

Omówienie zagadnienia

Zadanie polegało na rozwiązaniu układu

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0.15 & & & & \\ 1 & 3 & 1 & 0.15 & & & \\ 0.15 & 1 & 3 & 1 & 0.15 & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & 0.15 & 1 & 3 & 1 \\ & & & & 0.15 & 1 & 3 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ \dots \\ N-1 \\ N \end{pmatrix}$$

za pomocą metod Jacobiego i Gaussa-Seidela dla $N = 124$.

Następnie należało przedstawić graficznie błąd pomiędzy dokładnym rozwiązaniem a jego przybliżeniami w kolejnych iteracjach – wybierając przy tym kilka różnych zestawów startowych.

Dokładne rozwiązanie obliczałem za pomocą biblioteki Eigen.

Błąd zdefiniowałem jako normę różnicy dokładnego rozwiązania i przybliżenia rozwiązania daną metodą iteracyjną.

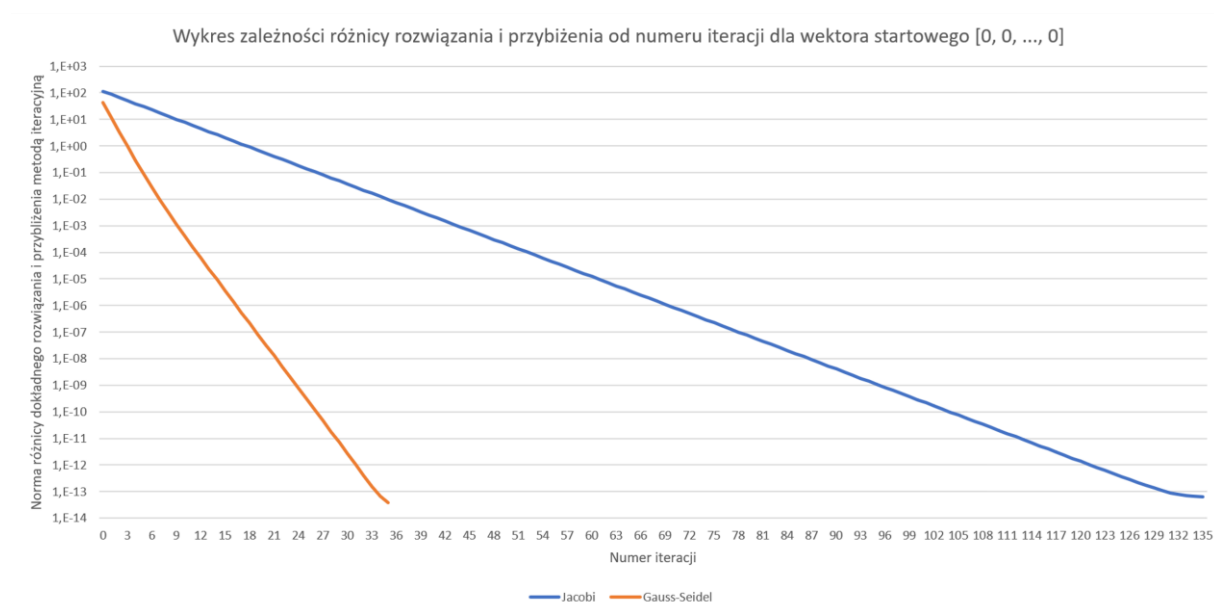
Omówienie wyników

Wybrałem trzy różne zestawy startowe:

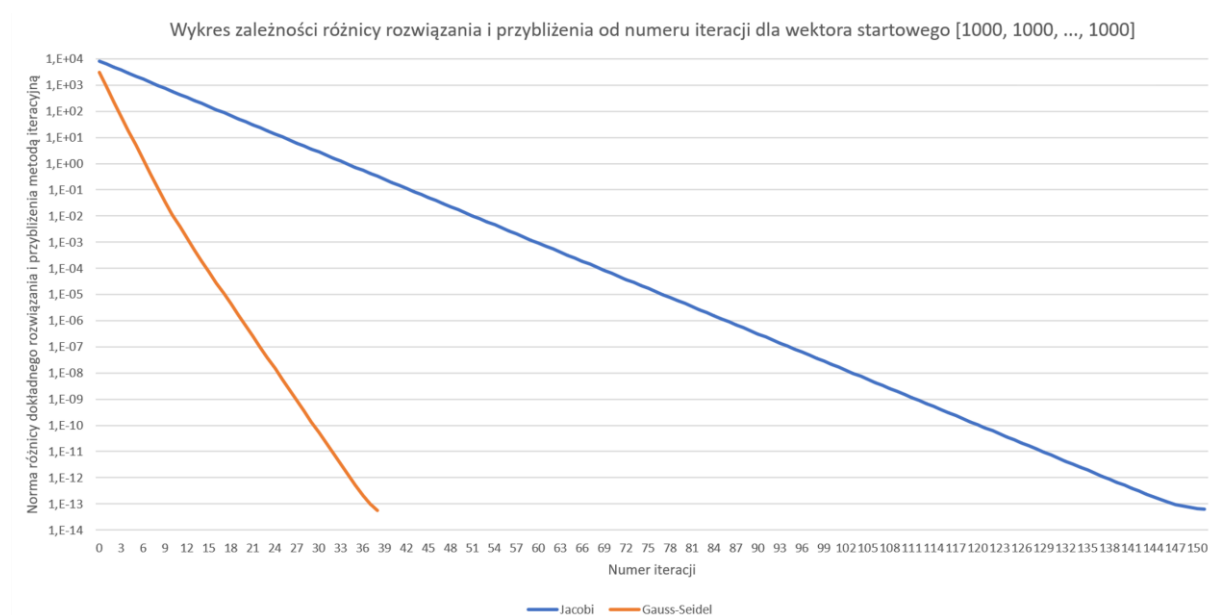
1. $(0, 0, \dots, 0)^T$
2. $(1000, 1000, \dots, 1000)^T$
3. $(10000, 10000, \dots, 10000)^T$

Następnie sporządziłem wykresy, porównując obie metody z użyciem powyższych zestawów startowych.

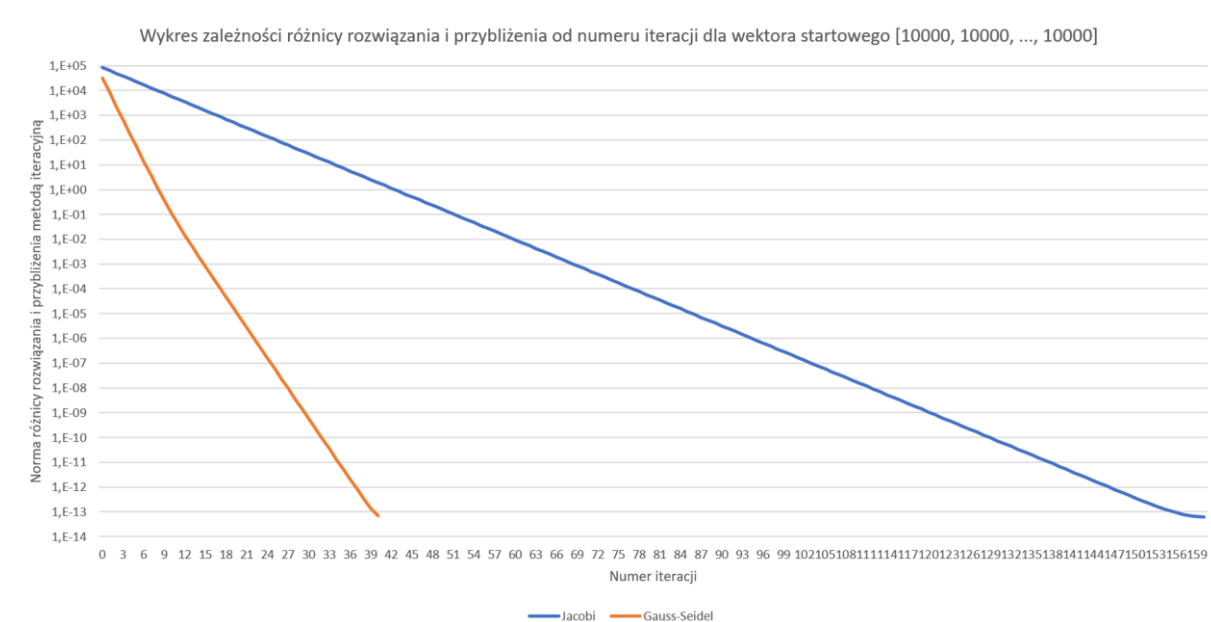
Zestaw 1.



Zestaw 2.



Zestaw 3.



Wszystkie wykresy sporządzone zostały w skali logarytmicznej.

Jak możemy zauważyć metoda Jacobiego potrzebuje znacznie więcej iteracji do osiągnięcia wartości bliższych dokładnemu wynikowi niż metoda Gaussa-Seidela.

Dla obu metod „gorszy” wektor startowy (tzn. taki, który ma większe wartości) powoduje zwiększenie początkowej wartości błędu, a więc również liczbę potrzebnych iteracji do uzyskania zadanej zbieżności.

Wnioski

Metoda Gaussa-Seidela zbiega szybciej do dokładnego rozwiązania niż metoda Jacobiego.

Podsumowanie

Dla podanego problemu macierzy w zadaniu NUM5 metoda Jacobiego potrzebuje znacznie więcej iteracji na osiągnięcie zbieżności z dokładnym rozwiązaniem niż metoda Gaussa-Seidela. Dzieje się tak pomimo tego, że oba sposoby zaimplementowane są w złożoności $O(N)$.

Wnioski

Metoda Gaussa-Seidela dla problemu pięciodiagonalnej macierzy wstęgowej znacznie szybciej zbiega do dokładnego rozwiązania niż metoda Jacobiego. Używanie pierwszej wymienionej metody może pozwolić zaoszczędzić sporo czasu, gdyż wykonuje się wówczas dużo mniej operacji (nie zależnie od wybranego wektora startowego).