

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ



TIN Teoretická informatika

1. domácí úloha

Obsah

1	1. úloha	3
1.1	a)	3
1.2	b)	3
1.3	c)	3
2	2. úloha	4
3	3. úloha	5
4	4. úloha	6
4.1	a)	6
4.2	b)	6
5	5. úloha	7
6	Literatura	9

1. Uvažujme operaci \circ definovanou následovně: $L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}$. S využitím uzávěrových vlastností dokažte, nebo vyvráťte, následující vztahy:

(a) $L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3$

(b) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2^D \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2^D$

(c) $L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2$

\mathcal{L}_2^D značí třídu deterministických bezkontextových jazyků, \mathcal{L}_2 třídu bezkontextových jazyků a \mathcal{L}_3 třídu regulárních jazyků.

10 bodů

2. Mějme jazyk L nad abecedou $\{a, b, \#\}$ definovaný následovně: $L = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i + 2j = 2k + l\}$

Sestrojte deterministický zásobníkový automat M_L takový, že $L(M_L) = L$.

10 bodů

3. Dokažte, že jazyk L z předchozího příkladu není regulární.

10 bodů

4. Navrhněte algoritmus, který pro daný nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozhodne, zda $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$.

Dále demonstруйте běh tohoto algoritmu na automatu $A = (\{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4\}, \{a\}, \delta, q_0, \{q_4\})$, kde δ je definována jako

$$\delta(q_0, a) = \{q_1, q_0\}, \delta(q_1, a) = \{q_1, q_2\},$$

$$\delta(q_2, a) = \{q_0, q_3\}, \delta(q_3, a) = \{q_0, q_4\},$$

$$\delta(q_4, a) = \{q_0\}.$$

10 bodů

5. Dokažte, že jazyk $L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 2 \neq 0 \wedge \#_b(w) \leq 2\}$ je regulární. Postupujte následovně:

- Definujte \sim_L pro jazyk L .
- Zapište rozklad Σ^* / \sim_L a určete počet tříd tohoto rozkladu.
- Ukažte, že L je sjednocením některých tříd rozkladu Σ^* / \sim_L .

10 bodů

1 1. úloha

1.1 a)

Operácia \circ je definovaná nasledovne:

$$L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2}. \quad (1)$$

Musíme dokázať, že nasledujúci vzťah je platný:

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_3 \quad (2)$$

Z **Věty 3.23** (študijná opora - strana 50.) vyplýva, že trieda regularných jazykov je uzavretá vzhľadom k operáciám sjednocenie a komplementu [1]. Na základe toho môžeme povedať, že

$$L_1, L_2 \in \mathcal{L}_3 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_3 \quad (3)$$

je **platný** vzťah.

1.2 b)

Najprv si musíme vyjádriť sjednocení množín vzťahom pomocou doplnku a prieniku a to preto, aby sme mohli využiť **Vetu 4.27** zo Študijného textu. Z tohto dôvodu budeme používať De Morganove pravidlá. Upravíme si výraz $L_1 \circ L_2$ nasledujúcim spôsobom:

$$L_1 \circ L_2 = L_1 \cup \overline{L_2} = \overline{\overline{L_1} \cap L_2} = \overline{\overline{L_1} \cap \overline{\overline{L_2}}} = \overline{\overline{L_1} \cap L_2} \quad (4)$$

Z **Věty 3.23** vyplýva, že trieda regularných jazykov je uzavretá voči komplementu, ďalej z **Věty 4.27** vyplýva, že deterministické bezkontextové jazyky sú uzavreté voči prieniku s regularnými jazykmi a doplnku [1].

Podľa vyššie uvedených vzťahov môžeme vyhlásiť, že $\overline{\overline{L_1} \cap L_2} \in \mathcal{L}_2$, teda vzťah je **platný**.

1.3 c)

Budeme predpokladať, že

$$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2 \quad (5)$$

je pravdivý vzťah. L_1 a L_2 sú dva jazyky nad abecedou Σ . Vieme, že $L_1 \in \mathcal{L}_3$ (regularný jazyk), môžeme si vyjádriť L_1 , ako $L_1 = \emptyset$ a potom podľa zadania úlohy musí platiť:

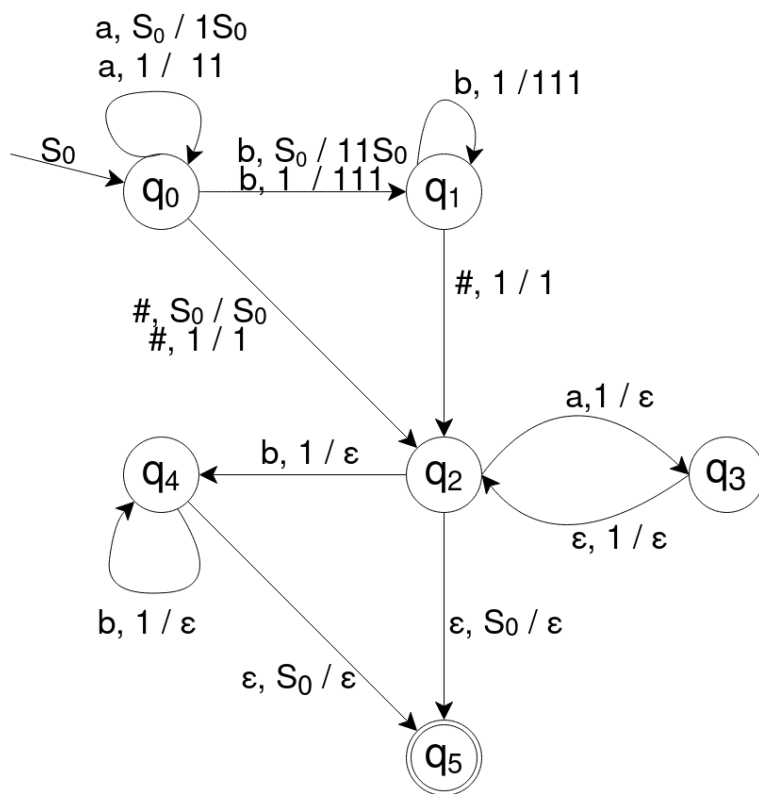
$$\emptyset \cup \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow \overline{L_2} \in \mathcal{L}_2 \quad \textbf{SPOR} \quad (6)$$

Dostali sme sa k **sporu**, pretože z **Vety 4.24** vyplýva, že bezkontextové jazyky nie sú uzavreté vzhľadom k operácii doplnok [1]. Takže vzťah

$$L_1 \in \mathcal{L}_3, L_2 \in \mathcal{L}_2 \Rightarrow L_1 \circ L_2 \in \mathcal{L}_2 \quad (7)$$

je **neplatný**.

2 2. úloha



$$M_L = (Q, \Sigma, \Gamma, \delta, q_0, S_0, F)$$

$$Q = \{q_0, q_1, q_2, q_3, q_4, q_5\}$$

$$\Sigma = \{a, b, \#\}$$

$$\Gamma = \{S_0, 1\}$$

$$F = \{q_5\}$$

$\delta :$

$$\delta(q_0, a, S_0) = (q_0, 1S_0)$$

$$\delta(q_0, a, 1) = (q_0, 11)$$

$$\delta(q_0, b, S_0) = (q_1, 11S_0)$$

$$\delta(q_0, b, 1) = (q_1, 111)$$

$$\delta(q_0, \#, S_0) = (q_2, S_0)$$

$$\delta(q_0, \#, 1) = (q_2, 1)$$

$$\delta(q_1, b, 1) = (q_1, 111)$$

$$\delta(q_1, \#, 1) = (q_2, 1)$$

$$\delta(q_2, a, 1) = (q_3, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, b, 1) = (q_4, \varepsilon)$$

$$\delta(q_2, \varepsilon, S_0) = (q_5, \varepsilon)$$

$$\delta(q_3, \varepsilon, 1) = (q_2, \varepsilon)$$

$$\delta(q_4, b, 1) = (q_4, \varepsilon)$$

$$\delta(q_4, \varepsilon, S_0) = (q_5, \varepsilon)$$

3 3. úloha

Jazyk L z predcádzajúceho príkladu:

$$L = \{a^i b^j \# a^k b^l \mid i + 2j = 2k + l\} \quad (8)$$

Zaujímá nás vlastnosť, či jazyk spadá do danej triedy jazykov, je užitočné používať tzv. *Pumping lemmu*. Podľa **Vety 3.18**: Nechť L je nekonečný regulárny jazyk. Pak existuje celočíselná konstanta $p > 0$ taková, že platí [1]:

$$w \in L \wedge |w| \geq p \Rightarrow w = xyz \wedge y \neq \varepsilon \wedge |xy| \leq p \wedge xy^i z \in L \text{ pro } i \geq 0. \quad (9)$$

Dôkaz sporom

Budeme predpokladať, že jazyk L je regulárny, tak potom podľa **Vety 3.18** $\exists p > 0$ taková, že platí: $\forall w \in L : w = a^p \# b^p$ pre ktoré platí $|w| \geq p$ a to platí pretože $2p + 1 \geq p$ a z podmienky $|xy| \leq p$ môže nastať len jeden prípad:

$$\left. \begin{array}{l} x = a^j \\ y = a^k \\ z = a^{p-j-k} \# b^p \end{array} \right\} \begin{array}{l} j \in \mathbb{N} \wedge j \geq 0, \\ k \in \mathbb{N} \wedge k > 0, \\ j + k \leq p \end{array}$$

potom náš reťazec $w = xy^i z = a^j a^{k \cdot i} a^{p-j-k} \# b^p = a^{j+k \cdot i + p-j-k} \# b^p = a^{p+i \cdot k - k} \# b^p$ musí patriť do L pre všetky $i \geq 0$. Avšak toto **neplatí**, pretože $p + i \cdot k - k \neq p$ pre všetky $i \geq 0$ (Podmienka môže byť splnená len pre $i = 1$).

$a^{p+i \cdot k - k} \# b^p \notin L$ pre všetky $i \geq 0$. Z toho vyplýva, že jazyk L **neni regulárny**.

4 4. úloha

4.1 a)

Algoritmus, ktorý pre daný nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ rozhodne, či $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$.

Vstup:

Nedeterministický konečný automat $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$

Výstup

$\forall w \in L(A) : w \geq 5$	$\left \begin{array}{l} \text{Áno} \\ \text{Jinak} \end{array} \right \begin{array}{l} \text{Nie} \end{array}$
-----------------------------------	--

Metóda

$M \leftarrow \{ \exists w \in \Sigma^* \ \forall i \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq i < 5 \mid (q_0, w) \vdash^i (q_f, \varepsilon) \wedge q_f \in F \}$

if ($|M| == 0$)
 return Áno

else
 return Nie

Popis metódy slovne

Na začiatku si vytvoríme množinu, ktorá bude obsahovať všetky reťazce ktoré sú prijímané nedeterministickým konečným automatom A a zároveň dĺžka každého reťazca je menšie ako 5. Následne kontrolujeme, či počet reťazcov v tejto množine sa rovná nule. Ak áno, tak platí, že $\forall w \in L(A) : |w| \geq 5$, vrátime Áno, inak Nie.

4.2 b)

Demonštrácia

1. Najprv si vytvoríme množinu M , ktorá bude obsahovať všetky reťazce, ktoré majú dĺžku menšiu ako 5.
2. Hovoríme, že vstupný reťazec w je prijímaný nedeterministickým konečným automatom A , keď $(q_0, w) \vdash^i (q_f, \varepsilon) \wedge q_f \in F$ pre $i \geq 0$ - Študijná opora (Veta 3.3) [1]. Na demonštráciu si zvolíme $i = 4$, teda $(q_0, w_1) \vdash (q_1, w_2) \vdash (q_2, w_3) \vdash (q_3, w_4) \vdash (q_4, \varepsilon)$. Jediný možný prípad, ktorý nás dovedie k riešeniu (koncový stav - f_4) je $(q_0, a) \vdash (q_1, a) \vdash (q_2, a) \vdash (q_3, a) \vdash (q_4, \varepsilon)$.
3. Dostali sme reťazec $w = aaaa$. Tento reťazec je prijímaný nedeterministickým konečným automatom A .
4. $|w| < 5 \Rightarrow w \in M \Rightarrow |X| \neq 0 \Rightarrow$ algoritmus vrátil "Nie" $\Rightarrow \exists w \in L(A) : |w| < 5$.

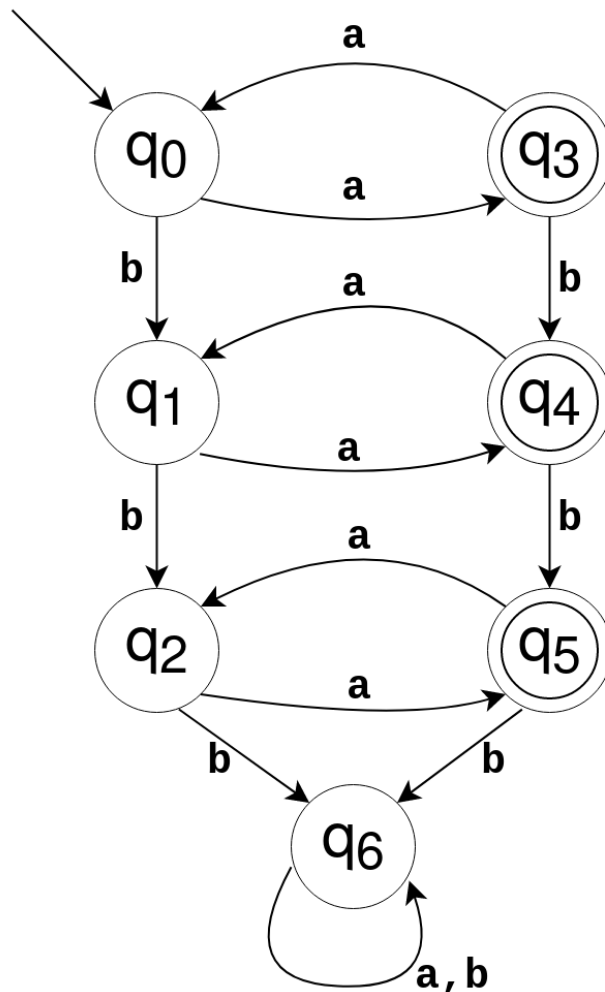
5 5. úloha

$$L = \{w \in \{a, b\}^* \mid \#_a(w) \bmod 2 \neq 0 \wedge \#_b(w) \leq 2\} \quad (10)$$

1. Nechť L je ľubovoľný (nie nutne regulárny) jazyk nad abecedou $\{a, b\}$. Na množine $\{a, b\}^*$ naďefinujeme reláciu \sim_L tvz. prefixovú ekvivalenciu pre L takto:

$$\forall u, v \in \{a, b\}^* : u \sim_L v \Leftrightarrow \left((\#_a(u) \bmod 2 = \#_a(v) \bmod 2) \wedge \right. \\ \left. \begin{aligned} &((\#_b(u) = 0 \wedge \#_b(v) = 0) \vee \\ &(\#_b(u) = 1 \wedge \#_b(v) = 1) \vee \\ &(\#_b(u) = 2 \wedge \#_b(v) = 2) \vee \\ &(\#_b(u) > 2 \wedge \#_b(v) > 2)) \end{aligned} \right)$$

Podľa **Vety 3.21** (2.varianta Myhill-Nerodovej vety) počet stavov ľubovoľného minimálneho DKA prijímacieho L je rovno indexu \sim_L (Takový DKA existuje práve vtedy, keď je index \sim_L konečný). To znamená, že si zostrojíme minimálny DKA a následne zapíšeme rozklad Σ^* / \sim_L a určíme počet tried tohoto rozkladu.



2. Rozklad Σ^* / \sim_L :

$$\begin{aligned}
L^{-1}(q_0) &= \{w | \#_a(w) \bmod 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 0\} \\
L^{-1}(q_1) &= \{w | \#_a(w) \bmod 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 1\} \\
L^{-1}(q_2) &= \{w | \#_a(w) \bmod 2 = 0 \wedge \#_b(w) = 2\} \\
L^{-1}(q_3) &= \{w | \#_a(w) \bmod 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 0\} \\
L^{-1}(q_4) &= \{w | \#_a(w) \bmod 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 1\} \\
L^{-1}(q_5) &= \{w | \#_a(w) \bmod 2 = 1 \wedge \#_b(w) = 2\} \\
L^{-1}(q_6) &= \{w | (\#_b(w) > 2) \wedge (\#_a(w) \bmod 2 = 0 \vee \#_a(w) \bmod 2 = 1)\}
\end{aligned}$$

3. Relácia \sim_L má konečný index(7), to znamená že jazyk L je regulárny - vyplýva z **3.20** a **3.21**. Konečný automat, ktorý odpovedá \sim_L je minimálny konečný automat prijímajúci L . Zjednotením tried $L^{-1}(q_3), L^{-1}(q_4)$ a $L^{-1}(q_5)$ vznikne jazyk L .

$$L = L^{-1}(q_3) \cup L^{-1}(q_4) \cup L^{-1}(q_5) \quad (11)$$

6 Literatura

- [1] M.Češka, T. Vojnar, A. Smrčka, A. Rogalewicz: *Teoretická informatika - Študijní text*. 2018-9-23, [Online; Navštívené: 2019-10-20].
URL <https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf>