Omówienie zagadnienia

Zadanie polegało na wyznaczeniu wektora $y = A^{-1}x$ dla macierzy

$$A = \begin{pmatrix} 1.2 & \frac{0.1}{1} & \frac{0.15}{1^2} & & & & & & \\ 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{2} & \frac{0.15}{2^2} & & & & & \\ & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{3} & \frac{0.15}{3^2} & & & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ & & & & & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-2} & \frac{0.15}{(N-2)^2} \\ & & & & & & 0.2 & 1.2 & \frac{0.1}{N-1} \\ & & & & & & & 0.2 & 1.2 \end{pmatrix}$$

oraz dla

$$x = (1, \quad 2, \quad \dots, \quad N)^T.$$

Należało również wyliczyć wyznacznik tej macierzy dla $N = 124$, a następnie potraktować N jako parametr i sprawdzić jak zależy od niego czas działania programu.

Ze względu na strukturę macierzy do rozwiązania zadania użyłem metody rozkładu LU z drobnymi modyfikacjami. Mianowicie – zamiast operować na macierzy $N \times N$, wprowadziłem niezerowe elementy z przekątnych macierzy A do macierzy w rozmiarze $4 \times N$. Następnie za pomocą wzoru $u_{ij} = a_{ij} - \sum_{k<i} l_{ik}\, u_{kj}$ zastępowałem od razu stare elementy, które nie będą już potrzebne. Potem już za pomocą standardowych, schematycznych podstawień obliczyłem wektor y oraz wyznacznik macierzy.

Wyniki dla $N = 124$

Po uruchomieniu programu dla parametru $N = 124$ otrzymałem następujące wyniki:

- Czas działania programu $= 0.042ms$
- $|A| = 6.14197e + 09$
- $y = (0.448701, 1.41327, 2.13488, 2.86901, 3.59149, 4.3116, 5.02983, 5.74701, 6.4635, 7.17953, 7.89521, 8.61065, 9.3259, 10.041, 10.756, 11.4709, 12.1857, 12.9005, 13.6152, 14.3299, 15.0445, 15.7591, 16.4736, 17.1882, 17.9027, 18.6172, 19.3317, 20.0462, 20.7606, 21.4751, 22.1895, 22.9039, 23.6184, 24.3328, 25.0472, 25.7616, 26.476, 27.1903, 27.9047, 28.6191, 29.3335, 30.0478, 30.7622, 31.4765, 32.1909, 32.9053, 33.6196, 34.3339, 35.0483, 35.7626, 36.477, 37.1913, 37.9056, 38.62, 39.3343, 40.0486, 40.763, 41.4773, 42.1916, 42.9059, 43.6203, 44.3346, 45.0489, 45.7632, 46.4775, 47.1919, 47.9062, 48.6205, 49.3348, 50.0491, 50.7634, 51.4777, 52.1921, 52.9064, 53.6207, 54.335, 55.0493, 55.7636, 56.4779, 57.1922, 57.9065, 58.6208, 59.3351, 60.0494, 60.7637, 61.478, 62.1924, 62.9067, 63.621, 64.3353, 65.0496, 65.7639, 66.4782, 67.1925, 67.9068, 68.6211, 69.3354, 70.0497, 70.764, 71.4783, 72.1926, 72.9069, 73.6212, 74.3355, 75.0498, 75.7641, 76.4784, 77.1927, 77.9069, 78.6212, 79.3355, 80.0498, 80.7641, 81.4784, 82.1927, 82.907, 83.6213, 84.3356, 85.0499, 85.7642, 86.4785, 87.1928, 87.9078, 88.682)^T$

Następnie wykonałem sprawdzenie moich obliczeń przy pomocy biblioteki *Eigen,* wyglądają one następująco:

