Metody numeryczne
Wykład nr 5
Równania nieliniowe

Aneta Wróblewska

UMCS, Lublin

April 11, 2024

Wprowadzenie

Równania nieliniowe są fundamentem wielu zagadnień naukowych i inżynierskich. Rozwiązania tych równań często nie mogą być wyrażone przez proste wzory analityczne, co prowadzi do potrzeby stosowania metod numerycznych.

Charakterystyka równań nieliniowych

Równania nieliniowe charakteryzują się tym, że zależność między zmiennymi nie jest liniowa, co oznacza, że zmiana jednej zmiennej nie prowadzi do proporcjonalnej zmiany drugiej zmiennej. Takie zachowanie wprowadza dodatkową złożoność do analizy i rozwiązania problemu.

Poszukiwanie miejsc zerowych funkcji to zagadnienie znalezienia takiego x^*, że

$$f(x^*) = 0,$$

czyli rozwiązania równania.

Zakładamy, że nie jesteśmy w stanie znaleźć miejsca zerowego analitycznie - pozostają nam metody iteracyjne.

Problemy przy rozwiązywaniu równań nieliniowych

- Dobór odpowiedniego punktu startowego może znacząco wpłynąć na zbieżność metody i szybkość odnalezienia rozwiązania.
- Niektóre metody mogą nie zbiegać do rozwiązania lub zbiegać bardzo wolno, jeśli nie są spełnione pewne warunki.
- W przypadku wielu pierwiastków metoda może konwergować do różnych rozwiązań w zależności od punktu startowego.

- Metoda bisekcji - metoda podziału przedziału na pół, wykorzystująca własność ciągłości funkcji.
- Metoda Newtona (stycznych) - wykorzystuje pochodne funkcji do szybkiego odnalezienia pierwiastka.
- Metoda siecznych - podobna do metody Newtona, ale nie wymaga obliczania pochodnej funkcji.

Przykłady równań nieliniowych

Równania nieliniowe mogą przybierać różne formy, oto kilka przykładów:

1. Równania wielomianowe, np. $x^3 - 6x^2 + 11x - 6 = 0$.
2. Równania trygonometryczne, np. $\sin(x) + x^2 - 1 = 0$.
3. Równania eksponencjalne, np. $e^x - x - 2 = 0$.
4. Równania logarytmiczne, np. $\ln(x) + x^2 - 3 = 0$.
5. Równania zawierające funkcje specjalne, np. $J_0(x) + x^2 - 2 = 0$, gdzie $J_0(x)$ jest funkcją Bessela pierwszego rodzaju zerowego rzędu.

Różnorodność równań nieliniowych ukazuje złożoność problemu ich rozwiązywania oraz potrzebę stosowania specjalistycznych metod numerycznych.

Ważne twierdzenia

Twierdzenie Darboux

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$, zaś u jest liczbą z przedziału $[f(a), f(b)]$ to istnieje c z przedziału $[a, b]$, że $u = f(c)$.

Twierdzenie Bolzano-Cauchy'ego

Jeżeli funkcja $f(x)$ jest ciągła w przedziale domkniętym $[a, b]$ i $f(a) \cdot f(b) < 0$, to między punktami a i b znajduje się co najmniej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$.

Twierdzenie

Jeżeli w przedziale $[a, b]$ spełnione są założenia twierdzenia Bolzano-Cauchy'ego i dodatkowo $sgnf'(x) = const$ dla $x \in [a, b]$, to przedział ten jest przedziałem izolacji pierwiastka równania $f(x) = 0$.

Znaczenie twierdzeń w metodach rozwiązywania równań nieliniowych

Powyższe twierdzenia mają kluczowe znaczenie przy rozwiązywaniu równań nieliniowych, ponieważ:

- pozwalają na weryfikację istnienia rozwiązania w danym przedziale,
- pomagają określić przedział izolacji pierwiastka, co jest ważne dla metody bisekcji oraz innych metod iteracyjnych,
- ułatwiają wybór odpowiedniego przedziału startowego dla metod numerycznych.

Przykłady zastosowania

Przykład 1:
Rozważmy funkcję $f(x) = x^2 - 4$ na przedziale $[1, 5]$. Ponieważ $f(1) \cdot f(5) < 0$, to na mocy twierdzenia Bolzano-Cauchy'ego istnieje co najmniej jeden pierwiastek równania $f(x) = 0$ w przedziale $[1, 5]$.

Przykład 2:
Funkcja $f(x) = \sin(x) - \frac{x}{2}$ w przedziale $[3, 4]$. Mamy $f(3) \cdot f(4) < 0$ oraz $f'(x) = \cos(x) - \frac{1}{2}$ nie zmienia znaku w $[3, 4]$, co wskazuje na istnienie dokładnie jednego pierwiastka w tym przedziale.

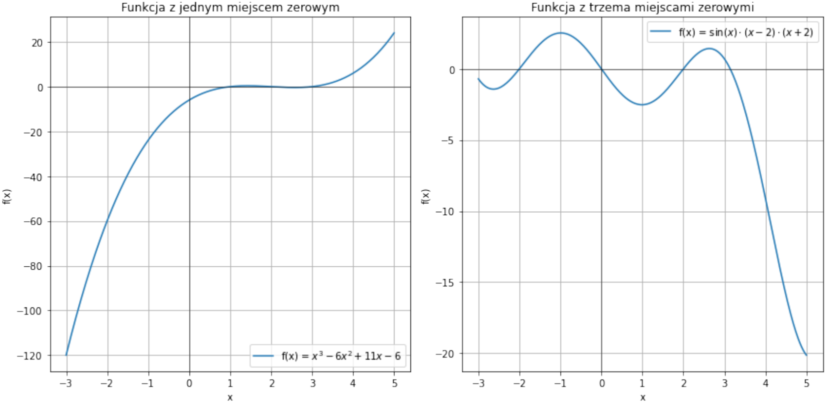
Funkcja signum

Funkcja signum, oznaczana jako *sgn*, jest funkcją zmiennej rzeczywistej zdefiniowaną w sposób następujący:

$$sgn(x) = \begin{cases} -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0, \\ 1 & \text{dla } x > 0. \end{cases}$$

- Zwraca -1 dla wartości ujemnych argumentu.
- Zwraca 0 dla argumentu równego zero.
- Zwraca 1 dla wartości dodatnich argumentu.

Przykłady funkcji z 1 i 3 miejscami zerowymi



Charakterystyka pierwszej pochodnej

Pierwsza pochodna funkcji dostarcza cennych informacji o jej zachowaniu:

- Miejsca zerowe pochodnej wskazują potencjalne punkty ekstremalne funkcji.
- Dodatnie wartości pochodnej w pewnym przedziale sugerują, że funkcja w tym obszarze rośnie.
- Ujemne wartości pochodnej świadczą o malejącym charakterze funkcji w danym przedziale.
- Funkcja rosnąca przed punktem zerowym pochodnej, która następnie maleje, osiąga w tym punkcie maksimum lokalne.
- Funkcja malejąca, a następnie rosnąca po przekroczeniu miejsca zerowego pochodnej, osiąga minimum lokalne.

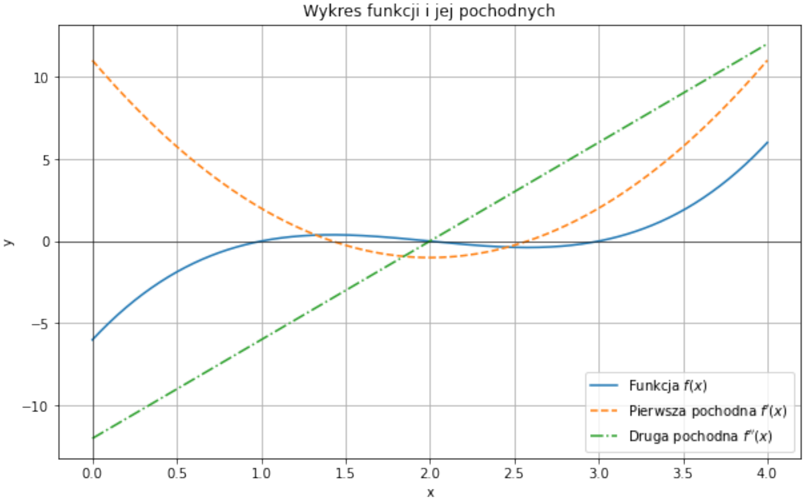
Charakterystyka drugiej pochodnej

Druga pochodna funkcji rzuca światło na jej krzywiznę:

- Punkty, w których druga pochodna przyjmuje wartość zero, mogą oznaczać punkty przegięcia funkcji.
- Dodatnia wartość drugiej pochodnej w określonym przedziale wskazuje, że funkcja jest wypukła w tym obszarze.
- Ujemne wartości drugiej pochodnej sygnalizują wklęsłość funkcji w danym przedziale.

Przykład wykresu funkcji i jej pochodnych

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + 11x - 6$$



Metoda bisekcji

Metoda bisekcji

Metoda bisekcji jest techniką numeryczną służącą do znajdowania pierwiastka równania $f(x) = 0$ w określonym przedziale $[a, b]$. Rozpoczynamy od przyjęcia, że pierwsze dwie wartości ciągu to $x_1 = a$ i $x_2 = b$.

Obliczanie kolejnych przybliżeń

Dla każdego kroku iteracji $i = 3, 4, \ldots$, nową wartość x_i obliczamy jako średnią x_{i-1} i x_k:

$$x_i = \frac{x_{i-1} + x_k}{2}$$

gdzie k jest jedną z wartości $\{i-3, i-2\}$. Wybór k jest taki, aby spełnione były warunki:

- $|x_i - x_{i-1}| = |x_i - x_k|$
- $f(x_{i-1}) \cdot f(x_k) < 0$, co wskazuje na obecność pierwiastka w tym przedziale.

Zmniejszanie przedziału izolacji i szybkość iteracji

W każdej iteracji przedział izolacji pierwiastka jest redukowany o połowę, co prowadzi nas bliżej do poszukiwanego rozwiązania. Choć metoda ta jest niezawodna, to charakteryzuje się stosunkowo wolną konwergencją.

Kryteria zakończenia iteracji metodą bisekcji:

- zadana liczba kroków - iteracji,
- dostatecznie mały błąd (problem, gdy funkcja jest płaska w pobliżu miejsca zerowego),
- wartość funkcji dostatecznie bliska zeru (problem, gdy funkcja jest nieciągła w pobliżu miejsca zerowego).

Wyznaczanie błędu metody bisekcji

Dokładność przybliżenia w i-tym kroku można określić jako:

$$|x_i - x^*| < \frac{b - a}{2^{i-2}}$$

co pokazuje, jak błąd zmniejsza się w miarę postępu iteracji. Oznacza to, że z każdym krokiem jesteśmy coraz bliżej pierwiastka równania.

Potencjalne problemy i praktyczne wskazówki

- metoda daje jedno miejsce zerowe, a nie wszystkie w przedziale $[a, b]$,
- błędy zaokrągleń powodują, że otrzymanie $f(x) = 0$ jest mało prawdopodobne, dlatego ta równość nie powinna stanowić kryterium zakończenia obliczeń,
- punkt środkowy lepiej obliczyć ze wzoru $a + \frac{b-a}{2}$ zamiast $\frac{a+b}{2}$ - w obliczeniach numerycznych lepiej jest obliczać nową wielkość, dodając do poprzedniej małą poprawkę,
- zmianę znaku wartości funkcji lepiej badać zaa pomocą nierówności $sgn(f(x_i)) \neq sgn(f(x_j))$ zamiast $f(x_i) \cdot f(x_j) < 0$ - unikamy zbędnego mnożenia.

Przykład metody bisekcji

Rozważamy funkcję kwadratową $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 5$ i szukamy pierwiastka tej funkcji w przedziale $[1, 2]$ przy użyciu metody bisekcji.

Krok 1

Początkowy przedział izolacji pierwiastka: $[a_1, b_1] = [1, 2]$
Punkt środkowy: $x_1 = \frac{1+2}{2} = 1.5$
$f(a_1) = f(1) = 1$,
$f(b_1) = f(2) = -3$,
$f(x_1) = f(1.5) = -1.375$
$f(1) \cdot f(1.5) < 0 \quad \longrightarrow$ kontynuujemy z przedziałem $[1, 1.5]$.

Przykład metody bisekcji

Krok 2
Nowy przedział: $[a_2, b_2] = [1, 1.5]$
Punkt środkowy: $x_2 = \frac{1+1.5}{2} = 1.25$
$f(x_2) = f(1.25) = -0.234$
$f(1) \cdot f(1.25) < 0 \quad \longrightarrow$ kontynuujemy z przedziałem $[1, 1.25]$.

Krok 3
Nowy przedział: $[a_3, b_3] = [1, 1.25]$
Punkt środkowy: $x_3 = \frac{1+1.25}{2} = 1.125$
$f(x_3) = f(1.125) = 0.376$
$f(1.125) \cdot f(1.25) < 0 \quad \longrightarrow$ kontynuujemy z przedziałem $[1.125, 1.25]$.

Przykład metody bisekcji

Krok 4
Nowy przedział: $[a_4, b_4] = [1.125, 1.25]$
Punkt środkowy: $x_4 = \frac{1.125+1.25}{2} = 1.1875$
$f(x_4) = f(1.1875) = 0.069$
$f(.1.875) \cdot f(1.25) < 0 \quad \longrightarrow$ kontynuujemy z przedziałem $[1.1875, 1.25]$.

Krok 5
Nowy przedział: $[a_5, b_5] = [1, 1.125]$
Punkt środkowy: $x_5 = \frac{1+1.125}{2} = 1.0625$
$f(x_5) = f(1.0625) = 0.152344$
$f(1) \cdot f(1.0625) < 0 \quad \longrightarrow$ kontynuujemy z przedziałem $[1, 1.0625]$.

Wyznaczanie błędu przybliżenia

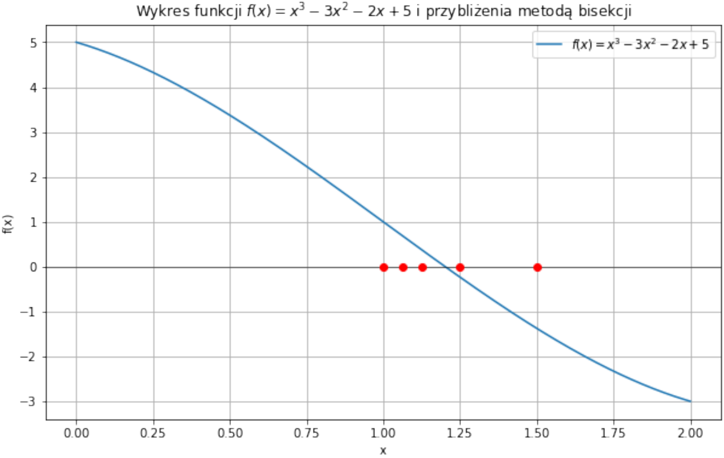
Analogicznie obliczamy kolejne kroki metody, aż do osiągnięcia zadanej dokładności.

Na przykład po 12 krokach metody bisekcji, dokładność przybliżenia możemy określić jako:

$$|x_{12} - x^*| < \frac{2-1}{2^{12-2}} = \frac{1}{2^{10}}$$

Metoda bisekcji - na wykresie

Wykres przedstawiający pięc kroków metody bisekcji dla funkcji $f(x) = x^3 - 3x^2 - 2x + 5$ na przedziale $[1, 2]$



Metoda stycznych (Newtona)

Metoda stycznych, znana także jako **metoda Newtona**, polega na przybliżeniu pierwiastka równania $f(x) = 0$ w przedziale $[a, b]$ poprzez konstrukcję ciągu punktów będących miejscami zerowymi stycznych do krzywej funkcji $f(x)$.

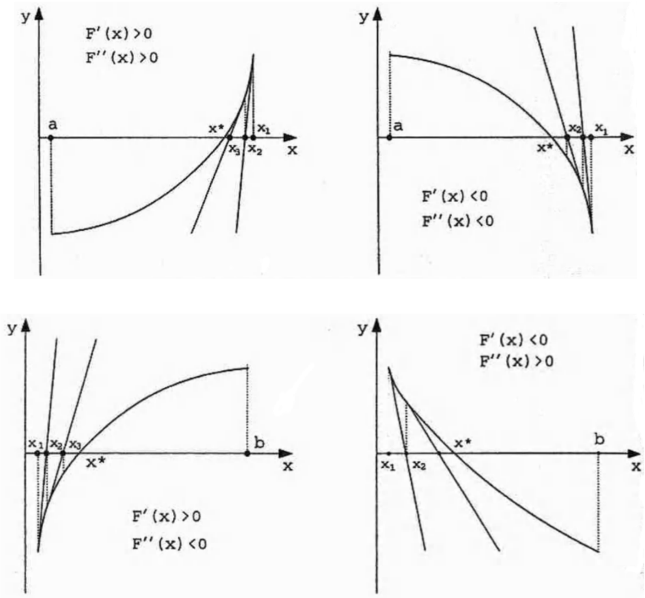
$$x_i = x_{i-1} - \frac{f(x_{i-1})}{f'(x_{i-1})}, \quad i = 2, 3, 4, \dots$$

Wybór pierwszego przybliżenia x_1

Pierwsze przybliżenie x_1 często wybieramy spośród końców przedziału $[a, b]$. Kryterium wyboru między a a b stanowi zachowanie monotoniczności funkcji oraz jej krzywizna w rozważanym przedziale.

- Jeżeli dla $x \in [a, b]$, $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, wtedy $x_1 = a$.
- Jeżeli $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, wtedy $x_1 = b$.

Wybór pierwszego przybliżenia x_1



Oszacowanie błędu

Błąd w każdym kroku iteracji możemy oszacować używając wzoru:

$$\Delta \approx |x_i - x_{i-1}|$$

Zbieżność metody

Metoda stycznych wykazuje szybką zbieżność (kwadratową, tzw. współczynnik zbieżności wynosi 2) pod warunkiem, że wybrane pierwsze przybliżenie jest wystarczająco blisko rzeczywistego pierwiastka. Metoda może być rozbieżna, jeżeli:

- pierwsze przybliżenie jest zbyt daleko od pierwiastka,
- funkcja $f(x)$ nie jest dostatecznie "gładka" w otoczeniu pierwiastka.

Warunki zakończenia obliczeń

Obliczenia kończymy, gdy osiągnięty zostanie zadany próg dokładności, np.:

$$\left| x_i - x_{i-1} \right| < \varepsilon$$

gdzie ε jest wcześniej zdefiniowanym progiem błędu.

Potencjalne problemy

Podczas stosowania metody stycznych można napotkać na problemy takie jak:

- rozbieżność iteracji przy niefortunnym wyborze x_1,
- zatrzymanie postępu w przypadku, gdy $f'(x_{i-1})$ jest bliskie zero,
- trudności z oszacowaniem globalnej dokładności przybliżenia.

Analizujemy funkcję $f(x) = x^2 - 4x + 3$ z zamiarem zastosowania metody stycznych (Newtona) do znalezienia jej pierwiastka.
Pierwsze przybliżenie: $x_1 = 2$.
Pochodna funkcji: $f'(x) = 2x - 4$.

Krok 1

$x_1 = 2$

$f(x_1) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$

$f'(x_1) = 2 \cdot 2 - 4 = 0$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 2 - \frac{-1}{0}$

Uwaga: W tym kroku nie można zastosować metody, ponieważ $f'(x_1) = 0$. Potrzebujemy wybrać inny punkt startowy.

Przykład cd - korekta i nowy punkt startowy

Krok 1

Początkowy punkt: $x_0 = 1.5$

$f(x_0) = (1.5)^2 - 4 \cdot 1.5 + 3 = -0.75$

$f'(x_0) = 2 \cdot 1.5 - 4 = -1$

$x_1 = x_0 - \frac{f(x_0)}{f'(x_0)} = 1.5 - \frac{-0.75}{-1} = 0.75$

Krok 2

$x_1 = 0.75$

$f(x_1) = (0.75)^2 - 4 \cdot 0.75 + 3 = 0.5625$

$f'(x_1) = 2 \cdot 0.75 - 4 = -2.5$

$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)} = 0.75 - \frac{0.5625}{-2.5} = 0.975$

Przykład - dalsze kroki

Dalsze kroki obliczeniowe wykonujemy zgodnie z powyższą metodą otrzymując następujące wartości:

Iteracja (i)	Kolejne przybliżenie	Błąd przybliżenia
1	0.7500000000	0.7500000000
2	0.9750000000	0.2250000000
3	0.9996951220	0.0246951220
4	0.9999999535	0.0003048316
5	1.0000000000	0.0000000465

Metoda siecznych

Metoda siecznych

Metoda siecznych służy do aproksymacji pierwiastka równania $f(x) = 0$ w obrębie przedziału $[a, b]$. Jest to realizowane poprzez generowanie sekwencji miejsc zerowych dla cięciw rozpiętych między punktami $(x_i, f(x_i))$ i $(x_{i-1}, f(x_{i-1}))$, które określają granice poszczególnych przedziałów.

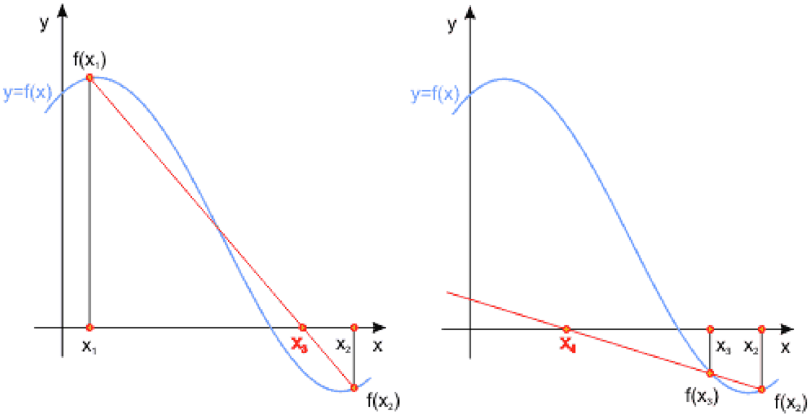
Wzór na kolejne przybliżenie pierwiastka prezentuje się następująco:

$$x_{i+1} = x_i - f(x_i) \cdot \frac{x_i - x_{i-1}}{f(x_i) - f(x_{i-1})}, \quad i = 2, 3, 4, \ldots$$

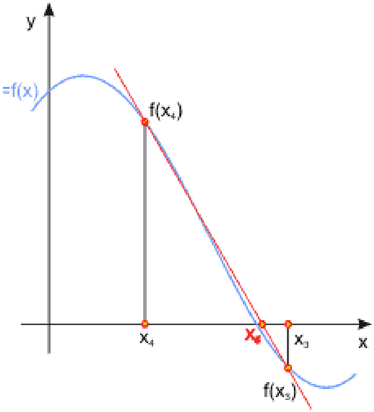
Błąd przybliżenia w każdym kroku obliczeniowym można oszacować za pomocą wzoru:

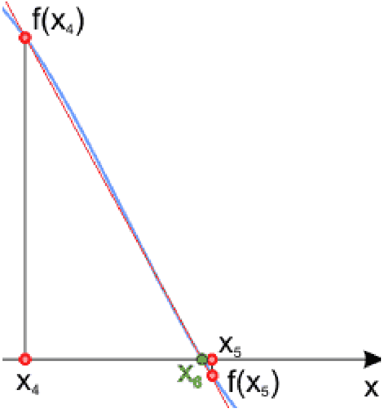
$$\Delta \approx |x_{i+1} - x_i|$$

Metoda siecznych na wykresie



Metoda siecznych na wykresie - cd





Wybór punktów startowych - modyfikacja

Rozpatrujemy znaczenie znaku pierwszej i drugiej pochodnej funkcji w danym przedziale i jego wpływ na przybliżenie pierwiastka metody numeryczne.
W zależności od znaków pochodnych pierwszego i drugiego rzędu, możemy wyróżnić dwa główne scenariusze:

- Przybliżenie pierwiastka z niedomiarem,
- Przybliżenie pierwiastka z nadmiarem.

Wybór punktów startowych - modyfikacja

Przybliżenie z niedomiarem
Gdy $f'(x) > 0, f''(x) > 0$ lub $f'(x) < 0, f''(x) < 0$, kolejne przybliżenia pierwiastka układają się jak:

$$x_i < x_{i+1} < x_{i+2} < \ldots < x^*$$

Przybliżenie z nadmiarem
Gdy $f'(x) > 0, f''(x) < 0$ lub $f'(x) < 0, f''(x) > 0$, mamy do czynienia z sytuacją, gdzie:

$$x_i > x_{i+1} > x_{i+2} > \ldots > x^*$$

Biorąc powyższe własności pod uwagę, dla $x \in [a, b]$ punkty startowe x_2 i x_1 możemy wybrać zależnie od iloczynu pochodnych $f'(x) \cdot f''(x)$:

- Jeśli $f'(x) \cdot f''(x) < 0$, wówczas $x_2 = a$ i $x_1 = b$.
- Jeśli $f'(x) \cdot f''(x) > 0$, wówczas $x_2 = b$ i $x_1 = a$.

Metoda siecznych - przykład

Analizujemy funkcję $f(x) = x^2 - 4x + 3$ w przedziale $[0, 2]$ za pomocą metody siecznych, gdzie punkty startowe to $x_0 = 0$ i $x_1 = 2$.

Krok 1

$x_0 = 0, \quad x_1 = 2$

Obliczamy x_2:

$$x_2 = 2 - f(2)\frac{0-2}{f(0)-f(2)}$$

$$x_2 = 2 - (-1)\frac{0-2}{3-(-1)}$$

$$x_2 = 1.5$$

Błąd: $\Delta \approx |1.5 - 2| = 0.5$

Metoda siecznych - przykład

Krok 2

W poprzednim kroku obliczyliśmy $x_2 = 1.5$. Teraz, użyjemy x_2 i x_1 do obliczenia x_3.

Obliczamy x_3:

$$x_3 = x_2 - f(x_2)\frac{x_1 - x_2}{f(x_1) - f(x_2)}$$

$$f(x_1) = 2^2 - 4 \cdot 2 + 3 = -1$$

$$f(x_2) = 1.5^2 - 4 \cdot 1.5 + 3 = -0.75$$

Stąd,

$$x_3 = 1.5 - (-0.75)\frac{2 - 1.5}{-1 - (-0.75)}$$

$$x_3 = 0$$

Błąd: $\Delta \approx |x_3 - x_2| = |0 - 1.5| = 1.5$

Wyniki iteracji metody siecznych

Iteracja (i)	Kolejne przybliżenie	Błąd przybliżenia
1	1.5000000000	0.5000000000
2	0.0000000000	1.5000000000
3	1.2000000000	1.2000000000
4	1.0714285714	0.1285714286
5	0.9917355372	0.0796930342
6	1.0003047851	0.0085692479
7	1.0000012545	0.0003035307
8	0.9999999998	0.0000012546
9	1.0000000000	0.0000000002
10	1.0000000000	0.0000000000

Table: Wyniki iteracji metody siecznych.

Metoda siecznych - podsumowanie i wnioski

- metoda siecznych ma tę zaletę, że do wykonywania operacji nie ma potrzeby wyliczać pochodnych,
- metoda siecznych może nie być zbieżna, gdy wybieżemy zbyt mały przedział $[a, b]$, np. przedział $[0.5, 1]$ dla funkcji $f(x) = 2x - x^3 - 1$ daje nam rozwiązania na przemian 0.5 i 1 – w takim przypadku trzeba zastosować metodę alternatywną,
- w ogólnym przypadku metoda siecznych wymaga większej liczby iteracji niż metoda stycznych (współczynnik zbieżności 1.62), jednak w niektórych przypadkach metoda stycznych może działać wolniej pomimo mniejszej liczby iteracji (zależy to od trudności w wyznaczeniu pochodnej).

Metoda regula falsi

Metoda regula falsi

Metoda regula falsi, znana również jako metoda fałszywej pozycji, jest metodą numeryczną rozwiązywania równań nieliniowych, która łączy zalety metody siecznych i metod przedziałowych. Podobnie jak metoda siecznych, polega na konstrukcji linii prostych łączących punkty na wykresie funkcji, ale zachowuje gwarancję zbieżności metod przedziałowych poprzez zachowanie przedziału izolacji pierwiastka.

Zasada działania metody regula falsi

Metoda działa na zasadzie wybierania końców przedziału $[a, b]$, tak aby wartości funkcji $f(a)$ i $f(b)$ miały przeciwne znaki, co wskazuje na istnienie pierwiastka w przedziale. Następnie, podobnie jak w metodzie siecznych, rysuje się cięciwę między punktami $(a, f(a))$ i $(b, f(b))$, a punkt przecięcia tej cięciwy z osią X stanowi nowe przybliżenie pierwiastka. W przeciwieństwie do metody siecznych, metoda Regula Falsi aktualizuje jeden z końców przedziału, zawsze utrzymując pierwiastek w obrębie przedziału, co zapewnia jej zbieżność.

- Metoda zawsze zbieżna, jeśli tylko dobrze wybrano przedział początkowy.
- Metoda zawiedzie, gdy f(x) styczne z osią x dla f(x)=0.
- Wolna zbieżność p=1 (metoda liniowa)