

Методы оптимизации для задач на графах

Першин Антон Юрьевич, Ph.D.

Программа «Большие данные и распределенная цифровая платформа»

Санкт-Петербургский государственный университет

13 апреля 2024 г.

Definition

Линейной программой называется задача оптимизация с линейной целевой функцией и линейными ограничениями (равенствами и неравенствами):

$$\begin{aligned} \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{A}_{eq} \mathbf{x} &= \mathbf{b}_{eq} \\ \mathbf{A}_{ub} \mathbf{x} &\leq \mathbf{b}_{ub} \\ \mathbf{A}_{lb} \mathbf{x} &\geq \mathbf{b}_{lb} \end{aligned}$$

Стандартная форма

$$\begin{aligned} \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{A} \mathbf{x} &\leq \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Каноническая форма

$$\begin{aligned} \operatorname{argmax}_{\mathbf{x}} \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t. } \mathbf{A} \mathbf{x} &= \mathbf{b} \\ \mathbf{x} &\geq 0 \end{aligned}$$

Кратчайший путь как линейная программа

Введем обозначения:

- $w(u, v)$ – вес ненаправленного или направленного ребра $u \rightarrow v$;
- s – начальный узел пути;
- t – конечный узел пути;
- $x(u, v)$ – бинарная переменная, указывающая, включено ли ребро $u \rightarrow v$ в путь.

Линейная программа поиска кратчайшего пути на графе:

$$\begin{aligned} \operatorname{argmin}_{\mathbf{x}} \quad & \sum_{(u,v) \in E} w(u, v) x(u, v) \\ \text{s.t.} \quad & \sum_{u \in V} x(u, t) - \sum_{w \in V} x(t, w) = 1 \\ & \sum_{u \in V} x(u, v) - \sum_{w \in V} x(v, w) = 0 \quad \forall v \in V \setminus \{s, t\} \end{aligned}$$

Поиск восхождением к вершине (Hill Climbing)

Hill Climbing – стохастический итерационный алгоритм локального поиска.

- 1: $n \leftarrow$ number of tweak desired to sample the gradient
- 2: $S \leftarrow$ some initial candidate solution
- 3: **repeat**
- 4: $R \leftarrow \text{Tweak}(\text{Copy}(S))$
- 5: **for** $n - 1$ times **do**
- 6: $W \leftarrow \text{Tweak}(\text{Copy}(S))$
- 7: **if** $\text{Quality}(W) > \text{Quality}(R)$ **then**
- 8: $R \leftarrow W$
- 9: **end if**
- 10: **end for**
- 11: **if** $\text{Quality}(R) > \text{Quality}(S)$ **then**
- 12: $S \leftarrow R$
- 13: **end if**
- 14: **until** S is the ideal solution or we have run out of time
- 15: **return** S

Раскраска графа предполагает присваивание одного из k цветов каждой вершине таким образом, чтобы у любых двух смежных вершин были несовпадающие цвета.

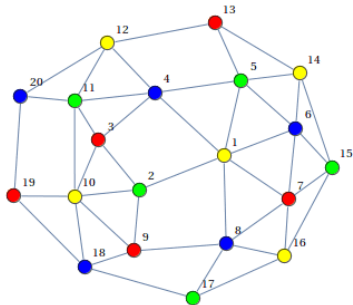


Рис.: 4-раскраска графа.

Зачастую количество цветов меньше хроматического числа, что требует поиска решения, минимизирующего количество конфликтов, то есть количество ребер с узлами одинаковых цветов. Кроме того, раскраска графов в общем случае является NP-сложной задачей.