Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

TIN
Teoretická informatika

1. domácí úloha

Attila Lakatos (xlakat01)

31. října 2019

Obsah

Teoretická informatika (TIN) – 2019/2020
Úkol 1
(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Uvažujme operaci $\circ$ definovanou následovně: $L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}$. S využitím uzávěrových vlastností dokažte, nebo vyvraťte, následující vztahy:

   (a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3$
   (b) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D$
   (c) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

   $\mathcal{L}_2^D$ značí třídu deterministických bezkontextových jazyků, $\mathcal{L}_2$ třídu bezkontextových jazyků a $\mathcal{L}_3$ třídu regulárních jazyků.

   10 bodů

2. Mějme jazyk L nad abecedou $\{a, b, \#\}$ definovaný následovně: $L = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i + 2j = 2k + l\}$
   Sestrojte deterministický zásobníkový automat M_L takový, že $L(M_L) = L$. 10 bodů

3. Dokažte, že jazyk L z předchozího příkladu není regulární.

   10 bodů

4. Navrhněte algoritmus, který pro daný nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozhodne, zda $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$.

   Dále demonstrujte běh tohoto algoritmu na automatu $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a\}, \delta, q_0, \{q_4\})$, kde δ je definována jako

   $\delta(q_0, a) = \{q_1, q_0\}$, $\delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\}$,
   $\delta(q_2, a) = \{q_0, q_3\}$, $\delta(q_3, a) = \{q_0, q_4\}$,
   $\delta(q_4, a) = \{q_0\}$.

   10 bodů

5. Dokažte, že jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \ mod \ 2 \neq 0 \ \wedge \ \#_b(w) \leq 2\}$ je regulární. Postupujte následovně:

   - Definujte $\sim_L$ pro jazyk L.
   - Zapište rozklad $\Sigma^* / \sim_L$ a určete počet tříd tohoto rozkladu.
   - Ukažte, že L je sjednocením některých tříd rozkladu $\Sigma^* / \sim_L$.

   10 bodů

1 1. úloha

1.1 a)

Operácia $\circ$ je definovaná následovne:

$$L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}. \tag{1}$$

Musíme dokázať, že následujúci vzťah je platný:

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3 \tag{2}$$

Z **Věty 3.23**(študijná opora - strana 50.) vyplýva, že trieda regularných jazykov je uzavretá vzhľadom k operáciam sjednocenie a komplementu [1]. Na základe toho môžeme povedať, že

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3 \tag{3}$$

je **platný** vzťah.

1.2 b)

Najprv si musíme vyjádriť sjednocení množín vzťahom pomocou doplňku a prieniku a to preto, aby sme mohli využiť **Vetu 4.27** zo Študijného textu. Z tohto dôvodu budeme používať De Morganove pravidlá. Upravíme si výraz $L_1 \circ L_2$ nasledujúcim spôsobom:

$$L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2} = \overline{\overline{L_1 \cup \overline{L_2}}} = \overline{\overline{L_1} \cap \overline{\overline{L_2}}} = \overline{\overline{L_1} \cap L_2} \tag{4}$$

Z **Věty 3.23** vyplýva, že trieda regularných jazykov ze uzavretá voči komplementu, ďalej z **Věty 4.27** vyplýva, že deterministické bezkontextové jazyky sú uzavreté voči prieniku s regularnými jazykami a doplňku [1].
Podľa vyššie uvedených vzťahov môžeme vyhlásiť, že $\overline{\overline{L_1} \cap L_2} \in \mathcal{L}_2$, teda vzťah je **platný**.

1.3 c)

Budeme predpokladať, že

$$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2 \tag{5}$$

je pravdivý vzťah. L_1 a L_2 sú dva jazyky nad abecedou Σ. Vieme, že $L_1 \in \mathcal{L}_3$(regulárny jazyk), môžeme si vyjádriť L_1, ako $L_1 = \Sigma^*$ a potom musí platiť:

