

FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ



TIN Teoretická informatika

3. domácí úloha

Obsah

1	1. úloha	3
2	2. úloha	4
3	3. úloha	6
4	4. úloha	8
5	Literatura	12

(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Pomocí počátečních funkcí a operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze vyjádřete funkci počítající odmocninu (zaokrouhlenou dolů na celá čísla):

$$\text{sqrt} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ sqrt}(x) = z \text{ takové, že } z^2 \leq x \wedge (z+1)^2 > x.$$

Je možné použít funkce $\text{plus}(x, y)$, $\text{mult}(x, y)$, $\text{monus}(x, y)$ a $\text{eq}(x, y)$ definované v přednáškách. Kromě nich však nepoužívejte žádné další funkce zavedené na přednáškách mimo funkce počáteční. Nepoužívejte zjednodušenou syntaxi zápisu funkcí – dodržte přesně definiční tvar operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze.

15 bodů

2. Mějme následující funkce:

$$f(n) = \sqrt{2}n^3$$

$$g(n) = 10000n^2 + 500n + 211.$$

Dokažte, že $O(g(n)) \subset O(f(n))$.

Pozn.: Nezapomeňte, že důkaz má dvě části: (i) $O(g(n)) \subseteq O(f(n))$ a (ii) $O(g(n)) \neq O(f(n))$

10 bodů

3. Teta Květa stojí před regálem se zeleninou a nehýbá se, protože má těžký rozhodovací problém. Potřebuje sníst co nejvíce vitamínu C, aby ji přešla chřipka. Každý druh zeleniny je charakteristický obsahem vitamínu C na kilo a cenou za kilo. Teta se snaží přijít na to, jestli je možné nakoupit zeleninu za obnos O v její peněženke tak, aby úhrn vitamínu C byl alespoň C . Kromě toho s každým kilem zeleniny přidá zelinář deset deka brokolice zdarma, s obsahem B vitamínu C na kilo.

Formulujte problém tety Květy jako rozhodovací problém, a dokažte, že je NP-úplný. Těžkost dokažte redukcí z některého problému uvedeného v odstavci „NP-complete problems“ zde:

https://en.wikipedia.org/wiki/NP-completeness#NP-complete_problems

Z dálky na tetu volá synovec Alan, ať nezoufá, že to vyřeší za chvíli (t.j., v polynomiálním čase), pomocí jakéhosi psacího stroje vlastní výroby s nekonečnou páskou. Co to znamená pro lidstvo?

15 bodů

4. Modelujte následující kritický systém Petriho sítí. Namalujte ji a zapište formálně ve shodě s definicí.

Převozník chce převézt z jednoho břehu na druhý hlávku zelí, kozu a vlka. Do loďky s sebou může vzít buď zelí, nebo kozu, nebo vlka, ale víc se tam nevejde. Nechá-li na břehu hlávku zelí a kozu, koza zelí sežere. Nechá-li na břehu kozu a vlka, pak vlk sežere kozu. Jakým způsobem musí převozník postupovat, aby nedošlo k žádné škodě?

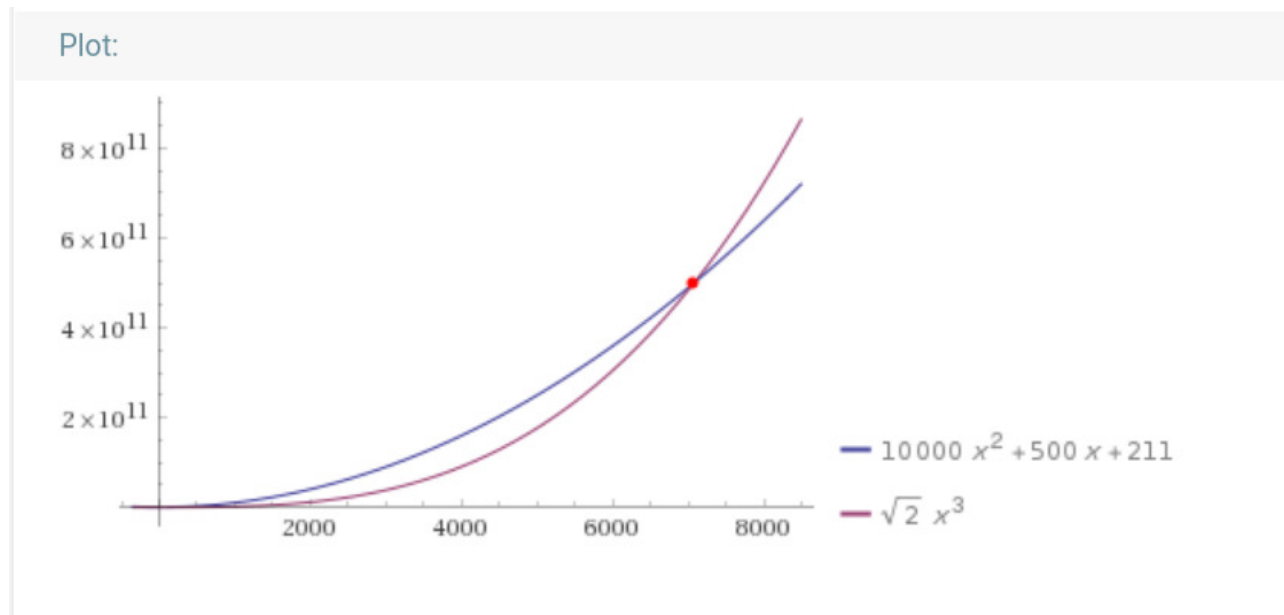
Snažte se o přehlednost a pochopitelnost modelu. Místa vhodně pojmenujte a síť nakreslete přehledně. (příklad ze sbírky úloh Alkuina z Yorku, Úlohy k bystření mladíků, z roku cca 735-804)

10 bodů

1 1.úloha

2 2.úloha

Zostrojme si graf funkcie pre $f(n) = \sqrt{2}n^3$ a pre $g(n) = 10000n^2 + 500n + 211$.



Obrázek 1: $f(x)$ a $g(x)$

Diskriminant D kubickej rovnice $\sqrt{2}n^3 - 10000n^2 - 500n - 211 = 0$ vypočítame podľa vzťahu:

$$\begin{aligned}
 D &= 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 \\
 D &= 18 * \sqrt{2} * (-10000) * (-500) * (-211) \\
 &\quad - 4 * (-10000)^3 * (-211) \\
 &\quad + (-10000)^2 * (-500)^2 \\
 &\quad - 4 * \sqrt{2} * (-500)^3 \\
 &\quad - 27 * \sqrt{2}^2 * (-211)^2 \\
 D &= -8.1902 * 10^{14}
 \end{aligned}$$

$D < 0$, rovnica má jeden reálny koreň.

Na obrázku 1 vidíme priesečník grafov dvoch funkcií. Riešením rovnice $f(x) = g(x)$ získame x-ové súradnice priesečníkov grafov,¹ ich dosadením do predpisu funkcie získame y-ové súradnice.

$$\begin{aligned}
 f(n) &= g(n) \\
 \sqrt{2}n^3 - 10000n^2 - 500n - 211 &= 0 \\
 n &= 7071.1
 \end{aligned}$$

¹Nástroj na výpočet kubickej rovnice: <https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=3f4366aeb9c157cf9a30c90693eafc55>

Dôkaz:

1. Z výsledkov rovnice a z grafu funkcií (Obr. 1) vyplíva, že od $n = 7072$ je $f(n) > g(n)$. Obidve funkcie majú rovnaký definičný obor, teda môžeme povedať, že $O(g(n)) \subseteq O(f(n))$.
2. Vieme, že výsledkom rovnice je len jeden jediný reálny koreň ($D < 0$), a je naprosto zrejmé, že od $n = 7072$ sa tieto dve funkcie nikde inde nerovnajú, tak potom $O(g(n)) \neq O(f(n))$.

Teda:

$$O(g(n)) \subseteq O(f(n)) \wedge O(g(n)) \neq O(f(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subset O(f(n)).$$

3 3.úloha

Pre dôkaz ťažkosti problem tety kvety použijeme polynomiálnu redukciu z problému "Subset sum problem", ktorý je mimochodom NP úplny problem.

Tento problem si vyjádrame zápisom:

$$\sum_{i=1}^n (c_i + B) * x_i \geq C \wedge \sum_{i=1}^n o_i * x_i \leq 0 \text{ pre } x_i \in \{0, 1\}, \text{ kde}$$

x_i je informácia, či sa (ne)bude táto položka nachádzať v nákupnom košíku,

o_i je cena 1 kg danej zeleniny,

n je veľkosť množiny (do toho sa započíta celková hmotnosť zeleniny v obchode okrem brokolice)

C vyjadruje minimálne požadované množstvo vitamínov C

B množstvo vitamínu C v 0,1kg brokolice

c_i je množstvo vitamínu C v 1 kg danej zeleniny

i je pomocná premenná

Problem subset sum obecne: Je daná množina prirodzených čísel $M = \{n_1, n_2, \dots, n_r\}$ a číslo k . Rozhodovací problém sa spýta, či je možné vybrať z M podmnožinu N tak, že súčet čísel N je rovno k .

2

Problem formulujeme nasledujúcim zápisom:

$$\sum_{i=1}^n v_i * y_i = k \text{ pre } y_i \in \{0, 1\}$$

Nasleduje redukcia Subset sum problemu na Problem tety kvety. V prvom rade vytvoríme instanciu problému tety kvety nasledujúcim spôsobom:

$$(c_i + B) = o_i = v_i \\ C = O = k$$

Túto redukciu bude vykonať úplny DTS, jeho zložitosť bude iste spadať do triedy $O(n^l)$. Odpoveď Áno/Nie na vytvorený problem tety kvety potom súvisí s odpoveďou na pôvodný problem:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (c_i + B)x_i \geq C &\iff \sum_{i=1}^n v_i * x_i \geq k \\ \sum_{i=1}^n o_i * x_i \leq 0 &\iff \sum_{i=1}^n v_i * x_i \leq k \end{aligned} \right\} \iff \sum_{i=1}^n v_i * x_i = k \text{ pre } x_i \in \{0, 1\}$$

To znamená, že keď najdeme vektor x takový, ktorý vyhovuje problému tety kvety, potom ten istý vektor x je aj riešením **subset problemu** a zároveň odpoveď zo **subset problemu** je Áno. Inak (ak sme takýto vektor nenašli) - neexistuje podmnožina pre danú množinu, kde súčet by bol rovno číslu k , dostaneme odpoveď Nie.

²Subset sum problem: <https://www.algoritmny.net/article/7682/Subset-sum-%E2%86%92-Deleni-koristi>

Správnosť odpovedí ukážeme ukážeme v polynomiálnom čase - sčítame obsah vitamínu C, ceny a hodnoty, ktoré potom budeme porovnávať so stanovenými hranicami.

Pre ľudstvo znamená:

1. Stroj v batohu je deterministický - Stroj v batohu dokáže vyriešiť v polynomiálnom čase problém s exponenciálnou zložitosťou: $P = NP$. Toto zistenie by viedlo k nájdeniu rýchlejších algoritmov na vyriešenie NP úplných úloh.
2. Stroj v batohu je NEdeterministický - Alan použil tzv. Turingov stroj. Definíciou tohto teoretického stroja ukázal univerzálny prostriedok na vyjadrenie rôznych algoritmov. Pomocou tohoto nedeterministického stroja je možné vyriešiť aj problém s exponenciálnou zložitosťou v polynomiálnom čase. Ak existuje správne riešenie, tak sa nachádza medzi všetkými nedeterministickými možnými riešeniami, ktoré uhádne a potom stačí overiť jeho správnosť.

