Omówienie zagadnienia

Zadanie polegało na znalezieniu numerycznie pierwiastka x^* z równań $f(x) = 0$ i $g(x) = 0$ dla

a. $f(x) = \sin(x) - 0.4$
b. $g(x) = f(x)^2 = (\sin(x) - 0.4)^2$

na przedziale $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$ metodami: *bisekcji*, *falsi*, *siecznych*, *Newtona*. Należało również ustalić przypadki, dla których nie można było użyć wszystkich metod. Następnie trzeba było zbadać, jak zachowuje się ciąg $x_i - x^*$ dla różnych metod w kolejnych iteracjach.

Dokładnym rozwiązaniem funkcji *f(x)* oraz *g(x)* jest $\arcsin(0.4)$.

Dodatkowo dla funkcji *g(x)* zastosowałem usprawnienie z zadania piątego tj. utworzyłem funkcję $h(x) = \frac{g(x)}{g\prime(x)}$, dla której również zastosowałem wyżej wymienione metody.

Metoda *bisekcji* polegała głownie na zaimplementowaniu poniższych instrukcji:

Dla przedziału $[a, b]$, wylicz $c = \frac{a+b}{2}$ – następnie

jeżeli $f(a)f(c) < 0$, to $b = c$

jeżeli $f(c)f(b) < 0$, to $a = c$

na koniec sprawdzamy czy $|c - x^*| < \epsilon$ – jeżeli warunek jest prawdziwy to wychodzimy z pętli oraz kończymy działanie metody.

Działanie metody *falsi* jest praktycznie identyczne jak działanie *bisekcji* – jedyna różnica polega na sposobie wyliczania wyrazu *c*, wzór dla metody *falsi* to $c = \frac{-b * f(a) + a * f(b)}{f(b) - f(a)}$.

W metodzie *siecznych* należało zastosować następujący algorytm:

Dla przedziału $[a, b]$, $x_i = a$ oraz $x_{i-1} = b$ – następnie wyliczamy x_{i+1} ze wzoru

$$x_{i+1} = \frac{x_i * f(x_{i-1}) - x_{i-1} * f(x_i)}{f(x_{x-1}) - f(x_i)}$$

teraz sprawdzamy czy $|x_{i+1} - x^*| < \epsilon$ – jeżeli warunek jest spełniony, to wychodzimy z pętli, w przeciwnym wypadku przypisujemy

$$x_{i-1} = x_i$$

$$x_i = x_{i+1}$$

i przechodzimy do kolejnej iteracji.

Metoda *Newtona* polega na policzeniu pochodnej funkcji i zastosowania następującego wzoru:

Dla przedziału $[a, b]$, $x_i = a$ – teraz przechodzimy do wyliczania x_{i+1}

$$x_{i+1} = x_i - \frac{f(x_i)}{f'(x_i)}$$

teraz sprawdzamy warunek $|x_{i+1} - x^*| < \epsilon$ – jeżeli jest spełniony to wychodzimy z pętli, w przeciwnym wypadku

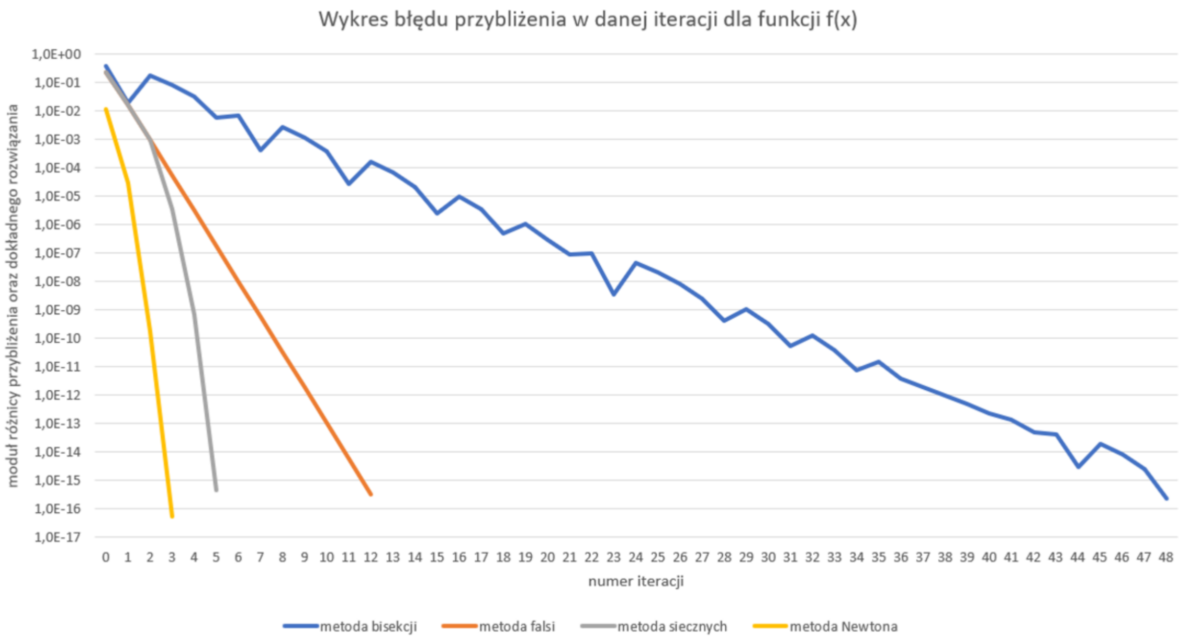
$$x_i = x_{i+1}$$

i przechodzimy do kolejnej iteracji.

Dla wszystkich metod ustaliłem zadowalającą zbieżność jako wartość $\epsilon = 1e - 15$.

Omówienie funkcji *f(x)*

Dla funkcji *f(x)* można było zastosować wszystkie powyżej wymienione metody, otrzymałem następujące wyniki (wykres w skali logarytmicznej):



Znalezione pierwiastki wynosiły:

- dla metody *bisekcji*: 0.411516846067488284433011358487419784069061279296875
- dla metody *falsi*: 0.41151684606748839545531382100307382643222808837890625
- dla metody *siecznych*: 0.4115168460674876182991965833934955298900604248046875
- dla metody *Newtona*: 0.411516846067488006877255202198284678161144256591796875

Rozwinięcie arcsin(0.4): 0.4115168460674880193847378976173356048557011351270258517

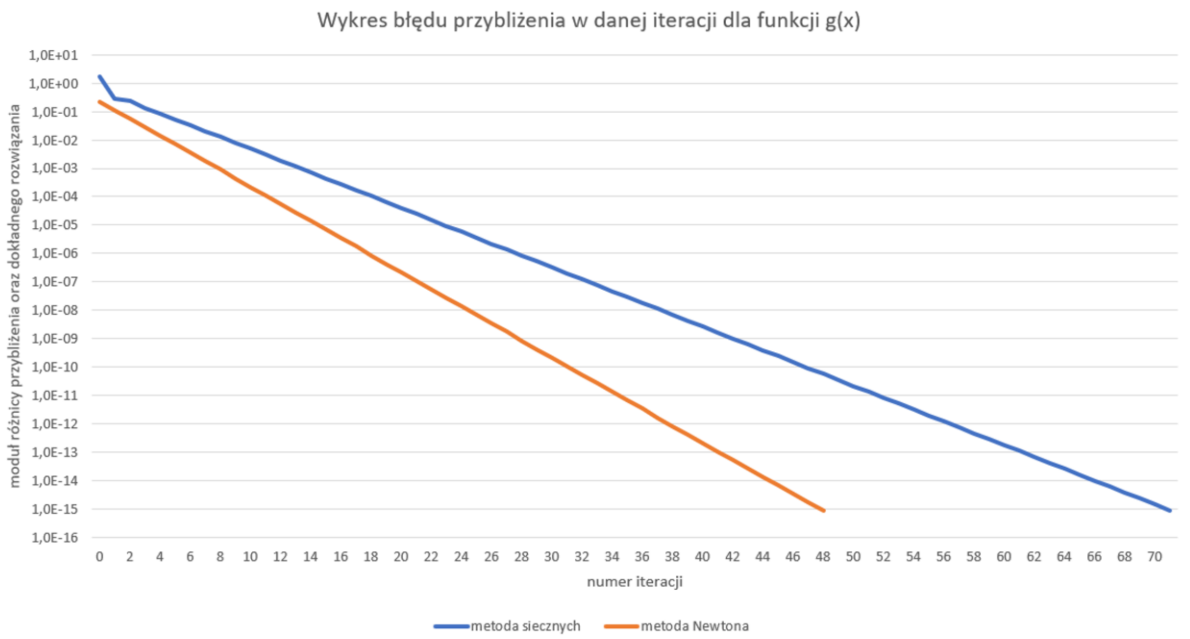
Jak można zauważyć, metoda *Newtona* potrzebowała najmniej iteracji oraz osiągnęła największą zbieżność. Najwolniejsza natomiast była metoda *bisekcji*.

Wnioski

Dla funkcji *f(x)* najdokładniejsza i najszybsza okazała się być metoda *Newtona*.

Omówienie funkcji *g(x)*

Dla funkcji *g(x)* można było zastosować tylko metodę *siecznych* i *Newtona*. Wynika to z tego, że funkcja *g(x)* na całym przedziale nie przyjmuje wartości ujemnych, a zatem metody wykorzystujące zmianę znaków funkcji nie będą działać prawidłowo. Poniżej prezentuję otrzymane wyniki (wykres w skali logarytmicznej):



Znalezione pierwiastki wynosiły:

- dla metody *siecznych*: 0.411516846067487229721137964588706381618976593017578125
- dla metody *Newtona*: 0.411516846067487229721137964588706381618976593017578125

Rozwinięcie arcsin(0.4): 0.4115168460674880193847378976173356048557011351270258517

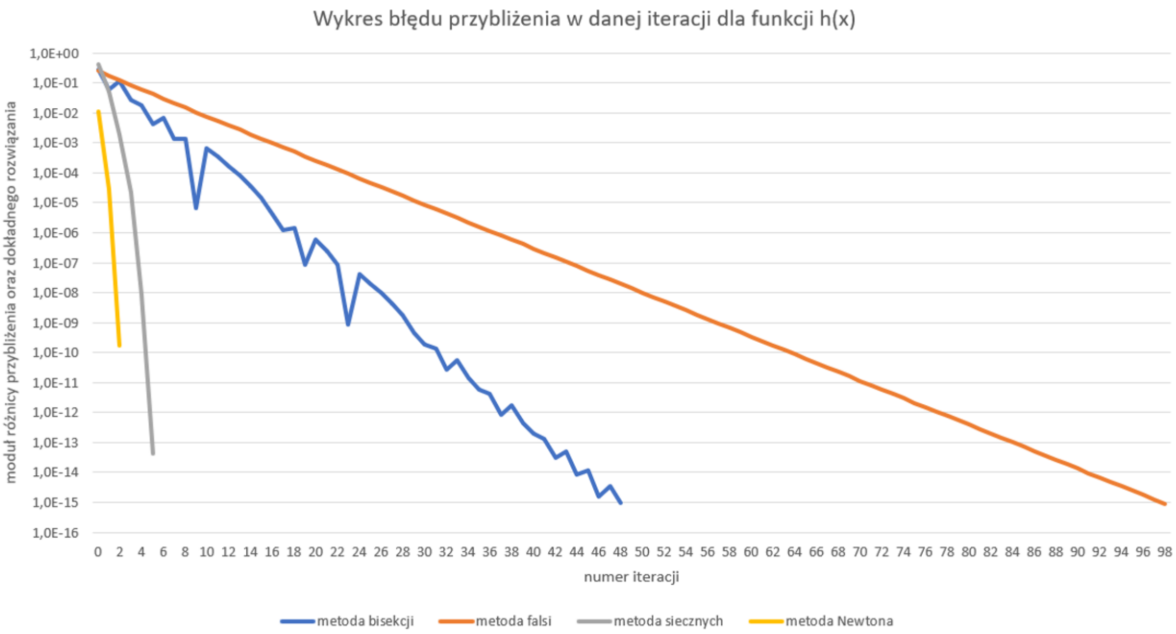
Na wykresie widać, że obie metody do dokładnego rozwiązania zbiegają liniowo – metoda *Newtona* nadal okazała się być najszybsza. Znaczący wzrost ilości iteracji wynika z tego, że funkcja *g(x)* posiada pierwiastki wielokrotne.

Wnioski

Pomimo występowania pierwiastków wielokrotnych w funkcji *g(x)*, nadal najszybsza okazała się być metoda *Newtona*.

Omówienie funkcji *h(x)*

Dla funkcji *h(x)* można było zastosować wszystkie metody, jednakże ponieważ funkcja *h(x)* posiada asymptoty – między innymi w punkcie $x = \frac{\pi}{2}$, który zawiera się w dziedzinie określonej w zadaniu – to dla metod *bisekcji* oraz *falsi* zdecydowałem się zastosować przedział $x \in [0, 1.4]$ zamiast tego, który określony był w poleceniu. Otrzymałem następujące wyniki (wykres w skali logarytmicznej):



Znalezione pierwiastki wynosiły:

- dla metody *bisekcji*: 0.411516846067489006077977364839171059429645538330078125
- dla metody *falsi*: 0.41151684606748717420998673333087936043739318847656 25
- dla metody *siecznych*: 0.41151684606748806238840643345611169934272766113281 25
- dla metody *Newtona*: 0.4115168460674880623884064334561116993427276611328125

Rozwinięcie arcsin(0.4): 0.41151684606748801938473789761733560485570113512702585 17

Jak można zauważyć, metoda *Newtona* nadal dąży najszybciej do dokładnego rozwiązania. Metoda *falsi* nadal zbiega liniowo – zapewne ma to związek z problemem, który opisałem przed zamieszczeniem wykresu. Warto wspomnieć, że funkcja *h(x)* posiada tylko pierwiastki jednokrotne.

Wnioski

Niezmiennie metoda *Newtona* okazuje się być najszybsza.

Podsumowanie

Dla wszystkich trzech funkcji najszybszą metodą okazała się być metoda *Newtona* – jednakże nie zawsze może być ona najbardziej opłacalna. Ponieważ koszt wyliczenia pochodnej jest dość wysoki, to bardziej preferowana może być metoda *siecznych*. Na wykresach widać, że metoda *siecznych* zawsze była tuż za metodą *Newtona*, dzięki wzięciu pod uwagę czynnika opłacalności można powiedzieć, że preferowaną metodą jest metoda *siecznych*.

Wnioski

Metoda *siecznych* okazuje się być najlepszą możliwą metodą do szukania pierwiastków funkcji.