

## Omówienie zagadnienia

Zadanie polegało na znalezieniu oraz wykreśleniu wielomianów interpolacyjnych stopnia  $n$ ,  $W_n(x)$ , na przedziale  $x \in \langle -1, 1 \rangle$  dla funkcji  $y(x) = \frac{1}{1+50x^2}$  dla

(a) jednorodnych węzłów interpolacji, tj.  $x_i = -1 + 2\frac{i}{n+1}$  ( $i = 0, \dots, n$ )

(b)  $x_i = \cos\left(\frac{2i+1}{2(n+1)}\pi\right)$  ( $i = 0, \dots, n$ )

Następnie należało wybrać kilka wartości  $n$  i porównać zachowanie tych wielomianów.

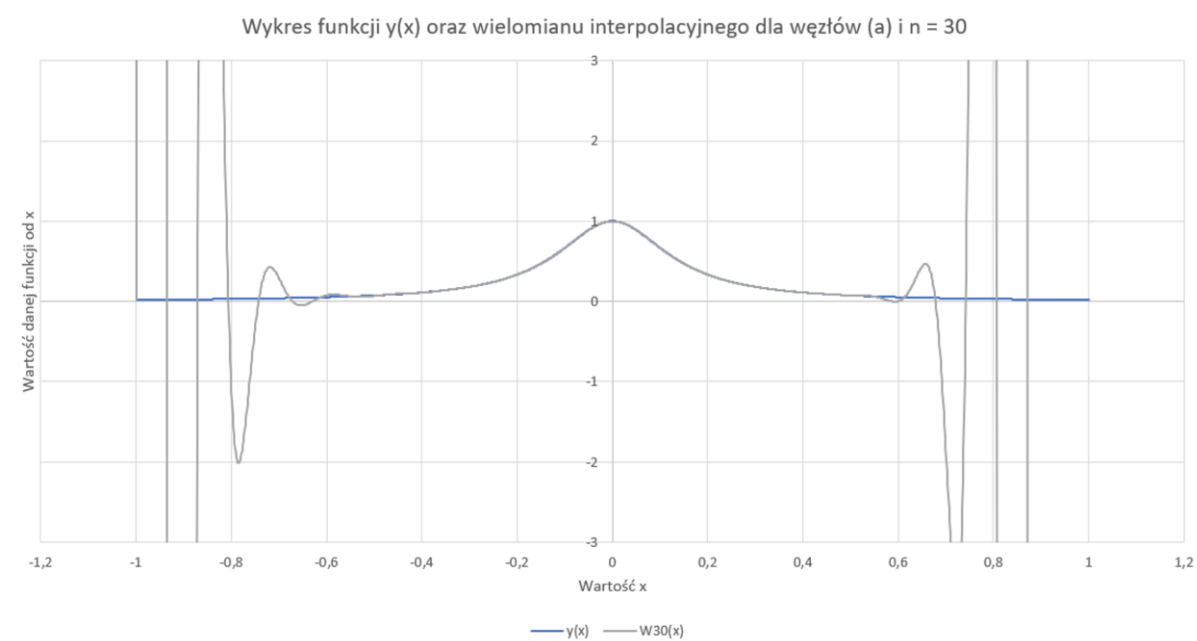
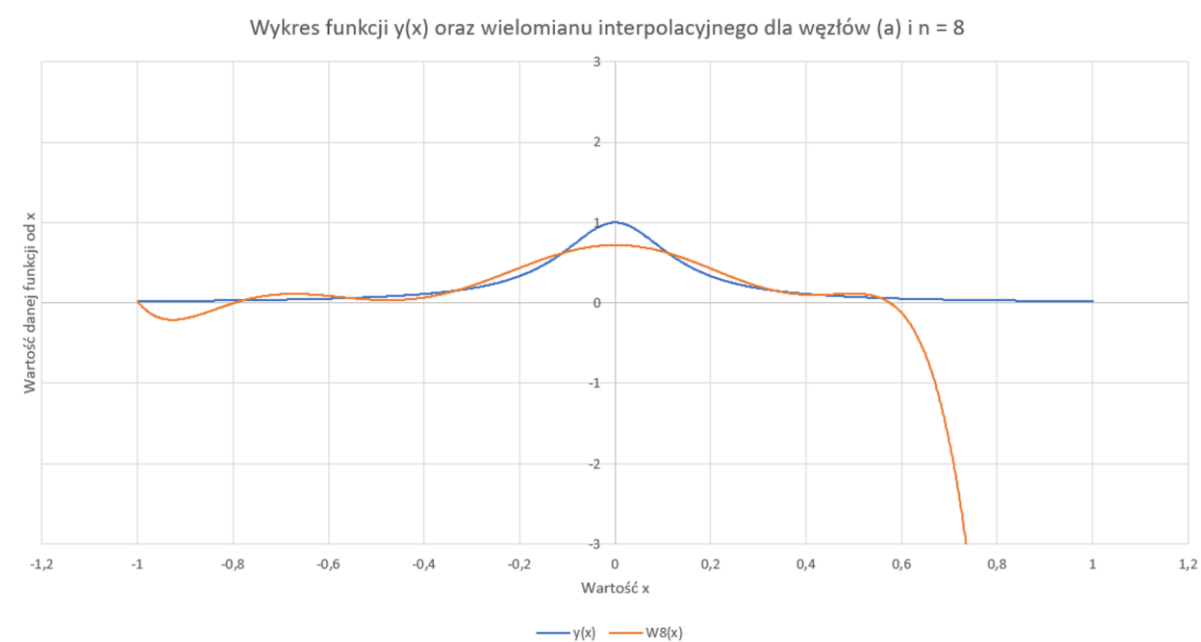
Dodatkowo należało również zaproponować inną funkcję oraz również znaleźć dla niej wielomian interpolacyjny dla węzłów (a) i (b).

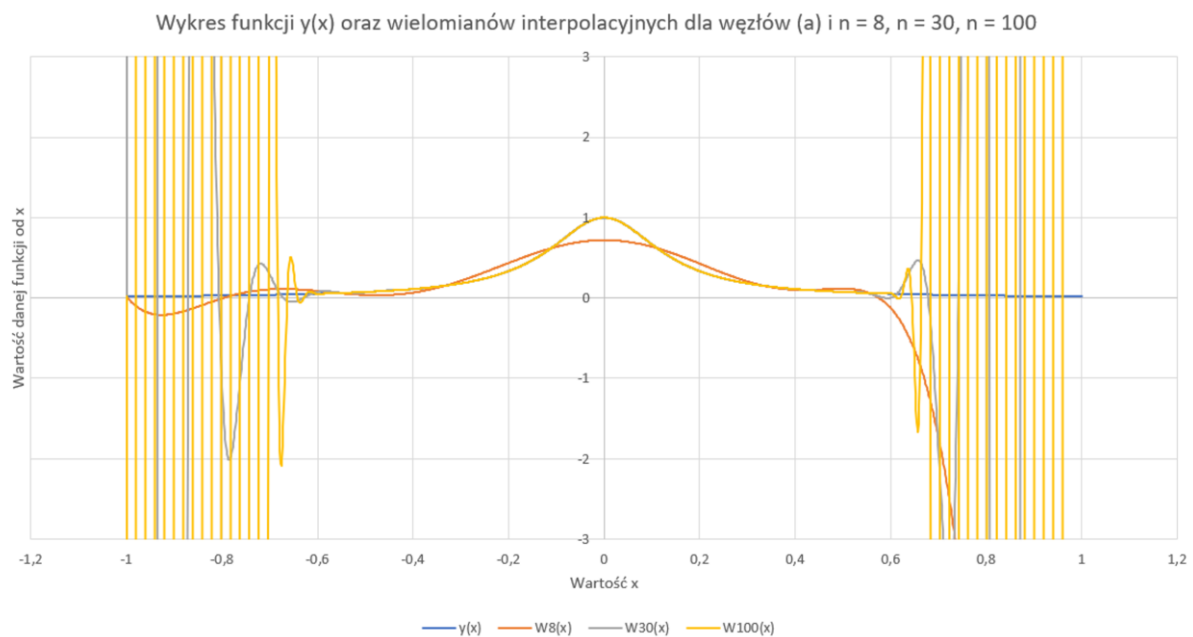
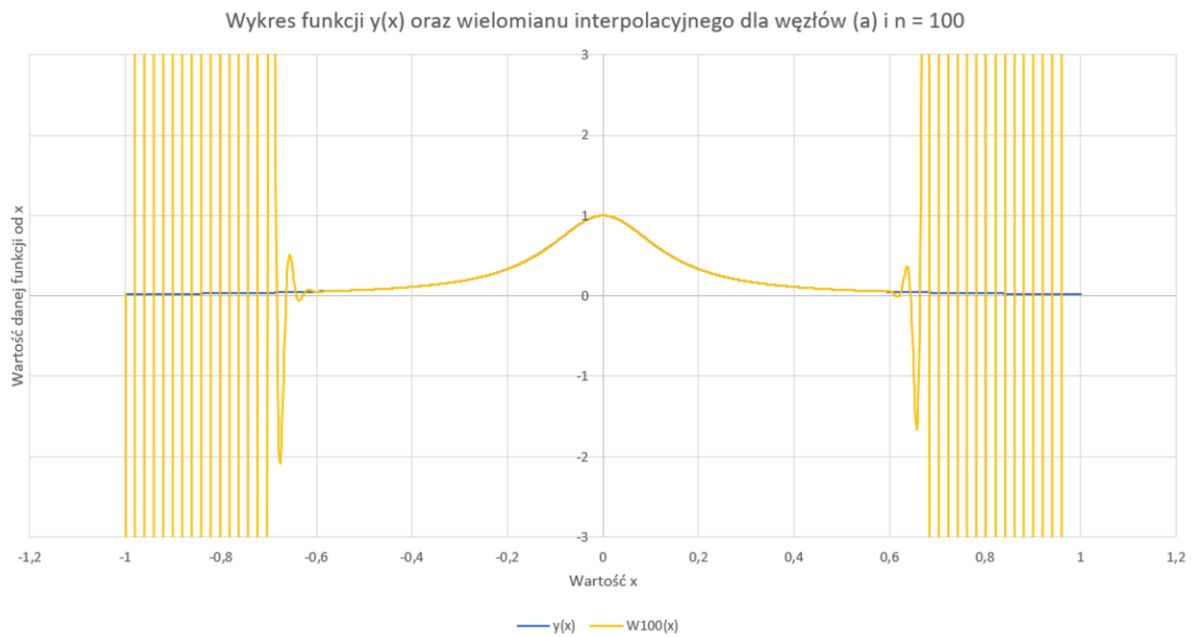
Zadanie to rozwiązałem korzystając ze wzoru interpolacyjnego Lagrange'a.

Jako dodatkową funkcję wybrałem  $h(x) = \sin(\cos(\tan(3x)))$ .

## Omówienie funkcji $y(x)$

Po zastosowaniu wzoru Lagrange'a do wyliczania wielomianu interpolacyjnego dla funkcji  $y(x)$  dla  $n$  jednorodnych węzłów z punktu (a), otrzymałem następujące wyniki (dla większej czytelności wykresy dla poszczególnych wartości  $n$  będę wstawiał osobno, a na końcu wszystko wprowadzę do jednego wykresu).

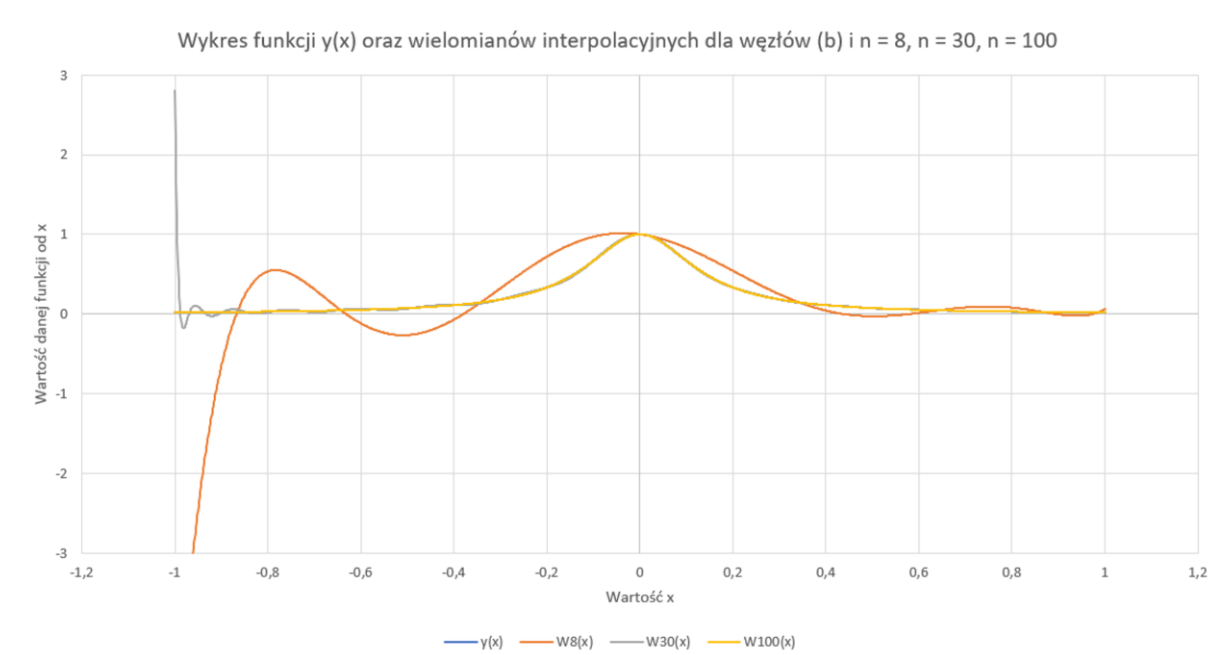




Zgodnie z działaniem wielomianów interpolacyjnych, na powyższych wykresach pojawiły się oscylacje Rungego. Sięgają one ogromnych wartości, które są absurdalnie duże i nijak mają się do zbioru wartości funkcji  $y(x)$ . Pozwoliłem więc sobie ograniczyć wartości na osi Y do przedziału  $y \in \langle -3, 3 \rangle$ .

Jak można zauważyć, pojawiło się dużo oscylacji – z największą częstotliwością na końcach przedziału wartości x.

Następnie zamieniłem siatkę jednorodną ze wzoru (a) na węzły zdefiniowane w punkcie (b) i ponownie uruchomiłem program. Otrzymane dane prezentuję poniżej (tym razem czytelność danych jest na tyle dobra, że wystarczy jeden wykres).



