Fakulta informačních technologií
Vysoké učení technické v Brně

TIN
Teoretická informatika

3. domácí úloha

Attila Lakatos (xlakat01) 2. ledna 2020

Obsah

Teoretická informatika (TIN) – 2019/2020
Úkol 3
(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Pomocí počátečních funkcí a operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze vyjádřete funkci počítající odmocninu (zaokrouhlenou dolů na celá čísla):

   $$sqrt : \mathbb{N} \to \mathbb{N},\ sqrt(x) = z \text{ takové, že } z^2 \leq x \ \wedge\ (z+1)^2 > x.$$

   Je možné použít funkce $plus(x, y)$, $mult(x, y)$, $monus(x, y)$ a $eq(x, y)$ definované v přednáškách. Kromě nich však nepoužívejte žádné další funkce zavedené na přednáškách mimo funkce počáteční. Nepoužívejte zjednodušenou syntaxi zápisu funkcí – dodržte přesně definiční tvar operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze.

   15 bodů

2. Mějme následující funkce:
   $f(n) = \sqrt{2}n^3$
   $g(n) = 10000n^2 + 500n + 211.$

   Dokažte, že $O(g(n)) \subset O(f(n))$.

   Pozn.: Nezapomeňte, že důkaz má dvě části: (i) $O(g(n)) \subseteq O(f(n))$ a (ii) $O(g(n)) \neq O(f(n))$

   10 bodů

3. Teta Květa stojí před regálem se zeleninou a nehýbá se, protože má těžký rozhodovací problém. Potřebuje sníst co nejvíce vitamínu C, aby ji přešla chřipka. Každý druh zeleniny je charakteristický obsahem vitamínu C na kilo a cenou za kilo. Teta se snaží přijít na to, jestli je možné nakoupit zeleninu za obnos O v její peněžence tak, aby úhrn vitamínu C byl alespoň C. Kromě toho s každým kilem zeleniny přidá zelinář deset deka brokolice zdarma, s obsahem B vitamínu C na kilo.

   Formulujte problém tety Květy jako rozhodovací problém, a dokažte, že je NP-úplný. Těžkost dokažte redukcí z některého problému uvedeného v odstavci „NP-complete problems" zde:
   `https://en.wikipedia.org/wiki/NP-completeness#NP-complete_problems`

   Z dálky na tetu volá synovec Alan, ať nezoufá, že to vyřeší za chvíli (t.j., v polynomiálním čase), pomocí jakéhosi psacího stroje vlastní výroby s nekonečnou páskou. Co to znamená pro lidstvo?

   15 bodů

4. Modelujte následující kritický systém Petriho sítí. Namalujte ji a zapište formálně ve shodě s definicí.

   Převozník chce převézt z jednoho břehu na druhý hlávku zelí, kozu a vlka. Do loďky s sebou může vzít buď zelí, nebo kozu, nebo vlka, ale víc se tam nevejde. Nechá-li na břehu hlávku zelí a kozu, koza zelí sežere. Nechá-li na břehu kozu a vlka, pak vlk sežere kozu. Jakým způsobem musí převozník postupovat, aby nedošlo k žádné škodě?

   Snažte se o přehlednost a pochopitelnost modelu. Místa vhodně pojmenujte a síť nakreslete přehledně.
   (příklad ze sbírky úloh Alkuina z Yorku, Úlohy k bystření mladíků, z roku cca 735-804)

   10 bodů

1 1.úloha

Nasledujúce primitivne rekurzivné funkcie boli prevzaté zo študijnej opory[1]:

- $plus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $plus(x, y) = \pi_1^1(x)$
  $plus(x, y + 1) = \sigma \circ \pi_3^3(x, y, plus(x, y))$
- $mult : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $mult(x, 0) = K_0^1(x)$
  $mult(x, y + 1) = plus(x, mult(x, y))$
- $monus : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $monus(x, 0) = \pi_1^1(x)$
  $monus(x, y + 1) = pred(monus(x, y))$
- $eq : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $eq(x, y) = monus \circ (K_1^2 \times (plus \circ ((monus \circ (\pi_2^2 \times \pi_1^2)) \times monus \circ (\pi_1^2 \times \pi_2^2))))$
- $\neg eq : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
  $\neg eq(x, y) = monus \circ (K_1^2 \times eq)$

Nulová funkcia: $\xi() = 0$

Projekcia: $\pi_k^n : \mathbb{N}^n \to \mathbb{N}$

Riešenie:

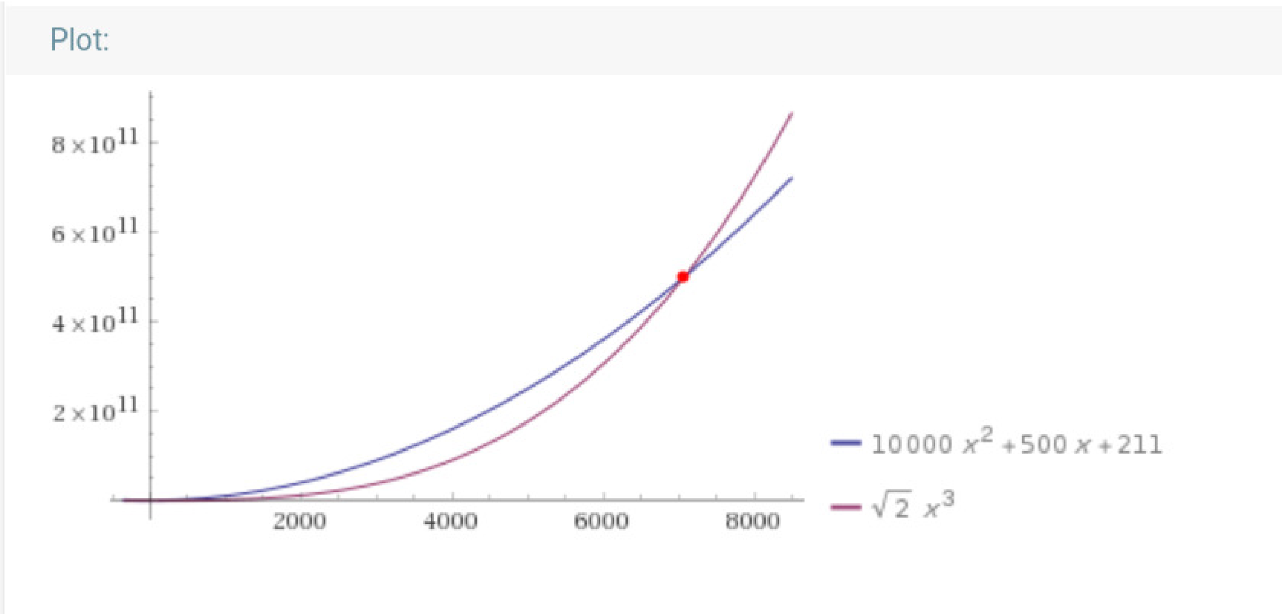
$sqrt : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$sqrt(x) = f \times (\pi_1^1 \times \pi_1^1)$

$f : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$f(x, 0) = 0$
$f(x, z + 1) = plus \circ (mult \circ (f(x, z) \times \neg eq \circ (check(x, z) \times K_1^1)) \times (mult \circ (\pi_1^2 \times check(x, z))))$

$check : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$
$check(x, z) = mult \circ (eq \circ (monus \circ (exp(z) \times x) \times \xi()) \times \neg eq \circ (monus \circ (exp(plus \circ (z \times K_1^1)) \times x)))$
Ľavá časť funkcie check(x,z) skontroluje podmienku $z^2 \leq x$, pričom pravá časť $(z + 1)^2 \geq x$

2 2.úloha

Zostrojme si graf funkcie pre $f(n) = \sqrt{2}n^3$ a pre $g(n) = 10000n^2 + 500n + 211$.



Obrázek 1: f(x) a g(x)

Diskriminant D kubickej rovnice $\sqrt{2}n^3 - 10000n^2 - 500n - 211 = 0$ vypočítame podľa vzťahu:

$$
\begin{aligned}
D &= 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 \\
D &= 18 * \sqrt{2} * (-10000) * (-500) * (-211) \\
&\quad - 4 * (-10000)^3 * (-211) \\
&\quad + (-10000)^2 * (-500)^2 \\
&\quad - 4 * \sqrt{2} * (-500)^3 \\
&\quad - 27 * \sqrt{2}^2 * (-211)^2 \\
D &= -8.1902 * 10^{14}
\end{aligned}
$$

$D < 0$, rovnica má jeden reálny koreň.
Na obrázku 1 vidíme priesečník grafov dvoch funkcí. Riešením rovnice $f(x) = g(x)$ získame x-ové súradnice priesečníkov grafov,[1] ich dosadením do predpisu funkcie získame y-ové súradnice.

$$
\begin{aligned}
f(n) &= g(n) \\
\sqrt{2}n^3 - 10000n^2 - 500n - 211 &= 0 \\
n &= 7071.1
\end{aligned}
$$

[1] Nástroj na výpočet kubickej rovnice: https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=3f4366aeb9c157cf9a30c90693eafc55

Dôkaz:

1. Z výsledkov rovnice a z grafu funkcí(Obr. 1) vyplíva, že od $n = 7072$ je $f(n) > g(n)$. Obidve funkcie majú rovnaký definičný obor, teda môžeme povedať, že $O(g(n)) \subseteq O(f(n))$.
2. Vieme, že výsledkom rovnice je len jeden jediný realny koreň(D $<$ 0), a je naprosto zrejmé, že od $n = 7072$ sa tieto dve funkcie nikde inde nerovnajú, tak potom $O(g(n)) \neq O(f(n))$.

Teda:
$O(g(n)) \subseteq O(f(n)) \wedge O(g(n)) \neq O(f(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subset O(f(n))$.

3 3.úloha

Pre dôkaz ťažkosti problem tety kvety použijeme polynomiálnu redukciu z problému "Subset sum problem", ktorý je mimochodom NP úplny problem.

Tento problem si vyjádrime zápisom:

$\sum_{i=1}^{n}(c_i + B) * x_i \geq C \wedge \sum_{i=1}^{n} o_i * x_i \leq 0$ pre $x_i \in \{0, 1\}$, kde

x_i je informácia, či sa (ne)bude táto položka nachádzať v nákupnom košíku,

o_i je cena 1 kg danej zeleniny,

n je veľkosť množiny (do toho sa započíta celková hmotnosť zeleniny v obchode okrem brokolice)

C vyjadruje minimalné požadované množstvo vitaminov C

B množstvo vitaminu C v 0,1kg brokolice

c_i je množstvo vitaminu C v 1 kg danej zeleniny

i je pomocná premenná

Problem subset sum obecne: Je daná množina prirodzených čísel $M = \{n1, n2, ..., n_r\}$ a číslo k. Rozhodovací problém sa spýta, či je možné vybrať z M podmnožinu N tak, že súčet čísel N je rovno k. [2]

Problem formulujeme nasledujúcim zápisom:

$\sum_{i=1}^{n} v_i * y_i = k$ pre $y_i \in \{0, 1\}$

Nasleduje redukcia Subset sum problemu na Problem tety kvety. V prvodem rade vytvoríme instanciu problému tety kvety nasledujúcim spôsobom:

$$(c_i + B) = o_i = v_i$$
$$C = O = k$$

Túto redukciu bude vykonať úplny DTS, jeho zložitosť bude iste spadať do triedy $O(n^l)$. Odpoveď Áno/Nie na vytvorený problem tety kvety potom súvisí s odpoveďou na pôvodný problém:

$$\left.\begin{array}{r} \sum_{i=1}^{n}(c_i + B)x_i \geq C \iff \sum_{i=1}^{n} v_i * x_i \geq k \\ \sum_{i=1}^{n} o_i * x_i \leq 0 \iff \sum_{i=1}^{n} v_i * x_i \leq k \end{array}\right\} \iff \sum_{i=1}^{n} v_i * x_i = k \quad pre \;\; x_i =\in \{0, 1\}$$

To znamená, že keď najdeme vektor x taký, ktorý vyhovuje problému tety kvety, potom ten istý vektor x je aj riešením **subset problemu** a zároveň odpoveď zo **subset problemu** je Áno. Inak (ak sme takýto vektor nenašli) - neexistuje podmnožina pre danú množinu, kde súčet by bol rovno číslu k, dostaneme odpoveď Nie.

[2] Subset sum problem: https://www.algoritmy.net/article/7682/Subset-sum-%E2%86%92-Deleni-koristi

Správnosť odpovedí ukážeme ukážeme v polynomiálnom čase - sčítame obsah vitaminu C, ceny a hodnoty, ktoré potom budeme porovnávať so stanovenými hranicami.

Pre ľudstvo znamená:

1. Stroj v batohu je deterministický - Stroj v batohu dokáže vyriešiť v polynomiálnom čase problem s exponenciálnou zložitosťou: $P = NP$. Toto zistenie by viedlo k najdení rychlejších algoritmov na vyriešenie NP úplnych úloh.

2. Stroj v batohu je NEdeterministický - Alan použil tzv. Turingov stroj. Definícou tohto teoretického stroja ukázal univerzialny prostriedok na vyjádrenie rôznych algoritmov. Pomocou tohoto nedeterministického stroje je možné vyriešiť aj problém s exponenciálnou zložitosťou v polynomialnom čase. Ak existuje správne riešenie , tak sa nachádza medzi všetkými nedeterministickými možnými riešeniami, ktoré uhádne a potom stačí overiť jeho správnosť.

4 4.úloha

Jednoduchá reprezentácia komplexného systému si vyžaduje rozdelenie zadania úlohy na mänšie časti. Z tohto dôvodu som sa rozhodol rozdeliť riešenie danej úlohy na 4 časti, ktoré sú nasledujúce:

1. Prechod z ľavej strany na pravú (Obrázok 2)
2. Prechod z pravej strany na ľavú (Obrázok 3)
3. Vlk zožerie kozu/koza zožerie zelí na ľavej strane, keď prievozník je na pravej strane (Obrázok 4)
4. Vlk zožerie kozu/koza zožerie zelí na pravej strane, keď prievozník je na ľavej strane (Obrázok 5)

Výsledná Petriho sieť vyzerá následovne[1]:

$$N = (P, T, F, W, K, M_0)$$

Množina miest **P**:

- **vlk1** - vlk sa nachádza na ľavej strane, **vlk2** - vlk sa nachádza na pravej strane
- **koza1** - koza sa nachádza na ľavej strane, **koza2** - koza sa nachádza na pravej strane
- **zelí1** - zelí je na ľavej strane, **zelí2** - zelí je na pravej strane
- **prievozník1** - prievozník je na lavej strane, **prievozník2** - prievozník je na pravej strane

Množina priechodov **T**:

- **vlk_na_lodi1** - vlk prejde z ľavej strany na pravú, **vlk_na_lodi2** - vlk prejde z pravej strany na ľavú
- **koza_na_lodi1** - koza prejde z ľavej strany na pravú, **koza_na_lodi2** - koza prejde z pravej strany na ľavú
- **zelí_na_lodi1** - zelí prejde z ľavej strany na pravú, **zelí_na_lodi2** - zelí prejde z pravej strany na ľavú
- **prievozník_na_lodi1** - prievozník prejde z ľavej strany na pravú, **prievozník_na_lodi2** - prievozník prejde z pravej strany na ľavú
- **vlk+koza 1** - vlk zožerie kozu na lavej strane, **vlk+koza 2** - vlk zořerie kozu na pravej strane
- **koza+zelí 1** - koza zožerie zelí na lavej strane, **koza+zelí 2** - koza zořerie zelí na pravej strane

Toková relácia **F** $\subseteq (P \times T) \cup (T \times P)$:

- (vlk1, vlk_na_lodi1), (vlk_na_lodi1, vlk2), (koza1, koza_na_lodi1), (koza_na_lodi1, koza2), (zelí1, zelí_na_lodi1), (zelí_na_lodi1, zelí2), (prievozník1, prievozník_na_lodi1), (prievozník_na_lodi1, prievozník2)
- (vlk2, vlk_na_lodi2), (vlk_na_lodi2, vlk1), (koza2, koza_na_lodi2), (koza_na_lodi2, koza1), (zelí2, zelí_na_lodi2), (zelí_na_lodi2, zelí1), (prievozník2, prievozník_na_lodi2), (prievozník_na_lodi2, prievozník1)

- (vlk1, vlk+koza 1), (vlk+koza 1, vlk1), (koza1, vlk+koza 1), (koza1, koza+zeli 1), (koza + zeli 1, koza1), (zeli1, koza+zeli 1), (vlk+koza 1, prievoznik2), (prievoznik2, vlk+koza 1), (koza+zeli 1, prievoznik2), (prievoznik2, koza+zeli 1)
- (prievoznik1, vlk+koza 2), (vlk+koza 2, prievoznik1), (prievoznik1, koza+zeli 2), (koza+zeli 2, prievoznik1), (vlk+koza 2, vlk2), (vlk2, vlk+koza 2), (koza2, vlk+koza 2), (koza+zeli 2, koza), (koza2, koza+zeli 2), (zeli2, koza+zeli 2)

W : $F \to \mathbb{N} \backslash \{0\}$ je ohodnocení hran grafu určujúci kladnú váhu každej hrany siete

- Každá hrana má ohodnocenie **1**.

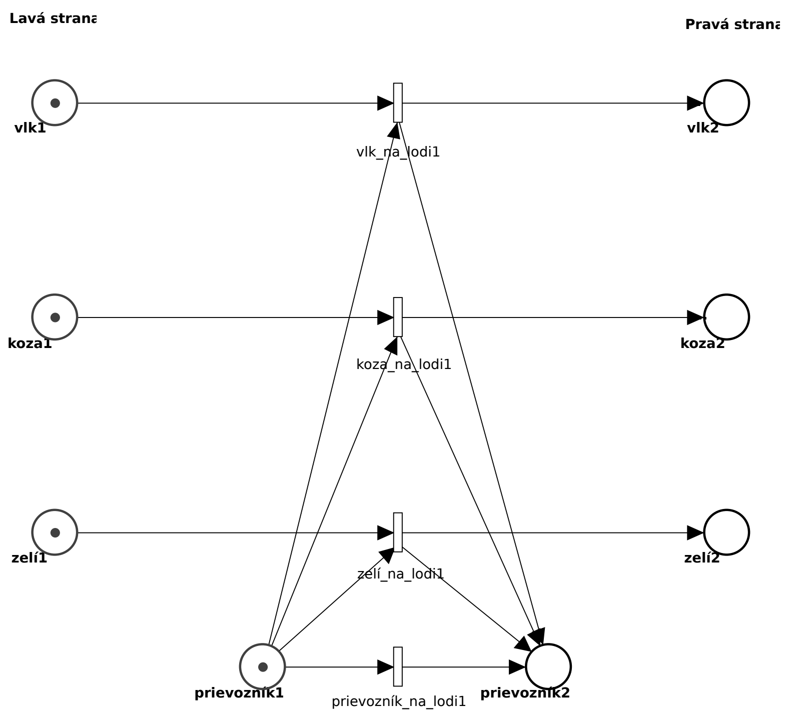
K : $P \to \mathbb{N} \cup \{w\}$ je zobrazenie určujúci kapacaitu každého miesta

- Kapacita každého miesta je **1** (maximálne 1 vlk, 1 koza, 1 zelí, 1 prievozník)

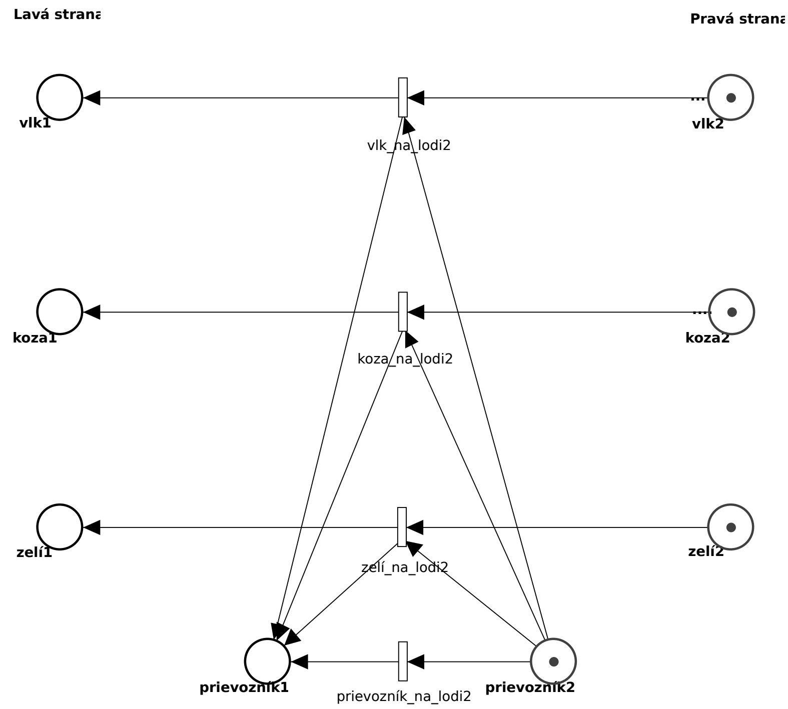
$\mathbf{M_0}$: $P \to \mathbb{N} \cup \{w\}$ je počiatočné značenie miest Petriho siete takové, že $\forall p \in P : M_0(p) \leq K(p)$

- $\forall p \in \{vlk1, koza1, zeli1, prievoznik1\} : M_0(p) = 1$
- $\forall p \in \{vlk2, koza2, zeli2, prievoznik2\} : M_0(p) = 0$

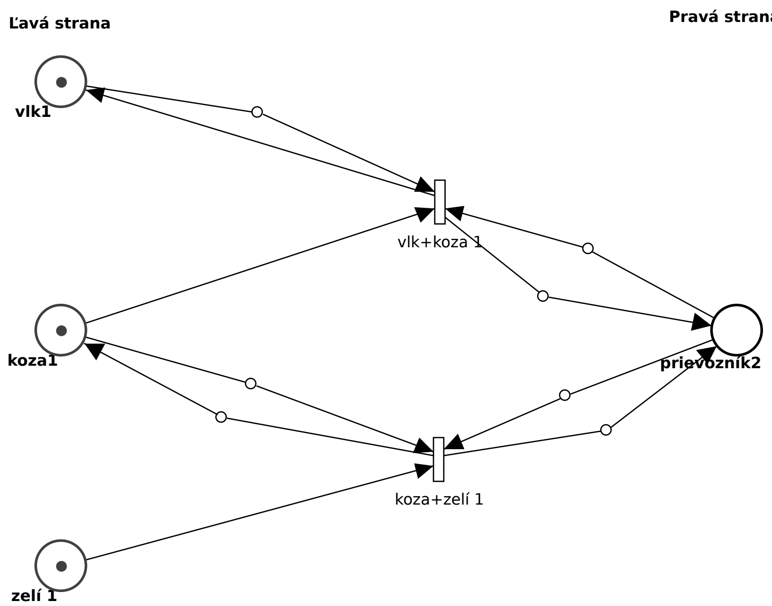
Počiatočná konfigurácia jednotlivých značiek závisí na zadáni úlohy(z čoho mimochodem nie je jasné, že na ktorej strane sa nachádzajú jednotlivé entity na začiatku). Defaultná konfigurácia je taková, že každá entita z množiny entit {vlk, koza, zelí, prievozníki} je na ľavej strane.



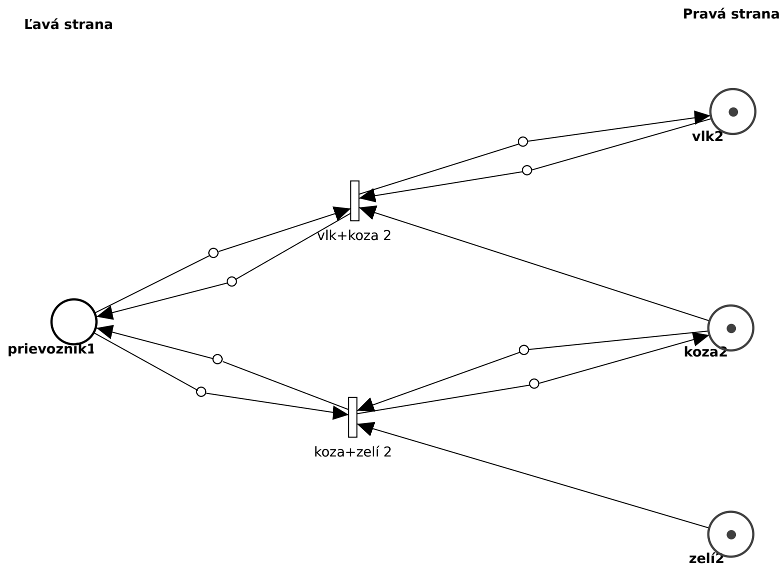
Obrázek 2: Ľavá strana ⇒ Pravá strana



Obrázek 3: Pravá strana ⇒ Ľavá strana



Obrázek 4: Koza zožerie zelí alebo vlk zožerie kozu na ľavej strane, keď prievozník je na pravej strane



Obrázek 5: Koza zožerie zelí alebo vlk zožerie kozu na pravej strane, keď prievozník je na ľavej strane

5 Literatura

[1] M.Češka, T. Vojnar, A. Smrčka, A. Rogalewicz: *Teoretická informatika - Študijní text.* 2018-9-23, [Online; Navštívené: 2019-10-20].
URL `https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf`