\right)\Big|_{(2,1,1)}$ ________。

（12）设 $\sum=\{(x,y,z)|x+y+z=1,x\geq 0,y\geq 0,z\geq 0\}$，则 $\iint\limits_{\Sigma} y^2ds=$________。

（13）设 X 为三维单位向量，E 为三阶单位矩阵，则矩阵 $E-xx^T$ 的秩为________。

（14）设 A,B,C 是随机事件，A,C 互不相容，$P(AB)=\frac{1}{2},P(C)=\frac{1}{3}$,则 $P(AB\bar{C})=$________。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

证明：$x\ln\frac{1+x}{1-x}+\cos x\geq 1+\frac{x^2}{2},-1<x<1$

（16）（本题满分 10 分）

求 $f\left(x,y\right)=xe-\dfrac{x^2+y^2}{2}$ 的极值。

（17）（本题满分 10 分）

求幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{4n^2+4n+3}{2n+1} x^{2n}$的收敛域及和函数

（18）（本题满分 10 分）

已知曲线$L:\begin{cases} x=f(t) \\ y=\cos t \end{cases} \left(0 \le t < \frac{\pi}{2}\right)$，其中函数$f(t)$具有连续导数，且$f(0)=0$，$f'(t)>0\left(0<t<\frac{\pi}{2}\right)$。若曲线 L 的切线与 x 轴的交点到切点的距离恒为 1，求函数$f(t)$的表达式，并求此曲线 L 与 x 轴与 y 轴无边界的区域的面积。

（19）（本题满分 10 分）

已知 L 是第一象限中从点 $(0,0)$ 沿圆周 $x^2+y^2=2x$ 到点 $(2,0)$，再沿圆周 $x^2+y^2=4$ 到点 $(0,2)$ 的曲线段，计算曲线积分 $J=\int_L 3x^2ydx+\left(x^2+x-2y\right)dy$ 。

（20）（本题满分 10 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1&a&0&0\\0&1&a&0\\0&0&1&a\\a&0&0&1\end{pmatrix}$，$b=\begin{pmatrix}1\\-1\\0\\0\end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 $|A|$

（Ⅱ）已知线性方程组 $Ax=b$ 有无穷多解，求 a，并求 $Ax=b$ 的通解。

（21）（本题满分 10 分）三阶矩阵 $A=\begin{pmatrix}1&0&1\\0&1&1\\-1&0&a\end{pmatrix}$，$A^T$ 为矩阵 A 的转置，已知 $r(A^TA)=2$，且二次型 $f=x^TA^TAx$。

1）求 a

2）求二次型对应的二次型矩阵，并将二次型化为标准型，写出正交变换过程。

（22）（本题满分 10 分）

已知随机变量 X,Y 以及 XY 的分布律如下表所示，

X	0	1	2
P	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
P	1/3	1/3	1/3

XY	0	1	2	4
P	7/12	1/3	0	1/12

求：（1）$P\left(X=2Y\right)$；

（2）$\operatorname{cov}\left(X-Y,Y\right)$ 与 ρ_{XY} .

（23）（本题满分 11 分）

设随机变量 X 与 Y 相互独立且分别服从正态分布 $N\left(\mu,\sigma^2\right)$ 与 $N\left(\mu,2\sigma^2\right)$，其中 σ 是未知参数且 $\sigma>0$,设 $Z=X-Y$,

(1) 求 z 的概率密度 $f\left(z,\sigma^2\right)$；

(2) 设 $z_1,z_2,\cdots z_n$ 为来自总体 Z 的简单随机样本，求 σ^2 的最大似然估计量 $\overline{\sigma}^2$ ；

(3) 证明 $\overline{\sigma}^2$ 为 σ^2 的无偏估计量。

2013年全国硕士研究生入学统一考试

数学一试题

一、选择题：1～8小题，每小题4分，共32分，下列每小题给出的四个选项中，只有一项符合题目要求的，请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

（1）已知极限 $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x-\arctan x}{x^k}=c$，其中 c,k 为常数，且 $c\neq 0$，则（　）

（A） $k=2,c=-\dfrac{1}{2}$

（B） $k=2,c=\dfrac{1}{2}$

（C） $k=3,c=-\dfrac{1}{3}$

（D） $k=3,c=\dfrac{1}{3}$

（2）曲面 $x^2+\cos(xy)+yz+x=0$ 在点 $(0,1,-1)$ 处的切平面方程为（　　）

（A） $x-y+z=-2$

（B） $x+y+z=2$

（C） $x-2y+z=-3$

（D） $x-y-z=0$

（3）设 $f(x)=\left|x-\dfrac{1}{2}\right|$，$b_n=2\int_0^1 f(x)\sin n\pi x dx(n=1,2,...)$，令 $S(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}b_n\sin n\pi x$，则 $S(-\dfrac{9}{4})=$（　　）

（A） $\dfrac{3}{4}$

（B） $\dfrac{1}{4}$

（C） $-\dfrac{1}{4}$

（D） $-\dfrac{3}{4}$

（4）设 $l_1:x^2+y^2=1,l_2:x^2+y^2=2,l_3:x^2+2y^2=2,l_4:2x^2+y^2=2,$ 为四条逆时针的平面曲线，记 $I_i=\oint_{l_i}(y+\dfrac{y^3}{6})dx+(2x-\dfrac{x^3}{3})dy(i=1,2,3,4)$，则 $\max\{I_1,I_2,I_3,I_4\}=$（　　）

（A）I_1

（B）I_2

（C）I_3

（D）I_3

（5）设矩阵 A,B,C 均为 n 阶矩阵，若 $AB = C$,则B可逆，则

（A）矩阵 C 的行向量组与矩阵 A 的行向量组等价

（B）矩阵 C 的列向量组与矩阵 A 的列向量组等价

（C）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的行向量组等价

（D）矩阵 C 的行向量组与矩阵 B 的列向量组等价

（6）矩阵$\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & b & a \\ 1 & a & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \mathrm{b} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$相似的充分必要条件为

（A）$\mathrm{a} = 0, \mathrm{b} = 2$

（B）$a = 0, b$为任意常数

（C）$a = 2, b = 0$

（D）$a = 2, b$为任意常数

（7）设 X_1，X_2，X_3 是随机变量，且 X_1~N(0,1)，X_2~N(0, 2^2），$X_3 \sim N(5, 3^2)$，

$P_j = P\{-2 \le X_j \le 2\}(j = 1,2,3)$, 则（　　）

（A）$P_1 > P_2 > P_3$

（B）$P_2 > P_1 > P_3$

（C）$P_3 > P_1 > P_2$

（D）$P_1 > P_3 > P_2$

（8）设随机变量 $X \sim t(n), Y \sim F(1,n)$, 给定 $a(0 < a < 0.5)$, 常数 c 满足 $P\{X > c\} = a$,则 $P\{Y > c^2\} =$（　　）

（A）α

（B）$1-\alpha$

（C）2α

（D）$1-2\alpha$

二、填空题：9–14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 设函数 $f(x)$ 由方程 $y-x=e^{x(1-y)}$ 确定，则 $\lim\limits_{n\to\infty} n(f(\frac{1}{n})-1)=$________.

(10) 已知 $y_1=e^{3x}-xe^{2x}$，$y_2=e^{x}-xe^{2x}$，$y_3=-xe^{2x}$ 是某二阶常系数非齐次线性微分方程的 3 个解，该方程的通解为 $y=$________.

(11) 设 $\begin{cases} x=\sin t \\ y=t\sin t+\cos t \end{cases}$ （t 为参数），则 $\left.\dfrac{d^2y}{dx^2}\right|_{t=\frac{\pi}{4}}=$________.

(12) $\int_1^{+\infty}\dfrac{\ln x}{(1+x)^2}dx=$________.

（13）设 $\mathrm{A}=(\mathrm{a_{ij}})$ 是三阶非零矩阵，$|\mathrm{A}|$ 为 A 的行列式，$\mathrm{A_{ij}}$ 为 $\mathrm{a_{ij}}$ 的代数余子式，若 $\mathrm{a_{ij}}+\mathrm{A_{ij}}=0(\mathrm{i},\mathrm{j}=1,2,3)$,则 $|A|=$____

（14）设随机变量 Y 服从参数为 1 的指数分布, a 为常数且大于零，则 $P\{Y\le a+1|Y>a\}=$________。

三、解答题：15—23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

计算 $\int_0^1\dfrac{f(x)}{\sqrt{x}}dx$, 其中 $f(x)=\int_1^x\dfrac{\ln(t+1)}{t}dt$

（16）（本题满分 10 分）

设数列$\{a_n\}$满足条件：$a_0=3, a_1=1, a_{n-2}-n(n-1)a_n=0(n\geq 2)$, $S(x)$是幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$的和函数，

（I） 证明：$S''(x)-S(x)=0$，

（II） 求$S(x)$的表达式.

（17）（本题满分 10 分）

求函数$f(x,y)=(y+\frac{x^3}{3})e^{x+y}$的极值.

（18）（本题满分 10 分）

设奇函数 $f(x)$在$[-1,1]$上具有 2 阶导数，且 $f(1)=1,$ 证明：

（I） 存在$\xi\in(0,1),$使得$f'(\xi)=1$

（II） 存在$\eta\in(-1,1)$，使得 $f''(\eta)+f'(\eta)=1$

（19）（本题满分 10 分）

设直线 L 过 $A(1,0,0),B(0,1,1)$ 两点，将 L 绕 Z 轴旋转一周得到曲面Σ,Σ与平面 $z=0,z=2$ 所围成的立体为Ω，

（I） 求曲面Σ的方程

（II） 求Ω的形心坐标.

（20）（本题满分 11 分）

设 $A=\begin{pmatrix}1 & a\\ 1 & 0\end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & b\end{pmatrix}$，当 a,b 为何值时，存在矩阵 C 使得 $AC-CA=B$，并求所有矩阵 C。

（21）（本题满分 11 分）

设二次型 $f\left(x_1,x_2,x_3\right)=2\left(a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3\right)^2+\left(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3\right)^2$，记 $\alpha=\begin{pmatrix}a_1\\ a_2\\ a_3\end{pmatrix}, \beta=\begin{pmatrix}b_1\\ b_2\\ b_3\end{pmatrix}$。

（I）证明二次型 f 对应的矩阵为 $2\alpha^T\alpha+\beta^T\beta$；

（II）若 α,β 正交且均为单位向量，证明二次型 f 在正交变化下的标准形为二次型 $2y_1^2+y_2^2$。

（22）（本题满分 11 分）

设随机变量的概率密度为 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{4}x^2 & 0<x<3\\ 0 & 其他\end{cases}$，令随机变量 $Y=\begin{cases}2 & x\le 1\\ x & 1<x<2\\ 1 & x\ge 2\end{cases}$,

（I）求 Y 的分布函数

（II）求概率 $P\{X\le Y\}$

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f\left(x\right)=\begin{cases}\dfrac{\theta^2}{x^3}e^{-\frac{\theta}{x}}, & x>0,\\ 0, & \text{其它}.\end{cases}$ 其中 θ 为未知参数且大于零，$X_1,X_2,\cdots X_N$ 为来自总体 X 的简单随机样本.

（1）求 θ 的矩估计量；

（2）求 θ 的最大似然估计量.

2014年全国硕士研究生入学统一考试数学一

一、选择题：1~8 小题，每小题 4 分，共 32 分，下列每题给出四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选项的字母填在答题纸指定位置上。

（1）下列曲线中有渐近线的是

（A） $y = x + \sin x$. (B) $y = x^2 + \sin x$. (C) $y = x + \sin\frac{1}{x}$. (D) $y = x^2 + \sin\frac{1}{x}$.

(2)设函数 $f(x)$ 具有 2 阶导数，$g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$,则在区间[0，1]上（　　）

(A)当 $f'(x) \geq 0$ 时， $f(x) \geq g(x)$.　　(B)当 $f'(x) \geq 0$ 时， $f(x) \leq g(x)$

(C)当 $f'(x) \geq 0$ 时， $f(x) \geq g(x)$.　　(D)当 $f' \geq 0$ 时， $f(x) \leq g(x)$

(3)设 $f(x, y)$ 是连续函数，则 $\int_0^1 dy \int_{-\sqrt{1-y^2}}^{1-y} f(x, y) =$

（A） $\int_0^1 dx \int_1^{x-1} f(x, y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)dy$.

（B） $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y)dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y)dy$.

（C） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr.$

（D） $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta+\sin\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr.$

（4）若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1\cos x - b_1\sin x)^2 dx = \min_{a,b\in R}\left\{\int_{-\pi}^{\pi} (x - a\cos x - b\sin x)^2 dx\right\}$，则

$a_1\cos x + b_1\sin x =$

（A） $2\pi\sin x$. (B) $2\cos x$. (C) $2\pi\sin x$. (D) $2\pi\cos x$.

(5)行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$

（A）$(ad-bc)^2$　（B）$-(ad-bc)^2$。　（C）$a^2d^2-b^2c^2$.　(D)$b^2c^2-a^2d^2$

【答案】 B

(6) 设α_1，α_2，α_3均为 3 维向量，则对任意常数$k,l,$向量组$\alpha_1+k\alpha_3$，$\alpha_2+l\alpha_3$线性无关是向量组α_1，α_2，α_3线性无关的（　　）

（A）必要非充分条件. (B)充分非必要条件.

（C）充分必要条件. (D)既非充分也非必要条件.

（7）设随机事件 A 与 B 相互独立，且 *P(B)*=0.5，*P(A-B)*=0.3，则 *P(B-A)*=（　　）

（A）0.1 (B)0.2 (C)0.3 (D)0.4

（8）设连续性随机变量 X_1 与 X_2 相互独立，且方差均存在，X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与 $f_2(x)$，随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y1}(y)=\frac{1}{2}[f_1(y)+f_2(y)]$，随机变量 $Y_2=\frac{1}{2}(X_1+X_2)$.则（　　）

(A)$EY_1>EY_2$，$DY_1>DY_2$ (B)$EY_1=EY_2$，$DY_1=DY_2$

(C)$EY_1=EY_2$，$DY_1<DY_2$ (D)$EY_1=EY_2$，$DY_1>DY_2$

二、填空题：9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答题纸指定位置上。

（9）曲面 $z=x^2(1-\sin y)+y^2(1-\sin x)$在点（1，0，1）处的切平面方程为________.

（10）设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数，且 $f'(x)=2(x-1)$，$x\in[0,2]$,则$f(7)$=_____

（11）微分方程 $xy^t+y(\ln x-\ln y)$ =0 满足条件 $y(1)=e^3$ 的解为 *y*=_________

（12）设 *L* 是柱面 $x^2+y^2=1$与平面 $y+z=0$ 的交线，从 *z* 轴正向往 *z* 轴负向看去为逆时针方向，则曲面积分$[\int]zdx+ydz$=__________.

（13）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x^2{}_1-x_2^2+2ax_1x_3+4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1,则 *a* 的取值范围________

（14）设总体 *X* 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\frac{2x}{3\theta^2} & ,\theta<x<2\theta\\ 0,\text{其他}\end{cases}$，其中$\theta$是未知数，$X_1,X_2,\ldots,X_\pi$为来自总体 *X* 的简单样本，若$c\sum_{i=1}^{n}x^2$ 是θ的无偏估计，则 *c*=________.

三、解答题：15～23 小题，共 94 分，请将解答写在答题纸指定位置上解答应写出文字说明、证明过程成消算步骤.

（15）（本题满分 10 分）

求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{\int_1^x[t^2(e^{\frac{1}{t}}-1)-t]dt}{x^2\ln(1+\frac{1}{x})}$。

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $y=f(x)$ 由方程 $y^3+xy^2+x^2y+6=0$ 确定，求 $f(x)$ 的极值。

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(u)$ 二阶连续可导，$z=f(e^x\cos y)$ 满足

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=(4z+e^x\cos y)e^{2x},$$

若 $f(0)=0, f'(0)=0$，求 $f(u)$ 的表达式。

（18）（本题满分 10 分）

设 Σ 为曲面 $z=x^2+y^2(z\le 1)$ 的上侧，计算曲面积分

$$I=\iint_{\Sigma}(x-1)^3dydz+(y-1)^3dzdx+(z-1)dxdy。$$

（19）（本题满分 10 分）设数列$\{a_n\}$、$\{b_n\}$满足$0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}$，

$\cos a_n - a_n = \cos b_n$，且级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$收敛。

（I）证明：$\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$。

（II）证明：$\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$收敛。

（20）（本题满分 11 分）

设$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$，$E$为三阶单位矩阵。

（I）求方程组$AX = O$的一个基础解系。

（II）求满足$AB = E$的所有矩阵B。

（21）（本题满分 11 分）证明n阶矩阵$\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$与$\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$相似。

（22）（本题满分 11 分）设随机变量X的概率分布为$P\{X=1\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，在给定$X=i$的条件下，随机变量$Y$服从均匀分布$U(0,i)(i=1,2)$。

（I）求Y得分布函数$F_Y(y)$。

（II）求EY。

（23）（本题满分 11 分）设总体 X 的分布函数 $F(x)=\begin{cases}0, x<0 \\ 1-e^{-\frac{x^2}{\theta}}, x\geq 0\end{cases}$，其中 $\theta>0$ 为未知参数，$X_1,X_2,\Lambda\ ,X_n$ 为来自总体 X 的简单随机样本。

（I）求 EX 及 EX^2。

（II）求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}$。

（III）是否存在实数 a，使得对任意的 $\varepsilon>0$，都有 $\lim\limits_{n\to\infty}P\{|\hat{\theta}-a|\geq\varepsilon\}=0$？

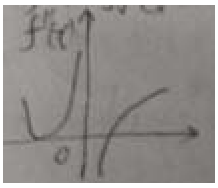
2015 年全国硕士研究生入学统一考试数学（一）试题

一、选择题:1：8 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1)设函数 $f(x)$ 在 $\left(-\infty,+\infty\right)$ 内连续，其中二阶导数 $f''(x)$ 的图形如图所示，则曲线

$y=f(x)$ 的拐点的个数为 ( )

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3



(2)设 $y=\frac{1}{2}e^{2x}+(x-\frac{1}{3})e^{x}$ 是二阶常系数非齐次线性微分方程 $y''+ay'+by=ce^{x}$ 的一个特解，则 ( )

(A) $a=-3,b=2,c=-1$

(B) $a=3,b=2,c=-1$

(C) $a=-3,b=2,c=1$

(D) $a=3,b=2,c=1$

(3) 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 条件收敛，则 $x=\sqrt{3}$ 与 $x=3$ 依次为幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}na_n(x-1)^n$ 的 ( )

(A) 收敛点，收敛点

(B) 收敛点，发散点

(C) 发散点，收敛点

(D) 发散点，发散点

(4) 设 D 是第一象限由曲线 $2xy=1$，$4xy=1$ 与直线 $y=x$， $y=\sqrt{3}x$ 围成的平面区

域，函数 $f(x,y)$ 在 D 上连续，则 $\iint\limits_{D} f(x,y)dxdy =$ ( )

(A) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

(B) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)rdr$

(C) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{2\sin 2\theta}}^{\frac{1}{\sin 2\theta}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$

(D) $\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} d\theta \int_{\frac{1}{\sqrt{2\sin 2\theta}}}^{\frac{1}{\sqrt{\sin 2\theta}}} f(r\cos\theta, r\sin\theta)dr$

(5) 设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & a \\ 1 & 4 & a^2 \end{pmatrix}$，$b = \begin{pmatrix} 1 \\ d \\ d^2 \end{pmatrix}$，若集合 $\Omega = \{1,2\}$，则线性方程组 $Ax = b$ 有无穷多解的充分必要条件为 ( )

(A) $a \notin \Omega, d \notin \Omega$

(B) $a \notin \Omega, d \in \Omega$

(C) $a \in \Omega, d \notin \Omega$

(D) $a \in \Omega, d \in \Omega$

(6)设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换为 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Py}$ 下的标准形为 $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$ ，其中 $\boldsymbol{P} = (\boldsymbol{e}_1, \boldsymbol{e}_2, \boldsymbol{e}_3)$ ，若 $\boldsymbol{Q} = (\boldsymbol{e}_1, -\boldsymbol{e}_3, \boldsymbol{e}_2)$ ，则 $f(x_1,x_2,x_3)$ 在正交变换 $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{Qy}$ 下的标准形为 ( )

(A) $2y_1^2 - y_2^2 + y_3^2$

(B) $2y_1^2 + y_2^2 - y_3^2$

(C) $2y_1^2 - y_2^2 - y_3^2$

(D) $2y_1^2 + y_2^2 + y_3^2$

(7) 若 A,B 为任意两个随机事件，则 ( )

(A) $P(AB) \le P(A)P(B)$ (B) $P(AB) \ge P(A)P(B)$

(C) $P(AB) \le \dfrac{P(A)P(B)}{2}$ (D) $P(AB) \ge \dfrac{P(A)P(B)}{2}$

(8)设随机变量 X,Y 不相关，且 $EX=2, EY=1, DX=3$，则 $E\left[X\left(X+Y-2\right)\right]=$ ( )

(A) -3 (B) 3 (C) -5 (D) 5

二、填空题：9：14 小题,每小题 4 分,共 24 分.请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\ln\cos x}{x^2}=$ ________.

(10) $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\dfrac{\sin x}{1+\cos x}+|x|\right)\mathrm{d}x=$ ________.

(11)若函数 $z=z(x,y)$ 由方程 $e^x+xyz+x+\cos x=2$ 确定，则 $\mathrm{d}z\big|_{(0,1)}=$ ________.

(12) 设 Ω 是由平面 $x+y+z=1$ 与三个坐标平面平面所围成的空间区域，则 $\iiint\limits_{\Omega}(x+2y+3z)dxdydz=$ ________.

(13) n 阶行列式 $\begin{vmatrix} 2 & 0 & \cdots & 0 & 2 \\ -1 & 2 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 2 & 2 \\ 0 & 0 & \cdots & -1 & 2 \end{vmatrix}=$ ________.

(14)设二维随机变量 (x,y) 服从正态分布 $N(1,0;1,1,0)$，则 $P\{XY-Y<0\}=$ ________.

三、解答题：15～23 小题,共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上.解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分) 设函数 $f(x)=x+a\ln(1+x)+bx\sin x$，$g(x)=kx^3$，若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 在 $x\to 0$ 是等价无穷小，求 a,b,k 的值.

(16)(本题满分 10 分) 设函数 $f\left(x\right)$在定义域 I 上的导数大于零，若对任意的 $x_0 \in I$，由线 y=$f\left(x\right)$在点$\left(x_0, f\left(x_0\right)\right)$处的切线与直线 $x = x_0$ 及 x 轴所围成区域的面积恒为 4，且 $f\left(0\right) = 2$，求 $f\left(x\right)$的表达式.

(17)(本题满分 10 分)

已知函数 $f(x,y)=x+y+xy$，曲线 C：$x^2+y^2+xy=3$，求 $f(x,y)$ 在曲线 C 上的最大方向导数.

(18)(本题满分 10 分)

（I）设函数 $u(x),v(x)$ 可导，利用导数定义证明 $[u(x)v(x)]'=u'(x)v(x)+u(x)v'(x)$

（II）设函数 $u_1(x),u_2(x),\cdots,u_n(x)$ 可导，$f(x)=u_1(x)u_2(x)\cdots u_n(x)$，写出 $f(x)$ 的求导公式.

(19)(本题满分 10 分)

已知曲线 L 的方程为$\begin{cases} z=\sqrt{2-x^2-y^2}, \\ z=x, \end{cases}$起点为$A\left(0,\sqrt{2},0\right)$，终点为$B\left(0,-\sqrt{2},0\right)$，计算曲线积分$I=\int_L\left(y+z\right)\mathrm{d}x+\left(z^2-x^2+y\right)\mathrm{d}y+(x^2+y^2)\mathrm{dz}$.

(20)（本题满 11 分）

设向量组$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$内$\mathrm{R}^3$的一个基，$\boldsymbol{\beta}_1=2\boldsymbol{\alpha}_1+2k\boldsymbol{\alpha}_3$，$\boldsymbol{\beta}_2=2\boldsymbol{\alpha}_2$，$\boldsymbol{\beta}_3=\boldsymbol{\alpha}_1+\left(k+1\right)\boldsymbol{\alpha}_3$.

（I）证明向量组$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$为$\mathrm{R}^3$的一个基;

（II）当 k 为何值时，存在非 0 向量$\boldsymbol{\xi}$ 在基$\boldsymbol{\alpha}_1,\boldsymbol{\alpha}_2,\boldsymbol{\alpha}_3$与基$\beta_1\ \beta_2\ \beta_3$下的坐标相同，并求所有的$\boldsymbol{\xi}$.

(21)（本题满分 11 分）

设矩阵 $\boldsymbol{A}=\begin{pmatrix} 0 & 2 & -3 \\ -1 & 3 & -3 \\ 1 & -2 & a \end{pmatrix}$ 相似于矩阵 $\boldsymbol{B}=\begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$.

（I） 求 a,b 的值；

（II） 求可逆矩阵 $\boldsymbol{P}$，使 $\boldsymbol{P}^{-1}\boldsymbol{AP}$ 为对角矩阵. .

(22)（本题满分 11 分）设随机变量 X 的概率密度为 $f(x)=\begin{cases} 2^{-x}\ln 2, x>0, \\ 0, \quad x\le 0. \end{cases}$

对 X 进行独立重复的观测, 直到 2 个大于 3 的观测值出现的停止. 记 Y 为观测次数.

(I)求 Y 的概率分布;

(II)求 EY

(23)（本题满分 11 分）设总体 X 的概率密度为：

$$f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{1}{1-\theta}, & \theta\le x\le 1,\\ 0, & \text{其他}.\end{cases}$$

其中 θ 为未知参数，$x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自该总体的简单随机样本.

(I)求 θ 的矩估计量.

(II)求 θ 的最大似然估计量.

2016年全国硕士研究生入学统一考试

数学(一)试卷

一、选择题：1~8小题，每小题4分，共32分，下列每题给出的四个选项中，只有一个选项符合题目要求的，请将所选前的字母填在答题纸指定位置上。

（1）若反常积分 $\int_0^{+\infty}\frac{1}{x^a(1+x)^b}dx$ 收敛，则（　）。

A. $a<1$ 且 $b>1$
B. $a>1$ 且 $b>1$
C. $a<1$ 且 $a+b>1$
D. $a>1$ 且 $a+b>1$

（2）已知函数 $f(x)=\begin{cases}2(x-1), x<1\\ \ln x, x\geq 1\end{cases}$，则 $f(x)$ 的一个原函数是（　）。

A. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1\\ x(\ln x-1), x\geq 1\end{cases}$

B. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1\\ x(\ln x+1)-1, x\geq 1\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1\\ x(\ln x+1)+1, x\geq 1\end{cases}$

D. $F(x)=\begin{cases}(x-1)^2, x<1\\ x(\ln x-1)+1, x\geq 1\end{cases}$

（3）若 $y=(1+x^2)^2-\sqrt{1+x^2}, y=(1+x^2)^2+\sqrt{1+x^2}$ 是微分方程 $y'+p(x)y=q(x)$ 的两个解，则 $q(x)$ =（　）。

A. $3x(1+x^2)$

B. $-3x(1+x^2)$

C. $\frac{x}{1+x^2}$

D. $-\frac{x}{1+x^2}$

（4）已知函数 $f(x)=\begin{cases}x, x\leq 0\\ \frac{1}{n}, \frac{1}{n+1}<x\leq\frac{1}{n}, n=1,2,\text{L}\end{cases}$，则（　）。

A. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第一类间断点

B. $x=0$ 是 $f(x)$ 的第二类间断点

C. $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续但不可导

D. $f(x)$ 在 $x=0$ 处可导

（5）设 A,B 是可逆矩阵，且 A 与 B 相似，则下列结论错误的是（　）。

A. A^T 与 B^T 相似

B. A^{-1} 与 B^{-1} 相似

C. $A+A^T$ 与 $B+B^T$ 相似

D. $A+A^{-1}$ 与 $B+B^{-1}$ 相似

（6）设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+4x_1x_2+4x_1x_3+4x_2x_3$，则 $f(x_1,x_2,x_3)=2$ 在空间直角坐标系下表示的二次曲面为（　）。

A.单叶双曲面

B.双叶双曲面

C.椭球面

D.柱面

（7）设随机变量 $X\sim N(\mu,\sigma^2)(\sigma>0)$，记 $p=P\{X\le\mu+\sigma^2\}$，则（　）。

A. p 随着 μ 的增加而增加

B. p 随着 σ 的增加而增加

C. p 随着 μ 的增加而减少

D. p 随着 σ 的增加而减少

（8）随机试验 E 有三种两两不相容的结果 A_1,A_2,A_3，且三种结果发生的概率均为 $\frac{1}{3}$，将试验 E 独立重复做 2 次，X 表示 2 次试验中结果 A_1 发生的次数，Y 表示 2 次试验 A_2 发生的次数，则 X 于 Y 的相关系数为（　）。

A.

B.

C.

D.

二、填空题，9~14 小题，每小题 4 分，共 24 分，请将答案写在答疑纸指定位置上.

（9）$\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{\int_0^x t\ln(1+t\sin t)dt}{1-\cos x^2}=$________________.

（10）向量场 $A(x,y,z)=(x+y+z)i+xyj+zk$ 的旋度 $rotA=$________________.

（11）设函数 $f(u,v)$ 可微， $z=z(x,y)$ 由方程 $(x+1)z-y^2=x^2f(x-z,y)$ 确定，则 $dz|_{(0,1)}=$________________.

（12）设函数 $f(x)=\arctan x-\dfrac{x}{1+ax^2}$，且 $f''(0)=1$，则 $a=$________________.

（13）行列式 $\begin{vmatrix} \lambda & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & -1 \\ 4 & 3 & 2 & \lambda+1 \end{vmatrix}=$________________.

.

（14）设 $x_1,x_2,\cdots,x_n$ 为来自总体 $X\sim N(\mu,\sigma^2)$ 的简单随机样本，样本均值 $\overline{x}=9.5$，参数 μ 的置信度为 0.95 的双侧知心区间的置信上限为 10.8，则 μ 的置信度为 0.95 的双侧置信区间为________________.

三、解答题：15~23 小题，共 94 分.请将解答写在答题纸指定位置上，解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

（15）（本题满分 10 分）

已知平面区域 $D=\{(r,\theta)\,|\,2\le r\le 2(1+\cos\theta),-\dfrac{\pi}{2}\le\theta\le\dfrac{\pi}{2}\}$，计算二重积分 $\iint\limits_D xdxdy$.

（16）（本题满分 10 分）

设函数 $y(x)$ 满足方程 $y''+2y'+ky=0$，其中 $0<k<1$.

（Ⅰ）证明：反常积分 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 收敛；

（Ⅱ）若 $y(0)=1, y'(0)=1$，求 $\int_0^{+\infty} y(x)dx$ 的值.

（17）（本题满分 10 分）

设函数 $f(x,y)$ 满足 $\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}=(2x+1)e^{2x-y}$，且 $f(0,y)=y+1$，L_t 是从点 $(0,0)$ 到点 $(1,t)$ 的光滑曲线，计算曲线积分 $I(t)=\int_{L_t}\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial x}dx+\dfrac{\partial f(x,y)}{\partial y}dy$，并求 $I(t)$ 的最小值.

.

（18）（本题满分 10 分）

设有界区域Ω由平面$2x+y+2z=2$与三个坐标平面围成，Σ为Ω整个表面的外侧，计算曲面积分$I=\iint_{\Sigma}(x^2+1)dydz-2ydzdx+3zdxdy$.

（19）（本题满分 10 分）

已知函数$f(x)$可导，且$f(0)=1, 0<f'(x)<\dfrac{1}{2}$.设数列$\{x_n\}$满足$x_{n-1}=f(x_n)(n=1,2,\cdots)$，证明：

（Ⅰ）级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}(x_{n+1}-x_n)$绝对收敛；

（Ⅱ）$\lim\limits_{n\to\infty}x_n$存在，且$0<\lim\limits_{n\to\infty}x_n<2$.

（20）（本题满分 11 分）

设矩阵 $A=\begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 2 & a & 1 \\ -1 & 1 & a \end{pmatrix}, B=\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1 & a \\ -a-1 & -2 \end{pmatrix}$.

当 a 为何值时，方程 $AX=B$ 无解、有唯一解、有无穷多解？在有解时，求解此方程.

（21）（本题满分 11 分）

已知矩阵 $A=\begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

（Ⅰ）求 A^{99}；

（Ⅱ）设 3 阶矩阵 $B=(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ 满足 $B^2=BA$.记 $B^{100}=(\beta_1,\beta_2,\beta_3)$，将 β_1,β_2,β_3 分别表示成 $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3$ 的线性组合.

（22）（本题满分 11 分）

设二维随机变量 (X,Y) 在区域 $D=\{(x,y)\,|\,0<x<1,x^2<y<\sqrt{x}\}$ 上服从均匀分布，令

$$U=\begin{cases}1, X\le Y\\ 0, X>Y\end{cases}$$

（Ⅰ）写出 (X,Y) 的概率密度；

（Ⅱ）问 U 与 X 是否相互独立？并说明理解；

（Ⅲ）求 $Z=U+X$ 的分布函数 $F(z)$.

（23）（本题满分 11 分）

设总体 X 的概率密度为 $f(x,\theta)=\begin{cases}\dfrac{3x^2}{\theta^3},0<x<\theta\\0,其他\end{cases}$，其中 $\theta\in(0,+\infty)$ 为未知参数，X_1,X_2,X_3 为总体 X 的简单随机抽样，令 $T=\max(X_1,X_2,X_3)$.

（Ⅰ）求 T 的概率密度；

（Ⅱ）确定 a，使得 aT 为 θ 的无偏估计.

2017 年考研数学一真题

一、选择题　1—8 小题．每小题 4 分，共 32 分．

1．若函数 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1-\cos\sqrt{x}}{ax}, & x>0\\ b, & x\le 0\end{cases}$ 在 $x=0$ 处连续，则

（A）$ab=\frac{1}{2}$（B）$ab=-\frac{1}{2}$（C）$ab=0$（D）$ab=2$

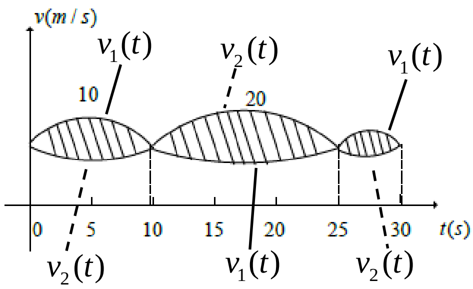
2．设函数 $f(x)$ 是可导函数，且满足 $f(x)f'(x)>0$，则

（A） $f(1)>f(-1)$　**（B）** $f(1)<f(-1)$　**（C）** $|f(1)|>|f(-1)|$　**（D）** $|f(1)|<|f(-1)|$

3．函数 $f(x,y,z)=x^2y+z^2$ 在点 $(1,2,0)$ 处沿向量 $n=(1,2,2)$ 的方向导数为

（A）12　（B）6　(C）4　（D）2

4．甲、乙两人赛跑，计时开始时，甲在乙前方 10（单位：米）处，如图中，实线表示甲的速度曲线 $v=v_1(t)$（单位：米/秒），虚线表示乙的速度曲线 $v=v_2(t)$（单位：米/秒），三块阴影部分的面积分别为 $10,20,3$，计时开始后乙追上甲的时刻为 t_0，则（　　）



（A）$t_0=10$　（B）$15<t_0<20$

（C）$t_0=25$　（D）$t_0>25$

5．设 α 为 n 单位列向量，E 为 n 阶单位矩阵，则

（A）$E-\alpha\alpha^T$ 不可逆　（B）$E+\alpha\alpha^T$ 不可逆

（C）$E+2\alpha\alpha^T$ 不可逆　（D）$E-2\alpha\alpha^T$ 不可逆

6．已知矩阵 $A=\begin{pmatrix}2&0&0\\0&2&1\\0&0&1\end{pmatrix}$，$B=\begin{pmatrix}2&1&0\\0&2&0\\0&0&1\end{pmatrix}$，$C=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&2&0\\0&0&2\end{pmatrix}$，则

（A）A,C 相似，B,C 相似　（B）A,C 相似，B,C 不相似

（C）A,C 不相似，B,C 相似　（D）A,C 不相似，B,C 不相似

7．设 A,B 是两个随机事件，若 $0<P(A)<1$，$0<P(B)<1$，则 $P(A/B)>P(A/\overline{B})$ 的充分必要条件是

（A） $P(B/A)>P(B/\overline{A})$　**（B）** $P(B/A)<P(B/\overline{A})$

（**C**）$P(\overline{B}/A) > P(B/\overline{A})$　　　　　（**D**）$P(\overline{B}/A) < P(B/\overline{A})$

8．设 $X_1, X_2, \cdots, X_n (n \ge 2)$ 为来自正态总体 $N(\mu, 1)$ 的简单随机样本，若 $\overline{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$，则下列结论中不正确的是（　　）

（A）$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布　　　　（B）$2\left(X_n - X_1\right)^2$ 服从 χ^2 分布

（C）$\sum_{i=1}^{n}(X_i - \overline{X})^2$ 服从 χ^2 分布　　　　（D）$n(\overline{X} - \mu)^2$ 服从 χ^2 分布

二、填空题（本题共 6 小题，每小题 4 分，满分 24 分．把答案填在题中横线上）

9．已知函数 $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$，则 $f^{(3)}(0) =$________.

10．微分方程 $y'' + 2y' + 3y = 0$ 的通解为______________.

11．若曲线积分 $\int_L \frac{xdx - aydy}{x^2 + y^2 - 1}$ 在区域 $D = \left\{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\right\}$ 内与路径无关，则 $a =$_______.

12．幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1} n x^{n-1}$ 在区间 $(-1, 1)$ 内的和函数为______

13．设矩阵 $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$，$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 为线性无关的三维列向量，则向量组 $A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$ 的秩为_____________.

14．设随机变量 X 的分布函数 $F(x) = 0.5\Phi(x) + 0.5\Phi\left(\frac{x-4}{2}\right)$，其中 $\Phi(x)$ 为标准正态分布函数，则 $EX =$________.

三、解答题

15.（本题满分 10 分）

设函数 $f(u, v)$ 具有二阶连续偏导数，$y = f(e^x, \cos x)$，求 $\frac{dy}{dx}\Big|_{x=0}$，$\frac{d^2y}{dx^2}\Big|_{x=0}$.

16．（本题满分 10 分）

求 $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n^2}\ln\left(1+\frac{k}{n}\right)$

17．（本题满分 10 分）

已知函数 $y(x)$ 是由方程 $x^3+y^3-3x+3y-2=0$.

18．（本题满分 10 分）

设函数 $f(x)$ 在区间 $\left[0,1\right]$ 上具有二阶导数，且 $f(1)>0$，$\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{f(x)}{x}<0$，证明：

（1）方程 $f(x)=0$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 至少存在一个实根；

（2）方程 $f(x)f''(x)+(f'(x))^2=0$ 在区间 $\left(0,1\right)$ 内至少存在两个不同实根.

19．（本题满分 10 分）

设薄片型 S 是圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $z^2=2x$ 所割下的有限部分，其上任一点的密度为 $\mu=9\sqrt{x^2+y^2+z^2}$，记圆锥面与柱面的交线为 C.

（1）求 C 在 xOy 布上的投影曲线的方程；（2）求 S 的质量 M.

20．（本题满分 11 分）

设三阶矩阵 $A=\left(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\right)$ 有三个不同的特征值，且 $\alpha_3=\alpha_1+2\alpha_2$.

（1）证明：$r(A)=2$；（2）若 $\beta=\alpha_1+\alpha_2,\alpha_3$，求方程组 $Ax=\beta$ 的通解.

21．（本题满分 11 分）

设二次型 $f(x_1,x_2,x_3)=2x_1^2-x_2^2+ax_3^2+2x_1x_2-8x_1x_3+2x_2x_3$ 在正交变换 $x=Qy$ 下的标准形为 $\lambda_1 y_1^2+\lambda_2 y_2^2$，求 a 的值及一个正交矩阵 Q.

22．（本题满分 11 分）

设随机变量 X,Y 相互独立，且 X 的概率分布为 $P\left\{X=0\right\}=P\{X=2\}=\dfrac{1}{2}$，$Y$ 的概率密度为 $f(y)=\begin{cases}2y,0<y<1\\ 0,其他\end{cases}$.

（1）求概率 P（$Y\le EY$）；

（2）求 $Z=X+Y$ 的概率密度.

23.（本题满分 11 分）

某工程师为了解一台天平的精度，用该天平对一物体的质量做了 n 次测量，该物体的质量 μ 是已知的，设 n 次测量结果 $X_1, X_2, \cdots, X_n$ 相互独立且均服从正态分布 $N(\mu, \sigma^2)$. 该工程师记录的是 n 次测量的绝对误差 $Z_i = |X_i - \mu|, (i = 1, 2, \cdots, n)$，利用 $Z_1, Z_2, \cdots, Z_n$ 估计参数 σ.

（1）求 Z_i 的概率密度；

（2）利用一阶矩求 σ 的矩估计量；

（3）求参数 σ 最大似然估计量.