



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PAVIA
DIPARTIMENTO DI FISICA
CORSO DI LAUREA IN FISICA

Sintesi digitale di suoni: il metodo della trasformata
funzionale.

Relazione per la laurea di
Stefano Tronci

Supervisore:
Chiar.mo Prof. Oreste Nicosini

Anno Accademico 2012/2013

This work is licensed under the Creative Commons Attribution 4.0 International License. To view a copy of this license, visit <http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>.

Indice

| | |
|--|-----------|
| Introduzione | 1 |
| 1 Generalità sul suono | 3 |
| 1.1 Il suono | 3 |
| 1.2 Vibrazione di corde | 4 |
| 1.3 Sovrapposizione e interferenza | 6 |
| 1.4 Onde stazionarie | 7 |
| 1.5 Combinazione di suoni in regime lineare: battimenti | 9 |
| 1.6 Combinazione di suoni in regime non lineare: intermodulazione | 10 |
| 1.7 Analisi e sintesi di Fourier | 11 |
| 1.8 Deformazione di una corda per sovrapposizione di onde sta- zionarie | 15 |
| 2 Strumenti a corda | 19 |
| 2.1 Classificazione ed esempi | 19 |
| 2.2 Fisica della chitarra | 21 |
| 2.2.1 Le corde | 22 |
| 2.2.2 Chitarra acustica | 24 |
| 2.2.3 Chitarra elettrica | 29 |
| 3 Sintesi e trattamento digitale dei suoni | 48 |
| 3.1 Sintesi addittiva | 48 |
| 3.2 Sintesi sottrattiva | 48 |
| 3.3 Campionamento e digitalizzazione | 49 |
| 3.4 Generatori di suono digitali | 52 |
| 3.5 Metodo della trasformata funzionale | 54 |
| 3.5.1 Applicazione della trasformata di Laplace | 56 |
| 3.5.2 Costruzione e applicazione della trasformata \mathcal{T} | 57 |
| 3.5.3 La funzione di trasferimento | 59 |
| 3.5.4 Soluzione | 60 |
| Conclusione | 63 |

Introduzione

La direzione attuale dello sviluppo tecnologico in campo di sintesi di suoni è quella dell'uso di modelli fisici di strumenti reali, siano questi acustici o elettronici. Le ragioni di questa scelta sono molteplici. Da un lato da parte dei musicisti vi è la domanda di sintetizzatori che siano in grado di simulare strumenti reali, in modo da poter testare o addirittura scrivere interi pezzi con resa sufficientemente verosimile avvalendosi del solo computer. In questo caso un sintetizzatore basato su un modello fisico, data la grande capacità di calcolo dei computer attuali, può essere vincente su una banca di suoni campionati, richiedendo un contenuto ammontare di memoria e una realizzazione che passa per uno sviluppo teorico anziché laboriose sedute di campionamento di suoni. Se questi sono i motivi più commerciali per cui la sintesi da modelli fisici sta sempre più prendendo piede, vi sono motivi intrinseci che la rendono piuttosto interessante. Innanzitutto l'analisi fisica di uno strumento musicale permette di conoscerlo e sviscerarne i segreti, comprendendo talvolta fenomeni inaspettati e controintuitivi, ma anche generali e affascinanti. Inoltre il problema dello studio di uno strumento e della realizzazione di un modello utile in vista della sintesi permette di mettere in pratica conoscenze dalle aree più disparate della matematica e della fisica, spaziando dalla aritmetica all'analisi funzionale, dalla meccanica classica all'elettromagnetismo classico. Rilevante è poi che la sintesi da modelli fisici offra ai musicisti un modo più intuitivo per sintetizzare suoni. Infatti con un sintetizzatore tradizionale prevedere quale risultato percettivo si otterrà variando i parametri di un'onda, anche se in modo molto preciso dal punto di vista matematico, è pressoché impossibile. Diverso è se il compositore può controllare parametri fisici che sono vicini alla sua esperienza. Detto con un esempio, nessuno si sa immaginare che suono produca una forma d'onda data da una gaussiana di parametri definiti ripetuta con periodicità, a meno che non si abbia esperienza a tal proposito. Più facile è però per un bassista immaginare che suono avrebbe il suo basso se le corde fossero di gomma, anche senza aver mai suonato uno strumento con tali caratteristiche. L'uso del modello fisico può essere la chiave di volta per dare ai musicisti un metodo

per ottenere nella realtà il suono che hanno in mente, così come nella storia la matematica ha fornito sistemi tonali e metodi per scrivere la musica che potessero trasformare in realtà le composizioni nella mente degli artisti.

Nella seguente tesi un metodo molto interessante per la sintesi di suoni è presentato nei suoi aspetti matematici. Si tratta del metodo della trasformata funzionale e, nonostante la sua generalità, per chiarire come opera è utile riferirsi ad uno strumento reale che sia semplice da trattare. La chitarra elettrica è per questo utile dato che, come si vedrà, è possibile ottenerne un modello al prim'ordine con relativa semplicità.

1 Generalità sul suono

1.1 Il suono

Generalmente per suono si intende una perturbazione meccanica di un mezzo che risulti udibile dal sistema uditivo umano¹. Di fatto si tratta di onde meccaniche in propagazione, come indispensabile, in un mezzo che può essere solido, liquido o gassoso. Per onda si intende una perturbazione delle condizioni iniziali di un mezzo che si propaga per via dell'interazione tra i suoi costituenti elementari. L'onda meccanica non avviene con trasporto di materia, dato che la posizione media dei costituenti elementari del mezzo rimane invariata, ma avviene con trasporto di energia per via del moto dei costituenti intorno alle loro posizioni di equilibrio (a meno che l'energia associata all'onda non sia tale da produrre alterazioni permanenti del mezzo). L'onda meccanica può essere di due tipi: longitudinale o trasversale. Nel primo caso i costituenti del mezzo oscillano lungo la direzione parallela alla direzione di propagazione della perturbazione, nel secondo in una direzione ortogonale. I solidi possono supportare onde di entrambi i tipi, mentre i fluidi possono supportare solo onde longitudinali, ammettendo onde trasversali solo nelle superfici di separazione con altri mezzi (si pensi, ad esempio, alle increspature sul pelo dell'acqua, alla separazione tra acqua e aria). La velocità v con cui la perturbazione si propaga nel mezzo in questione è detta velocità del suono e risulta legata alla densità, generalmente funzione della temperatura. Ad ogni modo la perturbazione è affetta dal moto del mezzo in sé, dalla sua inerzia, elasticità e viscosità. Caratterizzanti di un'onda sono le seguenti grandezze:

- Frequenza f , ovvero il numero di oscillazioni per unità di tempo. Il suono udibile ha frequenza compresa tra i 20 Hz e i 20 kHz.
- Lunghezza d'onda λ , ovvero la distanza tra due massimi consecutivi della forma d'onda.

¹Una definizione più corretta di suono è data in [3], dove è definito come *la sensazione, com'essa si manifesta a livello cerebrale, di una perturbazione di natura meccanica, a carattere oscillatorio, che interessa il mezzo interposto tra sorgente e ascoltatore.*

- Ampiezza, ovvero l'escursione tra massimo e minimo della forma d'onda.
- Direzione di propagazione, individuata dal vettore \vec{k} detto vettore d'onda, avente come modulo il numero d'onda k .
- Fronte d'onda, cioè il luogo dei punti rappresentativi dell'onda aventi la stessa fase.

Nel seguito saranno date, quando opportune, le relazioni che legano queste e altre grandezze. Esiste modo di derivare dai principi della meccanica una equazione differenziale le cui soluzioni, fissate le condizioni iniziali, sono le onde in un mezzo. Questa è l'equazione di d'Alembert:

$$\nabla^2 u - \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = 0$$

dove la velocità v è generalmente funzione della posizione \vec{r} e della frequenza f , qualora il mezzo sia dispersivo. La soluzione u è detta funzione d'onda e può essere interpretata in vario modo, dalla pressione acustica allo spostamento di punti materiali dalla posizione d'equilibrio.

1.2 Vibrazione di corde

Tipicamente gli strumenti musicali a corda utilizzano corde fissate ad entrambi gli estremi come vibratorii primari. Se una corda inizialmente in quiete viene eccitata si assisterà ad un transitorio ricco di vibrazioni spurie di una vasta gamma continua di frequenze. Questa fase è detta fase di attacco. Dopo un certo tempo, se la corda è lasciata libera, la vibrazione va a regime e le onde che si instaurano sono stazionarie, ovvero l'oscillazione avviene nel tempo senza propagazione nello spazio. Queste onde sono di lunghezze d'onda ben definite e sono dette modi vibrazionali. I modi sono caratteristici del particolare sistema e vengono tutti attivati a seguito dell'eccitazione della corda, sebbene i pesi relativi tra di essi e le loro stesse evoluzioni dipendano dalla modalità di eccitazione e da altri fattori (come l'eventuale accoppiamento con oscillatori secondari, ad esempio, o la presenza di smorzamenti).

Quando i modi sono attivi si dice che la corda è entrata nella fase intermedia. La vibrazione risultante è destinata a spegnersi nel tempo per via del trasferimento d'energia tra sistema oscillante e ambiente e per la contemporanea presenza di fenomeni di smorzamento. Lo spegnersi della vibrazione è detto fase di decadimento.

Il punto di partenza per descrivere le vibrazioni di una corda ideale (perfettamente elastica e senza accoppiamenti con altri sistemi) è l'equazione delle onde piane, caso unidimensionale dell'equazione di d'Alembert:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \quad (1)$$

dove la funzione d'onda $y = y(x, t)$ dipende dalla posizione x lungo la direzione di propagazione dell'onda e dal tempo t e rappresenta lo spostamento di un punto della corda rispetto alla posizione di equilibrio in direzione ortogonale alla direzione di propagazione dell'onda. v è la velocità di fase ed è legata alla densità lineare della corda e alla tensione a cui è sottoposta. Le proprietà di questa equazione, che è una equazione differenziale alle derivate parziali lineare e omogenea del secondo ordine, assicurano la validità del cosiddetto principio di sovrapposizione lineare: *la somma di soluzioni dell'equazione delle onde piane è a sua volta una soluzione.*

Questo fatto è di cruciale importanza e permette di costruire la funzione d'onda per le onde stazionarie della corda partendo dalla soluzione particolare di onda viaggiante:

$$y(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t + \phi) \quad (2)$$

dove il numero d'onda k e la pulsazione ω obbediscono alle note relazioni

$$k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad , \quad \omega = 2\pi f \quad , \quad f = \frac{v}{\lambda} \quad , \quad T = \frac{1}{f} \quad (3)$$

dove T è detto periodo dell'onda ed è la distanza temporale tra due punti aventi la medesima fase. ϕ è un arbitrario fattore di fase.

1.3 Sovrapposizione e interferenza

Si supponga che due onde viaggianti come definite in (2), di pari frequenza e per semplicità di pari ampiezza (ma di differente rapporto di fase), si incontrino nella loro propagazione. In virtù dell'appena enunciato principio di sovrapposizione lineare si deve avere per l'onda risultante, etichettando le due onde rispettivamente

$$y_1(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t + \phi_1) \quad , \quad y_2(x, t) = y_0 \sin(kx - \omega t + \phi_2)$$

il risultato

$$y(x, t) = y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2y_0 \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right) \sin\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)$$

dove si è fatto uso della prima formula di prostaferesi. Si è al cospetto di un'onda di frequenza e lunghezza d'onda pari a quella delle onde iniziali, ma l'ampiezza dipende dalla differenza di fase. Le condizioni in cui l'ampiezza è minima e massima sono rispettivamente

$$\phi_1 - \phi_2 = \pi + 2n\pi \quad , \quad \phi_1 - \phi_2 = n\pi \quad ; \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Due onde possono presentare sfasamento per motivi disparati, ad esempio una emissione non contemporanea o l'aver percorso cammini differenti dalla sorgente al punto in cui si sovrappongono, come si può vedere sommando onde con diversi cammini x_1 e x_2 . Il fenomeno dell'interferenza, qui dettagliato in un caso semplice e utile alla trattazione seguente, è del tutto generale e può avvenire anche tra onde di diversa ampiezza, purchè coerenti, cioè tali che il rapporto di fase rimanga sufficientemente stabile nel tempo per poter apprezzare come effetto stazionario la modulazione che esso opera nell'ampiezza globale della perturbazione complessiva e quindi nell'intensità dell'onda, grandezze intimamente legate.

1.4 Onde stazionarie

Le onde stazionarie si riscontrano quando le condizioni al contorno per la risoluzione dell'equazione delle onde impongono una limitazione delle oscillazioni nello spazio. Questo è particolarmente semplice da vedere nel caso della corda a estremi fissi, che è vincolata a non oscillare negli estremi. L'equazione di d'Alembert (1) viene allora corredata dalle condizioni al contorno

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \forall t$$

dove L è la lunghezza della corda. La soluzione più generale per l'equazione con queste condizioni è della forma

$$y(x, t) = 2y_0 \sin(kx) \cos(\omega t) = y_0 \sin(kx - \omega t) + y_0 \sin(kx + \omega t) \quad (4)$$

dove nell'ultimo passaggio si è usata la prima formula di Werner. Questa scrittura illustra contemporaneamente due fatti.

In primo luogo le dipendenze dalla posizione e dal tempo sono fattorizzate. Questo comporta che le posizioni per i nodi e per i ventri siano fisse, identificate dai punti x della corda dove $\sin(kx)$ vale rispettivamente 0 o 1. Cioè:

$$x_{\text{nod}} = \frac{n\pi}{k} \quad , \quad x_{\text{ventri}} = \frac{(2n+1)\pi}{2k} \quad , \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

in completo accordo con la stazionarietà dell'onda.

In secondo luogo si vede, dopo il secondo uguale in (4), che l'onda stazionaria può essere espressa come somma di onde viaggianti in direzioni opposte. Oltre a dare ragione dell'affermazione fatta precedentemente sul principio di sovrapposizione, ciò ha un evidente significato fisico se si considera il moto della corda. Infatti una perturbazione che si propaga lungo una corda viene riflessa quando arriva ad un estremo. Essendo l'estremo vincolato l'onda riflessa presenta fase invertita rispetto alla prima. Questo matematicamente può essere espresso imponendo che l'onda riflessa sia un'onda viaggiante in direzione opposta all'onda primaria. Sulla corda allora si sovrappongono le

onde progressive e regressive in questione portando, con la loro interferenza, all'onda stazionaria.

Ora, è possibile ricavare una precisa relazione tra lunghezza L della corda e lunghezze d'onda di modi stazionari sostenibili dalla corda. Infatti per quanto detto deve essere

$$y(0, t) = y(L, t) = 0 \quad \forall t \Rightarrow 2y_0 \sin(k0) \cos(\omega t) = 2y_0 \sin(kL) \cos(\omega t) = 0 \quad \forall t$$

Ovviamente $\sin(k0) = 0$, quindi si deduce

$$\sin(kL) = \sin\left(\frac{2\pi L}{\lambda}\right) = 0 \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2\pi L}{\lambda} = n\pi \quad , \quad n = 1, 2, \dots$$

ovvero:

$$\lambda = \lambda_n = \frac{2L}{n} \quad , \quad n = 1, 2, \dots \quad (5)$$

Queste lunghezze d'onda sono le lunghezze d'onda dei modi normali della corda e sono tutte contenute un numero intero di volte nel doppio della lunghezza della corda. Si conviene chiamare il modo con $n = 1$ modo fondamentale e i successivi armoniche superiori o ipertoni. Nel caso in cui la corda non sia dispersiva (la velocità di propagazione delle onde non dipende dalla loro frequenza) si può scrivere, usando le (3)

$$f_n = \frac{v}{\lambda_n} = \frac{n}{2L} v = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{T}{\rho_l}} = n f_1 \quad (6)$$

dove T è la tensione applicata alla corda e ρ_l è la densità lineare della corda. Nel caso in questione allora tutti i modi hanno frequenza multipla del modo fondamentale, ma nella realtà tutti i mezzi sono dispersivi per via delle loro proprietà meccaniche. Allora le frequenze degli ipertoni non saranno multipli esatti. Questo fenomeno è noto come inarmonicità degli ipertoni e, nonostante sia al prim'ordine trascurabile negli strumenti a corda, l'orecchio umano è sufficientemente sensibile da cogliere differenze nella "qualità" del

suono per merito di (anche) questi effetti.

1.5 Combinazione di suoni in regime lineare: battimenti

I battimenti sono un fenomeno tipico della sovrapposizione di onde di differente frequenza. Essi si manifestano nella generazione di un'onda di frequenza intermedia tra le due in sovrapposizione la cui ampiezza è modulata nel tempo. Infatti, siano $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ due onde viaggianti di pari ampiezza (come sempre, per semplicità) e diverse pulsazioni e vettori d'onda:

$$y_1(x, t) = y_0 \sin(k_1 x - \omega_1 t) \quad , \quad y_2(x, t) = y_0 \sin(k_2 x - \omega_2 t)$$

Allora

$$y_1(x, t) + y_2(x, t) = 2y_0 \cos\left(\frac{\Delta k}{2}x + \frac{\Delta \omega}{2}t\right) \sin(\bar{k}x + \bar{\omega}t)$$

dove si è usata, come di consuetudine, la prima formula di prostaferesi e si sono definiti Δk , $\Delta \omega$, \bar{k} e $\bar{\omega}$ come segue:

$$\Delta k \doteq k_1 - k_2 \quad , \quad \Delta \omega \doteq \omega_1 - \omega_2 \quad , \quad \bar{k} \doteq \frac{k_1 + k_2}{2} \quad , \quad \bar{\omega} \doteq \frac{\omega_1 + \omega_2}{2}$$

È evidente quindi che la sovrapposizione di due onde di frequenza diversa si manifesta come un'onda viaggiante di frequenza pari alla media tra le frequenze delle onde primarie, detta onda portante, modulata da un'onda di frequenza pari alla metà della differenza tra le frequenze delle onde primarie, detta involuppo. Dal punto di vista fisico i battimenti sono intuitivi se si pensano le onde y_1 e y_2 congelando la variabile di posizione x . Ne consegue che in alcuni istanti di tempo le onde si trovano in fase e in altri in controfase, sommandosi o elidendosi quindi in funzione del tempo t .

I battimenti sono un fenomeno del tutto generale implicato dal principio di sovrapposizione. Tuttavia rivestono notevole interesse dal punto di vista psicoacustico, essendo direttamente legati alle sensazioni di gradimento da

parte del sistema uditivo, spaziando dalle sensazioni gradevoli date da una modulazione a bassa frequenza fino alle sensazioni sgradevoli nel caso di modulazione di frequenza elevata. Inoltre è fondamentale la loro applicazione nell'accordatura di strumenti musicali. Infatti, se la nota da accordarsi viene emessa assieme ad una nota campione generata da un oscillatore, un diapason o un altro strumento eletto a riferimento, si assisterà al fenomeno dei battimenti. L'ampiezza nel tempo della perturbazione collettiva sarà allora tanto più stabile quanto le frequenze tra nota di riferimento e nota da intonare saranno prossime. Si cerca proprio il punto di massima stabilità udibile dell'ampiezza, cioè quando l'ampiezza appare costante nel tempo.

1.6 Combinazione di suoni in regime non lineare: intermodulazione

La risposta dei mezzi in cui le onde si propagano ha notevoli influenze sulle vibrazioni risultanti di più onde in propagazione dentro essi. Questo avviene perché le proprietà dei mezzi stessi possono essere variate dalle perturbazioni medesime (si pensi, ad esempio, alla pressione di una colonna di fluido). Siano $y_1(x, t)$ e $y_2(x, t)$ due onde viaggianti di pari ampiezza unitaria (per semplicità) e pulsazioni rispettivamente ω_1 e ω_2 . Se il mezzo è un elemento non lineare l'ampiezza della prima onda viene modulata dalla presenza della seconda attraverso l'azione che questa esercita sulle proprietà del mezzo e viceversa. Si tratta del fenomeno dell'intermodulazione e viene incarnato matematicamente attraverso il principio di combinazione, da affiancarsi a quello di sovrapposizione, che dà luogo alla cosiddetta modulazione prodotto, ottenuta moltiplicando tra loro le funzioni d'onda. Ponendo il sistema di riferimento nel punto in cui le onde si miscelano si ha:

$$\begin{aligned} y_1(x, t) y_2(x, t) &= \sin(\omega_1 t) \sin(\omega_2 t) = \\ &= -\frac{1}{2} \{ \cos[(\omega_1 + \omega_2) t] - \cos[(\omega_1 - \omega_2) t] \} = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} [\cos(\omega_+ t) - \cos(\omega_- t)]$$

dove nell'ultima uguaglianza si è usata la terza formula di Werner. È evidente che l'intermodulazione delle due onde ha dato luogo a una nuova onda sovrapposizione di due nuove onde con pulsazioni $\omega_{\pm} \doteq \omega_1 \pm \omega_2$ diverse dalle pulsazioni di partenza. Questo fenomeno porta allora alla coesistenza di 4 onde in totale: le 2 appena dette, y_1 e y_2 . Il contributo del mezzo può poi portare distorsione armonica, cioè la forma stessa dell'onda viene modificata per via di come il mezzo risponde alle sollecitazioni dell'onda, effetto che, come si vedrà, è descrivibile con la comparsa di armoniche superiori. Se il mezzo è l'orecchio umano si presentano sia gli effetti di intermodulazione (con dominanza di onde di pulsazione ω_-) che la distorsione armonica, detta in questo caso distorsione armonica aurale. La scoperta dell'intermodulazione è dovuta a Giuseppe Tartini che, nel 1714, notò che la combinazione di suoni di diversa frequenza porta alla produzione di suoni non emessi dalla sorgente. Il suono di pulsazione ω_- , come detto più intenso del suono di pulsazione ω_+ se la combinazione avviene nell'orecchio, fu l'oggetto dello studio del Tartini, che lo battezzò *terzo suono*.

1.7 Analisi e sintesi di Fourier

Uno dei risultati più importanti dell'analisi matematica nell'ambito di funzioni periodiche è senz'altro il teorema di Fourier. Esso fornisce un modo per costruire le funzioni rappresentative delle onde come serie infinita di onde sinusoidali. In accordo con il principio di sovrapposizione il modo più generale per rappresentare una qualsiasi funzione d'onda periodica $y(x, t)$ è quindi dato ed è prontamente sfruttabile.

Teorema 1.1. *Sia $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione reale di variabile reale limitata, periodica di periodo τ , continua e dotata di derivata continua a tratti e limitata. Allora, $\forall x \in \mathbb{R}$, la serie, detta di Fourier,*

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{2\pi n}{\tau} x\right) + b_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\tau} x\right) \right]$$

converge uniformemente a $f(x)$. Inoltre per i coefficienti a_n e b_n , detti coefficienti di Fourier, valgono $\forall x_0 \in \mathbb{R}$ le relazioni:

Per $n = 1, 2, \dots$:

$$a_n = \frac{2}{\tau} \int_{x_0}^{x_0+\tau} f(x) \cos\left(\frac{2\pi n}{\tau}x\right) dx, \quad b_n = \frac{2}{\tau} \int_{x_0}^{x_0+\tau} f(x) \sin\left(\frac{2\pi n}{\tau}x\right) dx$$

Per $n = 0$:

$$\frac{a_0}{2} = \frac{1}{\tau} \int_{x_0}^{x_0+\tau} f(x) dx, \quad b_0 = 0$$

Essendo $y(x, t)$ una funzione di due variabili per sfruttare il teorema di Fourier occorre usare un semplice artificio: congelare x o t a seconda di rispetto a quale variabile sono rispettate le ipotesi (o a seconda degli obiettivi o della comodità). Pertanto per una funzione d'onda periodica sussistono le rappresentazioni alternative

$$y(x_{\text{congelato}}, t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(n\omega t) + b_n \sin(n\omega t)]$$

$$y(x, t_{\text{congelato}}) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} [a_n \cos(nkx) + b_n \sin(nkx)]$$

dove a fare le veci del periodo τ saranno rispettivamente il periodo T dell'oscillazione nel tempo e la lunghezza d'onda λ dell'oscillazione nello spazio (nei rispettivi casi gli argomenti delle funzioni trigonometriche sono dati dalle (3)). Oltretutto è chiaro che il primo coefficiente a_0 è legato alla media integrale della funzione d'onda sul periodo, divenendo nullo pertanto in caso di funzione d'onda simmetrica. Si può dimostrare infine la possibilità di scrivere la serie di Fourier nella forma

$$A_0 + \sum_{j=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{2\pi n}{\tau}x + \phi_j\right), \quad A_n = \sqrt{a_n^2 + b_n^2}, \quad \tan \phi_n = -\frac{b_n}{a_n}$$

che rende evidente come ogni forma d'onda sia scomponibile in una serie di onde pure, pesate da opportune ampiezze e dotate di opportune fasi, che ne vanno a costituire quindi la composizione spettrale. Se si sceglie di rappresentare la funzione a x congelata gli argomenti delle onde pure contengono pulsazioni (e quindi frequenze) multiple di una pulsazione fondamentale ω , cioè contengono armoniche superiori. Il teorema può essere usato per analizzare una forma d'onda e scoprire quindi di quali armoniche è composta la perturbazione, processo noto come analisi di Fourier (o analisi armonica). Alternativamente, avendo una forma d'onda come obiettivo, si possono trovare armoniche pure con corrispondenti ampiezze e fasi da sommarsi additivamente per ottenerla, procedimento detto sintesi di Fourier. Nel caso in cui siano necessarie realmente infinite armoniche, come nel caso dell'onda quadra, ovviamente ci si limiterà alla sintesi del più alto numero possibile di armoniche. Grazie al teorema di Fourier si può comprendere come la modifica di una forma d'onda in propagazione in un mezzo sia spiegabile come comparsa di armoniche superiori, dato che a diverse forme d'onda corrispondono diverse serie di Fourier. Per tale motivo, come detto nel paragrafo precedente, tale forma di distorsione è chiamata distorsione armonica.

Un fatto molto importante, dato che non tutte le funzioni d'onda sono periodiche, è che la teoria di Fourier è estendibile al caso di funzioni definite in tutto \mathbb{R} che siano integrabili ma non necessariamente periodiche. Questo grazie alla trasformata di Fourier:

$$\tilde{f}(\omega) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(t) e^{-i\omega t} dt \quad , \quad f(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega$$

$$\tilde{f}(k) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} f(x) e^{-ikx} dx \quad , \quad f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \tilde{f}(k) e^{ikx} dk$$

dove $\tilde{}$ denota la trasformata e le formule che permettono di ritornare alla forma originaria di f conoscendo la trasformata \tilde{f} sono dette formule di inversione. Ancora, per applicare il tutto a $y(x, t)$, si può scegliere di trasfor-

mare rispetto alla variabile spaziale o rispetto a quella temporale, congelando l'altra. Si vede come la trasformazione permetta di esprimere una funzione nel dominio di una variabile coniugata, scomponendola di fatto nell'insieme continuo di onde (pacchetto) di cui è composta. Questo insieme è discreto nel caso di funzioni periodiche e ci si riconduce quindi alla serie. La teoria completa delle trasformate di Fourier prende vita nell'ambito dell'analisi funzionale ed è alquanto complessa. Notevole però è il risultato di indeterminazione tonale. Se una funzione assolutamente continua $f(z)$, con z una qualsiasi variabile reale, è a quadrato sommabile assieme a $zf(z)$ allora vale, se f è normalizzata:

$$\Delta(f) \Delta(\tilde{f}) \geq \frac{1}{16\pi^2}$$

dove $\Delta(g)$ indica la varianza di una funzione assolutamente continua e normalizzata:

$$\int_{\mathbb{R}} |g(z)|^2 dz = 1, \quad \Delta(g) = \int_{\mathbb{R}} z^2 |g(z)|^2 dz$$

Con riferimento al caso in cui z identifica il tempo t , questo fatto mostra che la larghezza del profilo temporale di un pacchetto d'onde è legata alla larghezza del profilo nella pulsazione ω . Tanto più un pacchetto d'onda è determinato in pulsazione, cioè stretto intorno ad una pulsazione centrale (nelle formule sopra non esplicitata) allora tanto più larga dovrà essere la forma del pacchetto nel tempo. È per questo che i transitori, oscillazioni di vita breve tra due condizioni più stabili, hanno componenti da una vasta gamma continua di frequenze, come anticipato nel paragrafo 1.2. Un discorso analogo vale anche per la coppia di variabili coniugate x e k . Di fatto un'onda monocromatica, essendo infinitamente estesa (nel tempo e nello spazio), è poco realistica, in quanto tutte le forme d'onda hanno durata temporale e larghezza spaziale finita; sono cioè pacchetti d'onde. Un pacchetto è equivalentemente pensabile come un'onda modulata da un certo involuppo e occorre distinguere la velocità di fase $\frac{\omega}{k}$ con cui viaggia l'onda modulata dalla velocità di gruppo $\frac{d\omega}{dk}$ con cui viaggia la modulante. Solo l'ultima rappresenta la

velocità con cui avanza l'energia, dato che all'esterno del pacchetto non si ha alcun moto oscillatorio.

La composizione spettrale di un suono ha notevoli risvolti psicoacustici, dato che la “qualità” del suono (o timbro) è dato proprio dalla composizione della funzione d'onda in termini di armoniche. Inoltre è evidente come lo sviluppo temporale di un suono influenzi la composizione spettrale di questo, introducendo quindi forti differenze percettive tra strumenti a forte transitorio (come le percussioni) e quelli a suono più continuo (come gli archi), facendo sì che questi trovino ruoli ben diversi nelle composizioni musicali.

1.8 Deformazione di una corda per sovrapposizione di onde stazionarie

Come detto, la vibrazione di una corda a regime è data dalla sovrapposizione di modi stazionari. Si supponga di poter trascurare ogni smorzamento a carico dell' n -esimo modo. Allora, a regime, la funzione d'onda rappresentativa della vibrazione della corda sarà data da una somma su tutti i modi stazionari del tipo (4) aventi lunghezze d'onda (5), cioè:

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n} x\right) \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (7)$$

dove b_n è il peso complessivo con cui è presente l' n -esimo modo e ω_n è ottenuta da (6) usando le (3), che forniscono pure l'argomento del seno. ϕ_n tiene conto dei ritardi di fase presenti tra i vari modi, che non si attivano tutti contemporaneamente. A questa forma la corda arriverà a seguito di una transizione a partire dallo stato iniziale, dato dal modo di eccitazione. Se la corda, di lunghezza L , viene pizzicata; cioè se ad un suo punto $\frac{L}{K}$, con K costante reale positiva, viene applicata una forza in direzione ortogonale alla corda per poi rilasciarla, lo stato iniziale $y(x, 0)$ della corda avrà profilo triangolare, essendo tale la forma della corda all'istante prima del rilascio. Ponendo il sistema di riferimento ad un estremo della corda e definita la geometria della stessa come in Figura 1 la forma esplicita di $y(x, 0)$ è:

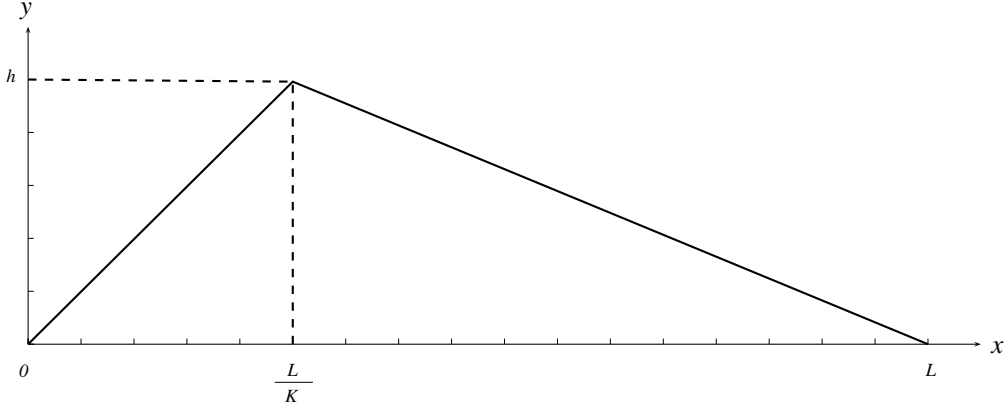


Figura 1: Deformazione iniziale di una corda pizzicata.

$$y(x, 0) = \begin{cases} \frac{hK}{L}x & \text{Se } x \in [0, \frac{L}{K}) \\ \frac{hK}{L(K-1)}(L-x) & \text{Se } x \in [\frac{L}{K}, L] \end{cases} \quad (8)$$

che rispetta le ipotesi del teorema 1.1 di Fourier. Pertanto questa deformazione può essere espressa come serie di Fourier. Ma vale anche, da (7),

$$y(x, 0) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \sin\left(\frac{2\pi}{\lambda_n}x\right) \cos(\phi_n)$$

Al tempo 0 le armoniche che costruiscono la funzione rappresentativa dello stato della corda saranno presenti contemporaneamente, pertanto $\phi_n = 0$ per ogni n . Allora $\cos(\phi_n)$ è uguale a 1 e la serie appena scritta è una serie di seni, cioè è una serie di Fourier tale che $a_n = 0$ per ogni n . In virtù del teorema di Fourier allora si possono trovare tutti i coefficienti b_n in modo che la serie esprima la forma iniziale della corda. Estendendo (8) in modo tale che sia periodica di periodo $\lambda = 2L$ i coefficienti sono così dati:

$$b_n = \frac{1}{L} \int_0^{2L} y(x, 0) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) dx = \frac{2hK^2}{\pi^2 (K-1) n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{K}\right)$$

per trovare l'evoluzione temporale in $y(x, t)$ basta inserire i coefficienti b_n nella serie e includere il termine in coseno. Come notato nel paragrafo (1.4) nel caso di corda non dispersiva i modi normali hanno tutti frequenza multipla

del modo fondamentale a frequenza f_1 . Dato che $\omega_n = 2\pi f_n$ ciò vale pure per la pulsazione. Allora si ottiene, usando la relazione tra lunghezze d'onda dei modi normali di una corda e lunghezza della stessa data in (5):

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2hK^2}{\pi^2 (K-1) n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{K}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \cos(n\omega_1 t) \quad (9)$$

che è l'equazione della corda non dispersiva pizzicata senza smorzamento. Si nota subito che la composizione in armoniche delle vibrazioni di una corda dipende dal punto di pizzicatura. Infatti, ritornando all'istante iniziale, se la pizzicatura avviene ad esempio al centro della corda ($K = 2$) allora $\sin\left(\frac{\pi n}{K}\right) = \sin\left(\frac{\pi n}{2}\right) = 0$ per ogni n pari. Ciò significa che le corrispondenti armoniche non sono presenti all'istante iniziale. Più in generale, per ogni valore di K tacciono le armoniche per cui n è un multiplo intero di K . Ciò è in accordo con la trattazione fatta nel paragrafo 1.4. Infatti la pizzicatura in un certo punto non può attivare armoniche che in quel punto hanno un nodo, bensì attiverà quelle che vi hanno un ventre.

Si può dimostrare che un oscillatore armonico soggetto ad una forza di attrito viscoso presenta decadimento esponenziale dell'ampiezza di oscillazione. Viene allora naturale pensare di completare l'equazione (9) inserendo per ogni armonica un termine di smorzamento esponenziale. Detto Γ_n il coefficiente di smorzamento per la n -esima armonica si ha:

$$y(x, t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2hK^2}{\pi^2 (K-1) n^2} \exp\left(-\frac{\Gamma_n}{2}t\right) \sin\left(\frac{\pi n}{K}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{L}x\right) \cos(n\omega_1 t) \quad (10)$$

che è l'equazione della corda non dispersiva pizzicata con smorzamento. Lo smorzamento a carico delle armoniche contribuisce alla definizione dello spettro delle oscillazioni a regime e della fase di decadimento, introducendo una dipendenza dal tempo addizionale. Insieme al fatto che ulteriori armoniche possono prendere vita per via dell'interazione con altri sistemi accoppiati alla corda (come casse di risonanza o altre corde, ad esempio), si può dire che la diversità della condizione iniziale nella pizzicatura della corda affligge in mi-

sura maggiore la fase di attacco, mentre le fasi intermedie e di decadimento esibiscono differenze meno marcate.

2 Strumenti a corda

2.1 Classificazione ed esempi

Molteplici sono gli strumenti a corda, cioè gli strumenti dove le corde sono i vibrator primari. Essi differiscono per le caratteristiche costruttive, per i modi di eccitazione delle corde e per la capacità o meno di intervenire sulla lunghezza attiva delle corde, variando quindi la frequenza di oscillazione delle ultime. Nel seguito si riassumono le classi principali con alcuni esempi.

Cordofoni Semplici: strumenti a corda sprovvisti di manico. A seconda del modo di eccitazione della corda sono divisibili in:

a pizzico: salterio, cetra da tavolo e arpa. Di questa famiglia fanno parte anche strumenti a tastiera, come la spinetta e il clavicembalo.

a percussione: salterio, dulcimer, qanun. Fra gli strumenti a tastiera vi appartiene, ad esempio, il pianoforte.

ad aria: arpa eolica.

Cordofoni Composti:

a giogo: lira antica.

a manico: liuti, chitarra, archi.

Una classificazione alternativa o complementare può essere fatta tra strumenti a corda libera o con manico, che si possono ulteriormente dividere in strumenti tastati o non tastati.

Strumenti a corde libere: non è possibile variare la lunghezza attiva delle corde vincolandole in un certo punto. Ne fanno parte i già citati salterio, dulcimer e arpa; ma l'arpa moderna ha la capacità di intervenire sulla nota emessa dalle corde attraverso l'azione di pedali che intervengono sulla tensionatura delle ultime (vedi (6)).



Figura 2: Un Salterio.

Strumenti con manico: punti della corda possono essere vincolati alla struttura del manico. Ne fanno parte le principali famiglie:

con manico tastato: lungo il manico, più precisamente sulla tastiera, sono posizionati con precisione dei tasti, in epoca moderna metallici, che consentono l'appoggio della corda. Per ogni corda allora è possibile emettere note da un insieme discreto. Ne fanno parte, tra i tanti: chitarra, liuto, cetera.

con manico non tastato: la corda può essere appoggiata in qualsiasi punto della tastiera, dando la possibilità di emettere note da un insieme continuo. Ne fanno parte l'oud, rebab e in genere gli strumenti della famiglia degli archi.



Figura 3: Un Oud.

Sostanzialmente tutti gli strumenti, a parte le varianti elettriche con corpo *solid body*, sono dotati di cassa risonante. La cassa interviene a definire la complessità armonica del suono prodotto e il suo volume. Questo avviene tramite le sue risonanze, che alterano anche le vibrazioni delle corde per via del flusso di energia tra corde e cassa.

Gli archi possono essere inquadrati in una famiglia specifica in quanto non solo sono strumenti con manico non tastato, ma la corda viene eccitata per strofinamento da parte, appunto, dell'archetto.

La classificazione riassunta non è univoca e serve sostanzialmente per evidenziare in quanti modi diversi possono essere inventati strumenti a corda. Infatti le compenetrazioni tra classi, sia anticamente che in epoca moderna, sono tante e importanti. Si pensi ad esempio alla ghironda, uno strumento dove le corde sono attivate per attrito (come negli archi) da un cilindro di pietra ruotante, mentre l'intonazione di alcune di queste avviene tramite meccanismi controllati da tasti. Ancora, strumenti a corda libera e con manico si trovano fusi nelle chitarre-arpa o in tutti quegli strumenti dotati di corde di bordone in funzione (generalmente) di rafforzamento dei bassi. Modernamente sono apparsi bassi elettrici con manico tastato in parte della estensione bassa e non tastato nella restante, mentre anticamente sono esistiti (ed esemplari ve ne sono tuttora) archi tastati.

2.2 Fisica della chitarra

La chitarra, non diversamente da tutti gli altri strumenti, è un sistema complesso in cui un certo numero di corde sono accoppiate, attraverso vari corpi, ad oscillatori secondari. Le leggi della fisica che descrivono una chitarra spaziano da quelle della meccanica a quelle dell'elettromagnetismo. Le differenze tra i vari tipi di chitarra sono tante e importanti. Nel seguito si opererà la distinzione fondamentale tra chitarre acustiche ed elettriche, sebbene punti di contatto tra le due tipologie di strumenti esistano e molteplici siano i tipi di strumenti rispettivamente acustici ed elettrici. Meritano considerazioni specifiche le corde, dal momento che sono presenti, ovviamente, in ogni tipo di chitarra.

2.2.1 Le corde

Quanto detto nel capitolo precedente è completabile, anche solo qualitativamente, da alcune considerazioni sulle corde reali. Alla luce delle (6) si può capire come le frequenze di oscillazione di una corda siano legate alla tensione e alla densità lineare, oltre che alla lunghezza. In una chitarra si vuole che le corde destinate ad emettere le note più alte abbiano densità lineare limitata, così da non sforzare la struttura dello strumento attraverso una eccessiva tensione. Questo è realizzato tramite corde sottili e prive di avvolgimento. Per contro le corde destinate ad emettere le note più basse hanno densità lineare più alta, così da poter innalzare la tensione e quindi equilibrare le forze sulla struttura, prevenire un'ampiezza di oscillazione troppo alta della corda (che la farebbe sbattere sui tasti) e prevenire eccessivi smorzamenti, i meccanismi dei quali sono contrastati dalla tensione. Per questo tali corde presentano diametro più grande e un avvolgimento metallico. I parametri delle corde non hanno interesse solo dal punto di vista costruttivo, in vista della calibrazione complessiva delle forze agenti sulla struttura dello strumento, ma pure dal punto di vista musicale. Infatti le proprietà geometriche e fisiche delle corde, costruite generalmente in budello, nylon o metallo, influenzano decisamente il comportamento vibrazionale delle ultime per via delle diverse densità e proprietà di elasticità e inerzia che definiscono. Queste proprietà implicano l'insieme di armoniche con cui una corda reale di fatto vibra, dato che la rigidità di un elemento di corda influisce sull'ampiezza di oscillazioni a lunghezza d'onda pari a quella dell'elemento. Questo è tanto più vero per i transienti: per via della risposta alle sollecitazioni le proprietà costruttive determinano la propagazione di energia nella corda e quindi lo spettro di oscillazioni spurie nei transienti secondo quanto detto nel paragrafo 1.7. Inoltre i coefficienti Γ_n di smorzamento in (10) sono in parte dati dalle caratteristiche delle corde (quando si considera lo strumento completo sono definiti anche in virtù dell'accoppiamento con le altre parti dello strumento). A proposito degli smorzamenti, va precisato che non sono tutti esponenziali. Infatti la corda può oscillare in ogni direzione trasversale, non solo quella ortogonale al manico. A diverse direzioni di oscillazione sono associate di-

verse leggi di smorzamento, il comportamento complessivo dipende dal moto completo della corda. Come regola generale, di norma i modi più alti sono i primi ad estinguersi. Infine le caratteristiche delle corde determinano l'entità del comportamento dispersivo e quindi il fenomeno di inarmonicità degli ipertoni accennato nel paragrafo 1.4.

I modi normali delle corde fino ad ora considerati sono del tipo trasversale, ma ne esistono pure di tipo longitudinale, con frequenze ben più alte di quelli trasversali. Pure i modi longitudinali si attivano a seguito di una sollecitazione, ma per via dei meccanismi di eccitazione tipici dello strumento in questione, la pizzicatura, essi sono molto deboli e trascurabili (diverso è il caso degli archi per strofinamento dell'archetto in direzione non perfettamente ortogonale a quella delle corde).

L'accordatura tipica per una chitarra è data da

$$mi^2, la^2, re^3, sol^3, si^3, mi^4$$

dove il numero in apice si riferisce all'ottava del pianoforte in cui si colloca la nota. Conformemente a questo schema le tre corde più basse di mi^2 , la^2 e re^3 sono avvolte, le restanti sono prive di avvolgimento e il diametro decresce andando da mi^2 a mi^4 . In caso di differenti accordature, per quanto detto, è conveniente ottimizzare le configurazioni di diametro-avvolgimento al caso specifico. È da menzionare infine che generalmente le chitarre sono costruite per fornire note del sistema temperato. La scala che si realizza suonando tutte le note possibili su una corda partendo dalla più bassa alla più alta è una scala cromatica, cioè ogni nota è separata dalla precedente da un semitono. In termini matematici significa dire che la frequenza fondamentale della nota emessa al tasto m -esimo è $\sqrt[12]{2}$ volte più alta di quella della nota emessa premendo la corda al tasto $m - 1$ -esimo. Equivalentemente, riferendosi alla frequenza fondamentale f emessa dalla corda libera di lunghezza L , usando le 3 e il fatto che la lunghezza d'onda per il modo fondamentale della corda attiva è il doppio della lunghezza attiva L_m :

$$f_m = \left(\sqrt[12]{2} \right)^m f \implies L_m = \frac{L}{\left(\sqrt[12]{2} \right)^m} \quad (11)$$

A partire da queste relazioni viene ricavata la posizione corretta di ogni tasto sul manico.

2.2.2 Chitarra acustica

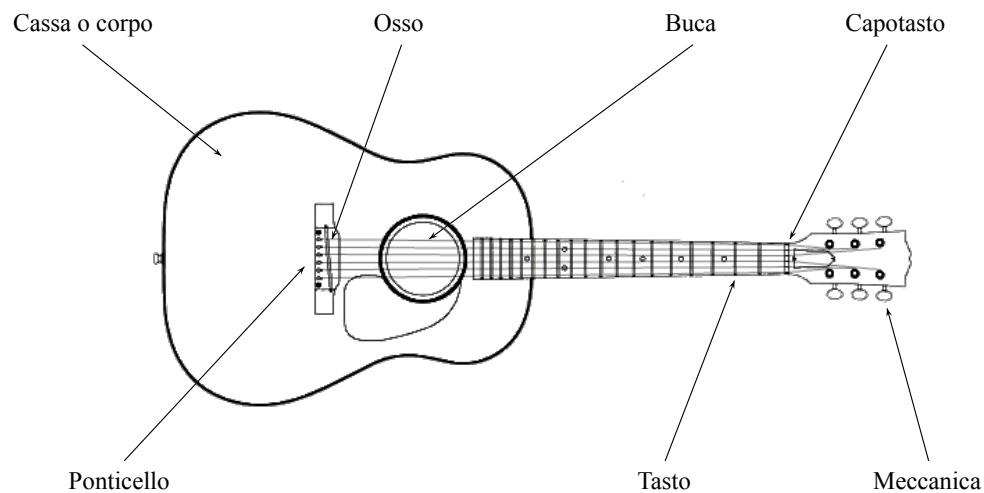


Figura 4: Anatomia di una chitarra acustica.

Caratteristiche Per chitarra acustica si intende, come detto nel paragrafo 2.1, uno strumento con manico tastato dotato di cassa di risonanza, detta corpo. Le corde, tipicamente sei, sono generalmente tese tra un ponticello incollato alla cassa e le meccaniche poste alla fine del manico (vedi Figura 4). Non mancano però strumenti con caratteristiche tipiche degli archi, con corde tese tra una cordiera e le meccaniche, con interposto un ponticello non incollato (configurazione tipica delle chitarre di tipo *archtop*). La lunghezza attiva di base delle corde è definita dalla posizione dell'osso e del capotasto, la posizione e l'inclinazione dell'osso determina l'intonazione di ogni corda. Di norma la lunghezza di corda vibrante tra capotasto e osso, detta scala, è compresa tra i 63 e i 65 cm. Le corde sono accoppiate alla cassa risonante e all'aria ivi contenuta attraverso il manico e il ponticello per mezzo della loro impedenza acustica, che è funzione delle caratteristiche geometriche e

dei materiali. Come detto, il meccanismo di trasferimento di energia tra le corde e la cassa, i cui modi sono dati dalla geometria degli elementi che la costituiscono, il materiale di cui sono fatti, come sono assemblati e il fluido di cui è riempita, ha ruolo fondamentale nella definizione del tono dello strumento, come i modi stessi, specialmente nel caso dei transienti.

Oscillazioni del corpo, dell'aria e risonanze Il corpo di una chitarra acustica è sostanzialmente un prisma cavo in legno la cui base è a forma di 8. Per come la chitarra viene tenuta dall'esecutore, con la tavola posteriore a contatto con il corpo dello strumentista, l'emissione del suono è affidata sostanzialmente alla tavola superiore (per questo fatta generalmente di legno più tenero, come l'abete), essendo la tavola posteriore ammortizzata parzialmente. Attraverso una o più buche sulla tavola superiore dello strumento le vibrazioni dell'aria contenuta nel corpo si propagano nell'ambiente circostante. Nel seguito vengono discussi separatamente i fenomeni di risonanza principali che coinvolgono il corpo e l'aria che contiene. Lo spettro di emissione di una chitarra è dato dalla composizione di questi comportamenti.

Risonanze del legno Le risonanze degli elementi in legno che compongono il corpo sono complesse e non esistono formule per prevederle. Infatti la forma della chitarra non è di facile trattazione ed è complicata da fasciature, catenature e rinforzi interni. Le risonanze di un singolo elemento dipendono dalla sua forma ma anche dalla specie della pianta usata (che ne dà le specifiche fisiche e strutturali, con tutta la variabilità biologica del caso) e da come l'elemento è stato tagliato e lavorato. Per di più, il legno ha complicate proprietà anisotrope. Grazie all'esperienza dei liutai però è noto il seguente fatto:

La risonanza fondamentale del legno si innalza con lo spessore delle tavole e con la rigidità del legno, mentre si abbassa all'aumentare della sua densità.

Le risonanze del legno possono cadere a frequenze anche molto separate, facendo sì che esso non possa risonare bene a tutte le frequenze. Un compromesso soddisfacente è l'obiettivo dei liutai.

Risonanza dell'aria La risonanza dell'aria è più semplice da inquadrare qualitativamente. Grazie infatti alla teoria sui risonatori di von Helmholtz, dato un recipiente costituito da pareti rigide di volume V e dotato di aperture di forma circolare di area totale A la formula, indicando con v la velocità del suono nell'aria,

$$f = 0.17v \frac{\sqrt[4]{A}}{\sqrt{V}} \quad (12)$$

fornisce la frequenza di risonanza per l'aria contenuta nel recipiente. Questa per i parametri tipici di una chitarra acustica risulta essere intorno ai 100 Hz. Si comprende allora come la risonanza dell'aria sia importante ai fini del rafforzamento dei modi bassi mentre il legno, per via della sua alta densità, è responsabile per lo spettro di emissione alle alte frequenze.

Accoppiamento tra aria e tavole della cassa Dato che la tavola posteriore è parzialmente ammortizzata uno studio dell'interazione tra il moto oscillatorio della cassa con l'aria all'interno contenuta è semplificabile, in prima approssimazione, considerando solo la tavola superiore come componente della cassa. Semplificando ulteriormente, tavola e aria sono identificabili con due masse m (per semplicità identiche) oscillanti elasticamente con costante elastica k accoppiate tramite una forza elastica² di costante K , come in Figura 5.

Le equazioni del moto risultano essere:

$$m \frac{d^2 x_1}{dt^2} = -kx_1 - K(x_1 - x_2)$$

²La forza elastica è ottima per rappresentare in prima approssimazione l'interazione di corpi che si muovono intorno ad una configurazione di equilibrio. Questo perché ogni potenziale $V(x)$ di interazione differenziabile con continuità almeno 2 volte nel suo dominio è rappresentabile nell'intorno di un punto di minimo (equilibrio stabile) a nella forma

$$V(x) = V(a) + \frac{1}{2} \frac{d^2 V(a)}{dx^2} (x - a)^2 + o((x - a)^2)$$

grazie alla formula di Taylor. La forma scritta, a parte il resto, è un potenziale elastico.

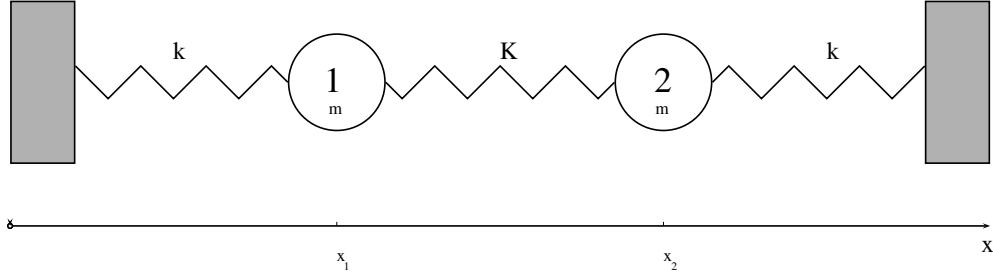


Figura 5: Masse oscillanti accoppiate.

$$m \frac{d^2 x_2}{dt^2} = -kx_2 - K(x_2 - x_1)$$

la cui soluzione generale è data dalla sovrapposizione di due modi normali, uno detto sincrono in cui non vi è deformazione della molla centrale dato da

$$\begin{cases} x_1(t) = A \sin(\omega_s t) \\ x_2(t) = A \sin(\omega_s t) \end{cases}, \quad \omega_s = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

e uno detto antisincrono, dove le masse si muovono l'una in opposizione all'altra con susseguente deformazione della molla centrale dato da

$$\begin{cases} x_1(t) = B \sin(\omega_a t) \\ x_2(t) = -B \sin(\omega_a t) \end{cases}, \quad \omega_a = \sqrt{\frac{k + 2K}{m}}$$

Ora, se si identifica con la prima equazione del moto il moto della massa rappresentativa della tavola armonica, la forza impressa dal ponticello per merito della vibrazione della corda può essere approssimata con una forma del tipo $F \sin(\omega t)$. Questa forza va inserita nell'equazione per completare il bilancio. Le soluzioni in questo caso divengono:

$$\begin{cases} x_1(t) = \frac{F(\omega_s^2 + \omega_a^2) - \omega^2}{m(\omega_s^2 - \omega^2)(\omega_a^2 - \omega^2)} \sin(\omega t) \\ x_2(t) = \frac{2KF}{m(\omega_s^2 - \omega^2)(\omega_a^2 - \omega^2)} \sin(\omega t) \end{cases}$$

è evidente allora la presenza di risonanze a ω_s e ω_a . Per i detti valori delle pulsazioni le ampiezze divergono, ma in realtà toccano un massimo se si

includono nelle equazioni del moto pure gli smorzamenti. La separazione tra le due pulsazioni di risonanza, tipicamente nell'ordine delle decine di hertz, può essere data come segue:

$$|\omega_s - \omega_a| = \sqrt{\frac{2}{m} \left[(k + K) - \sqrt{(k + K)^2 - K^2} \right]}$$

che mostra l'annullamento della separazione per K che tende a 0. Questa analisi molto semplificata fa capire perché l'emissione più forte da parte di una chitarra sia in genere in corrispondenza ad un doppietto di frequenze che nelle chitarre *folk* (acustiche con corde di metallo e conseguenti accorgimenti costruttivi) si situa intorno ai 400 Hz, mentre è intorno ai 250 Hz nelle chitarre *classiche* (corde di nylon o budello, costruzione tradizionale). I modi più deboli tra i 300 e i 400 Hz sono collegabili alla tavola posteriore, come detto ammortizzata. Infine al di sopra dei 400 Hz l'accoppiamento via aria tra le tavole si indebolisce rapidamente, quindi le risonanze a frequenza più alta osservabili nello spettro di emissione di uno strumento sono imputabili a modi dell'una o dell'altra tavola separatamente, in accordo con l'affermazione fatta precedentemente riguardo al contributo ad alte frequenza delle risonanze dei singoli elementi in legno.

L'accoppiamento tra corda e cassa armonica può portare all'insorgere dell'effetto indesiderato della nota del lupo. Infatti il disadattamento di impedenza tra corda e ponticello, che permette la riflessione di gran parte dell'energia dell'onda viaggiante sulla corda e il sostentamento dell'onda stazionaria, può crollare quando l'onda sulla corda è ad una frequenza prossima ad una forte risonanza della cassa. A questo punto corda e cassa divengono oscillatori identici accoppiati, pertanto con trasferimento di energia particolarmente efficiente. Come conseguenza l'oscillazione della corda si distorce, con comparsa di armoniche superiori. L'adattamento di impedenza produce l'estinzione della vibrazione della corda, con conseguente ristabilimento del disadattamento di impedenza per via del cessare delle vibrazioni del corpo. Il processo quindi diviene ciclico se continuano a persistere le condizioni necessarie. Problema molto sentito negli archi, data la sollecitazione continua

della corda, è più facilmente evitabile nelle chitarre, facendo in modo che le frequenze a cui avviene il processo non siano coincidenti con quelle emissibili, per ogni pressione sui tasti, dalle corde correttamente accordate.

2.2.3 Chitarra elettrica

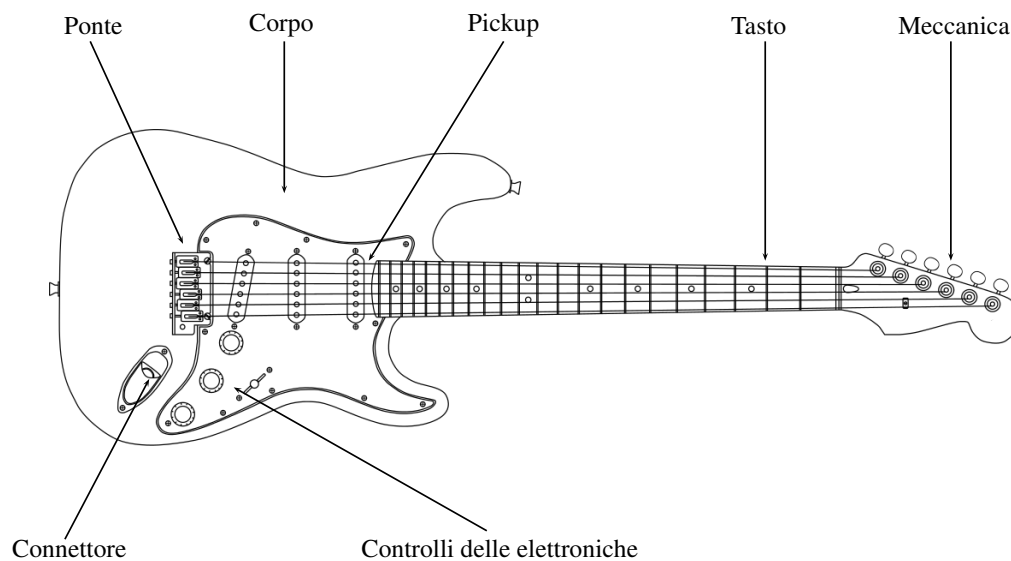


Figura 6: Anatomia di una chitarra elettrica.

Caratteristiche Per chitarra elettrica si intende una chitarra specificamente progettata al fine principale di fornire, tramite uno o più trasduttori elettroacustici, un segnale elettrico rappresentativo delle vibrazioni delle parti fondamentali dello strumento. Il segnale quindi può essere eventualmente processato da appositi circuiti e infine amplificato per pilotare opportunamente un altoparlante. Pertanto uno strumento acustico con possibilità di generare segnali elettrici attraverso l'equipaggiamento con trasduttori non è generalmente inteso come chitarra elettrica, sebbene le chitarre elettriche possano avere caratteristiche molto eterogenee che spaziano da quelle degli strumenti acustici a quelle di strumenti che non sono in grado di emettere suoni (se non molto deboli) senza amplificazione. È questo il caso della chitarra rappresentata in Figura 6, piuttosto archetipa. Le generalità date per

la fisica della chitarra acustica possono ancora essere usate per comprendere la meccanica dello strumento elettrico. Però nelle chitarre equipaggiate con trasduttori del tipo *pickup magnetico* (di gran lunga i più frequentemente usati) il sottosistema più importante tra quelli in cui si può scomporre lo strumento è il sistema corde-pickup. La qualità dei legni e della loro lavorazione, così come la qualità e il design dei restanti componenti, non è per niente ininfluenza sul suono risultante. Ad ogni modo, dato che il loro contributo viene lavorato dal trasduttore, conviene prima comprendere il sistema fondamentale corde-trasduttore. A seguito si potrà quindi meglio capire come i restanti sottosistemi contribuiscono al tono complessivo.

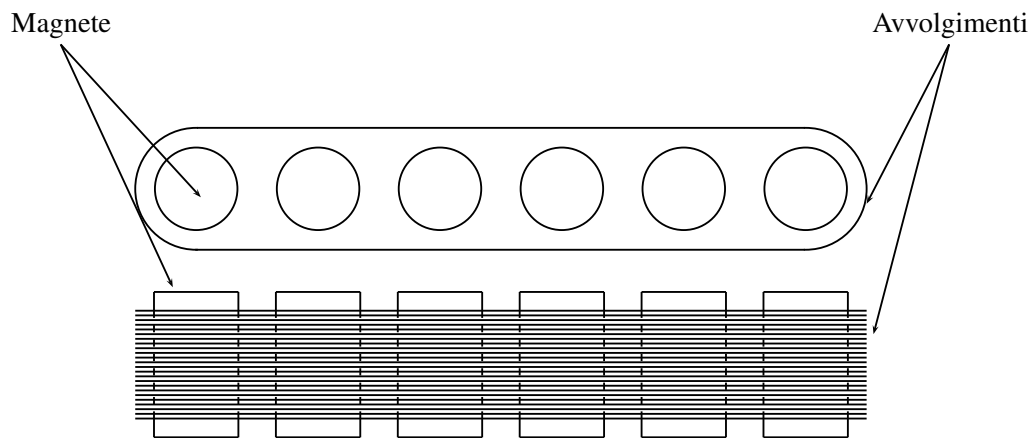


Figura 7: Schema degli elementi costitutivi del pickup magnetico (elementi di supporto omessi).

Il pickup magnetico Il pickup magnetico, come detto, è il trasduttore per antonomasia presente sulle chitarre prettamente elettriche. Su questo tipo di strumento possono essere presenti anche altri trasduttori (come i piezoelettrici), ma sono generalmente presenti in concomitanza con i pickup magnetici. Il pickup, rappresentato schematicamente in Figura 7, è inteso per trasformare la vibrazione della corda in un segnale di tensione variabile attraverso la legge di Faraday-Neumann. La legge di Faraday-Neumann lega infatti la forza elettromotrice in una spira conduttrice (quello che ogni singolo avvolgimento è) alla variazione del flusso del campo magnetico attraverso la superficie vet-

toriale confinata dalla spira. Per fare in modo allora che la tensione circolante negli avvolgimenti sia una rappresentazione del moto delle corde queste devono produrre, oscillando, un campo magnetico variabile. Questo è ottenuto magnetizzandole attraverso i magneti permanenti. Il materiale con cui sono fatte le corde deve essere ferromagnetico in modo che queste divengano una sorgente secondaria di campo magnetico sufficientemente intenso da produrre tensioni usabili. Il pickup non è per nulla un trasduttore lineare, anzi, è a tutti gli effetti un elemento non lineare che produce pertanto distorsione sia armonica che di intermodulazione, concetti delineati nel precedente capitolo. Inoltre, un pickup compie una operazione di filtraggio sulle frequenze della tensione che vi circola. Questo, come si vedrà, apparentemente un handicap, risulta essere il punto di forza che nel corso dei decenni ha consolidato l'utilizzo di questo particolare dispositivo. Nel seguito si delineano i principali meccanismi di funzionamento del pickup, come in esso viene generato il segnale in tensione e la banda passante. Molte semplificazioni verranno fatte. Questo ha senso sotto molteplici punti di vista. In primo luogo una analisi approssimata consente di inquadrare meglio i principi fondamentali del dispositivo, senza avvolgere la trattazione in troppi effetti secondari. Si vedrà inoltre che tanti effetti secondari modificano in modo semplice, seppur difficile da calcolare con precisione, il comportamento complessivo delineato con l'analisi approssimata. La difficoltà di calcolo e la grande molteplicità di variabili fa sì che la progettazione degli strumenti reali non segua la strada della modellizzazione completa. Questa, anche in vista della soggettiva e complessa sensibilità dell'udito umano, sarebbe uno spreco di energie. È più conveniente predisporre uno strumento in modo tale che si possano regolare finemente il numero più alto di variabili, fermandosi quando la regolazione fornisce il miglior compromesso. Infine, come rilevato nel lavoro di Rabenstein e Trautmann [8], nel caso di sintesi di suoni ottenuta da modelli fisici anche solo approssimati il risultato è comunque psicoacusticamente gradevole e accettabile.

Forza elettromotrice e distorsione Il pickup magnetico è costituito da uno o più magneti permanenti (nel caso della Figura 6 e 7 sono sei)

disposti lungo un asse e circondati da un avvolgimento di filo conduttore laccato. Come anticipato, la legge che ne consente il funzionamento è la legge di Faraday-Neumann:

La forza elettromotrice ξ indotta in una spira conduttrice immersa in un campo magnetico \vec{B} è data dall'opposto della variazione nel tempo del flusso di \vec{B} attraverso la superficie vettoriale Σ di versore normale \hat{u}_n concatenata dalla spira. Cioè:

$$\xi = -\frac{d}{dt} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_n d\Sigma$$

È chiaro che nelle bobine del pickup non circola nessuna corrente se l'unico campo magnetico presente è quello dei magneti permanenti, che è fisso nel tempo. Per fare in modo che una corda induca col suo moto una forza elettromotrice questa deve essere ferromagnetica, in modo tale che, magnetizzata dal campo dei magneti permanenti, essa divenga a sua volta sorgente (mobile) di campo magnetico. In questo modo il moto produce un campo magnetico variabile nel tempo e quindi varia pure il flusso. Nei mezzi ferromagnetici la permeabilità magnetica relativa (al vuoto) κ_r dipende dallo stato (\vec{H}, \vec{B}) , con \vec{H} il campo accessorio che lega \vec{B} alla magnetizzazione del materiale \vec{M} attraverso $\kappa_r - 1$. Nel seguito, dato che di fatto non si riesce nella pratica a misurare o progettare opportunamente corde e pickup avendo cura di tenere sotto controllo questi dettagli, si approssimerà costante (e ben più grande di 1) la permeabilità magnetica relativa κ_r della corda ferromagnetica.

Per semplificare il calcolo della forza elettromotrice ξ si fa riferimento ad una sola spira di forma quadrata di lato l (e quindi superficie $\Sigma = l^2$), dato che il caso con N avvolgimenti si ritrova iterando. Il campo magnetico che nel pickup reale è generato dai magneti permanenti è semplificato come un generico campo costante in direzione ortogonale alla superficie concatenata dagli avvolgimenti. Infine la corda è di sezione circolare con raggio r ed è immersa nel vuoto, quando in quiete ad una distanza h dalla spira. Dato che l'apertura del campo magnetico dei magneti reali consente al pickup di essere sensibile in pratica solo nell'immediata verticale del magnete, si può considerare solo il moto di un elemento cilindrico di corda, centrato intorno al

centro di massa della corda posto sull'asse della spira per semplicità. Il moto viene assunto solo trasversale, trascurando quindi le vibrazioni longitudinali della corda. Si utlizzeranno due sistemi di riferimento: S_1 solidale al centro di massa della corda vibrante e S_2 fisso nella posizione assunta dal centro di massa della corda in quiete. Rispetto a S_2 la vibrazione dell'elemento di corda in direzione parallela alla superficie del pickup è identificata da $x(t)$, con condizione iniziale x , mentre la vibrazione in direzione ortogonale alla superficie del pickup è parametrizzata da $y(t)$, con condizione iniziale y . Tutto questo è riassunto in Figura 8.

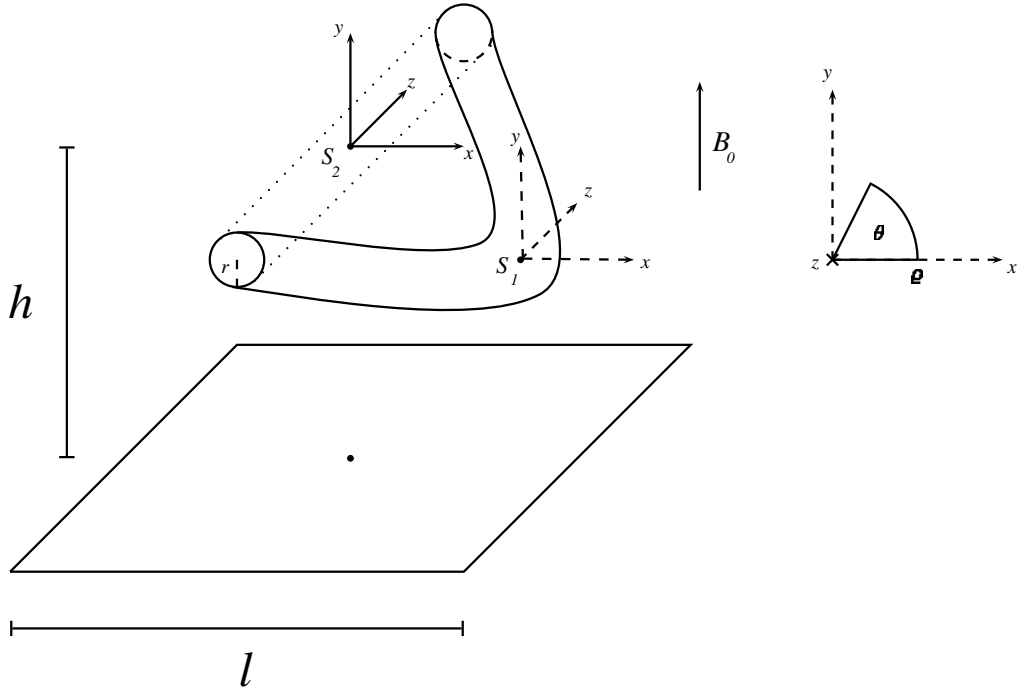


Figura 8: Rappresentazione del sistema corda-pickup. La corda in quiete è punteggiata. Per S_1 a lato è illustrato il sistema di coordinate cilindriche. La deformazione della corda è esagerata per chiarezza.

Si consideri allora la corda deviata dal suo equilibrio. Pertanto il centro di massa rispetto a S_2 è nella condizione iniziale (x, y) . Il punto di partenza è la legge di Ampère-Maxwell:

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{j}_c + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}$$

dove \vec{j}_c è il vettore densità di corrente di conduzione e \vec{D} è il campo elettrico nei materiali, dato dal contributo del vettore del campo elettrico nel vuoto e del vettore di polarizzazione. Dal momento che nessun campo elettrico è presente \vec{D} è nullo assieme alla sua derivata temporale. Per quel che riguarda le correnti di conduzione, dato che le intensità di corrente indotte nella bobine dei pickup reali sono piccole, si decide di trascurarne gli effetti elettromagnetici. Allora la legge di Ampère-Maxwell nel caso specifico diviene

$$\nabla \times \vec{H} = 0$$

cioè: il campo \vec{H} è irrotazionale. Essendo l'insieme di definizione del campo tutto lo spazio euclideo si può pure dire che \vec{H} è conservativo. Esiste allora un potenziale scalare Φ tale che

$$\vec{H} = -\nabla\Phi \quad (13)$$

Per quanto detto riguardo al sistema in esame e alle approssimazioni in gioco si ha, passando a S_1 e nominando ancora (x, y, z) le coordinate cartesiane per non appesantire la notazione:

$$\vec{B} = B_0 \hat{u}_y \Rightarrow \vec{H} = \frac{B_0}{\mu_0} \hat{u}_y = -\nabla \left(-\frac{B_0 y}{\mu_0} \right) = -\nabla \left(\frac{-B_0 \varrho \sin \theta}{\mu_0} \right)$$

dove nell'ultima uguaglianza si è passati alle coordinate cilindriche³ (ϱ, θ, z) . La forma completa del potenziale deve produrre anche il campo dovuto alla corda magnetizzata. Dato che il campo magnetico prodotto da un cilindro di raggio r (la corda) percorso da corrente è proporzionale a ϱ se questo è più

³Coordinate cilindriche:

$$\begin{cases} x = \varrho \cos \theta \\ y = \varrho \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

in coordinate cilindriche nabra è rappresentato così: $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial \varrho} \\ \frac{1}{\varrho} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$.

piccolo di r e inversamente proporzionale a ϱ in caso contrario viene naturale definire Φ in questo modo:

$$\Phi(\varrho, \theta) = \begin{cases} \frac{-B_0 \varrho \sin \theta}{\mu_0} + C \frac{\varrho}{r} \sin \theta & \text{Se } \varrho < r \\ \frac{-B_0 \varrho \sin \theta}{\mu_0} + C \frac{r}{\varrho} \sin \theta & \text{Se } \varrho > r \end{cases}$$

con C costante da determinarsi. Il valore di C può essere dato grazie alla legge di Gauss magnetica:

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0$$

Questa infatti implica che la componente normale del campo magnetico rimane costante nell'attraversamento di superfici sede di densità di corrente superficiale. Questo è il caso della corda, dato che essendo magnetizzata è sede di correnti superficiali e di volume legate alla magnetizzazione. Quindi si impone:

$$\lim_{\varrho \rightarrow r^-} \vec{B} \cdot \hat{u}_\varrho = \lim_{\varrho \rightarrow r^+} \vec{B} \cdot \hat{u}_\varrho$$

dove, dato che \hat{u}_ϱ è il versore radiale, figurano i limiti della componente radiale del campo magnetico, normale alla superficie della corda. Questa, grazie a (13) e alla relazione $\vec{B} = \mu \vec{H}$, è data da:

$$\vec{B} \cdot \hat{u}_\varrho = -\mu \frac{\partial}{\partial \varrho} \Phi(\varrho, \theta)$$

dove $\mu = \kappa_r \mu_0$ è la permabilità magnetica assoluta della corda. Eseguendo i limiti l'equazione è allora risolta per C , fornendo:

$$C = \frac{r B_0}{\mu_0} \frac{1 - \kappa_r}{1 + \kappa_r}$$

Ora tutti gli ingredienti sono pronti per eseguire l'intero gradiente del potenziale e usare ancora $\vec{B} = \mu \vec{H}$, ottenendo un campo magnetico di componenti radiale a trasversale, dato che il potenziale Φ non dipende da z . Dal momento che la corda, per costruzione, non può penetrare nello spazio delimitato

dalla spira si è interessati solo al campo per $\varrho > r$. Questo risulta:

$$\begin{pmatrix} \vec{B} \cdot \hat{u}_\varrho = B_0 \left(1 - \frac{r^2}{\varrho^2} \frac{\kappa_r - 1}{\kappa_r + 1} \right) \sin \theta \\ \vec{B} \cdot \hat{u}_\theta = B_0 \left(1 + \frac{r^2}{\varrho^2} \frac{\kappa_r - 1}{\kappa_r + 1} \right) \cos \theta \\ \vec{B} \cdot \hat{u}_z = 0 \end{pmatrix}$$

Dato che $\kappa_r \gg 1$ si ha:

$$\frac{\kappa_r - 1}{\kappa_r + 1} \approx 1$$

questo mostra l'utilità della costruzione di un modello approssimato: nonostante il fatto che la corda sia ferromagnetica non si è interessati a conoscere istante per istante lo stato esatto del materiale di cui è costituita. Infatti il campo magnetico prodotto non dipende dal valore preciso della permeabilità magnetica relativa. Usando la geometria si può costruire la componente cartesiana $\vec{B} \cdot \hat{u}_y$ dalle componenti radiali e trasversali come segue:

$$\begin{aligned} \vec{B} \cdot \hat{u}_y &= (\vec{B} \cdot \hat{u}_\varrho) \sin \theta + (\vec{B} \cdot \hat{u}_\theta) \cos \theta = \\ &= B_0 \left(1 + r^2 \frac{\kappa_r - 1}{\kappa_r + 1} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \doteq B_y(x, y) \end{aligned}$$

Fintanto che la corda è fissa nella condizione iniziale pure in S_1 la superficie concatenata dalla spira, centrata nel punto di coordinate cartesiane $(x_b, y_b, 0)$, è in un piano di $y = y_b$ costante. Pertanto il flusso di \vec{B} sulla superficie risulta:

$$\begin{aligned} \int_{\Sigma} \vec{B} \cdot \hat{u}_y d\Sigma &= l \int_{x_b - \frac{l}{2}}^{x_b + \frac{l}{2}} B_y(x, y_b) dx = \\ &= B_0 l \left[l + r^2 \frac{\kappa_r - 1}{\kappa_r + 1} \left(\frac{x_b + \frac{l}{2}}{(x_b + \frac{l}{2})^2 + y_b^2} - \frac{x_b - \frac{l}{2}}{(x_b - \frac{l}{2})^2 + y_b^2} \right) \right] \end{aligned}$$

Il conto è ultimato ritornando al sistema di riferimento S_2 . Come detto, il centro di massa della corda è in (x, y) in questo sistema di riferimento, mentre la spira è centrata in $(0, -h, 0)$. Valgono allora le relazioni $x_b = x$ e

$y_b = y + h$. Nell'equazione precedente si può quindi operare una sostituzione (S_1 è inerziale fintanto che la corda è ferma). A questo punto il tempo può essere lasciato libero di scorrere e le equazioni del moto per l'elemento di corda forniscono, dalle condizioni iniziali, $(x(t), y(t))$, che possono essere inserite nell'espressione risultante del flusso. L'opposto della derivata temporale del flusso fornisce quindi ξ , che nell'approssimazione che le ampiezze di oscillazione nelle due direzioni della corda siano piccole rispetto a h e l (caso realistico, data anche la posizione del pickup in uno strumento reale) diviene:

$$\xi \approx B_0 \Sigma r^2 \frac{\kappa_r - 1}{\kappa_r + 1} \left[2x\dot{x} \frac{3h^2 - \frac{\Sigma}{4}}{(h^2 + \frac{\Sigma}{4})^3} + \frac{2h\dot{y}}{(h^2 + \frac{\Sigma}{4})^2} \right] \quad (14)$$

avendo ricordato che $\Sigma = l^2$. Questa forma approssimata illustra molteplici fatti.

Se si identifica la posizione del pickup rispetto ad un estremo della corda con $\frac{L}{M}$, M costante reale positiva e L lunghezza della corda, e si suppone che la corda sia ideale e stia vibrando nella sola direzione \hat{u}_y senza smorzamenti dopo essere stata pizzicata allora la funzione $y(t)$ sarà fornita dall'equazione (9) derivata nel paragrafo 1.8 con $x = \frac{L}{M}$:

$$\begin{aligned} y(t) &= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2\zeta K^2}{\pi^2 (K-1) n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{K}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{M}\right) \cos(n\omega_1 t) = \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} b_n \cos(n\omega_1 t) \end{aligned}$$

dove il coefficiente b_n di Fourier è definito conglobando tutti i coefficienti che dipendono solo da n :

$$b_n \doteq \frac{2\zeta K^2}{\pi^2 (K-1) n^2} \sin\left(\frac{\pi n}{K}\right) \sin\left(\frac{\pi n}{M}\right)$$

ζ identifica l'elevazione iniziale del punto di pizzico della corda, chiamata h nel capitolo precedente, al fine di non confondere questo parametro con la distanza tra pickup e corda in quiete. Allora, dato che ξ è lineare in \dot{y} ,

il contributo della n -esima componente di Fourier $y_n = b_n \cos(n\omega_1 t)$ della vibrazione $(0, y(t))$ della corda alla forza elettromotrice è:

$$\begin{aligned}\xi_n &= B_0 \Sigma r^2 \frac{\kappa_r - 1}{\kappa_r + 1} \left[\frac{2h\dot{y}_n}{\left(h^2 + \frac{\Sigma}{4}\right)^2} \right] = -B_0 \Sigma r^2 \frac{\kappa_r - 1}{\kappa_r + 1} \frac{2hb_n n \omega_1}{\left(h^2 + \frac{\Sigma}{4}\right)^2} \sin(n\omega_1 t) = \\ &= \alpha c_n \sin(n\omega_1 t)\end{aligned}$$

dove α è la parte dell'ampiezza indipendente da n e c_n congloba tutti i coefficienti dipendenti da n :

$$\alpha \doteq -B_0 \Sigma r^2 \frac{\kappa_r - 1}{\kappa_r + 1} \frac{2h\omega_1}{\left(h^2 + \frac{\Sigma}{4}\right)^2}, \quad c_n \doteq b_n n$$

Si capisce allora che il segnale indotto nella spira è analogo alla vibrazione della corda, ma con componenti di Fourier sfasate e coefficienti di Fourier ben diversi, inversamente proporzionali a n anziché a n^2 . Cioè: il segnale è distorto di distorsione armonica grazie a \dot{y} . Ulteriore distorsione proviene dal considerare anche il moto lungo \hat{u}_x . È evidente che il termine che in (14) contiene il contributo di $x(t)$ inserisce solo armoniche superiori nella forza elettromotrice. Infatti, prendendo per l'armonica fondamentale una forma analoga $x_1(t) \propto \cos(\omega_1 t)$ si ha:

$$2x_1\dot{x}_1 \propto -\omega_1 \sin(2\omega_1 t)$$

dove si è usata la prima formula di Werner. Pure la prima armonica produce una tensione che è al doppio della frequenza del modo fondamentale, entrato nel pickup grazie a $y(t)$. Il peso relativo delle armoniche è allora ulteriormente ridefinito dall'addizione di questi modi, ognuno con le sue ampiezze. Inoltre la parte in x di (14) è quella responsabile per la distorsione di intermodulazione, essendo non lineare in \dot{x} . Infatti se $x(t)$ è una sovrapposizione di modi allora $2x\dot{x}$ diventa una somma di prodotti di funzioni trigonometriche. Con trattazione analoga a quella fatta nel paragrafo 1.6, usando le formule di Werner opportune, si ottiene la comparsa di toni puri a frequenze date dalla somma e dalla differenza delle frequenze delle parziali contenute in $x(t)$.

Le formule scritte consentono di capire che non tutte le armoniche a cui vibra la corda concorrono a indurre la corrente che circola nella spira. Questo per ragioni geometriche. Per quel che riguarda i toni introdotti da $x(t)$ si vede che è possibile il loro annullamento se $h = \frac{l}{\sqrt{12}}$, fatto che causa l'azzerarsi del coefficiente moltiplicativo per $2x\dot{x}$. Per quel che concerne le armoniche introdotte da $y(t)$, la forma data per b_n illustra che tacciono tutte le armoniche per cui n è un multiplo intero di M . Più in generale, dato che il seno assume valori tra -1 e 1 , l'ampiezza con cui una armonica è indotta dipende dal valore che viene assunto dal seno per via di M , potendo risultare pure uno sfasamento di π se il seno assume valori negativi. In questo ultimo caso la geometria non interviene solo sull'ampiezza.

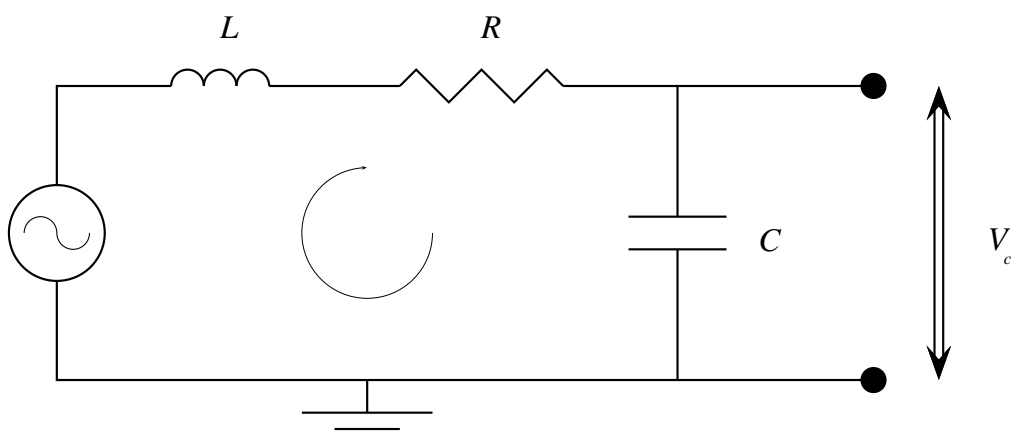


Figura 9: Modello elettrico di un pickup.

Banda passante Il pickup non è lineare nemmeno nella banda passante. Questo è comprensibile ricorrendo ad un semplice modello elettrico. Per il fatto che il pickup è costituito da filo di rame avvolto intorno a magneti e percorso da correnti variabili nel tempo è evidente che si tratta di un circuito elettrico di induttanza L e resistenza R in serie, dato che gli effetti autoinduttivi dell'accoppiamento magnetico degli avvolgimenti e la resistenza ohmica ostacolano la corrente. All'induttanza e alla resistenza si aggiungono le capacità parassite date dalla carica che si affaccia tra elementi di superficie di filo contrapposti di due avvolgimenti consecutivi, che sono a tensione diversa

per via della caduta di potenziale resistiva. Gli effetti complessivi di queste capacità parassite sono riassunti dalla capacità C , anch'essa in serie alle altre grandezze. In pratica, al primo ordine, un pickup è un circuito LRC in serie, alimentato da un generatore di tensione che fornisce la forza elettromotrice ξ . Lo schema è mostrato in Figura 9. Dal momento che l'uscita del pickup è costituita dai capi del filo di rame, comprendendo tutti gli effetti capacitivi, si può dire che la tensione di uscita è prelevata ai capi del condensatore C . Dato che si è interessati al comportamento in frequenza del circuito il guadagno di questo è calcolato facendo riferimento ad una tensione di alimentazione sinusoidale complessa $E_0 e^{i\omega t}$. Pertanto la corrente che circola nella maglia è una corrente complessa $I_0 e^{i\omega t}$. Usando le note impedenze complesse capacitive e induttive l'equazione di maglia è:

$$RI_0 e^{i\omega t} + i\omega LI_0 e^{i\omega t} - \frac{i}{\omega C} I_0 e^{i\omega t} - E_0 e^{i\omega t} = 0$$

risolta da

$$I_0 = \frac{E_0}{R + i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right)}$$

di modulo massimo per $\omega = \omega_0 \doteq \frac{1}{\sqrt{LC}}$, alla quale è presente una risonanza. Se il generatore fornisce allora una corrente alla pulsazione di risonanza la corrente I_0 tocca il suo valore massimo dato da $I_M = \frac{E_0}{R}$. La larghezza della risonanza è definita dalla differenza $\Delta\omega$ tra le pulsazioni intorno ad ω_0 per le quali la potenza è metà di quella alla risonanza, o equivalentemente le pulsazioni alle quali il rapporto $\frac{I_0}{I_M}$ vale $\frac{1}{\sqrt{2}}$. Imponendo questa condizione si trova che $\Delta\omega = \frac{R}{L}$. Un parametro caratteristico è il fattore di merito Q :

$$Q \doteq \frac{\omega_0}{\Delta\omega} = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

pertanto è chiarita la dipendenza tra larghezza della risonanza e parametri del circuito. Il guadagno \tilde{G} di tensione ai capi del condensatore è fornito dal rapporto tra la tensione V_c prelevata ai capi del condensatore e la tensione di alimentazione. Usando la formula del partitore:

$$\begin{aligned}
V_C &= \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} E_0 e^{i\omega t} = \frac{1}{i\omega RC - \omega^2 LC + 1} E_0 e^{i\omega t} \\
\Rightarrow \tilde{G} &= \frac{V_c}{E_0 e^{i\omega t}} = \frac{1}{i\omega RC - \omega^2 LC + 1} \doteq \tilde{G}(\omega)
\end{aligned} \tag{15}$$

chiaramente dipendente da ω . Il modulo di questa funzione complessa permette di visualizzare la banda passante con più semplicità. Esso vale:

$$\left| \tilde{G}(\omega) \right| = \frac{1}{\left[(-\omega^2 LC + 1)^2 + (\omega RC)^2 \right]^{\frac{3}{2}}}$$

Di valore massimo per $\omega_M \doteq \frac{1}{RC} \sqrt{\frac{2Q^2-1}{2Q^4}}$ leggermente inferiore a ω_0 , che pertanto ne è buona approssimazione. Valgono poi le proprietà:

$$\lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \tilde{G}(\omega) = Q, \quad \lim_{\omega \rightarrow \omega_0} \left| \tilde{G}(\omega) \right| = Q^3$$

che legano il fattore di merito Q all'altezza della risonanza. Un calcolo del modulo del guadagno per i valori di L , R , e C dati da 2.5 H, 7 kOhm e 80 pF tipici di un pickup di una chitarra del tipo di quella di Figura 6 è mostrato in Figura 10. Globalmente, si può dire che il pickup si comporta linearmente per una ampia banda prima della risonanza, nell'intorno della quale l'ampiezza tocca rapidamente il suo massimo. Al di là della risonanza il guadagno decresce con la frequenza. Un circuito con una risposta in frequenza di questo tipo è detto *filtro passa basso del secondo ordine*.

Entità psicoacustica della non linearità e ulteriori effetti Prima di procedere a passare in rassegna il contributo delle altre parti dello strumento conviene inquadrare come in linea di massima sono percepiti gli effetti non lineari descritti. Come detto, questi effetti hanno consacrato il pickup magnetico come trasduttore preferito dei chitarristi per merito di ciò che aggiungono al suono. La fortuna del pickup è quella di presentare la distorsione armonica in modo preponderante rispetto a quella di intermodulazione, come è in parte evidente esaminando i coefficienti moltiplicativi in (14) per il termine in \dot{y} e quello in $x\dot{x}$, dai quali si evince che il contributo del termine

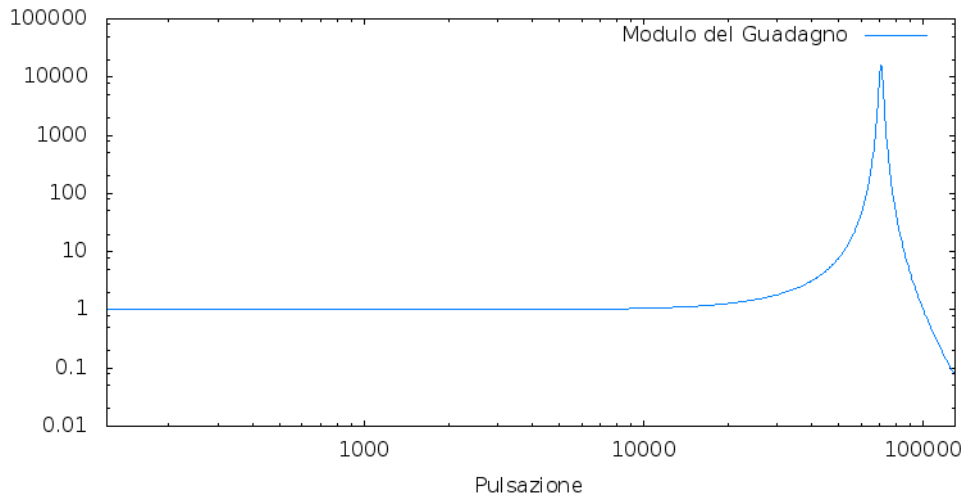


Figura 10: Banda passante di un tipico Pickup. La funzione è stata calcolata per valori di ω compresi tra 120 e 130000 rad/s, intervallo che comprende abbondantemente l'udibile.

in $x\dot{x}$ è tanto più piccolo, rispetto a quello in \dot{y} , tanto più la corda è distante. La distorsione di intermodulazione risulta sgradevole specialmente quando la vibrazione contiene armoniche fondamentali di tante note diverse, come nel caso degli accordi. Infatti la combinanzione non lineare, introducendo toni alle frequenze somma e differenza di quelle dei toni della vibrazione primaria, può fare insorgere modi dissonanti rispetto alle note che si intendeva suonare. Ad ogni modo non conviene allontanare troppo la corda dal pickup, dato che questo estingue la forza elettromotrice indotta. Per contro la distorsione armonica non disturba il suono, ma lo arricchisce, dato che aggiunge toni a frequenze multiple di quelli contenuti nel segnale primario. Per di più, dato che l'ampiezza delle armoniche indotte decade con l'ordine, le armoniche pari sono ad un livello più alto rispetto alle seguenti armoniche dispari. Questo è in linea di massima un effetto gradevole. Il comportamento filtrante del pickup poi colorisce ulteriormente il segnale, soprattutto grazie alla risonanza. La sua posizione, altezza e larghezza possono dare contributi molto diversi all'equalizzazione complessiva, facendo spaziare il risultato da un tono giudicato “scuro e chiuso”, ricco di bassi quando la sopraelevazione è modesta, la risonanza larga e a bassa frequenza; a “squillante” nel caso opposto. La

calibrazione della curva di Figura 10, attraverso la progettazione del pickup o l'introduzione di ulteriori componenti nel circuito di una chitarra elettrica, è uno dei punti più importanti nella definizione del suono di uno strumento.

Uno degli effetti addizionali più importanti nel pickup è dovuto alle correnti di Foucault indotte in elementi conduttori nei pressi delle bobine. Questi possono essere viti, bulloni, schermi conduttori in cui il pickup è avvolto per proteggerlo da rumore o dei corpi di ferro dolce al centro degli avvolgimenti che sostituiscono i magneti permanenti, magnetizzati da un magnete sottostante. La soluzione è conveniente dal punto di vista costruttivo, vista la maggior lavorabilità del ferro dolce rispetto ad altri materiali. Ad ogni modo il campo magnetico variabile induce in tutti questi conduttori delle correnti. Per la conservazione dell'energia questo effetto si comporta come uno smorzamento per le correnti circolanti negli avvolgimenti, abbassando l'altezza della risonanza. Più nel dettaglio, il contributo delle correnti di Foucault può essere modellizzato inserendo nel circuito equivalente di Figura 9 un ulteriore induttore in serie al primo, con una nuova resistenza il cui primo capo è tra gli induttori e il secondo è a massa. Ad ogni modo, dato che conoscere i parametri del modello equivalente non è facile come nel caso privo di correnti di Foucault, questa strada è impervia e povera di frutti. Infine un effetto ulteriore che può minare la gradevolezza del suono è la cosiddetta *stratite*. Chiamata come una malattia, altri non è che la perturbazione del moto della corda magnetizzata per via delle forze magnetiche con cui interagisce con i magneti del pickup, che producono un campo ben lungi dall'essere costante nello spazio. Chiamata così dopo una generazione di pickup montati sulle Fender Stratocaster capaci di emettere un campo di intensità circa 80 mT nei pressi della corda regolata in una configurazione usuale, viene evitata allontanando quest'ultima dal magnete agendo di nuovo sulle regolazioni. La perturbazione del moto non solo causa nuova distorsione ma rende anche la vibrazione della corda visibilmente (e auditivamente) innaturale dal punto di vista meccanico.

Contributo degli altri sottosistemi e conclusione Finora si è parlato del sottosistema corda-pickup. Gli altri sottosistemi fondamentali di

una chitarra elettrica sono il sistema corde-manico, corde-ponte e, attraverso manico e ponte, corde-corpo. Per quel che riguarda il corpo il fatto che la frequenza di risonanza fondamentale si innalza con lo spessore delle tavole fa capire che il contributo deve situarsi alle alte frequenze per le chitarre *solid body*, dato che il corpo è ritagliato da una tavola di legno spessa. L'ampiezza del moto vibrazionale del corpo poi risulta alquanto ridotta per via della sua grande inerzia, ma il pickup è sensibile alla derivata del moto, a questo punto, relativo tra corda e pickup medesimo, solidale al corpo, che è tanto più importante tanto più la frequenza è alta. Tutto questo va pesato con la banda passante, che potrebbe ridimensionare il contributo dei modi a frequenza più alta. Inoltre spesso il pickup è montato attraverso molle e altri corpi. Pertanto il moto relativo tra corde e pickup può non essere rappresentativo delle vibrazioni relative di corpo e corde. Il contributo del corpo può essere più importante se questo è cavo, totalmente o parzialmente, come nel caso di strumenti semiacustici o con camere tonali. Le risonanze dell'aria contenuta non sono importanti: l'equazione (12) mostra che la frequenza si innalza nel caso di volumi piccoli, come quelli in genere delle casse degli strumenti detti. Ad ogni modo, anche nel caso di casse voluminose, il contributo dell'aria non viene catturato direttamente dal pickup, non sensibile alle onde meccaniche. Di fatto un corpo semiacustico è fatto di tavole più sottili, con modi a frequenza più bassa, mentre il corpo pieno con camere tonali agisce come se fosse a densità inferiore, con modi a frequenza più alta.

Cadendo in genere a frequenze alte e con poca ampiezza i modi del corpo non sono usualmente i più rilevanti. In molti casi concreti si può dire che il ruolo fondamentale del corpo è quello di chiudere il circuito acustico costituito dagli altri componenti. Molto più importanti sono i contributi del manico e del ponte. Trattati come adattatori di impedenza per il caso acustico, nel caso elettrico sono i vibratorii secondari più importanti. In Figura 6 si nota come la struttura del ponte sia ben più complessa di quella di un ponticello di una chitarra acustica mostrata in Figura 4. Se nelle acustiche il ponte è semplice per permettere un ottimo accoppiamento con la cassa nelle elettriche, dato il ridimensionato contributo del corpo, è tanto più complesso tanto più il corpo è supposto essere influente sul tono risultante. Questo

perché tramite una struttura più complessa, ricca di viti di regolazione, si può intonare in modo molto più preciso ogni corda. Inoltre spesso le chitarre *solid body* presentano un ponte mobile, inclinabile cioè attraverso l'azione di una leva, con la tensione delle corde equilibrata da molle che tirano il ponte in direzione contraria, poste in un apposito scasso nel corpo. La grande complessità equivale quindi ad una molteplicità di modi normali di vibrazione che, come è noto dalla descrizione dello strumento acustico, definiscono lo sviluppo temporale delle armoniche a cui vibra la corda attraverso il trasferimento di energia da questa al ponte. Un discorso analogo vale per il manico. Questo può non essere strutturalmente diverso dal caso di tante acustiche, specialmente *folk*. Il manico è fatto di una o più parti in legno e presenta all'interno una barra di metallo, detta *truss rod*, che viene messa in tensione contro la tensione delle corde per garantire una ottimale curvatura del manico. Sistema complesso, esso presenta una molteplicità di modi normali. Si può concludere allora che i modi normali degli elementi costruttivi di una chitarra elettrica non sono importanti dal punto di vista acustico. Infatti se anche ciò accade il pickup non può catturare onde acustiche. Essi sono di importanza non trascurabile per l'interazione che ne deriva con le corde, modificando le loro vibrazioni ideali attraverso il flusso di energia efficiente alle condizioni di risonanza. A questo punto, per concludere il modello, si può sostituire alla equazione di d'Alembert (1) per le corde ideali una equazione che tenga conto più da vicino, senza rinunciare a omogeneità, isotropia e invarianza di tensione e sezione durante il moto, delle proprietà delle corde reali (elencate qualitativamente nel sottoparagrafo 2.2.1) e degli accoppiamenti con altri sistemi oscillanti. Questa può essere derivata dai principi della meccanica e, supponendo solo vibrazione nella direzione \hat{u}_y per non complicare troppo il problema, si presenta così:

$$\rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + d_1 \frac{\partial y}{\partial t} + d_3 \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} = f_e(x, t) \quad (16)$$

con $y = y(x, t)$, $x \in (0, L)$ la funzione d'onda incognita. I parametri della corda sono quindi la densità ρ , la sua superficie trasversale $A = \pi r^2$, la sua lunghezza L e il suo modulo di Young E . I è il momento del secondo ordine

della sezione della corda, richiesto per tenere in conto la resistenza della corda alla flessione. La corda è sottoposta a una tensione T mentre f_e è la densità di forza di eccitazione. Essa è ottenuta distribuendo la forza di eccitazione, pensata limitata nel tempo, su di una larghezza centrata sul punto di eccitazione rappresentativa delle dimensioni del corpo eccitante, senza alterazione della larghezza nel tempo (fatto che implica la fattorizzabilità di f_e in parte temporale e parte spaziale). La forza di eccitazione e il tempo per cui rimane attiva dipende dal modo di eccitazione ed è di derivazione semiempirica. Infine d_1 e d_3 sono due variabili di smorzamento rispettivamente indipendente dalla frequenza e dipendente dalla frequenza. È proprio con queste due variabili che è rappresentato l'accoppiamento con il resto dello strumento e servono per ricostruire il tempo di decadimento delle armoniche. Possono essere derivate sperimentalmente o da modelli che possono includere anche perdite di energia per frizioni interne alla corda e con l'aria. La soluzione di questa equazione non può essere espressa, come fatto nel paragrafo 1.4 con l'equazione di d'Alembert, come sovrapposizione di due onde viaggianti. Questo per merito del valore non nullo della rigidità, che introduce il termine al quarto ordine fonte di dispersione. L'equazione appena data, che è alle derivate parziali, si riduce alla equazione di d'Alembert se la rigidità è nulla ($E = 0$), le variabili di decadimento sono nulle ($d_1 = 0$, $d_3 = 0$) e pure f_e è nulla (vibrazione da imputarsi alla sola condizione iniziale).

In conclusione, se per uno strumento acustico ottenere una descrizione completa è molto complesso per via del fatto che l'emissione finale è un'onda sonora generata dai moti in primo luogo della cassa, è relativamente semplice delineare un modello al prim'ordine di uno strumento elettrico che sia comprensivo di tutti gli effetti fondamentali, dove ciò che conta è l'interazione delle corde con le varie parti dello strumento e l'emissione finale è un segnale in tensione. A questo punto, limitandosi ad una sola corda dato che tutte le altre sono analoghe e che la forza elettromotrice totale è la somma dei contributi delle singole corde, uno strumento elettrico è così riassunto:

$$\left\{ \begin{array}{l} \rho A \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + EI \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - T \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + d_1 \frac{\partial y}{\partial t} + d_3 \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} = f_e(x, t) , \ x \in \left(0, \frac{L}{(\frac{12}{\sqrt{2}})^m} \right) \\ \xi(t) = B_0 \Sigma \frac{A \kappa_r - 1}{\pi \kappa_r + 1} \left[\frac{2hy\left(\frac{L}{M}, t\right)}{\left(h^2 + \frac{\Sigma}{4}\right)^2} \right] \\ \tilde{G}(\omega) = \frac{\gamma}{i\omega RC - \omega^2 \tilde{L}C + 1} \end{array} \right. \quad (17)$$

con γ un parametro per aggiustare l'ampiezza e \tilde{L} è così scritta per evidenziare che si tratta dell'induttanza e non della lunghezza della corda. L'insieme di variabilità di x è dato con le 11 e significa che la pressione dell' m -esimo tasto è modellizzata come semplice vincolo. In pratica l'equazione alle derivate parziali fornisce la funzione d'onda che, calcolata in $x = \frac{L}{M}$, nutre il pickup, producendo il segnale alla sua uscita attraverso il filtraggio. Pure un modello di chitarra acustica inizierebbe con l'equazione (16), ma la restante parte non sarebbe altrettanto semplice. Nel prossimo capitolo un metodo per ottenere la soluzione dell'equazione (16) utile in vista di una implementazione con computer sarà esposto.

3 Sintesi e trattamento digitale dei suoni

3.1 Sintesi addittiva

Per sintesi addittiva si intende la sintesi di un suono mediante addizione di armoniche a partire dal tono fondamentale. Questo ha la sua motivazione matematica nel teorema 1.1 di Fourier e viene fatto attraverso una serie di oscillatori, elettronici o software, le cui frequenze sono correlate secondo lo spettro scelto. Più il numero di oscillatori in uso è alto, numero che nel caso software può essere limitato dalle sole prestazioni dell'hardware su cui gli oscillatori girano, più è possibile raggiungere forme d'onda complesse. La sola composizione spettrale è sufficiente per la caratterizzazione timbrica, essendo stata provata l'indipendenza della qualità del suono dai rapporti di fase tra le armoniche. Un suono dal sapore di clarinetto è contraddistinto, ad esempio, da una successione di armoniche in cui figurano solo le armoniche dispari. Questo non è però tutto il carattere del suono. Lo sviluppo temporale del suono ha un ruolo molto importante. Infatti tutti i suoni naturali evolvono nei loro profili spettrale e di ampiezza nel tempo. Questo, nel caso della sintesi (non solo addittiva), viene realizzato attraverso la regolazione dell'involuppo del segnale, totale o di ogni singola armonica, con le tecniche analogiche o digitali di riferimento. È possibile pure intervenire con l'apporto di modulanti o elementi non lineari per modificare ulteriormente sia il profilo temporale che quello in frequenza di un segnale, secondo quanto visto nel capitolo 1. La sintesi addittiva può costituire il primo passo per la realizzazione di suoni sintetizzati a partire da modelli fisici. Un modello infatti può fornire la composizione spettrale tipica di uno strumento, da replicarsi al sintetizzatore. Lo studio delle differenze percettive tra i due casi è utile per la determinazione dei parametri fisici di un'onda da cui dipende la percezione.

3.2 Sintesi sottrattiva

Un altro modo per ottenere la sintesi di segnali con un contenuto di armoniche pianificato è quello di filtrare una forma d'onda complessa con opportuni filtri, le cui caratteristiche possono essere anche tempo dipendenti, in modo

tale da eliminare le armoniche indesiderate. Questo è il caso, appunto, della sintesi sottrattiva. Le forme d'onda più spesso utilizzate per gli oscillatori primari di sintetizzatori di questo tipo sono le onde quadra, triangolare simmetrica, dente di sega e rettangolare; ma non mancano forme d'onda bizzarre come gaussiane riprodotte periodicamente, raccordate con continuità. L'onda rettangolare risulta essere particolarmente utile agli scopi della sintesi sottrattiva. Infatti questa altri non è che una successione di impulsi di ampiezza e larghezza fissata, il centro di ognuno dei quali è separato dal centro degli altri adiacenti da una distanza temporale pari al periodo T . Per quanto detto nel paragrafo 1.7 più gli impulsi sono brevi più il contenuto di armoniche è elevato. La costruzione dell'onda impone che la frequenza del modo fondamentale sia $\frac{1}{T}$.

Un sintetizzatore che funziona per sintesi sottrattiva è la voce umana. Il suono generato dalle vibrazioni delle corde vocali si propaga fino alla bocca, che agisce da filtro la cui risposta in frequenza è data dalla forma della cavità orale. Muovendo i muscoli della cavità orale è allora possibile filtrare il suono primario. La differenza percettiva che si ha tra le vocali, evidente anche se cantate alla medesima altezza, è proprio dovuta al contenuto di armoniche ridimensionato dal filtro in questione.

3.3 Campionamento e digitalizzazione

La digitalizzazione ha segnato, anche in campo multimediale, una rivoluzione. Un segnale digitalizzato è infatti espresso sotto forma di successioni di numeri binari. Questo fa sì che si possa intervenire su di esso in modo matematico, facilitandone la manipolazione.

Il campionamento è il primo passo della digitalizzazione. Si tratta di un processo attraverso il quale un segnale analogico continuo nel tempo $y(t)$ viene trasformato in un segnale analogico discreto nel tempo. Fissato un intervallo di tempo Δt il campionamento avviene prelevando dal segnale il livello $y(n\Delta t)$, $n \in \mathbb{Z}$. La frequenza di campionamento è definita come $f_c \doteq \frac{1}{\Delta t}$. Il campionamento va effettuato in modo opportuno per far sì che esso fornisca una rappresentazione accurata del segnale. Infatti sono molteplici

gli errori che si possono presentare. Un primo effetto collaterale è quello dell'*aliasing*. Ciò avviene quando nel segnale sono presenti componenti a frequenze più elevate di f_c , che pertanto vengono campionate con alterazione della periodicità. Più precisamente, se f è una frequenza maggiore di f_c presente nel segnale, il campionamento genera una componente di frequenza data da $f_{alias} = f - f_c$. La Figura 11 illustra questi concetti. Questo e altri aspetti più sottili sono tenibili sotto controllo utilizzando il teorema del campionamento:

Teorema 3.1. *Sia $y(t)$ un segnale analogico il cui spettro di frequenze sia limitato dalla frequenza f_M e sia Δt l'intervallo di campionamento. Se vale la condizione*

$$f_c = \frac{1}{\Delta t} > 2f_M$$

allora $y(t)$ può essere ricostruito univocamente a partire dai suoi campioni $\{y \in \mathbb{R} : y = y(n\Delta t), n \in \mathbb{Z}\}$.

Alla luce del teorema allora si comprende che, essendo la banda udibile situata entro i 20 kHz, per evitare il fenomeno dell'*aliasing* e garantire la possibilità della ricostruzione univoca del segnale occorre limitare lo spettro del segnale a 20 kHz con un opportuno filtro prima che avvenga il campionamento. Il campionamento va poi effettuato ad una frequenza maggiore di 40 kHz. In linea di principio più il campionamento è fitto (Δt è piccolo o equivalentemente f_c è grande) più aumenta l'accuratezza. Questo però con l'effetto collaterale che, per componenti del segnale lentamente variabili, il livello del segnale campionato in due istanti di campionamento successivi può differire di molto poco. Se il segnale discretizzato viene convertito in digitale, cioè i livelli vengono tradotti in numeri binari, si può incorrere in *errori di quantizzazione* nel caso in cui la differenza tra i livelli campionati è al di sotto della capacità discriminatoria del convertitore. Se la conversione in digitale viene effettuata la gamma dinamica del segnale è data dalla dimensione della parola con cui viene rappresentato il livello del segnale ad ogni istante di campionamento. Infatti, se n è il numero di bit contenuti nella parola, questa può rappresentare tutti i numeri decimali compresi tra 0 e $2^n - 1$, cioè 2^n

numeri. La gamma dinamica in decibel è allora data da $20 \log(2^n)$. Per poter convertire in modo soddisfacente un segnale, recuperandone in modo fedele le sfumature dinamiche, occorre essere in grado di poter etichettare con un numero tanti valori di ampiezza diversi. Questo viene realizzato scegliendo n uguale a 16 o 24. Ciò equivale ad una gamma dinamica rispettivamente di 96.3 o 144.5 dB, sufficienti a coprire (tanto più nel caso a 24 bit) i livelli dinamici usualmente toccati dalle orchestre di musica classica.

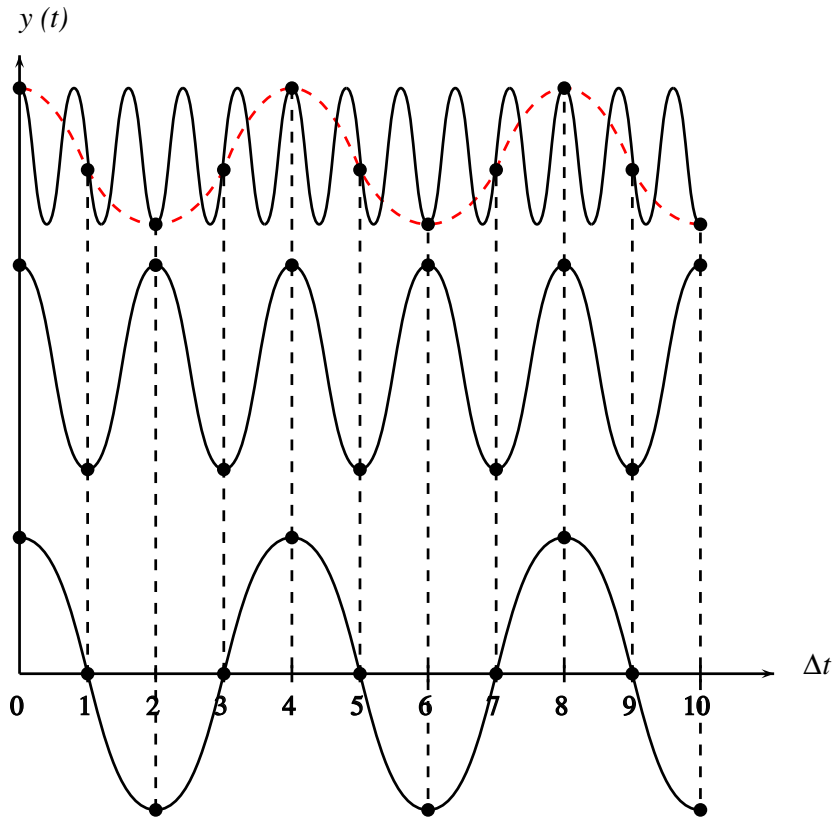


Figura 11: Rappresentazione del campionamento. Man mano che la frequenza del segnale aumenta i punti campionati consentono una rappresentazione sempre meno fedele del segnale. Per il segnale di frequenza più elevata è mostrata la nascita del tono alla frequenza f_{alias} .

3.4 Generatori di suono digitali

Il processo inverso alla conversione da analogico a digitale è chiaramente possibile in modo simmetrico, traducendo i numeri in valori di tensione e “smussando” il segnale a gradini che si ottiene con circuiti appropriati. Questa è la conversione da digitale ad analogico. Come detto, la traduzione in numeri del segnale fornisce grandi vantaggi. Infatti in ambito analogico processare un segnale e generarlo è possibile ma richiede di inventare circuiti che siano in grado di compiere operazioni matematiche sul segnale. Questo è evidentemente molto più complesso che implementare direttamente le operazioni sotto forma di programmi, portando i dispositivi digitali ad essere più stabili e più accurati (anche se spesso nella maggiore instabilità risiede una personalità del dispositivo analogico che fa sì che se ne preferisca l’uso in musica). Affidare la generazione del suono a programmi anziché a circuiti fa sì che gli unici limiti esistenti siano quelli dell’elaboratore utilizzato (che ad oggi non rappresentano un problema) e della creatività. Tra le idee fantasiose implementate figurano, ad esempio, pure generatori di suoni calcolati con programmazione genetica, che evolvono come una semplificata popolazione biologica [4]. Una prima popolazione di oscillatori viene generata casualmente e l’utente è l’agente di selezione, che sceglie il suono che più lo aggrada. Dopo la scelta una popolazione di oscillatori mutanti viene generata e il ciclo si ripete.

Le tecniche digitali per la sintesi di suoni si dividono sostanzialmente in due: metodi basati sul segnale e metodi basati sui modelli fisici. I metodi basati sul segnale sono ideati per creare una forma d’onda di spettro desiderato. Una tecnica usuale consiste nel generare un’onda che sia facilmente trasformabile in altre, in modo da limitare il numero degli oscillatori. Una forma d’onda a dente di sega è particolarmente comoda nel caso digitale. Infatti è possibile calcolarla semplicemente facendo progredire ad intervalli regolari una parola di n bit fino a esaurimento dei bit disponibili, realizzando una rampa lineare da 0 a $2^n - 1$ del valore decimale rappresentato dalla parola. La frequenza generata è legata alla dimensione dell’intervallo e sono generabili frequenze spaziate da $\Delta f = \frac{f_c}{2^n}$. Esecuzioni di calcoli successivi

trasformano la forma d'onda a dente di sega in altre forme d'onda. Un'altra tecnica consiste nell'utilizzare banche dati di forme d'onda, anche complesse, da trasformare matematicamente. Una semplice variazione della velocità di riproduzione ad esempio modifica la frequenza. Questo metodo consente di riprodurre suoni anche molto naturali, ma con un margine di modifica ristretto a meno di non compromettere la qualità (che potrebbe essere anche voluto in ambito artistico). Va notato che con il termine oscillatore digitale non si intende solo un algoritmo in grado di generare una forma d'onda, ma anche l'insieme di oggetti, software o hardware, che accedono alla banca dati e prelevano la forma d'onda desiderata alla frequenza voluta. Un ulteriore metodo è quello della sintesi spettrale, nella quale vari oscillatori digitali in parallelo producono suoni molto ricchi di armoniche, da modificarsi con amplificatori e filtri dipendenti dal tempo o manovrabili direttamente dall'esecutore. Questo caso comprende la sintesi addittiva e sottrattiva e se gli oscillatori sono accoppiati si realizza sintesi per modulazione di frequenza. Chiaramente molto potente, spesso è problematico per i musicisti in quanto non è facile prevedere come varia il suono al variare del grande numero di parametri a disposizione.

I metodi basati sui modelli fisici invece implementano algoritmi basati sui modelli degli oscillatori meccanici e elettronici analogici al fine di simularli. Sebbene l'idea risalga agli inizi degli anni '70 con un algoritmo basato sul metodo delle differenze finite solo dopo gli anni '80 è stato possibile implementare questa ed altre idee, grazie al progressivo sviluppo tecnologico e teorico, raffinando l'hardware e gli algoritmi al tempo stesso. Ad oggi il metodo più usato per la sintesi da modelli fisici di strumenti musicali, i cui vibratori primari sostengono generalmente onde stazionarie, è quello della guida d'onda digitale. Questo è basato su quanto detto sulle onde stazionarie nel capitolo 1. Infatti un'onda stazionaria data dall'equazione (1) di d'Alembert è esprimibile come somma di onde viaggianti in direzioni opposte. Esaminando l'equazione (4) si capisce che, istante per istante, la forma d'onda completa è la somma di due forme d'onda identiche ma sfasate. Questo è pensabile come dovuto ad un ritardo temporale acquisito dalle due onde per merito della loro propagazione in opportune guide, prima che avvenga la

somma. Tutto ciò deve avvenire con ciclicità dato che l'evento naturale è la riflessione dell'onda laddove sono presenti i vincoli. Pertanto le guide d'onda devono essere chiuse in un loop. La simulazione allora consiste nel creare due guide d'onda virtuali che producano i ritardi dovuti per le due onde, accoppiandole con coefficienti che simulino dispersioni in mezzi reali, perdite di energia, elementi non lineari. Questo è generalmente fatto attraverso due linee di ritardo bidirezionali in feedback e algoritmi come filtri digitali posti alla fine delle linee. Dal pregio di essere molto generale e di chiamare in causa oggetti facilmente implementabili questo metodo cerca di costruire uno strumento equivalente ma non consente, dato uno strumento reale, di derivare in modo rigoroso i parametri necessari per governare gli elementi di fine guida. Questa operazione è infatti sostanzialmente empirica. Modelli più completi consentono di portare nella descrizione i parametri fisici del sistema. Questo è il caso del modello proposto nel capitolo precedente per la chitarra elettrica, dove tutti i parametri fisici fondamentali sono “in chiaro”. Per questi modelli però, essendo basati su equazioni alle derivate parziali, è complessa l'implementazione dato che, se si vuole che la sintesi avvenga in tempo reale, si deve ottenere una soluzione dell'equazione in un tempo ben sotto la soglia con cui l'udito umano discerne il ritardo (circa 10 ms) e con una qualità (quindi variabili di campionamento) sufficientemente elevata. Nel seguito, uno dei più recenti metodi per affrontare il problema è esposto.

3.5 Metodo della trasformata funzionale

L'equazione che si intende risolvere è la (16), che viene riportata per comodità qui dividendo ambo i membri per ρA :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{EI}{\rho A} \frac{\partial^4 y}{\partial x^4} - \frac{T}{\rho A} \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{d_1}{\rho A} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{d_3}{\rho A} \frac{\partial^3 y}{\partial t \partial x^2} = \frac{1}{\rho A} f_e(x, t) \quad , \quad x \in (0, L)$$

dove L è la lunghezza della corda. Questa equazione necessita di due condizioni iniziali dal momento che vi è una derivata al secondo ordine nel tempo. Cioè, occorre specificare la deformazione iniziale $y(x, 0)$ e la velocità

iniziale $\dot{y}(x, 0)$. Per semplicità si fa la seguente scelta:

$$\vec{f}_i\{y\} = \begin{pmatrix} y(x, 0) \\ \dot{y}(x, 0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}$$

A queste vanno aggiunte le condizioni al contorno per $x = 0$ e $x = L$. Queste sono le usuali di una chitarra, che ha le corde fissate ad entrambi gli estremi ⁴:

$$\vec{f}_b\{y\} = \begin{pmatrix} y(x, t) \\ \frac{\partial^2 y(x, t)}{\partial x^2} = y'' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \vec{0}, \quad x = 0, L$$

Prima di proseguire è conveniente scrivere in modo più compatto i parametri:

$$a_{02} \doteq -\frac{T}{\rho A}, \quad a_{04} \doteq \frac{EI}{\rho A}, \quad a_{10} \doteq \frac{d_1}{\rho A}, \quad a_{12} \doteq \frac{d_3}{\rho A}, \quad b_0 \doteq \frac{1}{\rho A}$$

dove gli indici ij di a_{ij} denotano il coefficiente per la derivata i -esima rispetto al tempo e la derivata j -esima rispetto allo spazio. Pure, conviene scrivere l'equazione in termini di operatori differenziali. Questi sono \mathbf{D} e \mathbf{W}_D per le operazioni che coinvolgono la coordinata temporale, \mathbf{L} e \mathbf{W}_L operano sulle variabili spaziali e \mathbf{W} è un operatore misto ⁵:

$$\begin{aligned} \mathbf{D}\{y(x, t)\} &\doteq \ddot{y} + a_{10}\dot{y} \\ \mathbf{W}_D\{y(x, t)\} &\doteq a_{12}\dot{y} \\ \mathbf{L}\{y(x, t)\} &\doteq a_{04}y^{(4)} + a_{02}y'' \\ \mathbf{W}_L\{y(x, t)\} &\doteq y'' \\ \mathbf{W}\{y(x, t)\} &\doteq \mathbf{W}_D\{\mathbf{W}_L\{y(x, t)\}\} = a_{12}\dot{y}'' \end{aligned}$$

⁴La ragione per imporre la nullità della derivata spaziale al secondo ordine di y è la seguente: ai punti di vincolo non avviene nessuno spostamento, ma neanche nessuna torsione dell'elemento cilindrico di corda. In altre parole non c'è nessuno spostamento dell'elemento di corda, nemmeno rotazionale. Questo corrisponde a chiedere che y , per x che tende ai punti di vincolo, si comporti in modo tale che la curvatura (e quindi la derivata seconda) sia nulla, per preservare l'orientazione dell'elemento [7].

⁵Assieme ai simboli usuali per le derivate si usa la seguente convenzione:

La derivata rispetto al tempo viene indicata con $\dot{}$, quella rispetto alla coordinata spaziale con \prime . Nel caso in cui le derivate siano ripetute lo sono anche i simboli. Nel caso della derivata spaziale, dopo il terzo ordine, la derivata di ordine n -esimo è indicata da $^{(n)}$.

Con queste scelte il problema è scritto in modo più conciso:

$$\begin{cases} \mathbf{D}\{y(x, t)\} + \mathbf{L}\{y(x, t)\} + \mathbf{W}\{y(x, t)\} = b_0 f_e(x, t) , & x \in (0, L) \\ \vec{f}_i\{y(x, 0)\} = \vec{0} , & x \in (0, L) \\ \vec{f}_b\{y(x, t)\} = \vec{0} , & x = 0, L \end{cases} \quad (18)$$

L'obiettivo è quello di trovare una soluzione per ogni eccitazione f_e , che costituisce una sorta di input per il sistema intero, che dà come output y . Il modo naturale (e ben noto in elettronica) per trattare un sistema che, ad una forzante, risponde con un certo output è tramite la funzione di trasferimento, che è una relazione tra input e output per sistemi lineari con condizione iniziale nulla, punto di equilibrio nullo e tempo invarianti (cioè, tali che se $f_e(x, t)$ produce $y(x, t)$ allora $f_e(x, t + \delta)$ produce $y(x, t + \delta)$), come è la corda. Questa può essere ottenuta dall'equazione differenziale in questione attraverso l'operazione di trasformate. Applicando la trasformata di Laplace \mathcal{L} si rimuovono infatti le derivate temporali considerando le condizioni iniziali. Questo trasforma il problema in una equazione differenziale ordinaria con condizioni al contorno. Una trasformazione \mathcal{T} che agisce sullo spazio assolve il compito di rimuovere le derivate spaziali, considerando le condizioni al contorno. Il risultato è una equazione algebrica in termini di $\mathcal{T}\{\mathcal{L}\{y\}\}$, che è la trasformata temporale e spaziale della soluzione di (18). È proprio da questa equazione algebrica che si ottiene la funzione di trasferimento. Questa può essere infine discretizzata nel tempo secondo quanto detto nei paragrafi precedenti. Le trasformazioni inverse \mathcal{T}^{-1} e \mathcal{Z}^{-1} (\mathcal{Z} altri non è che la versione per tempi discreti di \mathcal{L}) completano quindi il processo fornendo un sistema discreto pronto per l'implementazione al computer. Seguono più nel dettaglio le operazioni da effettuarsi.

3.5.1 Applicazione della trasformata di Laplace

La trasformata di Laplace unilatera è definita in questo modo:

$$\mathcal{L}\{y(x, t)\} \doteq \int_0^\infty y(x, t) e^{-st} dt \doteq Y(x, s) \text{ , } s \in \mathbb{C}$$

dove s è chiamata frequenza complessa. L'applicazione della trasformata ha due effetti principali: trasforma le derivate rispetto al tempo in moltiplicazioni per s e include le condizioni iniziali come termini addizionali ⁶. In definitiva, conglobando i termini in s che vengono generati in opportuni polinomi e ricordando la condizione iniziale, il problema viene così tradotto:

$$\left\{ \begin{array}{l} d_D(s) Y(x, s) + \mathbf{L}\{Y(x, s)\} + w_D(s) \mathbf{W}_L\{Y(x, s)\} = b_0 F_e(x, s) \\ \vec{f}_b\{Y(x, s)\} = \vec{0} \text{ , } x = 0, L \\ d_D(s) \doteq s^2 + a_{10}s \text{ , } w_D(s) \doteq a_{12}s \text{ , } x \in (0, L) \end{array} \right. \quad (19)$$

3.5.2 Costruzione e applicazione della trasformata \mathcal{T}

Non esiste una trasformata che sia in grado di trattare la parte nelle variabili spaziali con la stessa generalità con cui la trasformata di Laplace tratta la parte nelle variabili temporali. Per ogni problema particolare occorre definire una trasformata \mathcal{T} opportuna. In equazione (19) gli operatori che agiscono sulle variabili spaziali sono \mathbf{L} e \mathbf{W}_L , il resto è in termini di s . Questi, dal momento che il termine $w_D(s)$ non dipende dallo spazio, possono essere concatenati nell'operatore \mathbf{L}_W come segue:

$$\mathbf{L}_W\{Y(x, s)\} \doteq \mathbf{L}\{Y(x, s)\} + w_D(s) \mathbf{W}_L\{Y(x, s)\}$$

Si può dimostrare che l'operatore \mathbf{L}_W ha le seguenti proprietà:

- \mathbf{L}_W è autoaggiunto
- Espresso il problema agli autovalori per \mathbf{L}_W come segue:

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{L}_W\{\hat{K}(\beta(s), x)\} = \beta^4(s) \hat{K}(\beta(s), x) \text{ , } x \in (0, L) \\ \vec{f}_b\{\hat{K}(\beta(s), x)\} = \vec{0} \text{ , } x = 0, L \end{array} \right.$$

⁶Vale infatti la proprietà: $\mathcal{L}\{f'(t)\} = s\mathcal{L}\{f(t)\} - f(0)$

gli autovalori sono discreti e semplici:

$$\beta(s) = \beta_\mu(s) , \hat{K}(\beta_\mu(s), x) = K(\mu, s, x) , \mu \in \mathbb{N}$$

- Le autofunzioni sono mutualmente ortogonali:

$$\int_0^L K(\mu, s, x) K(\nu, s, x) dx = \begin{cases} 0 & \text{se } \nu \neq \mu \\ N_\mu & \text{se } \nu = \mu \end{cases}$$

Queste proprietà inducono a definire la trasformata \mathcal{T} come segue:

$$\begin{aligned} \mathcal{T}\{Y(x, s)\} &\doteq \int_0^L Y(x, s) K(\mu, s, x) dx \doteq \bar{Y}(\mu, s) \\ \mathcal{T}^{-1}\{\bar{Y}(\mu, s)\} &= Y(x, s) = \sum_\mu \frac{1}{N_\mu} \bar{Y}(\mu, s) K(\mu, s, x) \end{aligned}$$

dove nella scrittura per \mathcal{T}^{-1} si è fatto uso della ortogonalità. Infine si può dimostrare che vale il seguente teorema di derivazione:

$$\mathcal{T}\{\mathbf{L}_W\{Y(x, s)\}\} = \beta_\mu^4(s) \bar{Y}(\mu, s)$$

La forma esplicita di autofunzioni e autovalori è la seguente:

$$K(\mu, s, x) = \sin\left(\mu\pi\frac{x}{L}\right) , \beta_\mu^4(s) = a_{04}\left(\mu\frac{\pi}{L}\right)^4 - (a_{02} + w_D(s))\left(\mu\frac{\pi}{L}\right)^2$$

Pertanto, secondo quanto detto nel paragrafo 1.4 e passando per le (3), le autofunzioni di \mathbf{L}_W sono le parti spaziali dei modi stazionari delle corde ideali. A questo punto il teorema di derivazione permette di riscrivere il problema in questi termini:

$$d_D(s) \bar{Y}(\mu, s) + \beta_\mu^4(s) \bar{Y}(\mu, s) = b_0 \bar{F}_e(\mu, s) , x \in (0, L) \quad (20)$$

che è una equazione algebrica.

3.5.3 La funzione di trasferimento

Come detto, la funzione di trasferimento $\bar{G}_e(\mu, s)$ permette di conoscere l'output di un sistema attraverso la conoscenza dell'input. Esplicitando algebricamente \bar{Y} dell'equazione (20) si ha:

$$\bar{G}_e(\mu, s) \doteq \frac{\bar{Y}(\mu, s)}{\bar{F}_e(\mu, s)} = \frac{b_0}{d_D(s) + \beta_\mu^4(s)}$$

dove il denominatore è un polinomio in s i cui coefficienti dipendono dai parametri fisici secondo le sostituzioni che si sono operate. Esplicitamente:

$$d_D(s) + \beta_\mu^4(s) = s^2 + \left[\frac{d_1}{\rho A} - \frac{d_3}{\rho A} \left(\mu \frac{\pi}{L} \right)^2 \right] s + \frac{EI}{\rho A} \left(\mu \frac{\pi}{L} \right)^4 + \frac{T}{\rho A} \left(\mu \frac{\pi}{L} \right)^2$$

mentre $b_0 = \frac{1}{\rho A}$ costituisce un fattore di guadagno costante. Alternativamente il polinomio al denominatore può essere scritto mettendo in evidenza la coppia di poli $s_{\infty\mu} = \Re(s_{\infty\mu}) + i\Im(s_{\infty\mu})$ e $s_{\infty\mu}^*$ di $\bar{G}_e(\mu, s)$:

$$d_D(s) + \beta_\mu^4(s) = (s - s_{\infty\mu})(s - s_{\infty\mu}^*)$$

$$\Re(s_{\infty\mu}) = \frac{1}{2\rho A} \left(d_3 \left(\mu \frac{\pi}{L} \right)^2 - d_1 \right)$$

$$[\Im(s_{\infty\mu})]^2 = \left[\frac{EI}{\rho A} - \frac{d_3^2}{(2\rho A)^2} \right] \left(\mu \frac{\pi}{L} \right)^4 + \left[\frac{T}{\rho A} + \frac{d_1 d_3}{2(\rho A)^2} \right] \left(\mu \frac{\pi}{L} \right)^2 - \left[\frac{d_1}{2\rho A} \right]^2$$

Per le proprietà generali delle funzioni di trasferimento la parte immaginaria $\Im(s_{\infty\mu})$ dei poli fornisce la μ -esima pulsazione di risonanza (o modo normale) dell'oscillazione della corda. Questo è evidente se si ritorna al caso della corda ideale imponendo $E = d_1 = d_3 = 0$. Infatti in questo caso si ha:

$$\Im(s_{\infty\mu}) = \mu \frac{\pi}{L} \sqrt{\frac{T}{\rho A}}$$

Questa, divisa per 2π per trovare la frequenza e tenuto conto che $\rho A = \rho_l$, coincide proprio con la (6). Cercando una soluzione per l'equazione (16) si è ottenuta una proprietà notevole degli strumenti reali e il fenomeno di inar-

monicità degli ipertoni è palesato. È da notare che nessuna approssimazione è stata fatta, pertanto questa è una rappresentazione esatta del sistema.

Affinchè questa funzione sia maneggiabile da un computer occorre discretizzarla. Questo va fatto riesplicitando il tempo attraverso \mathcal{L}^{-1} , campionando il risultato e applicando la versione discreta \mathcal{Z} di \mathcal{L} . Cioè:

$$\bar{G}_e^d(\mu, z) = \mathcal{Z} \left\{ \mathcal{L}^{-1} \left\{ \bar{G}_e(\mu, s) \right\} \Big|_{t=n\Delta t} \right\}$$

dove la d all'apice identifica la funzione discreta, Δt è l'intervallo di campionamento e z è la versione discreta di s . Questa procedura funziona bene per sistemi la cui banda è limitata. Dato che il numero μ non ha vincoli (purchè sia positivo) è evidente che le frequenze normali sono in linea di principio infinite. Ad ogni modo, per quanto detto alla luce del teorema 3.1 del campionamento, la banda deve comunque essere limitata per evitare l'*aliasing*. La scelta naturale cade su una banda che include l'udibile. Per scelte della frequenza di campionamento $f_c = \frac{1}{2\pi}\omega_c$ nell'ordine di 32, 44.1 e 48 kHz il più grande numero Λ per cui vale $\Im(s_{\infty\Lambda}) \leq \frac{1}{2}\omega_c$ è nell'ordine del centinaio. Trascurare modi a pulsazioni maggiori di $\Im(s_{\infty\Lambda})$ comporta una approssimazione non udibile e assicura l'assenza di *aliasing*. $\bar{G}_e^d(\mu, z)$ è il rapporto tra $\bar{Y}^d(\mu, z)$ e $\bar{F}_e^d(\mu, z)$ in analogia con il caso continuo. La forma della funzione di trasferimento discreta contiene ancora i parametri fisici del sistema, anche se ora ne è una versione approssimata dal processo di discretizzazione. Come detto però si può agire sulle variabili di campionamento per fare in modo che le devianze dal caso non approssimato siano non udibili.

3.5.4 Soluzione

A questo punto occorre liberare la soluzione per tempi discreti y^d . Questo in pratica consiste nella applicazione delle trasformate inverse. In primo luogo

$$Y^d(x, z) = \mathcal{T}^{-1} \left\{ \bar{Y}^d(\mu, z) \right\} = \mathcal{T}^{-1} \left\{ \bar{G}_e^d(\mu, z) \bar{F}_e^d(\mu, z) \right\} \quad (21)$$

Il metodo viene ora più specializzato alla chitarra elettrica. Alla fine del capitolo precedente si era affermato che l'eccitazione avviene senza alterazione

della larghezza spaziale di f_e nel tempo, implicando la fattorizzabilità di f_e in parte temporale e parte spaziale. Imponendo questa condizione (di fatto una approssimazione che calza con i modi di eccitazione usuali, data la breve durata del processo) si ha:

$$\begin{aligned} f_e(x, t) = f_{e1}(x) f_{e2}(t) &\implies \bar{F}_e^d(\mu, z) = \bar{f}_{e1}(\mu) F_{e2}^d(z) = \\ &= \mathcal{T}\{f_{e1}(x)\} \mathcal{Z}\{f_{e2}(n\Delta t)\} \end{aligned} \quad (22)$$

Nel caso di corda pizzicata l'eccitazione può essere pensata come applicata in un solo punto esprimibile rispetto ad uno degli estremi della corda con $\frac{L}{K}$ come fatto nel paragrafo 1.8. Pertanto $f_{e1}(x)$ può essere assunta deltiforme. Questo implica:

$$f_{e1}(x) = f\delta\left(x - \frac{L}{K}\right) \implies \bar{f}_{e1}(\mu) = \mathcal{T}\left\{f\delta\left(x - \frac{L}{K}\right)\right\} = fK\left(\mu, \frac{L}{K}\right)$$

con f costante reale. f_{e1} può essere allora inserita nell'equazione (22) e quindi nell'equazione (21) per dare $Y^d(x, z)$:

$$Y^d(x, z) = \mathcal{T}^{-1}\left\{\bar{G}_e^d(\mu, z) \bar{f}_{e1}(\mu)\right\} F_{e2}^d(z) \doteq H^d(x, z) F_{e2}^d(z)$$

Dato che in una chitarra elettrica interessa solo il moto dell'elemento di corda sull'asse del pickup ci si può limitare a considerare solo $Y^d\left(\frac{L}{M}, z\right)$, dove $\frac{L}{M}$ identifica la posizione del pickup relativamente ad un estremo della corda come fatto nella sezione 2.2.3 durante la trattazione del pickup magnetico. Finalmente, la soluzione per tempi discreti $y^d\left(\frac{L}{M}, n\right)$ è data tramite la trasformata inversa \mathcal{Z}^{-1} :

$$y^d\left(\frac{L}{M}, n\right) = \mathcal{Z}^{-1}\left\{H^d\left(\frac{L}{M}, z\right)\right\} * f_{e2}^d(n\Delta t) \doteq h^d\left(\frac{L}{M}, n\right) * f_{e2}^d(n\Delta t) \quad (23)$$

dove $*$ indica la convoluzione tra il profilo temporale dell'eccitazione campionato nel tempo e h^d , che rappresenta la risposta all'impulso del sistema. Un esame attento delle grandezze in gioco nella convoluzione mostra che essa è

realizzabile da una batteria di filtri digitali del second'ordine in parallelo, ciascuno che filtra una frequenza di risonanza e la pesa con $\bar{f}_{e1}(\mu)$ e $K\left(\mu, \frac{L}{M}\right)$. Il guadagno $a\left(\mu, \frac{L}{M}\right)$ normalizzato del μ -esimo filtro digitale è allora così rappresentato:

$$a\left(\mu, \frac{L}{M}\right) = \frac{1}{N_\mu} \bar{f}_{e1}(\mu) K\left(\mu, \frac{L}{M}\right)$$

Conclusione

Nel corso di questa tesi, preparando il materiale necessario attraverso i primi due capitoli e parte del terzo, è stato illustrato come il metodo della trasformata funzionale, uno dei metodi più recenti e interessanti per affrontare il problema della sintesi di suoni da modelli fisici, può essere applicato ad uno strumento reale. Il primo capitolo ha riassunto le generalità circa il suono, gli strumenti teorici fondamentali per trattare le funzioni d'onda e il comportamento delle corde ideali. Nel secondo capitolo, assieme ad alcune generalità, è stata fornita una descrizione di un rappresentante degli strumenti a corda relativamente semplice da trattare, la chitarra elettrica. Nell'ultimo capitolo è stato mostrato il metodo in questione all'opera sull'equazione alle derivate parziali per le onde su una corda elastica accoppiata a vibratori secondari introdotta al termine del paragrafo 2.2.3. Questa equazione è il cuore del modello per ogni strumento a corda e la sua soluzione può fornire il segnale in tensione ai capi di un pickup magnetico in una chitarra elettrica se si considera la fisica di quest'ultimo. In equazione (17) è stato evidenziato come di fatto il pickup sia riassumibile come una operazione di derivazione sulla soluzione e una successiva operazione di filtraggio sul segnale ottenuto, con dimensionamento delle operazioni con parametri che dipendono dalla costruzione del dispositivo e dalla geometria del sistema corda-pickup. L'implementazione di queste operazioni è ben nota dal punto di vista informatico. Pertanto il metodo più semplice per aggiungere un pickup è mediante un algoritmo indipendente che agisce sulla soluzione. A questo punto la soluzione finale verrebbe a dipendere dalla intensità dell'eccitazione f , dalla tensione a cui è sottoposta la corda e dagli accoppiamenti con lo strumento (T, d_1, d_3) , dai parametri fisici della corda (ρ, E, I, κ_r) , dalle caratteristiche geometriche del sistema corda-pickup (Σ, h, A, L) , dalle caratteristiche elettroniche del pickup (R, \tilde{L}, C) e, in prim'ordine, dal numero degli avvolgimenti attraverso il parametro di guadagno γ .

Il metodo della trasformata funzionale offre molti vantaggi. In primo luogo il metodo è del tutto generale, applicabile ad ogni sistema descritto da equazioni alle derivate parziali. Le sue implementazioni così come effettuate

da Rabenstein e Trautmann [8] per la sintesi del suono di una corda sono in grado di sintetizzare un gran numero di armoniche (come detto, ~ 100) in un tempo inferiore a quello con cui un essere umano percepisce il ritardo (~ 10 ms). Il fatto che l'algoritmo di sintesi sia derivato direttamente da un modello consente di poter tradurre direttamente strumenti reali in strumenti digitali simulati tramite calcoli e misure. In più i parametri fisici del sistema sono controllabili dal musicista in tempo reale. Questo, addizionato al fatto che si possono simulare strumenti con caratteristiche fisiche impossibili (ad esempio con corde di nylon ferromagnetiche) si presta alla creazione di suoni nuovi e inesistenti. Essendo in grado di convolvere l'impulso dell'eccitazione il metodo ritrova i transienti corretti per il moto del sistema in questione dovuti alle sue proprietà meccaniche e ai suoi accoppiamenti. È da notare che spesso le soluzioni di sintesi digitale di uno strumento a corda lasciano insoddisfatti proprio per la resa dei transienti. La soluzione poi può essere ottenuta direttamente nei punti (anche se solo uno) di interesse, caratteristica non condivisa dagli altri metodi usuali. Infine, dal punto di vista matematico e fisico, il metodo permette di costruire una rappresentazione esatta del sistema e di porre in evidenza proprietà notevoli di quest'ultimo.

Bibliografia Essenziale

- [1] A. Askenfelt A. Chaigne. Numerical simulations of piano strings. I. A physical model for a struck string using finite difference methods. *J. Acoust. Soc. Am.* 95 (2), pages 1112–1118, 1994.
- [2] Achille Venaglioni Alberto Rotondi. *Guida ad alcune esperienze di laboratorio*. unipv, 2011.
- [3] Andrea Frova. *Fisica nella musica*. Zanichelli, 1999.
- [4] Dave Griffiths. Fastbreeder, an experimental genetic programming synthesiser. Slashdot: <http://www.pawfal.org/Software/fastbreeder/>.
- [5] Helmuth Lemme. *Electric Guitar - Sound Secrets and Technology*. Elektor, 2012.
- [6] Kirk T. McDonald. Electric Guitar Pickups. Slashdot: <http://www.physics.princeton.edu/~mcdonald/examples/guitar.pdf>, 2007.
- [7] Thomas D. Rossing Neville Horner Fletcher. *The Physics of Musical Instruments*. Springer, 2010.
- [8] Rudolf Rabenstein and Lutz Trautmann. Digital sound synthesis of string instruments with the functional transformation method. *Signal Processing*, 83:1673–1688, 2003.
- [9] P. Mazzoldi M. Nigro C. Voci. *Fisica - Volume II*. Edises, 2007.