4 4.úloha

Jednoduchá reprezentácia komplexného systému si vyžaduje rozdelenie zadania úlohy na menšie časti. Z tohto dôvodu som sa rozhodol rozdeliť riešenie danej úlohy na 4 časti, ktoré sú nasledujúce:

1. Prechod z ľavej strany na pravú (Obrázok 2)
2. Prechod z pravej strany na ľavú (Obrázok 3)
3. Vlk zožerie kozu/koza zožerie zeli na ľavej strane, keď prievozník je na pravej strane (Obrázok 4)
4. Vlk zožerie kozu/koza zožerie zeli na pravej strane, keď prievozník je na ľavej strane (Obrázok 5)

Výsledná Petriho sieť vyzerá nasledovne[1]:

$$N = (P, T, F, W, K, M_0)$$

Množina miest **P**:

- **vlk1** - vlk sa nachádza na ľavej strane, **vlk2** - vlk sa nachádza na pravej strane
- **koza1** - koza sa nachádza na ľavej strane, **koza2** - koza sa nachádza na pravej strane
- **zeli1** - zeli je na ľavej strane, **zeli2** - zeli je na pravej strane
- **prievozník1** - prievozník je na ľavej strane, **prievozník2** - prievozník je na pravej strane

Množina priechodov **T**:

- **vlk_na_lodi1** - vlk prejde z ľavej strany na pravú, **vlk_na_lodi2** - vlk prejde z pravej strany na ľavú
- **koza_na_lodi1** - koza prejde z ľavej strany na pravú, **koza_na_lodi2** - koza prejde z pravej strany na ľavú
- **zeli_na_lodi1** - zeli prejde z ľavej strany na pravú, **zeli_na_lodi2** - zeli prejde z pravej strany na ľavú
- **prievozník_na_lodi1** - prievozník prejde z ľavej strany na pravú, **prievozník_na_lodi2** - prievozník prejde z pravej strany na ľavú
- **vlk+koza 1** - vlk zožerie kozu na ľavej strane, **vlk+koza 2** - vlk zožerie kozu na pravej strane
- **koza+zeli 1** - koza zožerie zeli na ľavej strane, **koza+zeli 2** - koza zožerie zeli na pravej strane

Toková relácia **F** $\subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$:

- (vlk1, vlk_na_lodi1), (vlk_na_lodi1, vlk2), (koza1, koza_na_lodi1), (koza_na_lodi1, koza2), (zeli1, zeli_na_lodi1), (zeli_na_lodi1, zeli2), (prievozník1, prievozník_na_lodi1), (prievozník_na_lodi1, prievozník2)
- (vlk2, vlk_na_lodi2), (vlk_na_lodi2, vlk1), (koza2, koza_na_lodi2), (koza_na_lodi2, koza1), (zeli2, zeli_na_lodi2), (zeli_na_lodi2, zeli1), (prievozník2, prievozník_na_lodi2), (prievozník_na_lodi2, prievozník1)

- $(\text{vlk1}, \text{vlk}+\text{koza } 1), (\text{vlk}+\text{koza } 1, \text{vlk1}), (\text{koza1}, \text{vlk}+\text{koza } 1), (\text{koza1}, \text{koza}+\text{zeli } 1), (\text{koza} + \text{zeli } 1, \text{koza1}), (\text{zeli1}, \text{koza}+\text{zeli } 1), (\text{vlk}+\text{koza } 1, \text{prievoznik2}), (\text{prievoznik2}, \text{vlk}+\text{koza } 1), (\text{koza}+\text{zeli } 1, \text{prievoznik2}), (\text{prievoznik2}, \text{koza}+\text{zeli } 1)$
- $(\text{prievoznik1}, \text{vlk}+\text{koza } 2), (\text{vlk}+\text{koza } 2, \text{prievoznik1}), (\text{prievoznik1}, \text{koza}+\text{zeli } 2), (\text{koza}+\text{zeli } 2, \text{prievoznik1}), (\text{vlk}+\text{koza } 2, \text{vlk2}), (\text{vlk2}, \text{vlk}+\text{koza } 2), (\text{koza2}, \text{vlk}+\text{koza } 2), (\text{koza}+\text{zeli } 2, \text{koza}), (\text{koza2}, \text{koza}+\text{zeli } 2), (\text{zeli2}, \text{koza}+\text{zeli } 2)$

$\mathbf{W} : F \rightarrow \mathbb{N} \setminus \{0\}$ je ohodnocení hran grafu určující kladnou váhu každé hrany siete

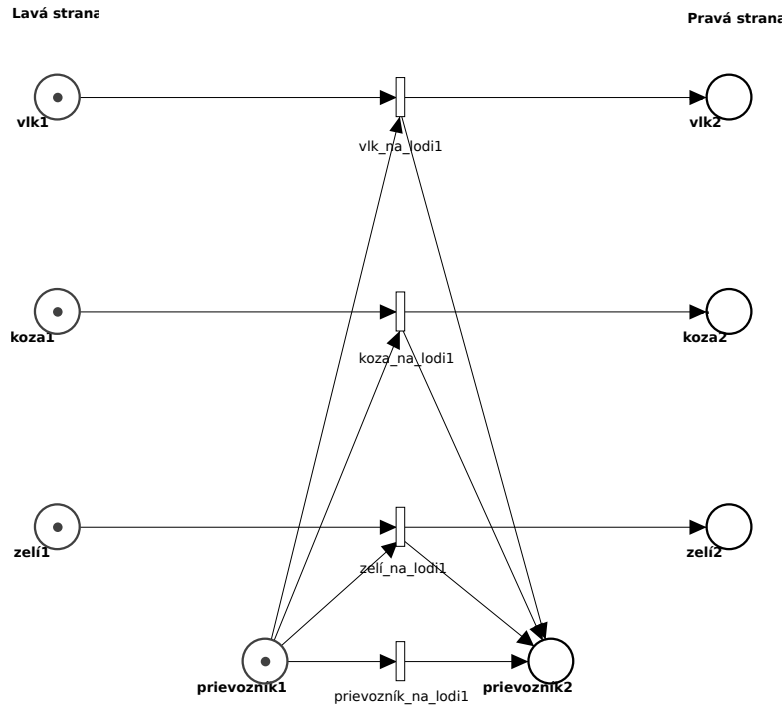
- Každá hrana má ohodnocenie **1**.

$\mathbf{K} : P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{w\}$ je zobrazenie určujúci kapacitu každého miesta

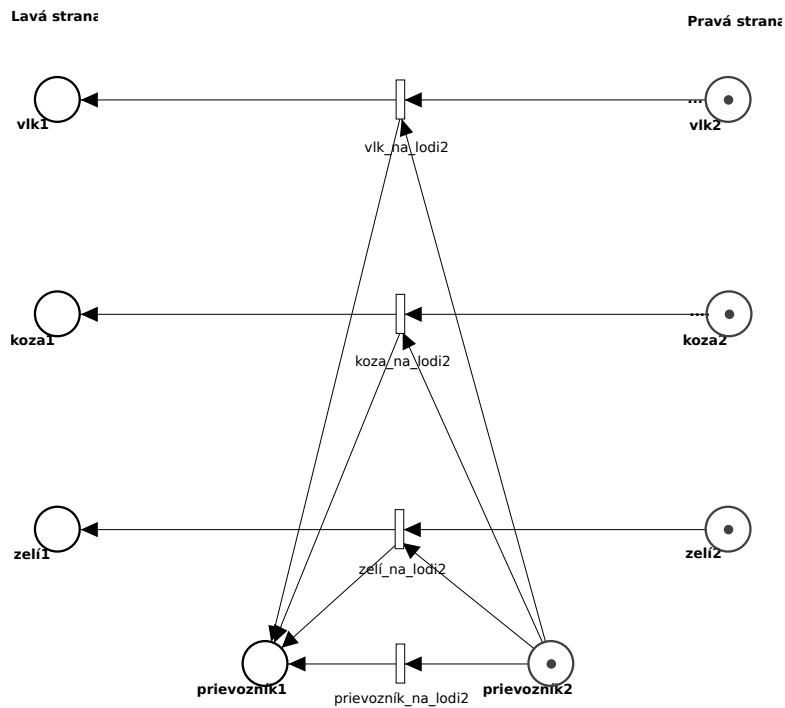
- Kapacita každého miesta je **1** (maximálne 1 vlk, 1 koza, 1 zeli, 1 prievozník)

$\mathbf{M}_0 : P \rightarrow \mathbb{N} \cup \{w\}$ je počiatkové značenie miest Petriho siete také, že $\forall p \in P : M_0(p) \leq K(p)$

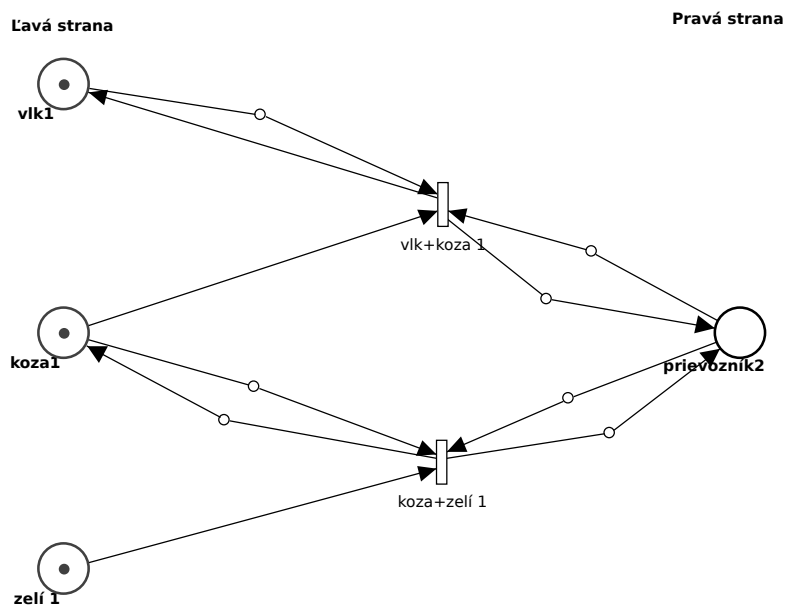
1. Počiatková konfigurácia jednotlivých značiek závisí na zadání úlohy (z čoho mimochodem nie je jasné, že na ktorej strane sa nachádzajú jednotlivé entity na začiatku). Defaultná konfigurácia je taková, že každá entita z množiny entít vlk, koza, zeli, prievozník je na ľavej strane.



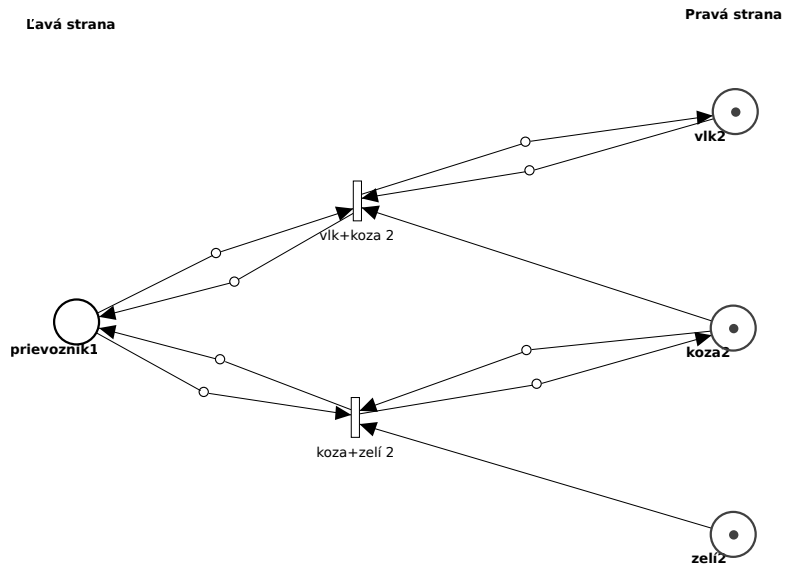
Obrázek 2: Ľavá strana \Rightarrow Pravá strana



Obrázek 3: Pravá strana \Rightarrow Ľavá strana



Obrázek 4: Koza zožerie zeli alebo vlk zožerie kozu na ľavej strane, keď prievozník je na pravej strane



Obrázek 5: Koza zožerie zeľ alebo vlk zožerie kozu na pravej strane, keď prievozník je na ľavej strane

5 Literatura

- [1] M.Češka, T. Vojnar, A. Smrčka, A. Rogalewicz: *Teoretická informatika - Študijní text*. 2018-9-23, [Online; Navštívené: 2019-10-20].
URL <https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf>