

# FAKULTA INFORMAČNÍCH TECHNOLOGIÍ VYSOKÉ UČENÍ TECHNICKÉ V BRNĚ



## TIN Teoretická informatika

### 3. domácí úloha

## Obsah

1	1. úloha	3
2	2. úloha	4
3	3. úloha	6
4	4. úloha	8
5	Literatura	10

(max. zisk 5 bodů – 10 bodů níže odpovídá 1 bodu v hodnocení předmětu)

1. Pomocí počátečních funkcí a operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze vyjádřete funkci počítající odmocninu (zaokrouhlenou dolů na celá čísla):

$$\text{sqrt} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}, \text{ sqrt}(x) = z \text{ takové, že } z^2 \leq x \wedge (z+1)^2 > x.$$

Je možné použít funkce  $\text{plus}(x, y)$ ,  $\text{mult}(x, y)$ ,  $\text{monus}(x, y)$  a  $\text{eq}(x, y)$  definované v přednáškách. Kromě nich však nepoužívejte žádné další funkce zavedené na přednáškách mimo funkce počáteční. Nepoužívejte zjednodušenou syntaxi zápisu funkcí – dodržte přesně definiční tvar operátorů kombinace, kompozice a primitivní rekurze.

15 bodů

2. Mějme následující funkce:

$$f(n) = \sqrt{2}n^3$$

$$g(n) = 10000n^2 + 500n + 211.$$

Dokažte, že  $O(g(n)) \subset O(f(n))$ .

**Pozn.:** Nezapomeňte, že důkaz má dvě části: (i)  $O(g(n)) \subseteq O(f(n))$  a (ii)  $O(g(n)) \neq O(f(n))$

10 bodů

3. Teta Květa stojí před regálem se zeleninou a nehýbá se, protože má těžký rozhodovací problém. Potřebuje sníst co nejvíce vitamínu C, aby ji přešla chřipka. Každý druh zeleniny je charakteristický obsahem vitamínu C na kilo a cenou za kilo. Teta se snaží přijít na to, jestli je možné nakoupit zeleninu za obnos  $O$  v její peněženke tak, aby úhrn vitamínu C byl alespoň  $C$ . Kromě toho s každým kilem zeleniny přidá zelinář deset deka brokolice zdarma, s obsahem  $B$  vitamínu C na kilo.

Formulujte problém tety Květy jako rozhodovací problém, a dokažte, že je NP-úplný. Těžkost dokažte redukcí z některého problému uvedeného v odstavci „NP-complete problems“ zde:

[https://en.wikipedia.org/wiki/NP-completeness#NP-complete\\_problems](https://en.wikipedia.org/wiki/NP-completeness#NP-complete_problems)

Z dálky na tetu volá synovec Alan, ať nezoufá, že to vyřeší za chvíli (t.j., v polynomiálním čase), pomocí jakéhosi psacího stroje vlastní výroby s nekonečnou páskou. Co to znamená pro lidstvo?

15 bodů

4. Modelujte následující kritický systém Petriho sítí. Namalujte ji a zapište formálně ve shodě s definicí.

Převozník chce převézt z jednoho břehu na druhý hlávku zelí, kozu a vlka. Do loďky s sebou může vzít buď zelí, nebo kozu, nebo vlka, ale víc se tam nevejde. Nechá-li na břehu hlávku zelí a kozu, koza zelí sežere. Nechá-li na břehu kozu a vlka, pak vlk sežere kozu. Jakým způsobem musí převozník postupovat, aby nedošlo k žádné škodě?

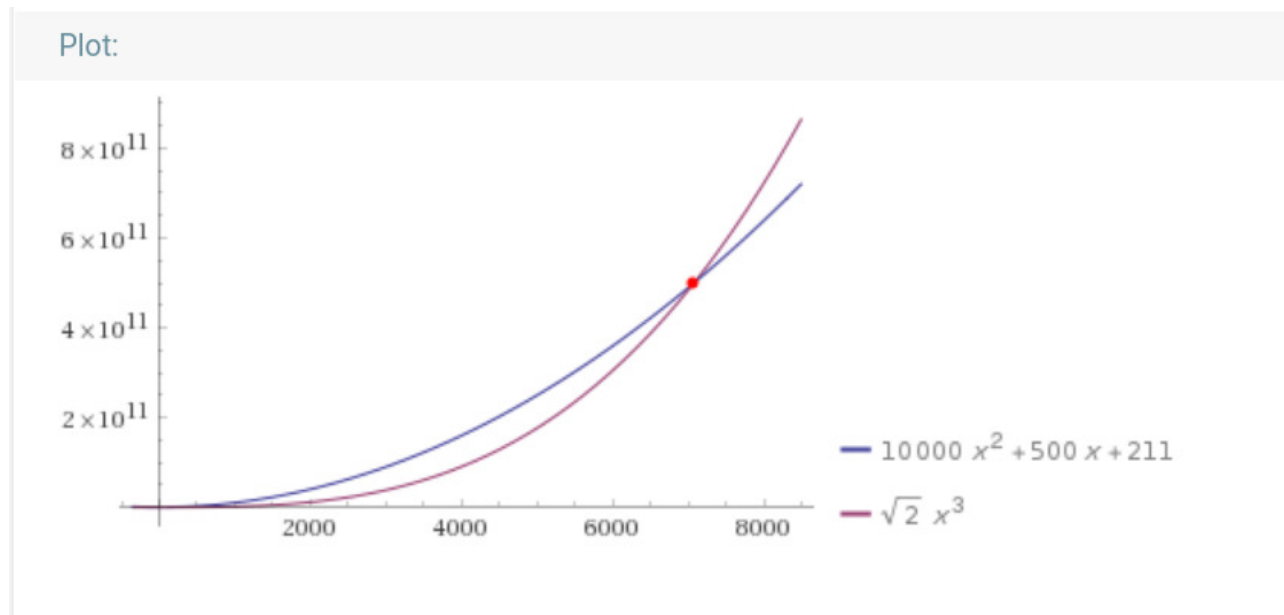
Snažte se o přehlednost a pochopitelnost modelu. Místa vhodně pojmenujte a síť nakreslete přehledně. (příklad ze sbírky úloh Alkuina z Yorku, Úlohy k bystření mladíků, z roku cca 735-804)

10 bodů

## 1 1.úloha

## 2 2.úloha

Zostrojme si graf funkcie pre  $f(n) = \sqrt{2}n^3$  a pre  $g(n) = 10000n^2 + 500n + 211$ .



Obrázek 1:  $f(x)$  a  $g(x)$

Diskriminant  $D$  kubickej rovnice  $\sqrt{2}n^3 - 10000n^2 - 500n - 211 = 0$  vypočítame podľa vzťahu:

$$\begin{aligned}
 D &= 18abcd - 4b^3d + b^2c^2 - 4ac^3 - 27a^2d^2 \\
 D &= 18 * \sqrt{2} * (-10000) * (-500) * (-211) \\
 &\quad - 4 * (-10000)^3 * (-211) \\
 &\quad + (-10000)^2 * (-500)^2 \\
 &\quad - 4 * \sqrt{2} * (-500)^3 \\
 &\quad - 27 * \sqrt{2}^2 * (-211)^2 \\
 D &= -8.1902 * 10^{14}
 \end{aligned}$$

$D < 0$ , rovnica má jeden reálny koreň.

Na obrázku 1 vidíme priesečník grafov dvoch funkcií. Riešením rovnice  $f(x) = g(x)$  získame x-ové súradnice priesečníkov grafov,<sup>1</sup> ich dosadením do predpisu funkcie získame y-ové súradnice.

$$\begin{aligned}
 f(n) &= g(n) \\
 \sqrt{2}n^3 - 10000n^2 - 500n - 211 &= 0 \\
 n &= 7071.1
 \end{aligned}$$

<sup>1</sup>Nástroj na výpočet kubickej rovnice: <https://www.wolframalpha.com/widgets/view.jsp?id=3f4366aeb9c157cf9a30c90693eafc55>

**Dôkaz:**

1. Z výsledkov rovnice a z grafu funkcií (Obr. 1) vyplíva, že od  $n = 7072$  je  $f(n) > g(n)$ . Obidve funkcie majú rovnaký definičný obor, teda môžeme povedať, že  $O(g(n)) \subseteq O(f(n))$ .
2. Vieme, že výsledkom rovnice je len jeden jediný reálny koreň ( $D < 0$ ), a je naprosto zrejmé, že od  $n = 7072$  sa tieto dve funkcie nikde inde nerovnajú, tak potom  $O(g(n)) \neq O(f(n))$ .

**Teda:**

$$O(g(n)) \subseteq O(f(n)) \wedge O(g(n)) \neq O(f(n)) \Rightarrow O(g(n)) \subset O(f(n)).$$

### 3 3.úloha

Pre dôkaz ťažkosti problem tety kvety použijeme polynomiálnu redukciu z problému "Subset sum problem", ktorý je mimochodom NP úplny problem.

**Tento problem si vyjádrame zápisom:**

$$\sum_{i=1}^n (c_i + B) * x_i \geq C \wedge \sum_{i=1}^n o_i * x_i \leq 0 \text{ pre } x_i \in \{0, 1\}, \text{ kde}$$

$x_i$  je informácia, či sa (ne)bude táto položka nachádzať v nákupnom košíku,

$o_i$  je cena 1 kg danej zeleniny,

$n$  je veľkosť množiny (do toho sa započíta celková hmotnosť zeleniny v obchode okrem brokolice)

$C$  vyjadruje minimálne požadované množstvo vitamínov C

$B$  množstvo vitamínu C v 0,1kg brokolice

$c_i$  je množstvo vitamínu C v 1 kg danej zeleniny

$i$  je pomocná premenná

*Problem subset sum obecné:* Je daná množina prirodzených čísel  $M = \{n_1, n_2, \dots, n_r\}$  a číslo  $k$ . Rozhodovací problém sa spýta, či je možné vybrať z  $M$  podmnožinu  $N$  tak, že súčet čísel  $N$  je rovno  $k$ .

2

**Problem formulujeme nasledujúcim zápisom:**

$$\sum_{i=1}^n v_i * y_i = k \text{ pre } y_i \in \{0, 1\}$$

Nasleduje redukcia Subset sum problemu na Problem tety kvety. V prvom rade vytvoríme instanciu problému tety kvety nasledujúcim spôsobom:

$$(c_i + B) = o_i = v_i \\ C = O = k$$

Túto redukciu bude vykonať úplny DTS, jeho zložitosť bude iste spadať do triedy  $O(n^l)$ . Odpoveď Áno/Nie na vytvorený problem tety kvety potom súvisí s odpoveďou na pôvodný problem:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{i=1}^n (c_i + B)x_i \geq C &\iff \sum_{i=1}^n v_i * x_i \geq k \\ \sum_{i=1}^n o_i * x_i \leq 0 &\iff \sum_{i=1}^n v_i * x_i \leq k \end{aligned} \right\} \iff \sum_{i=1}^n v_i * x_i = k \text{ pre } x_i \in \{0, 1\}$$

To znamená, že keď najdeme vektor  $x$  takový, ktorý vyhovuje problému tety kvety, potom ten istý vektor  $x$  je aj riešením **subset problemu** a zároveň odpoveď zo **subset problemu** je Áno. Inak (ak sme takýto vektor nenašli) - neexistuje podmnožina pre danú množinu, kde súčet by bol rovno číslu  $k$ , dostaneme odpoveď Nie.

---

<sup>2</sup>Subset sum problem: <https://www.algoritmny.net/article/7682/Subset-sum-%E2%86%92-Deleni-koristi>

Správnosť odpovedí ukážeme ukážeme v polynomiálnom čase - sčítame obsah vitamínu C, ceny a hodnoty, ktoré potom budeme porovnávať so stanovenými hranicami.

### **Pre ľudstvo znamená:**

1. Stroj v batohu je deterministický - Stroj v batohu dokáže vyriešiť v polynomiálnom čase problem s exponenciálnou zložitosťou:  $P = NP$ . Toto zistenie by viedlo k nájdení rýchlejších algoritmov na vyriešenie NP úplných úloh.
2. Stroj v batohu je NEdeterministický - Alan použil tzv. Turingov stroj. Definícou tohto teoretického stroja ukázal univerzálny prostriedok na vyjadrenie rôznych algoritmov. Pomocou tohoto nedeterministického stroja je možné vyriešiť aj problém s exponenciálnou zložitosťou v polynomiálnom čase. Ak existuje správne riešenie, tak sa nachádza medzi všetkými nedeterministickými možnými riešeniami, ktoré uhádne a potom stačí overiť jeho správnosť.



## 4 4.úloha

Test [1]

## 5 Literatura

- [1] M.Češka, T. Vojnar, A. Smrčka, A. Rogalewicz: *Teoretická informatika - Študijní text*. 2018-9-23, [Online; Navštívené: 2019-10-20].  
URL <https://www.fit.vutbr.cz/study/courses/TIN/public/Texty/TIN-studijni-text.pdf>