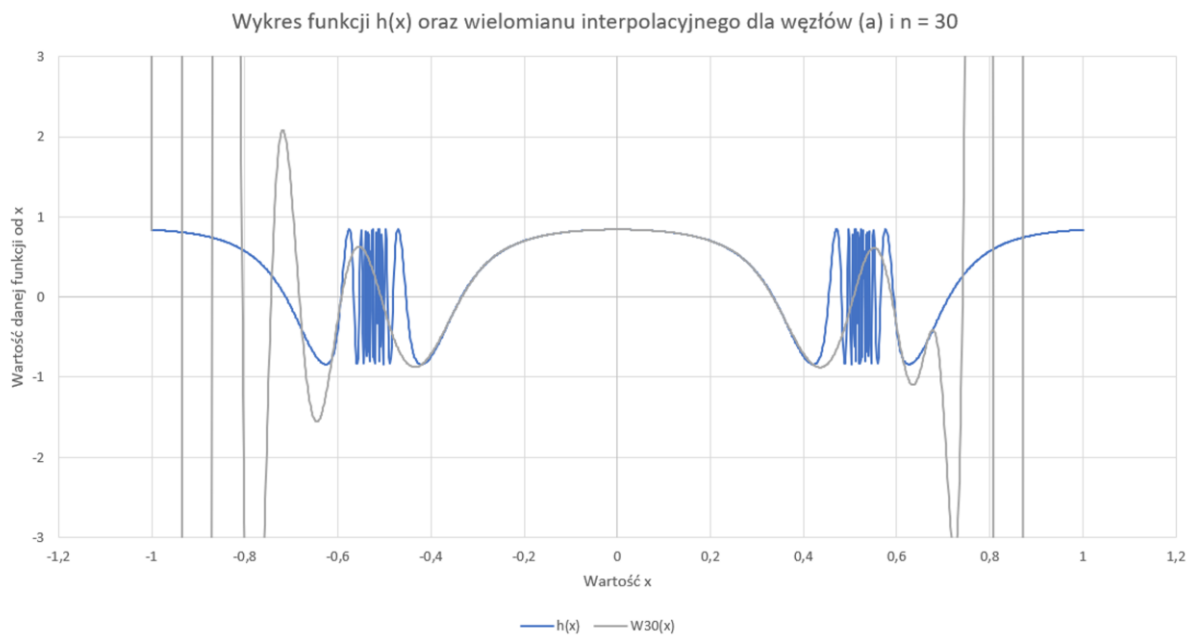
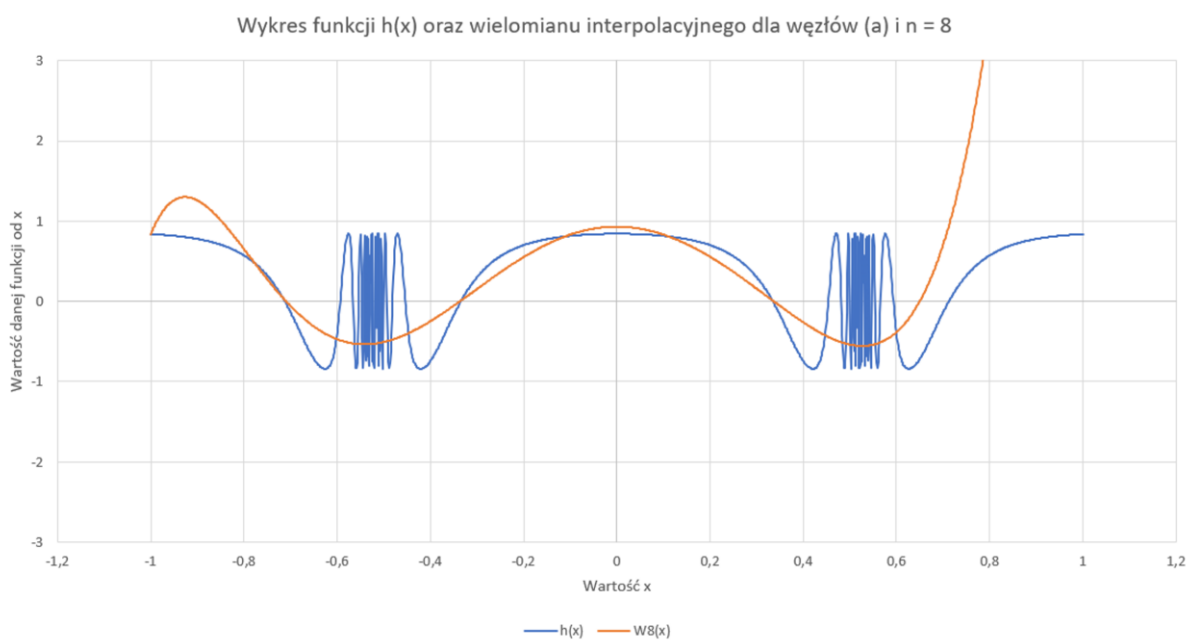
Na powyższym wykresie widać, że oscylacje Rungego praktycznie nie występują. Wykres funkcji  $W_{100}(x)$  pokrywa się z wykresem funkcji  $y(x)$  – otrzymaliśmy świetne dopasowanie wielomianu interpolacyjnego.

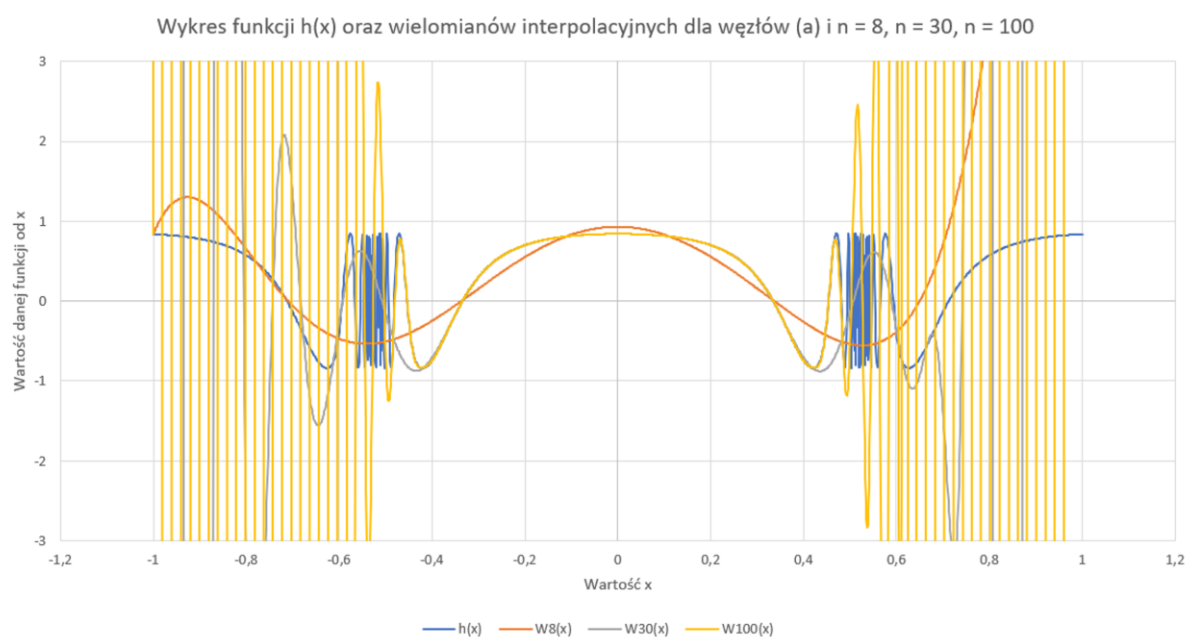
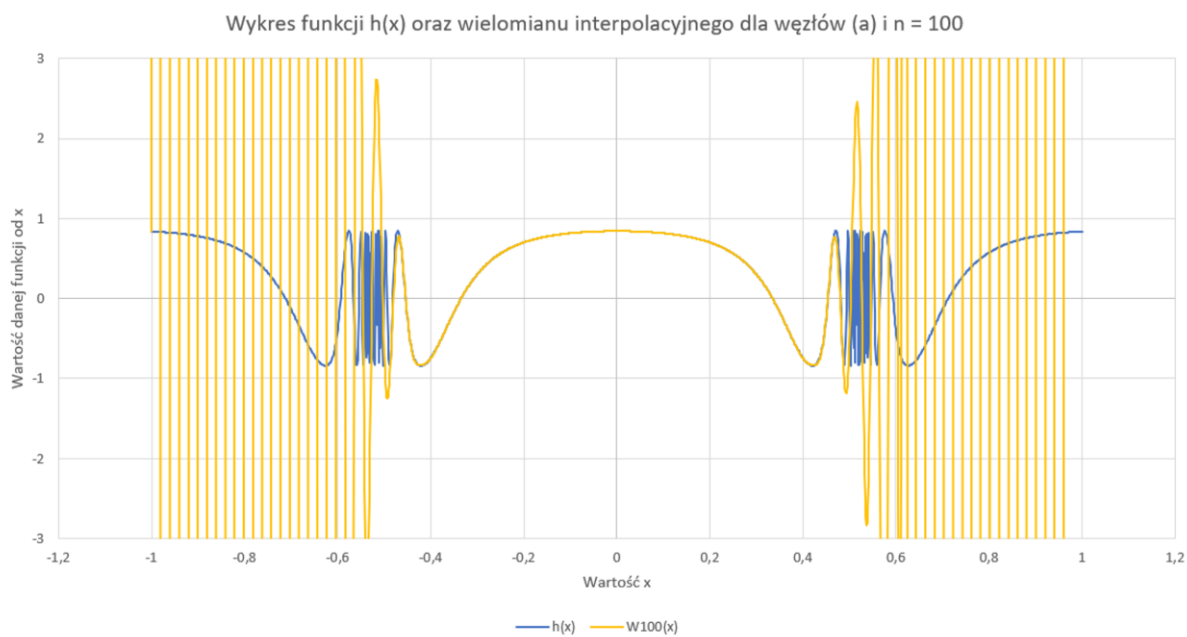
## Wnioski

Wybór węzłów podczas interpolacji ma ogromne znaczenie – wybranie siatki jednorodnej będzie generowało dość sporo oscylacji Rungego. Dodatkowo, im więcej węzłów wybierzemy, tym więcej odchyłeń otrzymamy. Można więc stwierdzić, że wybór węzłów interpolacyjnych ze wzoru w punkcie (b) będzie dużo lepszy, ponieważ dokładniej odwzoruje to funkcję  $y(x)$ .

## Omówienie funkcji $h(x)$

Następnie zmodyfikowałem program tak aby używał wzoru Lagrange'a do wyliczania wielomianu interpolacyjnego dla funkcji  $h(x)$ , również dla  $n$  jednorodnych węzłów ze wzoru w punkcie (a) – tak jak poprzednio dla większej czytelności wykresy dla poszczególnych wartości  $n$  będę wstawiał osobno, a na końcu wszystko wprowadzę do jednego wykresu.

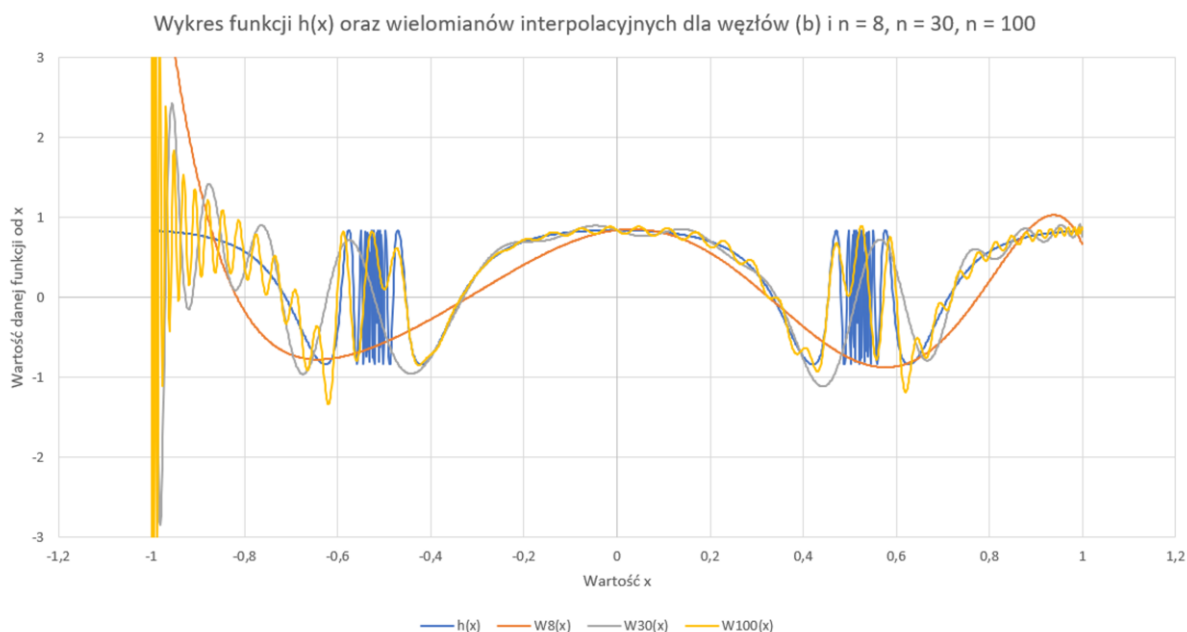




Jak mogliśmy przewidywać po omówieniu poprzedniej funkcji, znów na powyższych wykresach pojawiły się oscylacje Rungego. Sięgają one ogromnych wartości, które są nieproporcjonalnie duże do zbioru wartości funkcji  $h(x)$ . Tak jak poprzednio ograniczyłem wartości na osi Y do przedziału  $y \in \langle -3, 3 \rangle$ .

Widzimy że, oscylacje mają tendencję do pojawiania się z największą częstotliwością na końcach przedziału wartości x.

Następnie – tak jak w przypadku funkcji  $y(x)$  – siatkę jednorodną ze wzoru (a) wymieniłem na węzły zdefiniowane w punkcie (b) i ponownie uruchomiłem program. Otrzymane dane prezentuję poniżej (czytelność danych jest na tyle dobra, że wystarczy jeden wykres).



W przeciwieństwie do odpowiadającego wykresu w przypadku z funkcją  $y(x)$  oscylacje Rungego nadal widocznie występują. Jednakże, gdy porównamy wykresy funkcji  $h(x)$  dla węzłów ze wzorów (a) oraz (b), to powyższy wykres wypada zdecydowanie lepiej. Oscylacje są znacząco mniejsze, a wykres funkcji  $h(x)$  jest odwzorowany w miarę poprawnie przez wykres  $W_{100}(x)$ .

## Wnioski

Wybranie siatki jednorodnej będzie generowało większe oscylacje Rungego – siatka niejednorodna będzie pod tym względem dużo lepsza. Można stwierdzić, że sposób doboru węzłów interpolacyjnych znacząco wpływa na końcowe odwzorowanie funkcji przez wielomian interpolacyjny.

## Podsumowanie

W efekcie zaimplementowania interpolacji wielomianowej, otrzymaliśmy wykresy, z których możemy wywnioskować, że wybór siatki (b) prowadzi do otrzymania oczekiwanego rozwiązania lepiej niż węzły z punktu (a).

## Wnioski

Dla wzorów obliczanych ze wzoru Lagrange'a, wielomiany interpolacyjne najdokładniej odwzorowują daną funkcję, gdy do realizacji interpolacji wykorzystuje się siatki niejednorodne. Takie rozwiązanie pomaga zniwelować skutki wystąpień oscylacji Rungego. Warto również zaznaczyć, iż  $W_n(x)$  musi być odpowiedniego stopnia, aby otrzymane rozwiązanie było dostatecznie bliskie funkcji wyjściowej. Oznacza to, że dobór parametru  $n$  również ma ogromne znaczenie.