Musterlösung zu Level 3

Berichtigungen gerne an joschua.ruwe AT uni-bielefeld.de

Behauptung. Sei $m \in \mathbb{Z},\ m > 0$. Dann gilt: Ist m eine Primzahl, so ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein Integritätsring.

Beweis.

Seien $\bar{a}, \bar{b} \in \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ die Restklassen zu $a, b \in \mathbb{Z}$ modulo $m\mathbb{Z}$. Es gilt $ab \in m\mathbb{Z}$, da

$$\bar{a} \cdot \bar{b} = (a + m\mathbb{Z}) \cdot (b + m\mathbb{Z}) = (ab) + m\mathbb{Z} = 0 = \underbrace{0 + m\mathbb{Z}}_{\substack{\text{Nullelement in} \\ \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}}} = m\mathbb{Z},$$

was genau dann der Fall ist, wenn $ab \in m\mathbb{Z}$ (gemeint ist $ab + m\mathbb{Z} = m\mathbb{Z}$). Dann ist offensichtlich m ein Teiler von ab und somit liegt $a \in m\mathbb{Z}$ oder $b \in m\mathbb{Z}$ (oder beide). Also folgt $\bar{a} = a + m\mathbb{Z} = 0 + m\mathbb{Z} = 0$ oder analog $\bar{b} = 0$ (oder beide $= 0$). Demnach ist $\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$ ein Integritätsring.[1] □

[1]Ein Integritatsring ist ein vom Nullring verschiedener nullteilerfreier kommutativer Ring mit einem Einselement. Das bedeutet, wenn zwei Zahlen multipliziert $= 0$ sind, so muss (mindestens) eine 0 gewesen sein.