Методы оптимизации

Лекция 2. Экстремум неявно заданной функции. Условный экстремум

Экстремум неявно заданной функции

Пусть уравнение $F(x;y;z)=0$ задает неявно функцию $z=f(x;y)$. Пусть функция z дважды непрерывно дифференцируема в R^2. Если $(x_0;y_0)$ – стационарная точка, то в ней выполнены равенства:

$$z'_x = -\frac{F'_x(x_0;y_0;z_0)}{F'_z(x_0;y_0;z_0)} = 0, \qquad z'_y = -\frac{F'_y(x_0;y_0;z_0)}{F'_z(x_0;y_0;z_0)} = 0,$$

$$F'_z(x_0;y_0;z_0) \neq 0, \qquad F(x_0;y_0;z_0) = 0.$$

Очевидно, верно и обратное утверждение. Следовательно, стационарные точки неявной функции могут быть найдены из системы:

$$\begin{cases} F'_x(x;y;z) = 0, \\ F'_y(x;y;z) = 0, \\ F(x;y;z) = 0. \end{cases}$$

Достаточное условие формулируется так же, как в случае явного задания функции.

Экстремум неявно заданной функции

Если неявная функция $f(M) = f(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)$ определена на множестве $E \in R^n$ и задана уравнением

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n, f) = 0,$$

то $F\big(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n,\ f(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n)\big) \equiv 0$ при $(x_1,\ x_2, \dots,\ x_n) \in E$.

Пусть функция f дважды дифференцируема в E. Тогда в стационарной точке M_0 справедливы равенства

$$df = -\frac{1}{F'_f}\left(F'_{x_1}dx_1 + F'_{x_2}dx_2 + \dots + F'_{x_n}dx_n\right) = 0,$$

$$F\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}, f\left(x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \dots, x_n^{(0)}\right)\right) = 0.$$

Поскольку справедливо и обратное утверждение, то стационарные точки могут быть найдены из системы

$$F'_{x_i} = 0 \ \ (i = 1, 2, \dots, n), \quad F = 0.$$

Экстремум неявно заданной функции

Еще раз дифференцируя и учитывая, что в стационарной точке $df=0$, получаем:

$$d^2 f = -\frac{1}{F'_f} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}\, dx_i\, dx_j.$$

Если $d^2 f(M_0) > 0$, то функция имеет в точке M_0 минимум; если же $d^2 f(M_0) < 0$, то максимум.

Экстремум неявно заданной функции. Пример

Найти экстремум функции $z = (x, y)$, если

$$z^3 - xyz + y^2 + 4x^2 = 16.$$

Решение.

Пусть $F = z^3 - xyz + y^2 + 4x^2 - 16$. Для определения стационарных точек составим систему:

$$\begin{cases} F'_x = 0, \\ F'_y = 0, \\ F = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} -yz + 8x = 0, \\ -xz + 2y = 0, \\ z^3 - xyz + y^2 + 4x^2 = 16. \end{cases}$$

Выразим из первого уравнения x и подставим во второе уравнение:

$$\begin{cases} x = \dfrac{yz}{8}, \\ \dfrac{-yz^2}{8} + 2y = 0, \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \dfrac{yz}{8}, \\ y\left(2 - \dfrac{z^2}{8}\right) = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения получаем, что либо $y = 0$, либо $z = \pm 4$.

Экстремум неявно заданной функции. Пример

Если $y = 0$, то $x = 0$, а z –любое. Подставляя точки $(0; 0; z)$ в третье уравнение, имеем $z^3 = 16$. Отсюда $z = \sqrt[3]{16}$ и точка $M(0; 0)$ (в которой $z = \sqrt[3]{16}$) является стационарной.

Если же $z = \pm 4$, то $x = \pm\frac{y}{2}$ и получаем точки вида $\left(\pm\frac{y}{2}; y; \pm 4\right)$, которые не удовлетворяют третьему уравнению.

Исследуем точку M. Для этого находим производные F'_z, F''_{xx}, F''_{yy}, F''_{xy} и вычисляем второй дифференциал в точке M:

$$d^2z = -\frac{1}{F'_z}\left(F''_{xx}(dx)^2 + 2F''_{xy}dxdy + F''_{yy}(dy)^2\right).$$

Экстремум неявно заданной функции. Пример

$$\begin{cases} F'_z = 3z^2 - xy, \\ F''_{xx} = 8, \\ F''_{yy} = 2, \\ F''_{xy} = -z; \end{cases} \qquad \begin{cases} F'_z(M) = 3(\sqrt[3]{16})^2, \\ F''_{xx}(M) = 8, \\ F''_{yy}(M) = 2, \\ F''_{xy}(M) = -\sqrt[3]{16}. \end{cases}$$

$$d^2z(M) = -\frac{1}{3\left(\sqrt[3]{16}\right)^2}\left(8(dx)^2 - 2\cdot\sqrt[3]{16}dxdy + 2(dy)^2\right) =$$

$$= -\frac{2}{3\left(\sqrt[3]{16}\right)^2}\left((dy)^2 - \sqrt[3]{16}dxdy + 4(dx)^2\right) =$$

$$= -\frac{2}{3\left(\sqrt[3]{16}\right)^2}\left(\left(dy - \frac{\sqrt[3]{16}}{2}dx\right)^2 + \frac{16-\sqrt[3]{16}}{4}(dx)^2\right).$$

Оба слагаемых в больших скобках неотрицательны, и, значит, $d^2z(M) < 0$ при всех dx и dy, не равных нулю одновременно. Таким образом, $M(0;0)$ – точка максимума.

$$z_{\max} = z(0;0) = \sqrt[3]{16}.$$

Условный экстремум функции двух переменных

Определение 6. Условным экстремумом функции $z = f(x; y)$ называется экстремум этой функции, достигнутый при условии, что переменные x и y связаны уравнением

$$\varphi(x; y) = 0$$

(уравнение связи).

Отыскание условного экстремума функции $z = f(x; y)$ можно свести к исследованию на обычный экстремум ***функции Лагранжа***

$u = f(x; y) + \lambda\varphi(x; y)$, где λ – неопределенный постоянный множитель.

Необходимые условия экстремума функции Лагранжа имеют вид

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial x} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial x} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial x} = 0, \\ \dfrac{\partial u}{\partial y} \equiv \dfrac{\partial f}{\partial y} + \lambda \dfrac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \\ \varphi(x; y) = 0. \end{cases} \qquad (15)$$

Из этой системы трех уравнений находят x и y – координаты точки, подозрительной на экстремум, и λ.

Достаточным условием, из которого можно выяснить характер экстремума, служит знак дифференциала второго порядка

$$d^2u(x,y) = u''_{xx}dx^2 + 2u''_{xy}dxdy + u''_{yy}dy^2 \qquad (16)$$

Если в стационарной точке d^2u >0, то функция z=f(x,y) имеет в данной точке условный минимум, если же d^2u <0, то условный максимум. Причем, dx, dy связанны дифференциалом условия:

$$d\varphi(x,y) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0$$

Есть и другой способ для определения характера экстремума. Из уравнения связи получаем:

$$\varphi'_x dx + \varphi'_y dy = 0$$

$$dy = -\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y} dx,$$

поэтому в любой стационарной точке имеем:

$$d^2u(x,y) = u''_{xx}dx^2 + 2u''_{xy}dxdy + u''_{yy}dy^2 = d^2u(x,y)$$

$$= u''_{xx}dx^2 + 2u''_{xy}dx\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx\right) + u''_{yy}\left(-\frac{\varphi'_x}{\varphi'_y}dx\right)^2$$

$$= -\frac{dx^2}{\left(\varphi'_y\right)^2} \cdot (-\left(\varphi'_y\right)^2 u''_{xx} + 2\varphi'_x\varphi'_y u''_{xy} - (\varphi'_x)^2 u''_{yy})$$

Второй сомножитель (расположенный в скобке) можно представить в такой форме:

$$H = \begin{vmatrix} 0 & \varphi'_x & \varphi'_y \\ \varphi'_x & u''_{xx} & u''_{xy} \\ \varphi'_y & u''_{xy} & u''_{yy} \end{vmatrix} \qquad (17)$$

Если H > 0, то d^2u < 0, что указывает на условный максимум. Аналогично, при H < 0 и d^2u > 0, т.е. имеем условный минимум функции z = f(x,y).

Пример. Найти экстремум функции z = xy при условии, что x и y связаны уравнением 2x + 3y – 5 = 0.

Решение.

Рассмотрим функцию Лагранжа $u = xy + \lambda(2x + 3y - 5)$. Имеем , $\frac{\partial u}{\partial x} = y + 2\lambda$ $\frac{\partial u}{\partial y} = x + 3\lambda$.

Из системы уравнений, определяющей необходимые условия экстремума

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial x} = 0; \\ \frac{\partial u}{\partial y} = 0; \\ \varphi(x; y) = 0. \end{cases} \qquad \begin{cases} y + 2\lambda = 0; \\ x + 3\lambda = 0; \\ 2x + 3y - 5 = 0. \end{cases}$$

находим $\lambda = -\frac{5}{12}$, $x = \frac{5}{4}$, $y = \frac{5}{6}$.

Выясним характер экстремума в каждой стационарной точке.

$$u''_{xx} = 0$$

$$u''_{yy} = 0$$

$$u''_{xy} = 1$$

$$d^2u(x,y) = u''_{xx}dx^2 + 2u''_{xy}dxdy + u''_{yy}dy^2$$
$$= 0 \cdot dx^2 + 2dxdy + 0 \cdot dy^2 == 2dxdy$$

Из уравнения связи 2x + 3y – 5 = 0 имеем:

$$d\varphi(x,y) = \frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y - 5)dx + \frac{\partial}{\partial x}(2x + 3y - 5)dy$$
$$= 2dx + 3dy$$

$$2dx + 3dy = 0$$

$$dy = -\frac{2}{3}dx$$

Подставим во второй дифференциал:

$$d^2u(x,y) = 2dxdy = 2dx \cdot \left(-\frac{3}{2}dx\right) = -3dx^2 < 0$$

Следовательно, что в точке $\left(\frac{5}{4};\frac{5}{6}\right)$

функция z = xy достигает наибольшего значения

$z_{max} = \frac{25}{24}$.

Условный экстремум функции нескольких переменных

Рассмотрим функцию $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ при условии, что ее аргументы являются не независимыми переменными, а связаны между собой k соотношениями $(k < n)$:

$$F_i(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Эти соотношения называются условиями связи. Пусть координаты точки $M_0(x_1^0, x_2^0, \dots, x_n^0)$ удовлетворяет уравнениям связи.

Говорят, что функция $f(M)$ имеет в точке M_0 условный максимум (минимум) при условиях связи если существует такая окрестность точки M_0, что для любой точки M $(M \neq M_0)$ этой окрестности, координаты которой удовлетворяют уравнениям связи, выполняется неравенство $f(M_0) \geq f(M)$ $\left(f(M_0) \leq f(M)\right)$.

Условный экстремум функции нескольких переменных

Рассмотрим два метода решения задачи об условном экстремуме функции.

1. Метод исключения части переменных. Пусть из системы можно выразить каких-то k переменных, например, $x_1, x_2, \dots, x_k$:

$$x_i = \varphi_i(x_{k+1}, x_{k+2}, \dots, x_n) \qquad (i = 1, 2, \dots, k).$$

Подставляя их в $f(M) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, получим функцию $n - k$ независимых переменных:

$$f(\varphi(x_{k+1}, \dots, x_n), \dots, \varphi_k(x_{k+1}, \dots, x_n), x_{k+1}, \dots, x_n) = F(x_{k+1}, \dots, x_n) = F(M').$$

Поэтому вопрос об условном экстремуме функции $f(M)$ при условиях связи сводится к вопросу о безусловном экстремуме функции $f(M')$.

Условный экстремум функции нескольких переменных

Найти экстремум функции $u = 5x + y + z^2$ при условиях

$$z - x = 1, \qquad y - xz = 1.$$

Решение.

Разрешим систему

$$\begin{cases} z - x = 1, \\ y - xz = 1 \end{cases}$$

относительно y и z. Получим

$$\begin{cases} y = x^2 + x + 1, \\ z = x + 1. \end{cases}$$

Подставляя эти выражения в функцию, получаем функцию одной переменной $u(x) = 2x^2 + 8x + 2$, для которой рассмотрим задачу о безусловном экстремуме.

Условный экстремум функции нескольких переменных

Так как $u' = 4x + 8$ при $x = -2$, то функция $u(x)$ имеет единственную точку возможного экстремума. Вторая производная $u''(x)$ в точке $x = -2$ положительна:

$$u''(x) = 4, \qquad u''(-2) = 4 > 0,$$

следовательно, при $x = -2$ функция $u(x)$ имеет минимум.

$$u_{\min} = u(-2) = 2 \cdot (-2)^2 + 8 \cdot (-2) + 2 = -6.$$

Из системы находим $y(-2) = 3$, $z(-2) = -1$.

Итак, функция $u = 5x + y + z^2$ при условиях $z - x = 1$, $y - xz = 1$ в точке $(-2; 3; -1)$ имеет минимум, причем

$$u(-2; 3; -1) = -6.$$

Ответ. $u_{\min} = u(-2; 3; -1) = -6.$

Условный экстремум функции нескольких переменных

2. ***Метод Лагранжа.*** Задача об условном экстремуме функции $f(M)$ при условиях связи сводится к нахождению обычного экстремума для функции Лагранжа

$$\Phi(M) = f(M) + \lambda_1 F_1(M) + \cdots + \lambda_k F_k(M),$$

где λ_i — постоянные числа.

Вопрос о существовании и характере условного экстремума решается на основании исследования знака второго дифференциала $d^2\Phi(M_0)$ в стационарной точке M_0 функции $\Phi(M)$ при условии, что переменные $dx_1, \ldots, dx_n$ связаны соотношениями

$$\sum_{j=1}^{n} \frac{\partial F_i}{\partial x_j} dx_j = 0 \qquad (i = 1, \ldots, k).$$

Условный экстремум функции нескольких переменных

Найти экстремум функции $u = 5x + y + z^2$ при условиях

$$z - x = 1, \qquad y - xz = 1.$$

Составим функцию Лагранжа

$$\Phi(x; y; z) = 5x + y + z^2 + \lambda_1(z - x - 1) + \lambda_2(y - xz - 1)$$

и рассмотрим систему уравнений

$$\begin{cases} \Phi'_x = 5 - \lambda_1 - \lambda_2 z = 0, \\ \Phi'_y = 1 + \lambda_2 = 0, \\ \Phi'_z = 2z + \lambda_1 - \lambda_2 x = 0, \\ F_1 = z - x - 1 = 0, \\ F_2 = y - xz - 1 = 0. \end{cases}$$

Из второго уравнения $\lambda_2 = -1$ подставим в первое и третье уравнения. Получим

Условный экстремум функции нескольких переменных

$$\begin{cases} 5-\lambda_1+z=0, \\ \lambda_2=-1, \\ 2z+\lambda_1+x=0, \\ z-x-1=0, \\ y-xz-1=0. \end{cases} \qquad \begin{cases} z=\lambda_1-5, \\ \lambda_2=-1, \\ 2(\lambda_1-5)+\lambda_1+x=0, \\ (\lambda_1-5)-x-1=0, \\ y-x(\lambda_1-5)-1=0. \end{cases}$$

Из третьего и четвертого уравнений находим $\lambda_1=4$, $x=-2$, а из последнего уравнения находим $z=-1$, $y=3$.

Итак, $M(-2;3;-1)$ – точка возможного экстремума; при этом $\lambda_1=4$, $\lambda_2=-1$.

Дифференцируя $z-x-1=0$ и $y-xz-1=0$, приходим к равенствам

$$\begin{cases} dz-dx=0, \\ dy-dxz-xdz=0 \end{cases} \quad \text{или} \quad \begin{cases} dz=dx, \\ dy=(z+x)dx. \end{cases}$$

Условный экстремум функции нескольких переменных

Теперь вычисляем второй дифференциал функции Лагранжа $d^2\Phi$:

$$d^2\Phi = \Phi''_{xx}(dx)^2 + \Phi''_{yy}(dy)^2 + \Phi''_{zz}(dz)^2 +$$

$$+2\left(\Phi''_{xy}dxdy + \Phi''_{xz}dxdz + \Phi''_{yz}dydz\right).$$

У нас $\Phi''_{xx} = 0, \Phi''_{yy} = 0,\ \Phi''_{zz} = 0,$

$\Phi''_{xy} = 0,\ \Phi''_{xz} = -\lambda_2 = 1, \Phi''_{yz} = 0.$

$d^2\Phi = 2(dz)^2 + 2dxdz.$

$d^2\Phi = 2(dz)^2 + 2dzdz = 4(dz)^2.$

Квадратичная форма положительно определенная, следовательно, в точке $M(-2; 3; -1)$ минимум.

Ответ. $u_{\min} = u(M) = -6.$

Спасибо за внимание!