УНИВЕРСИТЕТ ИТМО

Методы оптимизации

Лекция 4. 5.**Симплекс-метод решения задачи линейного программирования**

Селина Елена Георгиевна

Ауд. 302

Каноническая форма задачи линейного программирования

Каноническая форма записи задачи линейного программирования имеет вид:

$$f(\mathbf{x}) = \langle \mathbf{c}, \mathbf{x} \rangle = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \qquad (7)$$

при ограничениях

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (8)$$

$$x_j \geq 0, \; j = \overline{1, n}. \qquad (9)$$

Основные вычислительные схемы решения ЗЛП разработаны именно для канонической формы записи задачи.

Сведение задачи линейного программирования к каноническому виду

Если в исходной задаче требуется найти min, надо изменить знак и искать max этой функции.

$$min\, f(\boldsymbol{x}) = -max\,(-f(\boldsymbol{x}))$$

Рассмотрим линейное неравенство с n неизвестными:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \le b_i \qquad (10)$$

Чтобы преобразовать его в равенство, прибавим к левой части некоторую неотрицательную величину:

$$x_{n+1} \ge 0$$

так, чтобы получилось линейное уравнение:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n + x_{n+1} = b_i \qquad (11)$$

Каждому решению неравенства (10) соответствует единственное решение уравнения (11) и наоборот.

Рассмотрим линейное неравенство с n неизвестными:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n \geq b_i \qquad (12)$$

Чтобы преобразовать его в равенство, вычтем из левой части некоторую неотрицательную величину:

$$x_{n+2} \geq 0$$

так, чтобы получилось линейное уравнение:

$$a_{i1}x_1 + \cdots + a_{in}x_n - x_{n+2} = b_i \qquad (13)$$

Если некоторая переменная x_i не имеет ограничений по знаку, то она заменяется разностью между двумя новыми неотрицательными переменными.

$$x_j = y_i - z_j,$$

$$y_j \geq 0,$$

$$z_j \geq 0.$$

Пример

Найти $\min(x_1 - 2x_2)$ при ограничениях:

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 \le 5 \\ x_1 \ge 0 \\ x_2 - \forall \end{cases}$$

Приводим к каноническому виду:

$$\min(x_1 - 2x_2) = -\max(-x_1 + 2x_2)$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 + x_3 = 5 \\ x_2 = x_4 - x_5 \\ x_1 \ge 0 \\ x_4 \ge 0 \\ x_5 \ge 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 + 3(x_4 - x_5) + x_3 = 5 \\ x_j \ge 0, \quad j = 1,3,4,5 \end{cases}$$

$$\min(x_1 - 2x_2) = -\max\big(-x_1 + 2(x_4 - x_5)\big)$$
$$= -\max(-x_1 + 2x_4 - 2x_5)$$

Постановка задач линейного программирования

Задача линейного программирования (ЗЛП) – поиск максимума или минимума функции переменных

$$f(\mathbf{x}) = < \mathbf{c}, \mathbf{x} > = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j$$

при линейных ограничениях

$$A\mathbf{x} \le \mathbf{b}$$

$$x_j \ge 0, \quad j = 1, \ldots, n,$$

где **x** – m-мерный вектор неизвестных, А – матрица $m \times n$, **b** – m-мерный вектор, **c** – n-мерный вектор. Функция (1) называется ***целевой функцией.***

Симплекс-метод решения задачи линейного программирования

Рассмотрим задачу линейного программирования в каноническом виде:

$$\max f = \max < \mathbf{c}, \mathbf{x} >, \qquad (14)$$

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \qquad (15)$$

$$\mathbf{x} \geq 0. \qquad (16)$$

Определение. Множеством ***допустимых решений*** задачи линейного программирования является такое множество $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n)$, которое удовлетворяет ограничениям (15) и (16).

Определение. *Оптимальным решением задачи* линейного программирования (или просто решением) является такое допустимое решение $\mathbf{x}^*$, при котором $f = f_{max} = < \mathbf{c}, \mathbf{x}^* >$.

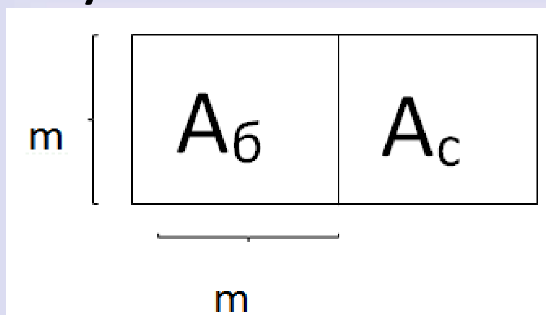
Идея симплекс-метода

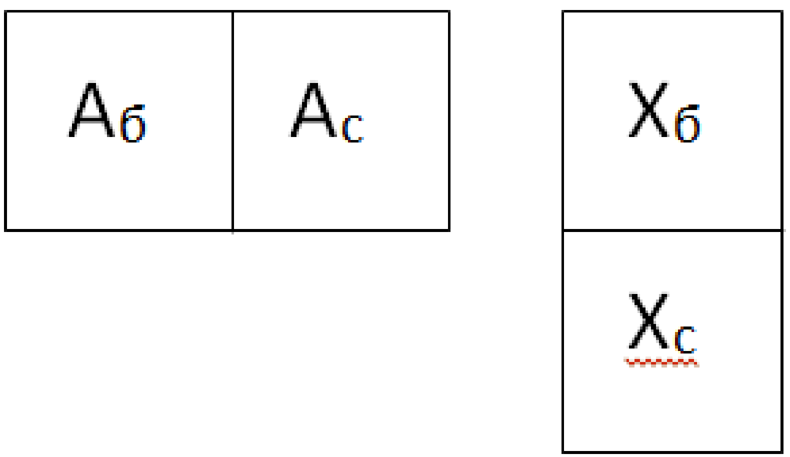
Идея симплекс-метода состоит в следующем.

- Примем в качестве начального приближения координаты некоторой вершины многогранника допустимых решений и найдем все ребра, выходящие из этой вершины.
- Двигаемся вдоль того ребра, по которому линейная целевая функция возрастает.
- Приходим в новую вершину, находим все выходящие из нее ребра, двигаемся по одному из них и т.д.
- В конце концов мы придем в такую вершину, движение из которой вдоль любого ребра приведет к убыванию целевой функции.
- Следовательно, максимум достигнут, и координаты этой последней вершины принимаются в качестве оптимальных значений рассматриваемых проектных параметров.

- Поскольку f - линейная функция, а многогранник выпуклый, данный вычислительный процесс сходится к решению задачи, причем за конечное число шагов k. В данном случае их число порядка n, т.е. значительно меньше числа шагов в методе простого перебора вершин, где k может быть порядка 2^n.
- Будем считать, что у матрицы A все строки линейно независимы (если зависимые строки есть, их можно просто отбросить). У нас m – число уравнений, n – число переменных. Тогда m – ранг матрицы. Тогда $m < n$, так как при $m = n$ система (15) имеет единственное решение, что исключает оптимизацию (при $m > n$ не выполняются сделанные выше предположения).

Не уменьшая общности, будем полагать, что невырожденная матрица $m \times m$ стоит на первом месте. Если это не так, то путем перемещения переменных получим то, что нужно.





$$= A_б \mathbf{x}_б + A_с \mathbf{x}_с = \mathbf{b} \quad (17)$$

Выразим первые m переменных $x_1, x_2, \ldots, x_m$ через остальные. Переменные $x_1, x_2, \ldots, x_m$ называются ***базисными***, а вектор $\{x_1, x_2, \ldots, x_m\}$ – ***базисом***. Переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \ldots, x_n$ – называются ***свободными переменными***.

Свободные переменные принимают любые значения. Придадим им нулевые значения, получим частное решение системы (15):

$$x_1 = \beta_1^{(0)}, x_2 = \beta_2^{(0)}, \ldots, x_m = \beta_m^{(0)},$$

$$x_{m+1} = x_{m+2} = \cdots = x_n = 0$$

Определение. Допустимое решение, удовлетворяющее (15) и (16), соответствующее нулевым значениям свободных переменных, называется ***базисным решением (базисом).***

Определение. Базис называется ***невырожденным,*** если все базисные переменные >0.

Определение. Базис называется ***вырожденным,*** если все хотя бы одна базисная переменная = 0.

Суть симплекс-метода заключается в целенаправленном переборе вершин с увеличением функционала до получения оптимального решения и включает 3 этапа:

1. Алгоритм отыскания начального (опорного) базиса или установления несовместимости ограничений (15) и (16).
2. Проверка текущей вершины на оптимальность полученного базиса.
3. Если критерий оптимальности не выполнен, то переходим от текущего базиса к другому с обязательным увеличением функционала до получения оптимального решения или до установления факта его неограниченности.

Допустим, мы выразили базисные переменные через свободные из (17) и получили:

$$X_б = \mathrm{A}_б^{-1}(\mathrm{B} - \mathrm{A}_с X_c) \qquad (18)$$

Выразим функцию через свободные переменные:

$$f = C^T X = C_б^T X_б + C_c^T X_c = C_б^T \mathrm{A}_б^{-1}(B - A_с X_c) + C_c^T X_c =$$

$$= C_б^T \mathrm{A}_б^{-1} B + (C_c^T - C_б^T \mathrm{A}_б^{-1} A_c) X_c$$

Обозначим

$f_0 = C_б^T \mathrm{A}_б^{-1} B$

$\Delta^T = C_c^T - C_б^T \mathrm{A}_б^{-1} A_c$ – вектор характеристических разностей.

Тогда

$$f = f_0 + \Delta^T X_c \qquad (19)$$

$$f = f_0 + \Delta^T X_c$$

Предположим, что существует хотя бы один положительный коэффициент среди Δ_i. Тогда при увеличении переменной x_{c_i} функция f увеличивается по сравнению с f_0, поэтому надо искать новое опорное решение. Следовательно, $\Delta \leq \mathbf{0}$ ***– критерий оптимальности***.

Если все $\Delta_i < 0$, то решение единственно.

Улучшение решения

Пусть критерий оптимальности не выполнен. Если только одно $\Delta_i > 0$, то увеличиваем соответствующее x_i. Если есть несколько $\Delta_i > 0$, то выбираем наибольшую $\Delta_k = \max\limits_{\Delta_i > 0} \Delta_i$ в надежде, что увеличение соответствующего этому Δ x_k приведет к увеличению функции (хотя это не обязательно так).

Введем обозначения:

$$X_б = -\mathrm{A}_б^{-1}\mathrm{A}_с X_c + \mathrm{A}_б^{-1}B$$
$$X_б^0 = \mathrm{A}_б^{-1}B = \beta$$
$$\alpha = -\mathrm{A}_б^{-1}\mathrm{A}_с$$

Тогда

$X_б = \alpha X_c + X_б^0$ (20)

(19) и (20) удобно оформить в виде симплекс-таблицы.

	x_{m+1}	$\cdots$	x_k	$\cdots$	x_n	$X_б^0 = \beta$
x_1						
$\vdots$						
x_l			α_{l_k}			x_l^0
$\vdots$						
x_m						
f	Δ_{m+1}	$\cdots$	Δ_k	$\cdots$	Δ_n	$f_0 = C_б^0 A_б^{-1} B$

$$x_i = \sum_{j=m+1}^{n} \alpha_{ij} x_j + x_i^0$$

$f = \Delta^T X_c + f_0 = \sum \Delta_j x_j + f_0 , j \in J_c$

J_c - множество индексов, соответствующих свободным переменным.

Пусть $\Delta_k = \max\limits_{\Delta_i \geq 0} \Delta_i$

Если все $\alpha_{ik} \geq 0, i \epsilon J_б$, тогда увеличение x_k не приведет к уменьшению базисных значений. В этом случае функция неограниченно увеличивается.

$\uparrow f = f_0 + \Delta_k x_k \uparrow$

Пусть $\alpha_{ik} < 0$. Тогда увеличение x_k приводит к уменьшению базисных значений.

$$\downarrow x_i = x_i^0 + \alpha_{ik} x_k \uparrow$$

Переменную x_k можно увеличивать лишь до тех пор, пока базисные переменные остаются неотрицательными. Это и является условием выбора x_k'.

$$x_k' = -\frac{x_i^0}{\alpha_{ik}}$$

Если таких α_{ik} несколько, надо взять наименьшее, так как первой обратится в ноль переменная x_l , для которой отношение $\frac{x_l^0}{\alpha_{lk}}$ минимально.

$$x_k' = \min\left(-\frac{x_i^0}{\alpha_{ik}}\right) = -\frac{x_l^0}{\alpha_{lk}} > 0$$

x_k попадает в базовые переменные, x_l, которая была базовой, стала = 0

Действительно,

$$x_l' = x_l^0 + \alpha_{lk}\left(-\frac{x_l^0}{\alpha_{lk}}\right) = 0$$

Пример

Простейшая задача на симплекс-метод.

$$f = x_1 + x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 \leq 3 \\ x_1 + 2x_2 \leq 3 \\ x_i \geq 0, i = 1,2 \end{cases}$$

Приведём к каноническому виду.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_4 = 3 \\ x_i \geq 0, i = 1,4 \end{cases}$$

$$x_3 = -2x_1 - x_2 + 3$$

$$x_4 = -x_1 - 2x_2 + 3$$

$$f = x_1 + x_2$$

Начальный базис: $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$

Составим симплекс-таблицу:

	x_1	x_2	β
x_3	-2	-1	3
x_4	-1	-2	3
f	1	1	0

$\Delta_1 > 0,\ \ \Delta_2 > 0 \Rightarrow$ критерий оптимальности не выполнен

$\min\left(\frac{3}{2}; \frac{3}{1}\right) = \frac{3}{2} \Rightarrow x_1$ попадает в базисные, x_3 - в свободные

$$x_1 = \frac{1}{2}(-x_2 - x_3 + 3) = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 1{,}5$$

$$x_4 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{2}x_3 - 1{,}5 - 2x_2 + 3 = -1{,}5x_2 + \frac{1}{2}x_3 + 1{,}5$$

$$f = x_1 + x_2 = -\frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 1{,}5 + x_2 == \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 + 1{,}5$$

	x_3	x_2	β
x_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	1,5
x_4	$\frac{1}{2}$	-1,5	1,5
f	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{2}$	1,5

Критерий оптимальности не выполнен.

$$x_2 = \frac{1}{1{,}5}\left(\frac{1}{2}x_3 - x_4 + 1{,}5\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + \frac{2}{3}\cdot\frac{3}{2} =$$

$$= \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 1$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 1\right) - \frac{1}{2}x_3 + 1{,}5 = -\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + 1$$

$$f = x_1 + x_2 = -\frac{2}{3}x_3 - \frac{1}{3}x_4 + 1 + \frac{1}{3}x_3 - \frac{2}{3}x_4 + 1 =$$

$$= -\frac{1}{3}x_3 - x_4 + 2$$

	x_3	x_4	β
x_1	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$	1
x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	1
f	$-\frac{1}{3}$	-1	2

Критерий оптимальности выполнен.

$x_1=1$

$x_2=1$

$$f_{max} = 2$$

Получение начального базиса Метод искусственного базиса

Начальным шагом симплекс-метода является нахождение начального базиса. В общем случае эта задача нетривиальна.

Наиболее общим способом построения начального допустимого базисного решения задачи ЛП является использование искусственных переменных. Эти переменные в первой итерации играют роль дополнительных остаточных переменных, но на последующих итерациях от них освобождаются.

Пусть у нас есть ЗЛП в каноническом виде и выбор начального базиса неочевиден.

$$\max f = \max < \mathbf{c}, \mathbf{x} >,$$
$$A\mathbf{x} = \mathbf{b},$$
$$\mathbf{x} \geq 0$$

Будем полагать, что все $b_i \geq 0$. Если есть $b_i < 0$, то домножим соответствующее уравнение на (-1).

Добавим в ограничения искусственные переменные и решим задачу ЛП минимизации суммы искусственных переменных с исходными ограничениями.

$$\min W = \min \sum_{i=1}^{m} y_i \to min \qquad (21)$$

$$AX + Y = B \qquad (22)$$

$$X, Y \geq 0 \qquad (23)$$

Если минимальное значение этой новой целевой функции больше нуля, значит, исходная задача не имеет допустимого решения, и процесс вычислений заканчивается. (Положительные значения искусственных переменных указывают на то, что исходная система ограничений несовместна.) Если новая целевая функция равна нулю, переходим ко второму этапу.

Для решения вспомогательной задачи можно воспользоваться симплекс-методом. При этом начальный базис уже найден. Действительно, если за базисные переменные принять $y_1, y_2, \dots y_m$, а за свободные $x_1, x_2, \dots, x_n$, то в системе базисные переменные уже выражены через свободные.

$$Y = B - AX$$

$$Y_{б} = B \geq 0$$

$$X^0 = \binom{B}{0}$$

Находим $\mathrm{W}^* = \min \mathrm{W}$.

Возможны два варианта:

1) $W^* = 0$. Очевидно, что это возможно, только в том сучае, когда все вспомогательные переменные равны нулю, а именно, когда

$$y_1^* = y_2^* = \cdots = y_m^* = 0$$

(* – означает оптимальное решение).

Выписав из последней симплекс-таблицы оптимальные значения переменных, получим:

$$x_j = \beta_j - (\alpha_{jm+1}x_{m+1} + \cdots + \alpha_{jn}x_n + \alpha_{j1}y_1 + \cdots + \alpha_{jm}y_m) \qquad (24)$$

Причем все $\beta_j \geq 0, j = \overline{1, m}$. Это справедливо, так как в столбце свободных членов находятся оптимальные значения базисных переменных, а они всегда неотрицательны.

Полагая теперь в выражении (24)

$$y_1 = y_2 = \cdots = y_m = 0$$

получаем искомый начальный базис:

$$x_j = \beta_j - (\alpha_{jm+1}x_{m+1} + \cdots + \alpha_{jn}x_n)$$

Далее необходимо выразить целевую функцию f через свободные переменные $x_{m+1}, x_{m+2}, \dots, x_n$, и решать основную задачу максимизации функции.

2) $W^* > 0$. Это означает, что система (22) не имеет решений, для которых

$$y_1{}^* = y_2{}^* = \cdots = y_m{}^* = 0$$

Отсюда следует, что система $AX = B$ несовместна.

Пример

Решим следующую задачу, используя метод искусственного базиса.

$$f = x_1 + 3x_2 + x_3 \to max$$

при ограничениях

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3} \end{cases}$$

В той задаче выбор начального базиса неочевиден, поэтому применим метод искусственного базиса.

Добавим в ограничения искусственные переменные y_1, y_2

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 + y_1 = 5 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 + y_2 = 4 \\ x_i \geq 0, i = \overline{1,3} \\ y_j \geq 0, \ \ j = \overline{1,2} \end{cases}$$

и решим задачу поиска минимума функции $W = y_1 + y_2$ при этих ограничениях.

$W = y_1 + y_2 \rightarrow min$

$$y_1 = -x_1 - 2x_2 + x_3 + 5$$
$$y_2 = -2x_1 - x_2 - 2x_3 + 4$$
$$W = -3x_1 - 3x_2 - x_3 + 9$$

Составим симплекс-таблицу:

	x_1	x_2	x_3	β
y_1	-1	-2	1	5
y_2	-2	-1	-2	4
W	-3	-3	-1	9

Мы ищем минимум, значит, критерий оптимальности $\Delta \geq \mathbf{0}$

$\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 < 0$, $\Delta_3 < 0 \Rightarrow$ критерий оптимальности не выполнен.

$\min\left(\frac{5}{1}; \frac{4}{2}\right) = \frac{4}{2} \Rightarrow x_1$ попадает в базовые, y_2 - в свободные.

$$x_1 = -\frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 + 2$$

$$y_1 = -\left(-\frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 + 2\right) - 2x_2 + x_3 + 5 =$$

$$= \frac{1}{2}y_2 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 + 3$$

$$W = y_1 + y_2 = \frac{1}{2}y_2 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 + 3 + y_2 =$$

$$= \frac{3}{2}y_2 - \frac{3}{2}x_2 + 2x_3 + 3$$

	y_2	x_2	x_3	β
y_1	$\frac{1}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	3
x_1	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	-1	2
W	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	2	3

$\Delta_2 < 0 \Rightarrow$ критерий оптимальности не выполнен.

$\min\left(3:\frac{3}{2}; 2:\frac{1}{2}\right) = 3:\frac{3}{2} \Rightarrow x_2$ попадает в базовые, y_1 - в свободные.

$$x_2 = \frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{4}{3}x_3 + 2$$

$$x_1 = -\frac{1}{2}y_2 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{4}{3}x_3 + 2\right) - x_3 + 2 =$$

$$= -\frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_1 - \frac{5}{3}x_3 + 1$$

	y_2	y_1	x_3	β
x_2	$\frac{1}{3}$	$-\frac{2}{3}$	$\frac{4}{3}$	2
x_1	$-\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{5}{3}$	1
W	1	1	0	0

Решаем основную задачу максимизации функции

$$f = x_1 + 3x_2 + x_3 = -\frac{2}{3}y_2 + \frac{1}{3}y_1 - \frac{5}{3}x_3$$

$$+ +1+3(\frac{1}{3}y_2 - \frac{2}{3}y_1 + \frac{4}{3}x_3 + 2) + x_3 = \frac{10}{3}x_3 + 7$$

	x_3	β
x_2	$\frac{4}{3}$	2
x_1	$-\frac{5}{3}$	1
f	$\frac{10}{3}$	7

$\frac{10}{3} > 0 \Rightarrow$ критерий оптимальности не выполнен.

$-2 : \frac{4}{3} < 0 \Rightarrow$ x_3 попадает в базовые, x_1 - в свободные.

$$x_3 = -\frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{5}$$

$$x_2 = \frac{4}{3}\left(-\frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{5}\right) + 2 = -\frac{4}{5}x_1 + \frac{14}{5}$$

$$f = \frac{10}{3}\left(-\frac{3}{5}x_1 + \frac{3}{5}\right) + 7 = -2x_1 + 9$$

	x_1	β
x_2	$-\frac{4}{5}$	$\frac{14}{5}$
x_3	$-\frac{5}{3}$	$\frac{3}{5}$
f	-2	9

$$X^* = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{14}{5} \\ \frac{3}{5} \end{pmatrix} \qquad f_{max} = 9$$

Спасибо за внимание!

Спасибо за внимание!