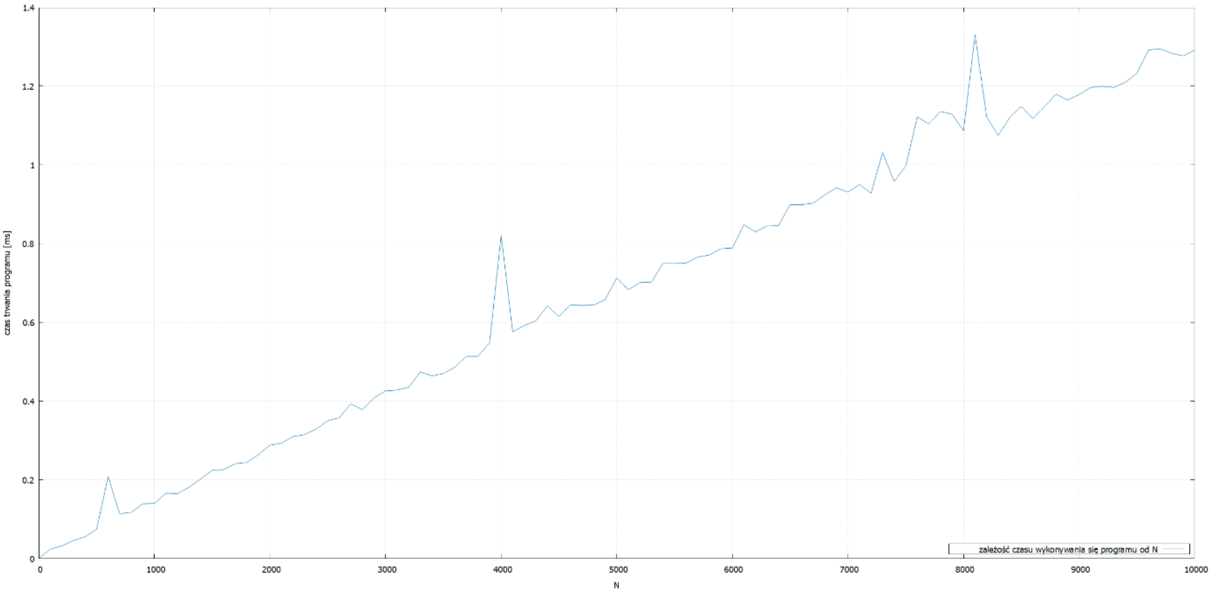
- $|A| = 6.14197e + 09$
- $y = (0.448701, 1.41327, 2.13488, 2.86901, 3.59149, 4.3116, 5.02983, 5.74701, 6.4635, 7.17953, 7.89521, 8.61065, 9.3259, 10.041, 10.756, 11.4709, 12.1857, 12.9005, 13.6152, 14.3299, 15.0445, 15.7591, 16.4736, 17.1882, 17.9027, 18.6172, 19.3317, 20.0462, 20.7606, 21.4751, 22.1895, 22.9039, 23.6184, 24.3328, 25.0472, 25.7616, 26.476, 27.1903, 27.9047, 28.6191, 29.3335, 30.0478, 30.7622, 31.4765, 32.1909, 32.9053, 33.6196, 34.3339, 35.0483, 35.7626, 36.477, 37.1913, 37.9056, 38.62, 39.3343, 40.0486, 40.763, 41.4773, 42.1916, 42.9059, 43.6203, 44.3346, 45.0489, 45.7632, 46.4775, 47.1919, 47.9062, 48.6205, 49.3348, 50.0491, 50.7634, 51.4777, 52.1921, 52.9064, 53.6207, 54.335, 55.0493, 55.7636, 56.4779, 57.1922, 57.9065, 58.6208, 59.3351, 60.0494, 60.7637, 61.478, 62.1924, 62.9067, 63.621, 64.3353, 65.0496, 65.7639, 66.4782, 67.1925, 67.9068, 68.6211, 69.3354, 70.0497, 70.764, 71.4783, 72.1926, 72.9069, 73.6212, 74.3355, 75.0498, 75.7641, 76.4784, 77.1927, 77.9069, 78.6212, 79.3355, 80.0498, 80.7641, 81.4784, 82.1927, 82.907, 83.6213, 84.3356, 85.0499, 85.7642, 86.4785, 87.1928, 87.9078, 88.682)^T$

Wnioski

Algorytm dość szybko i dokładnie oblicza zadane wartości dla $N = 124$, jest to jednak bardzo mały parametr, dlatego na tym przykładzie nie widać zależności pomiędzy czasem uruchomienia programu, a zmienną N.

Wnioski dla N jako zmiennej

W swojej implementacji obrałem $N_{max} = 10000$, za pomocą pętli *for* iterowałem co wartość 100. Podczas każdej iteracji mierzyłem czas wykonania się algorytmu, wyniki zebrałem i umieściłem w pliku *data.dat.* Następnie za pomocą programu *gnuplot* narysowałem poniższy wykres.



Na wykresie widzimy jak zmienia się czas trwania programu w zależności od N, jak możemy zauważyć wykres stopniowo rośnie wraz ze wzrostem parametru.

Wnioski

Zależność czasu wykonywania się algorytmu od parametru N jest liniowa.

Podsumowanie

Przy odpowiednio dobranym sposobie na wykorzystanie struktury macierzy oraz wyliczania potrzebnych wartości, jesteśmy w stanie sprowadzić dość kosztowny problem algorytmiczny do złożoności $O(N)$ – zależności liniowej.

Wnioski

Efektywne dobranie sposobu na rozwiązanie problemu na maszynie cyfrowej jest niezwykle ważne – pozwala ono na dużą optymalizację złożoności problemu.