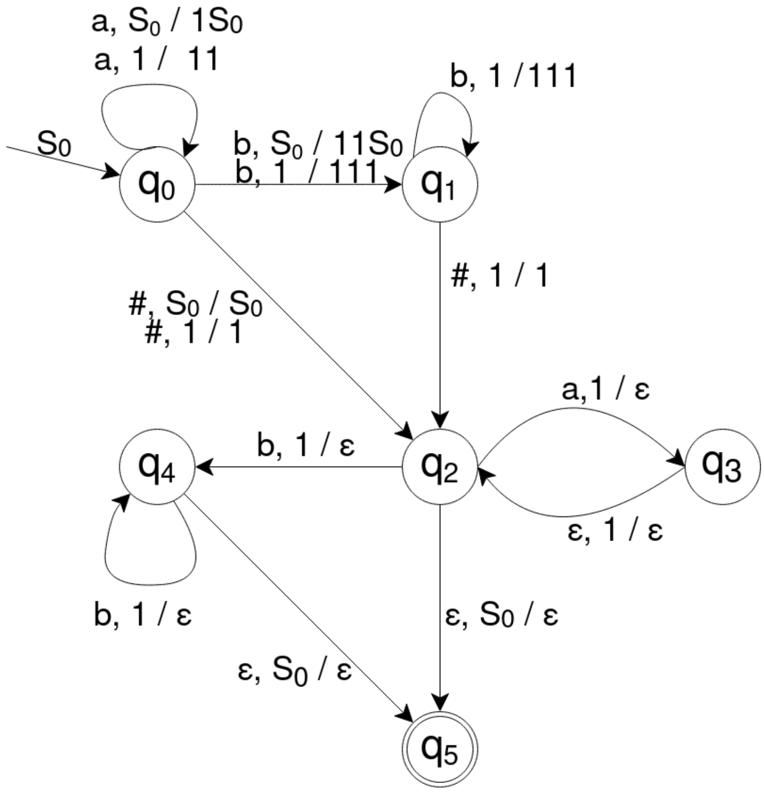
$$\Sigma^* \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2 \qquad \textbf{SPOR} \tag{6}$$

Dostali sme sa k **sporu**, pretože z **Vety 4.24** vyplýva, že bezkontextové jazyky nie sú uzavreté vzhľadom k operácii doplňok [1]. Takže vzťah

$$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2 \tag{7}$$

je **neplatný**.

2 2. úloha



$$M_L = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, S_0, F)$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$$
$$\Sigma = \{a, b, \#\}$$
$$\Gamma = \{S_0, 1\}$$
$$F = \{q_5\}$$
$$\delta :$$

$\delta(q_0, a, S_0) = (q_0, 1S_0)$	$\delta(q_1, b, 1) = (q_1, 111)$	$\delta(q_3, \varepsilon, 1) = (q_2, \varepsilon)$
$\delta(q_0, a, 1) = (q_0, 11)$	$\delta(q_1, \#, 1) = (q_2, 1)$	$\delta(q_4, b, 1) = (q_4, \varepsilon)$
$\delta(q_0, b, S_0) = (q_1, 11S_0)$	$\delta(q_2, a, 1) = (q_3, \varepsilon)$	$\delta(q_4, \varepsilon, S_0) = (q_5, \varepsilon)$
$\delta(q_0, b, 1) = (q_1, 111)$	$\delta(q_2, b, 1) = (q_4, \varepsilon)$	
$\delta(q_0, \#, S_0) = (q_2, S_0)$	$\delta(q_2, \varepsilon, S_0) = (q_5, \varepsilon)$	
$\delta(q_0, \#, 1) = (q_2, 1)$		

3 3. úloha

Jazyk L z predczádzajúceho príkladu:

$$L = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i + 2j = 2k + l\} \tag{8}$$

Zaujíma nás vlastnosť, či jazyk spadá do danej triedy jazykov, je užitočné používať tzv. *Pumping lemmu*. Podľa **Vety 3.18**: Nechť L je nekonečný regulárny jazyk. Pak existuje celočíselná konstanta p > 0 taková, že platí [1]:

$$w \in L \wedge |w| \geq p \Rightarrow w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq p \wedge xy^i z \in L \;\; pro \;\; i \geq 0. \tag{9}$$

Dôkaz sporom

Budeme predpokládať, že jazyk L je regularný, tak potom podľa **Vety 3.18** $\exists p > 0$ taková, že platí: $\forall w \in L : w = a^p \# b^p$ pre ktoré platí $|w| \geq p$ a to platí pretože $2p + 1 \geq p$ a z podmienky $|xy| \leq p$ môže nastať len jeden prípad:

$$\left.\begin{aligned} x &= a^j \\ y &= a^k \\ z &= a^{p-j-k} \# b^p \end{aligned}\right\} \begin{aligned} j \in \mathbb{N} \wedge j &\geq 0, \\ k \in \mathbb{N} \wedge k &> 0, \\ j + k &\leq p \end{aligned}$$

potom náš reťezec $w = xy^i z = a^j a^{k^i} a^{p-j-k} \# b^p = a^{j+k*i+p-j-k} \# b^p = a^{p+i*k-k} \# b^p$ musí patriť do L pre všetky $i \geq 0$. Avšak toto **neplatí**, pretože $p + i * k - k \neq p$ pre všetky $i \geq 0$ (Podmienka môže byť splňena len pre $i = 1$).
$a^{p+i*k-k} \# b^p \notin L$ pre všetky $i \geq 0$. Z toho vyplýva, že jazyk L **neni regularný**.

4 4. úloha

4.1 a)

Algoritmus, ktorý pre daný nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozhodne, či $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$.

Vstup:

Nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Výstup

$$\begin{array}{r|l} \forall w \in L(A) : |w| \geq 5 & \textit{Áno} \\ \textit{Jinak} & \textit{Nie} \end{array}$$

Metóda

X $\leftarrow \{\exists w \in \Sigma^* \;\; \forall i \in \mathbb{N} \land 0 \leq i < 5 \;\mid\; (q_o, w) \vdash^i (q_f, \varepsilon) \land q_f \in F\}$
if $(|X| == 0)$
    return Áno
else
    return Nie

Popis metody slovne
Na začiatku si vytvoríme množinu, ktorá bude obsahovať všetky reťezce ktoré sú prijímané nedeterministickým konečným automatom A a zároveň délka každého reťezca je menšie ako 5. Následne kontrolujeme, či počet retezcov v tejto množine sa rovná nule. Ak áno, tak platí, že $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$, vrátime Áno, inak Nie.

4.2 b)

Demonštrácia

1. Najprv si vytvoríme množinu X, ktorá bude obsahovať všetky reťezce, ktoré majú délku menšiu ako 5.
2. Hovoríme, že vstupný retezec w je prijímán nedeterministickým konečným automatom A, keď $(q_0, w) \vdash^i (q_f, \epsilon) \land q_f \in F$ pre i >= 0 - Študijná opora(Veta 3.3) [1]. Na demonštráciu si zvolíme $i = 4$, teda $(q_0, w_1) \vdash (q_1, w_2) \vdash (q_2, w_3) \vdash (q_3, w_4) \vdash (q_4, \epsilon)$. Jediný možný prípad, ktorý nás dovedie k riešení(koncový stav - f_4) je $(q_0, a) \vdash (q_1, a) \vdash (q_2, a) \vdash (q_3, a) \vdash (q_4, \epsilon)$.
3. Dostali sme reťazec $w = aaaa$. Tento reťazec je prijíman nedeterministickým konečným automatom A.
4. $|w| < 5 \Rightarrow w \in X \Rightarrow |X| \neq 0 \Rightarrow$ algoritmus vrátil "Nie" $\Rightarrow \exists w \in L(A) : |w| < 5$.

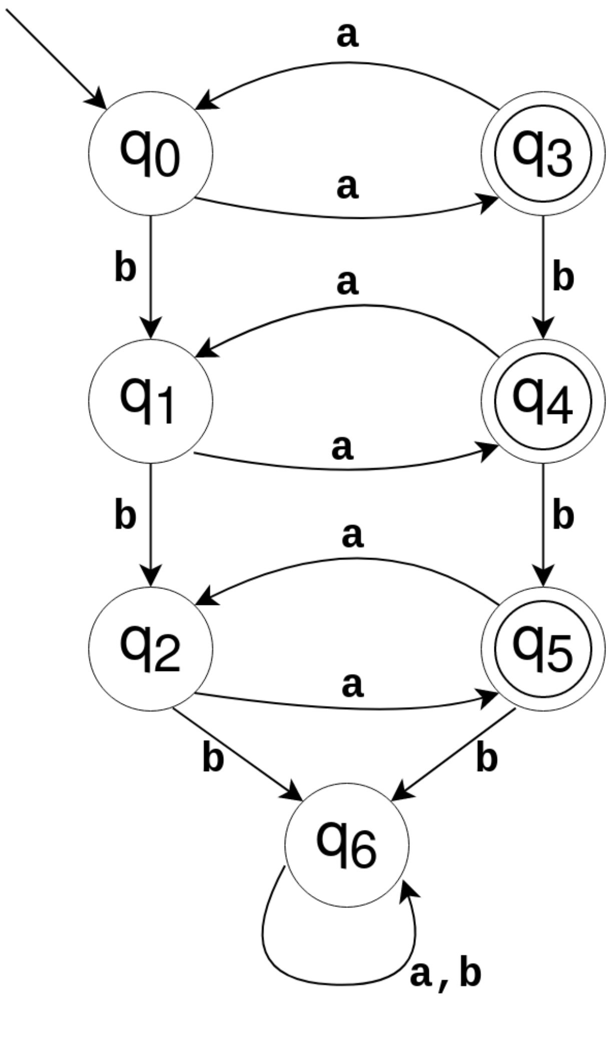
5 5. úloha

$$L = \{w \in \{a,b\}^* \mid \#_a(w)\, mod\, 2 \neq 0 \wedge \#_b(w) \leq 2\} \tag{10}$$

1. Nechť L je lubovolný(nie nutne regulárny) jazyk nad abecedou $\{a, b\}$. Na množine Σ^* nadefinujeme reláciu $\sim_L$ tvz. prefixovú ekvivalenciu pre L takto:

$$\begin{aligned}\forall u, v \in \{a,b\}^* : u \sim_L v \Leftrightarrow \Big(&(\#_a(u) \ \ mod \ \ 2 = \#_a(v) \ \ mod \ \ 2\ )\wedge \\ &\Big((\#_b(u) = 0 \wedge \#_b(v) = 0)\vee \\ &(\#_b(u) = 1 \wedge \#_b(v) = 1)\vee \\ &(\#_b(u) = 2 \wedge \#_b(v) = 2)\vee \\ &(\#_b(u) > 2 \wedge \#_b(v) > 2)\Big)\Big)\end{aligned}$$

Podľa **Vety 3.21** (2.varianta Myhill-Nerodovej vety) počet stavov lubovolného minimálného DKA prijímacieho L je rovno indexu $\sim_L$(Takový DKA existuje práve vtedy, keď je index $\sim_L$ konečný). To znamá, že si zostrojíme minimálny DKA a následne zapíšeme rozklad $\Sigma^* / \sim_L$ a určime počet tried tohoto rozkladu.



2. Rozklad $\Sigma^*/\sim_L$:

$$\begin{aligned}
L^{-1}(q_0) &= \{w | \#_a(w) mod 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 0\} \\
L^{-1}(q_1) &= \{w | \#_a(w) mod 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 1\} \\
L^{-1}(q_2) &= \{w | \#_a(w) mod 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 2\} \\
L^{-1}(q_3) &= \{w | \#_a(w) mod 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 0\} \\
L^{-1}(q_4) &= \{w | \#_a(w) mod 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 1\} \\
L^{-1}(q_5) &= \{w | \#_a(w) mod 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 2\} \\
L^{-1}(q_6) &= \{w | \#_a(w) mod 2 = 0 \vee \#_b(w) > 2\}
\end{aligned}$$

3. Relácia $\sim_L$ má konečný index(7), to znamená že jazyk L je regulárny - vyplýva z **3.21**. Konečný automat, ktorý odpovedá $\sim_L$ je minimálny konečný automat prijímajúci L. Zjednotením tried $L^{-1}(q_3), L^{-1}(q_4)$ a $L^{-1}(q_5)$ vznikne jazyk L.

$$L = L^{-1}(q_3) \cup L^{-1}(q_4) \cup L^{-1}(q_5) \tag{11}$$

6 Literatura

[1] M.Češka, T. Vojnar, A. Smrčka, A. Rogalewicz: *Teoretická informatika - Študijní text.* 2018-9-23, [Online; Navštívené: 2019-10-20].
URL `https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf`