Das 0^0-Manifest

Marvin Behrmann

23. April 2023

Inhaltsverzeichnis

1 Vorworteeee

Dieses „Manifest“ – wenn man es denn nun so nennen mag – ist inspiriert durch Michael Hartls „Tau-Manifest“, in welchem er auf sehr überzeugende Art und Weise aufzeigt, warum die Kreiszahl π, die wir alle aus der Schule und der Pop-Kultur kennen und deren Bedeutung für die Mathematik unermesslich sei, eigentlich doch gar nicht so natürlich ist, wie uns immer beigebracht wurde. Er schlägt deshalb vor, statt π die viel sinnvollere und universellere Kreiszahl $\tau = 2\pi$ zu verwenden.

Hartl schrieb dieses Manifest, um ein für alle Mal „die Angelegenheit zu bereinigen“, welche nicht nur Generationen von Schülern verwirrt, sondern auch viele sehr natürliche Zusammenhänge mit der Kreiskonstante verdeckt. So z. B., dass die Formel für die Fläche eines Kreises eine quadratische Form (ein Term der Form $\frac{1}{2}ab$) ist , was erst mit der Formel $A = \frac{1}{2}\tau r^2$ und nicht etwa mit der Formel $A = \pi r^2$ so richtig deutlich wird.

Auch dieses Manifest beschäftigt sich mit einer Angelegenheit, die es dringend nötig hat, endgültig geklärt zu werden: Der Wert der Rechnung 0^0. Allgemein gilt nämlich der Wert dieser Rechnung als undefiniert, jedoch wird im Verlauf dieses Manifests deutlich, dass ihr durchaus ein sinnvoller Wert zugeordnet werden kann und sollte. Zudem schreibe ich dieses Manifest, um etwas zu haben, worauf ich verweisen kann, wenn meine Auffassung infrage gestellt wird.

Da ich vorsehe, dass dieses Manifest von jeder Person mit grundlegendem Schulwissen und etwas Denkarbeit nachvollzogen werden kann, sind manche Formulierungen aus didaktischen Gründen mathematisch ungenau. Jedoch können alle Überlegungen mathematisch fundiert und beweisen werden. Abschnitte, die sich auf höhere Mathematik berufen und daher wohl nicht so leicht verständlich sind, werden entsprechend angekündigt, doch auch ohne diese Abschnitte können die Grundzüge der wichtigsten Überlegungen gut nachvollzogen werden.

2 Die Rechnung 0^0

Für jemanden mit grundlegenden Mathematikkenntnissen aus der Schule könnte es auf den ersten Blick so aussehen, als ob diese Rechnung Unsinn ergibt. Null hoch Null: Was bitte soll *das* bedeuten? Eine Zahl wie 3 hoch 4 rechnen, klar das geht. Das bedeutet einfach, dass man die 3 viermal mit sich selbst multipliziert: $3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$. Wenn man im Allgemeinen eine Zahl a hoch eine Zahl b rechnet, muss man a b-mal mit sich selbst multiplizieren:

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b\text{-mal}} \tag{1}$$

Was in aller Welt soll nun aber 0^0 bedeuten? Die Zahl Null nullmal mit sich selbst zu multiplizieren? Also

$$0^0 = \underbrace{0 \cdot 0 \cdot \ldots \cdot 0}_{0\text{-mal}} = \_\_\_ \ ???$$

Man könnte jetzt denken, dass dort ja dann 0 herauskommen müsste, weil wir, wenn wir „die Null nullmal mit sich selbst multiplizieren“, da ja einfach „gar nichts“ mehr stehen haben. Diese anfängliche Vermutung, was denn bei der Rechnung 0^0 herauskommen könnte – wenn überhaupt etwas herauskommen soll, was auch nicht unbedingt selbstverständlich ist (s. Abschnitt 5) – scheint zunächst zwar ganz sinnvoll, jedoch wird sich noch herausstellen, dass – auch wenn sich die Mathematiker allgemein noch uneinig darüber sind – im Grunde kein Mathematiker die Meinung vertritt, dass $0^0 = 0$ eine sinnvolle Definition ist.

Auch wenn es zunächst willkürlich scheinen mag, vertreten aber viele Mathematiker, so auch ich mit diesem Manifest, die Meinung, 0^0 sollte als 1 definiert werden. Gerade wenn Ihnen schon im Schulunterricht eingebläut wurde, 0^0 müsste undefiniert bleiben, und Sie vielleicht auch schon ein paar (Schein-)Argumente zur Begründung dieser Konvention gehört haben, mag in Ihnen eine gewisse Skepsis oder sogar eine deutliche Ablehnung bei dieser Definition aufkommen. Wie bereits erwähnt, wird dieser Skepsis aber im weiteren Verlauf des Manifestes entgegnet und es wird logisch einwandfrei aufgezeigt, dass diese Definition vollkommen unproblematisch und sogar sehr sinnvoll ist.

2.1 Die Bedeutung der Null

Um mit der Rechnung 0^0 überhaupt etwas anfangen zu können, muss man sich zunächst mit der Zahl Null vertraut machen. Dass es diese Zahl überhaupt gibt, mag uns heutzutage banal und selbstverständlich vorkommen, doch die Akzeptanz und das sorgenfreie Rechnen mit dieser Zahl ist in der Geschichte der Mathematik noch vergleichsweise jung. So wurde die Null erst um das 6. Jahrhundert von hinduistischen Mathematikern als vollwertige Zahl anerkannt, mit der nach den üblichen Regeln gerechnet werden kann (vorher wurde die Null auch schon als Platzhalter, vergleichbar mit dem Dezimalkomma, verwendet). Sogar bis ins Mittelalter war die Zahl Null in Europa noch weitgehend unbekannt und wurde nur teilweise durch Handelsreisende, die z. B. in Indien von ihr erfuhren, nach Europa gebracht. Vielen Europäern war das „runde Ding“ außerdem ein Werk des Teufels und somit unheimlich.

Dass die Null zunächst nicht als Zahl anerkannt wurde, ist wohl darin zu begründen, dass sie, anders als die anderen Zahlen, nicht konkret greifbar ist: null bedeutet im nämlich Grunde nichts. So kann man eine Ansammlung von Äpfeln oder Steinen sehen und die Anzahlen mit eins, zwei, drei, usw. bestimmen. Dass man aber eine Ansammlung von Schafen sieht, in der null Schafe sind, ist wohl eher ungewöhnlich.

Doch wenn diese erste Hürde, das Nichts als eine Zahl zu sehen, überwunden ist, so lässt sich zunächst einfach mit der Null rechnen. Dabei ist die Grundlegende Eigenschaft, die die Null ausmacht, dass Addition von null die Zahl, zu der addiert wurde, unverändert lässt.

Für jede Zahl x gilt also:

$$x + 0 = x \tag{2}$$

Die Null heißt daher auch das *neutrale Element* der Addition. Sie hat daher einen „besonderen Stellenwert“ unter den Zahlen, weswegen für sie auch viele Ausnahmen gelten; Beispielsweise ist die Null die einzige Zahl, die sich stets selbst ergibt, wenn man sie mit irgendeiner anderen Zahl multipliziert. Für jede Zahl x gilt also:

$$x \cdot 0 = 0 \tag{3}$$

Durch genau diese Eigenschaft kommt übrigens die Regel, dass nicht durch null dividiert werden darf, oder präziser gesagt, dass die Division mit Null nicht definiert ist. Der Beweis ist dabei wie folgt:

Dass bei einer Division wie $\frac{54}{9}$ als Ergebnis 6 herauskommt, gilt genau deswegen, weil $9 \cdot 6 = 54$. Im Allgemeinen gilt für alle Zahlen a, b und c (zumindest, wenn b nicht null ist):

$$\frac{a}{b} = c \quad \text{, wenn} \quad b \cdot c = a$$

Warum kann b also nicht auch null sein? Nehmen wir doch einmal an, man könnte eine Zahl a durch 0 teilen und es käme eine Zahl c heraus:

$$\frac{a}{0} = c$$

Nach Definition der Division müsste dann auch gelten:

$$0 \cdot c = a$$

Aus der Gleichung (3) folgt, dass $0 \cdot c$ auf jeden Fall gleich 0 sein muss. Daher gilt:

$$0 = a$$

Im Allgemeinen ist der Dividend a aber irgendeine Zahl. Da hier aber immer folgt, dass a null sein muss, ergibt sich ein Widerspruch, wenn a gar nicht null ist. Damit muss in diesem Fall die Grundannahme falsch gewesen sein: Eine Zahl, die nicht null ist, kann nicht durch null geteilt werden.

Und was ist, wenn a null ist, man also null durch null teilt? Dann folgt daraus:

$$\begin{aligned} \tfrac{0}{0} &= c \\ 0 \cdot c &= 0 \qquad \textit{Definition der Division} \\ 0 &= 0 \qquad \text{w. A.} \end{aligned}$$

Es ergibt sich eine wahre Aussage. Diese ist immer wahr, egal welchen Wert für c, welches Ergebnis der Division, wir auswählen. Da eine einzige Rechnung nicht mehrere Ergebnisse haben kann, muss auch hier die Grundannahme falsch gewesen sein und der Beweis ist vollbracht: Keine Zahl kann mit null dividiert werden.

Dieses Beweisprinzip nennt sich ein *Widerspruchsbeweis* oder die *reductio ad absurdum*: Zum Beweisen einer Aussage wird ihr Gegenteil angenommen. Dann wird gezeigt, dass aus dieser Gegenannahme ein Widerspruch folgt. Letztlich wird daraus gefolgert, dass die Gegenannahme falsch gewesen sein muss, was die Grundannahme beweist. Wir werden der reductio ad absurdum in Abschnitt 5.1 noch einmal bei der Entkräftung der Gegenargumente begegnen.

2.2 Die Definition der Potenzrechnung

Mit *Potenzrechnung* bzw. *Potenzen* wird in der Mathematik fachsprachlich das Ausgedrückt, was wir im normalen Sprachgebrauch als „Hochrechnen“ verstehen. In der Gleichung (1) hatten wir ja schon eine erste, einfach ausgedrückte Definition der Potenzrechnung. Um zu einer mathematisch präziseren Definition zu kommen, ist es jedoch notwendig, genau zu definieren, was mit „b-mal“ gemeint ist. Dafür eignet sich die *Produktschreibweise*.

2.2.1 Die Produktschreibweise

Zur Einführung dieser Schreibweise ist es sinnvoll, den Vergleich zur Summenschreibweise herzustellen. Dabei begegnen einem Ausdrücke wie diese:

$$\sum_{k=1}^{5} k^2 \qquad\qquad \prod_{k=1}^{5} k^2$$

Wem diese Schreibweisen noch nicht vertraut sind, dem mag das wie ein großes Wirrwarr von Symbolen und Zahlen vorkommen, aber im Grunde ist die Schreibweise leicht zu verstehen und auch sehr hilfreich beim mathematisch präzisen Formulieren, wenn man sich mit den darin vorkommenden Teilen vertraut macht.

Zunächst am auffälligsten sind dabei wahrscheinlich die Symbole Σ und Π. Diese griechischen Großbuchstaben heißen „**S**igma“und „**P**i“ und wurden vom berühmten Mathematiker Leonhard Euler als Abkürzung für Summe (*lat.* **S**umma) und Produkt (*lat.* **P**roductum) eingeführt. Sie kündigen an, dass eine Summe oder ein Produkt in Kurzschreibweise notiert werden soll.

Hinter dem jeweiligen Zeichen steht dann ein Term[1], welcher (meistens) eine Variable enthält, in diesem Fall die Variable k. Für diese Variable werden dann verschiedene Zahlenwerte eingesetzt, der Term wird berechnet, und am Ende werden all diese Zwischenergebnisse zusammenaddiert bzw. zusammenmultipliziert. Diese Variable nennt sich *Laufvariable*, weil sie verschiedene Werte durch*läuft*.

Welche Variable die Laufvariable sein soll, wird unter das jeweilige Zeichen geschrieben. Der anfängliche Wert, den diese Laufvariable annehmen soll, wird hinter die Laufvariable nach einem Gleichheitszeichen angegeben. In diesem Fall ist es beide Male die 1. Die Variable durchläuft dann alle (ganzen) Zahlen vom anfänglichen Wert bis zum Wert, der über dem jeweiligen Zeichen steht, in diesem Fall die 5. Das heißt, es werden im Term für k die Werte 1, 2, 3, 4 und 5 eingesetzt, alle Zahlen, die größer oder gleich 1 und kleiner oder gleich 5 sind.

Insgesamt lassen sich die Rechnungen also folgendermaßen ausschreiben:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{5} k^2 &= 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 \\ &= 1 + 4 + 9 + 16 + 25 \\ &= 55\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\prod_{k=1}^{5} k^2 &= 1^2 \cdot 2^2 \cdot 3^2 \cdot 4^2 \cdot 5^2 \\ &= 1 \cdot 4 \cdot 9 \cdot 16 \cdot 25 \\ &= 14\,440\end{aligned}$$

2.2.2 Potenzen in der Produktschreibweise

Mithilfe der Produktschreibweise lässt sich die Potenz a^b für natürliche Zahlen a und b folgendermaßen definieren, indem mehrfach der Term a multipliziert wird (man erinnere sich an die Definition der Potenz in (1), bei der a mehrfach mit sich selbst multipliziert wird):

$$a^b := \prod_{k=1}^{b} a \tag{4}$$

Hier wird nun mithilfe der Laufvariablen präzise ausgedrückt, was wir vorher mit „b-mal" beschrieben haben: Die Laufvariable kommt im Term des Produkts nicht vor, sondern sie hat eine „zählende" Funktion; Da sie alle Werte von 1 bis b durchläuft, wird a einfach b-mal mit sich selbst multipliziert:

$$a^b := \prod_{k=1}^{b} a = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}_{b\text{-mal}}$$

Somit haben wir eine klare Definition für die Potenz gefunden!

2.3 Das leere Produkt

Wenn wir nun den Exponenten[2] b gleich null setzen, also a^0 berechnen, dann ergibt sich das folgende Produkt:

$$a^0 := \prod_{k=1}^{0} a \tag{5}$$

Auffällig ist dabei, dass die obere Grenze des Produkts mit 0 kleiner als die untere Grenze mit 1 ist. Da es keine Zahlen gibt, die größer oder gleich 1 und kleiner oder gleich 0 sind, wird einfach „gar nichts" multipliziert! Dies nennt man das *leere Produkt* und sein Wert, den wir gleich bestimmen werden, ist immer gleich, und zwar ganz egal, welcher Term hinter dem Produktzeichen steht.

Um diesen Wert zu bestimmen, müssen wir uns noch einmal mit neutralen Elementen vertraut machen. In Abschnitt 2.1 hatten wir bereits gelernt, dass die Null das neutrale Element der Addition ist, denn für jede Zahl x gilt: $x + 0 = x$. Und genau wie die Null, die bei der Addition nichts verändert, gibt es auch bei der Multiplikation ein neutrales Element, dessen Multiplikation die Zahl, mit der multipliziert wurde, nicht verändert: Das ist die 1, denn für jede Zahl x gilt:

$$x \cdot 1 = x \tag{6}$$

Um nun einen Wert für das leere Produkt zu bestimmen, schauen wir, was passiert, wenn wir nun das leere Produkt mit der 1 multiplizieren. Denn auf der einen Seite folgt aus (6), dass wieder das leere Produkt herauskommen muss, denn durch Multiplikation mit der 1 verändert sich ja nichts:

$$\left(\prod_{k=1}^{0} a\right) \cdot 1 = \left(\prod_{k=1}^{0} a\right) \tag{7}$$

Auf der anderen Seite kann man es aber auch so betrachten, dass es sinnfrei wäre, wenn eine Zahl durch die Multiplikation mit dem ***leeren*** Produkt verändert würde. Daher muss die 1 rein logisch durch die Multiplikation mit dem leeren Produkt unverändert bleiben.

$$\left(\prod_{k=1}^{0} a\right) \cdot 1 = 1 \tag{8}$$

Wenn man in Gleichung (7) und (8), bei denen ja auf der jeweils linken Seite ein und dasselbe steht, die jeweils rechte Seite betrachtet, so erkennt man, dass das leere Produkt gleich 1 sein muss. Insbesondere gilt wegen (5) daher, dass a^0 für ausnahmslos jede Zahl a immer gleich 1 sein muss. Insbesondere ist auch 0^0 ein leeres Produkt. Daher muss gelten:

$$0^0 := \prod_{k=0}^{0} 0 = 1 \tag{9}$$

Null hoch null ist gleich 1! Der Beweis ist vollbracht.

3 Zwei andere Beweise

Wem dieser erste, formalere Beweis zu abstrakt war, der mag die folgenden einfacheren Beweise womöglich besser nachvollziehen.

3.1 Der erste einfachere Beweis

Für den ersten einfacheren Beweis schauen wir uns einmal die Potenzen einer Zahl wie 3 mit den Exponenten 1 bis 4 an:

$$\begin{aligned} 3^4 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ 3^3 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \\ 3^2 &= 3 \cdot 3 \\ 3^1 &= 3 \end{aligned} \tag{10}$$

Die genauen Ergebnisse jeder Potenz spielen dabei für die folgenden Überlegungen keine Rolle. Wichtig ist nur, dass sich hier ein bestimmtes Muster erkennen lässt: Von 3^1 zu 3^2 wurde eine 3 hinzumultipliziert, von 3^2 zu 3^3 wurde eine 3 hinzumultipliziert und von 3^3 zu 3^4 wurde eine 3 hinzumultipliziert und immer so weiter. Das lässt sich folgendermaßen gut darstellen:

$$\begin{array}{ll} 3^4 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 & \\ & \curvearrowleft \cdot 3 \\ 3^3 = 3 \cdot 3 \cdot 3 & \\ & \curvearrowleft \cdot 3 \\ 3^2 = 3 \cdot 3 & \\ & \curvearrowleft \cdot 3 \\ 3^1 = 3 & \end{array} \tag{11}$$

Mithilfe eines solchen Musters lässt sich die Potenzrechnung auf Zahlen erweitern, die vorher nicht im Definitionsbereich waren. Hier wendet man das *Permanenzprinzip* an: Bei einer Zahlenbereichserweiterung sollen die Muster und Rechenregeln, die auf dem ursprünglichen Zahlenbereich gelten, auch im erweiterten Zahlenbereich gelten. Nach dem Permanenzprinzip ergibt es Sinn, dass auch $3^1 = 3$ aus der Multiplikation von 3^0 mit 3 hervorgehen sollte. Und die einzige Zahl, die mit 3 multipliziert 3 ergibt, ist die 1.

$$\begin{array}{ll} 3^1 = 3 & \\ & \curvearrowleft \cdot 3 \\ 3^0 = 1 & \end{array} \tag{12}$$

Allgemein gilt für alle Zahlen a, zumindest wenn a nicht null ist, dass a^0 gleich 1 sein muss, damit das Muster beibehalten wird:

$$
\begin{aligned}
a^4 &= a \cdot a \cdot a \cdot a \\
&& \uparrow \cdot a \\
a^3 &= a \cdot a \cdot a \\
&& \uparrow \cdot a \\
a^2 &= a \cdot a \\
&& \uparrow \cdot a \\
a^1 &= a \\
&& \uparrow \cdot a \\
a^0 &= 1
\end{aligned}
\tag{13}
$$

Für a gleich null ergeben sich aber ein paar Probleme, denn 0^1 ist gleich null und daher kommt für 0^0 jeder mögliche Zahlenwert infrage, sodass 0^0 mit null multipliziert 0^1 ergibt:

$$
\begin{aligned}
0^0 \cdot 0 &= 0^1 \\
0 &= 0 \quad \text{w. A.}
\end{aligned}
\tag{14}
$$

Anders als bei der Division mit 0 ergeben sich aber für alle anderen Zahlen beim potenzieren mit der 0 keine Probleme. Hier ist stattdessen sogar ein klares Muster zu erkennen, dass jede Zahl hoch null immer 1 ist. Nach dem Permanenzprinzip ist es daher sinnvoll, auch im Fall 0^0 den Wert 1 zuzuordnen.

Dies zeigt noch einmal auf, dass die hier angebrachten „Beweise“ nicht etwa die Wahrheit der Aussage $0^0 = 1$ beweisen, sondern sie demonstrieren die Sinnhaftigkeit der Definition. Denn eine Definition kann niemals wahr oder falsch sein, sie kann nur sinnvoll oder weniger sinnvoll sein. Und hier zeigt sich wieder, dass $0^0 = 1$ definitiv eine sinnvolle Definition ist.

3.2 Der zweite einfachere Beweis

Der zweite einfachere Beweis ist dem ersten ganz ähnlich. Hierbei konzentrieren wir uns aber darauf, dass wir bspw. von 3^4 zu 3^3 eine 3 im Produkt „wegnehmen“:

$$
\begin{aligned}
3^4 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\
&& \downarrow 3 \ \textit{wegnehmen} \\
3^3 &= 3 \cdot 3 \cdot 3 \\
&& \downarrow 3 \ \textit{wegnehmen} \\
3^2 &= 3 \cdot 3 \\
&& \downarrow 3 \ \textit{wegnehmen} \\
3^1 &= 3
\end{aligned}
\tag{15}
$$

Der Trick ist jetzt, dass wir jedes der Produkte mit 1 multiplizieren können, ohne, dass sich deren Wert verändert:

$$
\begin{aligned}
3^4 &= 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\
&& \downarrow 3 \ \textit{wegnehmen} \\
3^3 &= 1 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \\
&& \downarrow 3 \ \textit{wegnehmen} \\
3^2 &= 1 \cdot 3 \cdot 3 \\
&& \downarrow 3 \ \textit{wegnehmen} \\
3^1 &= 1 \cdot 3
\end{aligned}
\tag{16}
$$

Nach dem Permanenzprinzip können wir dieses Muster auch wieder auf den Fall 3^0 übertragen, wobei wir von 3^1 zu 3^0 eine 3 „wegnehmen“. Da nun aber nicht mehr „gar nichts“ dasteht, sondern eine 1 übrigbleibt, fällt das Problem weg, was wir am Anfang des Abschnittes 2 erkannt hatten.

$$
\begin{aligned}
3^1 &= 1 \cdot 3 \\
&& \downarrow 3 \ \textit{wegnehmen} \\
3^0 &= 1
\end{aligned}
\tag{17}
$$

Das wir die 3 ausgewählt haben, war dabei eine willkürliche Entscheidung. Im Allgemeinen sollte nach dem Permanenzprinzip also für jede Zahl a, insbesondere auch für a gleich null, gelten:

$$
\begin{aligned}
a^4 &= 1 \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a && \\
& && \textit{a wegnehmen} \\
a^3 &= 1 \cdot a \cdot a \cdot a && \\
& && \textit{a wegnehmen} \\
a^2 &= 1 \cdot a \cdot a && \\
& && \textit{a wegnehmen} \\
a^1 &= 1 \cdot a && \\
& && \textit{a wegnehmen} \\
a^0 &= 1 &&
\end{aligned}
\tag{18}
$$

Die Definition $0^0 = 1$ ergibt also auch hier wieder Sinn.

4 Der versteckte Gebrauch von $0^0 = 1$

Dieser Abschnitt beschäftigt sich mit einigen grundlegenden Formeln der Mathematik, die Mathematiker tagtäglich und ohne Zweifel verwenden, welche aber $0^0 = 1$ fordern. Einige der folgenden Formeln und Begriffe mögen Ihnen unbekannt sein und ich denke, ein vollkommenes Nachvollziehen der Überlegungen wird nur geübten Mathematikerinnen und Mathematikern möglich sein. All dies dient jedoch nur dazu, zu vermitteln, dass $0^0 = 1$ in vielen Bereichen der Mathematik eine essentielle Rolle spielt. Ein grobes Überfliegen des Abschnittes ist also möglich, ohne etwas Essentielles zu verpassen.

4.1 Der binomische Lehrsatz

Der binomische Lehrsatz ist eine Formel, die es ermöglicht, die Potenz eines Binoms (= ein Term der Form $x + y$) mit einer natürlichen Zahl n durch ein Polynom n-ten Grades in den Variablen x und y auszudrücken. Er lautet folgendermaßen[3]:

$$(x + y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} x^{n-k} y^k \tag{19}$$

Allein an der Bezeichnung „Satz“ wird deutlich, dass der binomische Lehrsatz einen sehr hohen Stellenwert in der Mathematik hat. Da kann es doch unmöglich sein, dass er etwas so kontroverses wie $0^0 = 1$ voraussetzt. Oder tut er das etwa doch? Die Antwort erhalten wir, wenn wir beispielsweise y gleich null setzen. Auf der einen Seite gilt dann:

$$(x + 0)^n = x^n \tag{20}$$

Aber auf der anderen Seite folgt aus dem binomischen Lehrsatz in (19):

$$
\begin{aligned}
(x + 0)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{k}{n} x^{n-k} \cdot 0^k \\
&= \binom{0}{n} x^{n-0} \cdot 0^0 + \binom{1}{n} x^{n-1} \cdot 0^1 + ... + \binom{n}{n} x^{n-n} \cdot 0^n \\
&= x^n \cdot 0^0 + \binom{1}{n} x^{n-1} \cdot 0 + ... + \binom{n}{n} x^{n-n} \cdot 0 \\
&= x^n \cdot 0^0 + 0 + ... + 0 \\
&= x^n \cdot 0^0
\end{aligned}
\tag{21}
$$

Aus (20) und (21) sowie (6) folgt:

$$
\begin{aligned}
& x^n = x^n \cdot 0^0 \\
\implies & 0^0 = 1
\end{aligned}
$$

Damit ist bewiesen, dass der binomische Lehrsatz $0^0 = 1$ voraussetzt. Und das ist auch gut so, denn gerade bei Sätzen versuchen sich die Mathematiker immer so „elegant“ wie möglich auszudrücken. Wäre 0^0 nicht definiert, so müsste der binomische Lehrsatz nämlich lauten:

$$(x+y)^n = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{n} \binom{k}{n} x^{n-k} y^k & \text{, wenn } x \neq 0 \text{ und } y \neq 0 \text{ und nicht } (x+y=0 \text{ und } n=0) \\ y^n & \text{, wenn } x = 0 \text{ und nicht } (y=0 \text{ und } n=0) \\ x^n & \text{, wenn } y = 0 \text{ und nicht } (x=0 \text{ und } n=0) \\ 1 & \text{, wenn } x+y \neq 0 \text{ und } n=0 \\ \text{undefiniert} & \text{, wenn } x+y = 0 \text{ und } n=0 \end{cases}$$

Was nicht nur extrem hässlich sondern auch unnötig kompliziert ist.

4.2 Die natürliche Exponentialfunktion

Die natürliche Exponentialfunktion e^x (mathematisch genau eigentlich $\exp(x)$) ist die natürlichste Funktion, um exponentielles Wachstum zu beschreiben. Sie kann durch ihre *Taylor-Reihe*, der folgenden Summe, definiert werden[4]:

$$\mathrm{e}^x := \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \tag{22}$$

Auch diese Formel findet in der Mathematik ständig Gebrauch und wird nie angezweifelt. Nach (5) gilt, dass

$$\mathrm{e}^0 = 1 \tag{23}$$

sein muss. Aber nach der Taylor-Reihen-Definition in (22) gilt ebenso:

$$\begin{aligned} e^0 &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{0^k}{k!} \\ &= \frac{0^0}{0!} + \frac{0^1}{1!} + \frac{0^2}{2!} + \frac{0^3}{3!} + ... \\ &= \frac{0^0}{1} + \frac{0}{1} + \frac{0}{2} + \frac{0}{6} + ... \\ &= 0^0 + 0 + 0 + 0 + ... \\ &= 0^0 \end{aligned} \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt auch hier wieder, dass $0^0 = 1$.

4.3 Die geometrische Reihe

Wenn der Startwert a_0 einer geometrischen Folge[5] gleich 1, also $a_n = q^n$, wobei q der Quotient je zweier benachbarter Folgenglieder ist, und[6] $|q| < 1$ ist, konvergiert die geometrische Reihe[7] nach einer allseits bekannten und nicht bezweifelten Formel gegen den folgenden Wert:

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = \sum_{k=0}^{\infty} q^k = \frac{1}{1-q} \tag{25}$$

Und nun – wer hätte es gedacht – setzen wir q gleich null. Auf der einen Seite gilt so nämlich:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} q^k &= 0^0 + 0^1 + 0^2 + ... \\ &= 0^0 + 0 + 0 + ... \\ &= 0^0\end{aligned} \tag{26}$$

Und auf der anderen Seite soll nach (25) gelten:

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{\infty} q^k &= \frac{1}{1-0} \\ &= \frac{1}{1} \\ &= 1\end{aligned} \tag{27}$$

Aus (26) und (27) lässt sich erneut schließen: Es wird implizit vorausgesetzt, dass $0^0 = 1$ ist.

5 Die Widerlegung von Gegenargumenten

Trotz der überwältigenden Menge an Argumenten und Belegen für die Sinnhaftigkeit von $0^0 = 1$ gilt diese Rechnung in der Mathematik immer noch größtenteils als undefiniert. Das liegt, denke ich, vor allem an (scheinbaren) Gegenargumenten, die immer wieder gegen diese Definition geäußert werden.

Der folgende Abschnitt widmet sich der Entkräftung einiger dieser Gegenargumente.

5.1 Das Gegenargument über das zweite Potenzgesetz

Das zweite Potenzgesetz lautet wie folgt: Wenn eine Potenz durch eine Potenz mit gleicher Basis[8] dividiert wird, werden die Exponenten subtrahiert. Mit Variablen ausgedrückt gilt für alle reellen Zahlen a, m und n:

$$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n} \tag{28}$$

Das Gegenargument gestaltet sich nun wie folgt. Es wird zunächst angenommen, dass 0^0 tatsächlich definiert ist. Es wird dann gezeigt, dass aus dieser Annahme (scheinbar) folgt, dass 0^0 gleich einer undefinierten Rechnung ist, was der Grundannahme widerspricht, woraus gefolgert wird, dass diese falsch gewesen sein muss und 0^0 undefiniert bleiben muss.

Das Gegenargument bedient sich also der reductio ad absurdum, die wir bereits aus Abschnitt Abschnitt 2.1 kennen.

Es lautet dabei konkret wie folgt:

Wenn 0^0 tatsächlich wie eine normale Potenz definiert ist, dann müsste das Rechnen mit 0^0 den Potenzgesetzen entsprechen. Man kann statt 0^0 auch 0^{1-1} schreiben. Dann muss aber nach dem zweiten Potenzgesetz in (28) (in umgekehrter Form) gelten:

$$\begin{aligned}0^0 &= 0^{1-1} \quad \textit{zweites Potenzgesetz} \\ &= \tfrac{0^1}{0^1} \\ &= \tfrac{0}{0} \quad ↯\end{aligned} \tag{29}$$

Es folgt, dass 0^0 dasselbe wie $\frac{0}{0}$ sein muss. Da aber Division mit null, wie in Abschnitt 2.1 begründet, undefiniert ist, muss auch 0^0 undefiniert sein. Da wir aber angenommen haben, dass 0^0 definiert wäre, muss diese Grundannahme falsch gewesen sein: 0^0 muss undefiniert bleiben!

... oder etwa nicht? Nein, denn die Beweisführung ist falsch! Denn eben habe ich das zweite Potenzgesetz falsch aufgesagt. Korrekt lautet es: Für alle reellen Zahlen a, m und n, **wobei a ungleich null ist**, gilt: $\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$. Darin liegt also der Fehler: Das zweite Potenzgesetz wurde für a gleich null angewandt, obwohl es in diesem Fall gar nicht gilt. Und diese Regel ist nicht nur eine Ausrede, um einen Widerspruch in der Definition von 0^0 vorzubeugen, sondern sie ist allgemein notwendig, da sonst jede Potenz mit der Basis 0, also auch ganz übliche wie 0^1, auf $\frac{0}{0}$ zurückgeführt werden könnten. So könnte man ohne diese Einschränkung mit dem zweiten Potenzgesetz ganz analog zu (29) auch zeigen, dass 0^1, was ja offensichtlich 0 ist, undefiniert sein müsste:

$$\begin{aligned} 0^1 &= 0^{2-1} \quad \Big\downarrow \textit{ zweites Potenzgesetz} \\ &= \frac{0^2}{0^1} \\ &= \frac{0}{0} \quad ↯ \end{aligned} \tag{30}$$

Somit ist dieses Gegenargument widerlegt.

5.2 Das Gegenargument über Limites

Vorab: Dieser Abschnitt ist mit grundlegendem Schulwissen sicherlich nicht einfach zu verstehen. Aber auch hier gilt wieder: Die Details sind nebensächlich. Am besten ist es, Sie konzentrieren Sich nur auf die Grundzüge der Argumentation und sehen über Unbekanntes zunächst hinweg. Ein Blick in die Fußnoten kann sicherlich auch behilflich sein.

Bei der Untersuchung von Limites[9] gibt es sieben sogenannte *unbestimmte Ausdrücke*:

$$\frac{0}{0} \ , 0 \cdot \infty \ \ , \infty - \infty \ \ , \frac{\infty}{\infty} \ \ , 0^0 \ \ , \infty^0 \ \ , 1^\infty$$

Dabei stehen die Werte 0, 1 und ∞ – die umgekippte Acht verrät es schon – nicht etwa für exakte Zahlenwerte, sondern für Funktionen, welche im Limes gegen 0 bzw. 1 bzw. ∞ konvergieren. Diese Formen von Limites heißen deshalb unbestimmte Ausdrücke, weil sie für verschiedene Limites gegen unterschiedliche Werte konvergieren und daher also der Wert eines Limes, der eine dieser Formen annimmt, nur durch das Erkennen dieser Form nicht bestimmt werden kann.

Beispielsweise nehmen die Terme $\frac{x^2}{x}$ und $\frac{2x}{x}$ für x gegen 0 beide die Form $\frac{0}{0}$ an, jedoch ist der Limes des ersten Terms gleich 0 und der des zweiten Terms gleich 2.

Nun steht da aber auch, dass 0^0 ein unbestimmter Ausdruck sei. Das liegt, wie gesagt, daran, dass Limites dieser Form ganz verschiedene Werte annehmen können.

So gilt beispielsweise für alle positiven Zahlen a, dass $0^a = 0$ ist. Selbst wenn wir uns also mit a beliebig nah (von der positiven Seite) an den Wert null annähern – das entspricht einem Limes der Form 0^0 – bleibt der Wert von 0^a null. Daher gilt[10]:

$$\lim_{a \to 0^+} 0^a = 0$$

Aber aus (5) wissen wir ja, dass a^0 für jede Zahl a, die ungleich null ist (sogar für negative a), gleich 1 ist. Selbst wenn wir uns also mit a beliebig nah an den Wert null annähern – das entspricht wieder einem Limes der Form 0^0 – bleibt der Wert von a^0 gleich 1. Daher gilt:

$$\lim_{a \to 0} a^0 = 1$$

Das zeigt auf, dass 0^0 wirklich ein unbestimmter Ausdruck ist. Tatsächlich kann man sogar für jeden Wert L einer beliebigen Stelle c einen Limes der Form $f(x)^{g(x)}$ mit $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ (also der Form 0^0) finden, sodass gilt:

$$\lim_{x \to c} f(x)^{g(x)} = L$$

Und genau dieser Fakt, dass 0^0 ein unbestimmter Ausdruck ist, ist das häufigste Gegenargument gegen die Definition von 0^0. Es gäbe doch daher unendlich viele sinnvolle Werte für 0^0, daher wäre eine Definition unsinnig. Aber das ist ein Trugschluss.

Erinnern Sie Sich noch, dass ich meinte, dass die Werte 0, 1 und ∞ in den unbestimmten Ausdrücken nicht für exakte Zahlenwerte stünden? Das gilt insbesondere in diesem Fall. Es gibt nämlich einen klaren Unterschied zwischen einem Limes, der die Form 0^0 annimmt, und dem exakten, arithmetischen Wert der Rechnung 0^0, wobei die Nullen tatsächlich für die Zahl null stehen.

Der Limes ist ein Werkzeug der Analysis, das es erlaubt, dass Grenzwertverhalten von Funktionen zu beschreiben. Die Unbestimmtheit des Limes-Ausdruckes 0^0 ist deshalb **keine** Aussage über den Wert der Rechnung 0^0, sondern sie sagt nichts weiter aus, als dass die Bedingungen $\lim_{x\to c} f(x) = 0$ und $\lim_{x\to c} g(x) = 0$ nicht ausreichen, um $\lim_{x\to c} f(x)^{g(x)}$ zu bestimmen. Damit spielt auch die Unstetigkeit der Funktion x^y an der Stelle $(0 \mid 0)$ **keine** Rolle für den Wert der Rechnung 0^0.

Der exakte, arithmetische Wert der Rechnung 0^0 ist also etwas **grundlegend anderes** als die Unbestimmtheit des Limes-Ausdruckes 0^0. Aus dem einen etwas über das andere zu folgern, ist daher **nicht** möglich.

5.3 Zwischenfazit

Diese beiden scheinbaren Gegenargumente sind – so weit meine ausführlichen Recherche reicht – die einzigen, die man weit und breit gegen die Defintion von 0^0 finden kann. Alle Gegenargumente, die scheinbar anders sind, sind doch nur Variationen dieser zwei Gegenargumenten bzw. auf ihnen aufgebaut und können sich daher ebenso einfach widerlegen lassen. Das zeigt noch einmal auf, dass die Gegner dieses Manifests dem Weniges und nur Falsches bzw. Unsinniges entgegenzusetzen haben. Insgesamt lässt sich also festhalten, dass sich jedes Gegenargument klar widerlegen lässt. $0^0 = 1$ ist also unbestreitbar eine gute und die einzig gute Definition für den Wert dieser Rechnung.

6 Fazit

Zusammenfassend lässt sich also festhalten, dass erstaunlich vieles dafür spricht, den Wert der Rechnung 0^0 als 1 zu definieren, und ebenso erstaunlich nichts gegen diese Definition spricht, was nicht auf falschen Schlussfolgerungen basiert. Darum sollte 0^0 tatsächlich in der gesamten Mathematik als 1 definiert werden!

7 Fußnoten

1. Ein Term ist in der Mathematik eine sinnvolle Kombination aus Zahlen, Variablen (z. B. x, y), Symbolen für mathematische Verknüpfungen (z. B. $+$, $-$, $\cdot$, $:$) und Klammern. D. h., das hier

   $$(1 + 8x)^2$$

   ist ein Term, aber das hier

   $$\cdot)(xy- : \infty = \text{Kuchen}$$

   ist kein Term. Auch Gleichungen sind keine Terme, da Gleichheitszeichen nicht zugelassen sind.

2. Der Exponent einer Potenz ist die „Hochzahl“. In der Potenz a^b ist also b der Exponent.

3. $\binom{n}{k}$ ist der Binomialkoeffizient, der angibt, wie viele Möglichkeiten es gibt, von n Elementen k zu wählen.

   Beispielsweise ist $\binom{5}{2} = 10$, da es zehn verschiedene Möglichkeiten gibt, von zwei Elementen (z. B. Personen) genau zwei zu wählen.

4. $n!$ ist die Fakultät von n. Das ist das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n, also:

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (n-2) \cdot (n-1) \cdot n = \prod_{k=1}^{n} k$$

   Zum Beispiel ist $4! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 = 24$. Insbesondere ist $0!$ das leere Produkt und damit gleich 1.

5. Eine geometrische Folge ist eine solche Folge, bei der der Quotient q zweier benachbarter Folgenglieder konstant ist. Es gilt:

$$a_n = q \cdot a_{n-1}$$

   Beispielsweise ist die Folge 3, 6, 12, 24, 48, 96, ... eine geometrische Reihe, da der Quotient zweier benachbarter Folgenglieder immer 2 ist.

6. $|x|$ ist der Betrag von x, also dessen Abstand zur 0. Alternativ kann man auch sagen, dass der Betrag einer Zahl diese Zahl ohne ihr Vorzeichen bzw. mit einem Plus-Vorzeichen ist. Beispielsweise ist $|-4| = |+4| = 4$.

7. Eine geometrische Reihe ist die Reihe (= Summe der ersten n aufeinander folgenden Folgenglieder) einer geometrischen Folge.

8. Die Basis einer Potenz ist die untere Zahl. In der Potenz a^b ist also a die Basis.

9. Der *Limes* (*pl.* Limites, = Grenzwert) einer Funktion f an einer bestimmten Stelle c ist der Wert L, dem sich die Funktion f annähert, wenn Werte eingesetzt werden, die beliebig nah an c liegen. Man schreibt:

$$\lim_{x \to c} f(x) = L$$

   Man sagt: „Die Funktion $f(x)$ *konvergiert* für x gegen c gegen L“

   Beispielsweise ist die Funktion $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ für den Wert $x = 1$ undefiniert, da sich im Nenner dann null ergibt. Jedoch kann man zeigen, dass sich $f(x)$ für Werte, die beliebig an der 1 liegen, immer weiter dem Wert $\frac{1}{2}$ nähert. Daher gilt, dass die Funktion f mit $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$ für x gegen 1 gegen $\frac{1}{2}$ konvergiert:

$$\lim_{x \to 1} \frac{x-1}{x^2-1} = \frac{1}{2}$$

10. Mit $\lim_{x \to c^+}$ bzw. $\lim_{x \to c^-}$ ist der Limes für x gegen c gemeint, sodass x immer größer bzw. kleiner als c ist. Dies macht beispielsweise für $\lim_{x \to 0^+} 0^x$ einen entscheidenden Unterschied: Für $x > 0$ ist $0^x = 0$, daher gilt:

$$\lim_{x \to 0^+} 0^x = 0$$

    Aber für $x < 0$ ist 0^x undefiniert (implizite Division mit null). Daher existiert $\lim_{x \to 0^-} 0^x$ und damit auch $\lim_{x \to 0} 0^x$ nicht.

8 Quellen

- https://tauday.com/das-tau-manifest
- https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik/artikel/geschichte-der-zahl-null#:~:text=Die%20Zahl%20Null%20wurde%20erstmals,die%20Araber%20die%20indischen%20Zahlzeichen.
- https://www.deutschlandfunk.de/die-geschichte-der-null-100.html
- https://www.lernhelfer.de/schuelerlexikon/mathematik-abitur/artikel/leonhard-euler