

2014 年全国硕士研究生入学统一考试数学一试题

一、选择题:11~18 小题,每小题 4 分,共 32 分.下列每题给出的四个选项中,只有一个选项符合题目要求的,请将所选项前的字母填在答题纸指定位置上.

(1) 下列曲线有渐近线的是 ()

(A) $y = x + \sin x$

(B) $y = x^2 + \sin x$

(C) $y = x + \sin \frac{1}{x}$

(D) $y = x^2 + \sin \frac{1}{x}$

(2) 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, $g(x) = f(0)(1-x) + f(1)x$, 则在区间 $[0, 1]$ 上 ()

(A) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$

(B) 当 $f''(x) \geq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(C) 当 $f''(x) \leq 0$ 时, $f(x) \geq g(x)$

(D) 当 $f''(x) \leq 0$ 时, $f(x) \leq g(x)$

(3) 设 $f(x)$ 是连续函数, 则 $\int_0^1 dy \int_{\sqrt{1-y}}^{1-y} f(x, y) dx =$ ()

(A) $\int_0^1 dx \int_0^{x-1} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_0^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y) dy$

(B) $\int_0^1 dx \int_0^{1-x} f(x, y) dy + \int_{-1}^0 dx \int_{-\sqrt{1-x^2}}^0 f(x, y) dy$

(C) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) dr$

(D) $\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \int_0^{\frac{1}{\cos\theta + \sin\theta}} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} d\theta \int_0^1 f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$

(4) 若 $\int_{-\pi}^{\pi} (x - a_1 \cos x - b_1 \sin x)^2 dx = \min_{a, b \in \mathbb{R}} \left(\int_{-\pi}^{\pi} (x - a \cos x - b \sin x)^2 dx \right)$, 则

$a_1 \cos x + b_1 \sin x =$ ()

(A) $2 \sin x$

(B) $2 \cos x$

(C) $2\pi \sin x$

(D) $2\pi \cos x$

(5) 行列式 $\begin{vmatrix} 0 & a & b & 0 \\ a & 0 & 0 & b \\ 0 & c & d & 0 \\ c & 0 & 0 & d \end{vmatrix} =$ ()

- (A) $(ad-bc)^2$ (B) $-(ad-bc)^2$ (C) $a^2d^2-b^2c^2$ (D) $b^2c^2-a^2d^2$

(6) 设 $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 是 3 维向量, 则对任意常数 k, l , 向量 $\alpha_1 + k\alpha_3, \alpha_2 + l\alpha_3$ 线性无关是向量

$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ 线性无关的

- (A) 必要非充分条件 (B) 充分非必要条件
(C) 充分必要条件 (D) 既非充分又非必要条件

(7) 设随机事件 A 与 B 相互独立, 且 $P(B)=0.5$, $P(A-B)=0.3$, 则 $P(B-A) =$ ()

- (A) 0.1 (B) 0.2 (C) 0.3 (D) 0.4

(8) 设连续性随机变量 X_1 与 X_2 相互独立, 且方差均存在, X_1 与 X_2 的概率密度分别为 $f_1(x)$ 与

$f_2(x)$, 随机变量 Y_1 的概率密度为 $f_{Y_1}(y) = \frac{1}{2}[f_1(y) + f_2(y)]$, 随机变量 $Y_2 = \frac{1}{2}(X_1 + X_2)$, 则

()

- (A) $EY_1 > EY_2, DY_1 > DY_2$ (B) $EY_1 = EY_2, DY_1 = DY_2$

- (C) $EY_1 = EY_2, DY_1 < DY_2$ (D) $EY_1 = EY_2, DY_1 > DY_2$

二、填空题: 9~14 小题, 每小题 4 分, 共 24 分. 请将答案写在答题纸指定位置上.

(9) 曲面 $z = x^2(1 - \sin y) + y^2(1 - \sin x)$ 在点 $(1, 0, 1)$ 处的切平面方程为_____.

(10) 设 $f(x)$ 是周期为 4 的可导奇函数, 且 $f'(x) = 2(x-1)$, $x \in [0, 2]$, 则 $f(7) =$ _____.

(11) 微分方程 $xy' + y(\ln x - \ln y) = 0$ 满足条件 $y(1) = e^3$ 的解为 $y =$ _____.

(12) 设 L 是柱面 $x^2 + y^2 = 1$ 与平面 $y + z = 0$ 的交线, 从 z 轴正向往 z 轴负向看去为逆时针方向,

则曲面积分 $\oint_L z dx + y dz =$ _____.

(13) 设二次型 $f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 - x_2 + 2ax_1x_3 + 4x_2x_3$ 的负惯性指数是 1, 则 a 的取值范围_____.

(14) 设总体 X 的概率密度为 $f(x; \theta) = \begin{cases} \frac{2x}{3\theta^2}, & \theta < x < 2\theta \\ 0, & \text{其他} \end{cases}$, 其中 θ 是未知参数, X_1, X_2, \dots, X_n 为来自

总体 X 的简单样本, 若 $c \sum_{i=1}^n X_i^2$ 是 θ 的无偏估计, 则 $c =$ _____.

三、解答题: 15~23 小题, 共 94 分. 请将解答写在答题纸指定位置上. 解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤.

(15)(本题满分 10 分)

$$\text{求极限 } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\int_1^x \left[t^2 \left(\frac{1}{e^t} - 1 \right) - t \right] dt}{x^2 \ln \left(1 + \frac{1}{x} \right)}.$$

(16)(本题满分 10 分)

设函数 $y = f(x)$ 由方程 $y^3 + xy^2 + x^2y + 6 = 0$ 确定, 求 $f(x)$ 的极值.

(17)(本题满分 10 分)

设函数 $f(u)$ 具有 2 阶连续导数, $z = f(e^x \cos y)$ 满足 $\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 4(z + e^x \cos y)e^{2x}$. 若

$f(0) = 0, f'(0) = 0$, 求 $f(u)$ 的表达式.

(18)(本题满分 10 分) 设 Σ 为曲面 $z = x^2 + y^2$ ($z \leq 1$) 的上侧, 计算曲面积分

$$I = \iint_{\Sigma} (x-1)^3 dydz + (y-1)^3 dzdx + (z-1) dxdy$$

(19)(本题满分 10 分) 设数列 $\{a_n\}, \{b_n\}$ 满足 $0 < a_n < \frac{\pi}{2}, 0 < b_n < \frac{\pi}{2}, \cos a_n - a_n = \cos b_n$, 且

级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 收敛.

(I) 证明: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

(II) 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{b_n}$ 收敛.

(20)(本题满分 11 分) 设 $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 & -4 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, E 为 3 阶单位矩阵.

(I) 求方程组 $Ax = 0$ 的一个基础解系; (II) 求满足 $AB = E$ 的所有矩阵 B .

(21)(本题满分 11 分) 证明 n 阶矩阵 $\begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$ 与 $\begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & n \end{pmatrix}$ 相似.

(22)(本题满分 11 分)

设随机变量 X 的概率分布为 $P\{X=1\} = P\{X=2\} = \frac{1}{2}$, 在给定 $X=i$ 的条件下, 随机变量

Y 服从均匀分布 $U(0, i) (i=1, 2)$

(I) 求 Y 的分布函数 $F_Y(y)$;

(II) 求 $E(Y)$.

(23)(本题满分 11 分)

设总体 X 的分布函数为 $F(x, \theta) = \begin{cases} 1 - e^{-\frac{x^2}{\theta}}, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}$, 其中 θ 是未知参数且大于

零. X_1, X_2, \dots, X_n 为来自总体 X 的简单随机样本.

(I) 求 $E(X)$ 与 $E(X^2)$;

(II) 求 θ 的最大似然估计量 $\hat{\theta}_n$;

(III) 是否存在实数 a , 使得对任何 $\varepsilon > 0$, 都有 $\lim_{n \rightarrow \infty} P\{|\hat{\theta}_n - a| \geq \varepsilon\} = 0$?