

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ



TIN Teoretická informatika

3. domácí úloha

Obsah

1	1. úloha	3
2	2. úloha	4
3	3. úloha	6
4	4. úloha	7
5	Literatura	9

(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Pomocí počátečních funkcí a operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze vyjádřete funkci počítající odmocninu (zaokrouhlenou dolů na celá čísla):

$$\text{sqrt} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{sqrt}(x) = z \text{ takové, že } z^2 \leq x \wedge (z+1)^2 > x.$$

Je možné použít funkce $\text{plus}(x, y)$, $\text{mult}(x, y)$, $\text{monus}(x, y)$ a $\text{eq}(x, y)$ definované v přednáškách. Kromě nich však nepoužívejte žádné další funkce zavedené na přednáškách mimo funkce počáteční. Nepoužívejte zjednodušenou syntaxi zápisu funkcí – dodržte přesně definiční tvar operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze.

15 bodů

2. Mějme následující funkce:

$$f(n) = \sqrt{2}n^3$$

$$g(n) = 10000n^2 + 500n + 211.$$

Dokažte, že $O(g(n)) \subset O(f(n))$.

Pozn.: Nezapomeňte, že důkaz má dvě části: (i) $O(g(n)) \subseteq O(f(n))$ a (ii) $O(g(n)) \neq O(f(n))$

10 bodů

3. Teta Květa stojí před regálem se zeleninou a nehýbá se, protože má těžký rozhodovací problém. Potřebuje sníst co nejvíce vitamínu C, aby ji přešla chřipka. Každý druh zeleniny je charakteristický obsahem vitamínu C na kilo a cenou za kilo. Teta se snaží přijít na to, jestli je možné nakoupit zeleninu za obnos O v její peněženke tak, aby úhrn vitamínu C byl alespoň C . Kromě toho s každým kilem zeleniny přidá zelinář deset deka brokolice zdarma, s obsahem B vitamínu C na kilo.

Formulujte problém tety Květy jako rozhodovací problém, a dokažte, že je NP-úplný. Těžkost dokažte redukcí z některého problému uvedeného v odstavci „NP-complete problems“ zde:

https://en.wikipedia.org/wiki/NP-completeness#NP-complete_problems

Z dálky na tetu volá synovec Alan, ať nezoufá, že to vyřeší za chvíli (t.j., v polynomiálním čase), pomocí jakéhosi psacího stroje vlastní výroby s nekonečnou páskou. Co to znamená pro lidstvo?

15 bodů

4. Modelujte následující kritický systém Petriho sítí. Namalujte ji a zapište formálně ve shodě s definicí.

Převozník chce převézt z jednoho břehu na druhý hlávku zelí, kozu a vlka. Do loďky s sebou může vzít buď zelí, nebo kozu, nebo vlka, ale víc se tam nevejde. Nechá-li na břehu hlávku zelí a kozu, koza zelí sežere. Nechá-li na břehu kozu a vlka, pak vlk sežere kozu. Jakým způsobem musí převozník postupovat, aby nedošlo k žádné škodě?

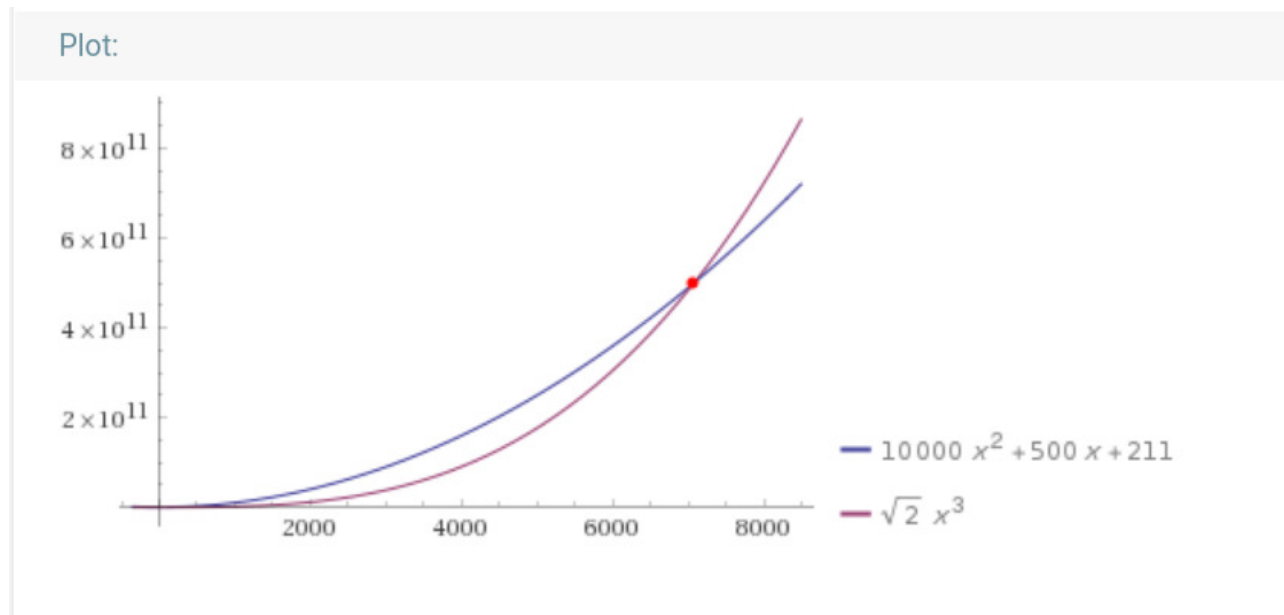
Snažte se o přehlednost a pochopitelnost modelu. Místa vhodně pojmenujte a síť nakreslete přehledně. (příklad ze sbírky úloh Alkuina z Yorku, Úlohy k bystření mladíků, z roku cca 735-804)

10 bodů

1 1.úloha

2 2.úloha

Zostrojme si graf funkcie pre $f(n) = \sqrt{2}n^3$ a pre $g(n) = 10000n^2 + 500n + 211$.



Obrázek 1: $f(x)$ a $g(x)$

Diskriminant D kubickej rovnice $\sqrt{2}n^3 - 10000n^2 - 500n - 211 = 0$ vypočítame podľa vzťahu:

$$\begin{aligned}
 D &= 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 \\
 D &= 18 * \sqrt{2} * (-10000) * (-500) * (-211) \\
 &\quad - 4 * (-10000)^3 * (-211) \\
 &\quad + (-10000)^2 * (-500)^2 \\
 &\quad - 4 * \sqrt{2} * (-500)^3 \\
 &\quad - 27 * \sqrt{2}^2 * (-211)^2 \\
 D &= -8.1902 * 10^{14}
 \end{aligned}$$

$D < 0$, rovnica má jeden reálny koreň.

Na obrázku 1 vidíme priesečník grafov dvoch funkcií. Riešením rovnice $f(x) = g(x)$ získame x-ové súradnice priesečníkov grafov,¹ ich dosadením do predpisu funkcie získame y-ové súradnice.

$$\begin{aligned}
 f(n) &= g(n) \\
 \sqrt{2}n^3 - 10000n^2 - 500n - 211 &= 0 \\
 n &= 7071.1
 \end{aligned}$$

¹Nástroj na výpočet kubickej rovnice: <https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=3f4366aeb9c157cf9a30c90693eafc55>

Dôkaz:

1. Z výsledkov rovnice a z grafu funkcií (Obr. 1) vyplíva, že od $n = 7072$ je $f(n) > g(n)$. Obidve funkcie majú rovnaký definičný obor, teda môžeme povedať, že $O(g(n)) \subseteq O(f(n))$.
2. Vieme, že výsledkom rovnice je len jeden jediný reálny koreň ($D < 0$), a je naprosto zrejmé, že od $n = 7072$ sa tieto dve funkcie nikde inde nerovnajú, tak potom $O(g(n)) \neq O(f(n))$.

Teda:

$$O(g(n)) \subseteq O(f(n)) \wedge O(g(n)) \neq O(f(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subset O(f(n)).$$

3 3.úloha

4 4.úloha

Test [1]

5 Literatura

- [1] M.Češka, T. Vojnar, A. Smrčka, A. Rogalewicz: *Teoretická informatika - Študijní text*. 2018-9-23, [Online; Navštívené: 2019-10-20].
URL <https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf>