Metody numeryczne - wykład nr 2
Macierze

Aneta Wróblewska

Maria Curie-Skłodowska University, Lublin, Poland

March 4, 2024

Definicja macierzy

Macierzą nazywamy prostokątną tablicę $m \times n$ liczb umieszczonych w m wierszach i n kolumnach.

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m-1,1} & a_{m-1,2} & \cdots & a_{m-1,n-1} & a_{m-1,n} \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \cdots & a_{m,n-1} & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

W skrócie oznaczamy ją $A = [a_{i,j}]$.

Macierz - oznaczenia

Dla macierzy $A = [a_{i,j}]$ mamy następujące oznaczenia:

- $a_{i,j}$ – element macierzy A,
- wskaźnik i - numerem wiersza, w którym znajduje się element $a_{i,j}$,
- wskaźnik j - numerem kolumny, w którym znajduje się element $a_{i,j}$,
- $a_{1,1}, \ a_{2,2}, \ a_{3,3}, \ \ldots$ określają diagonalę macierzy,
- $m \times n$ - wymiar macierzy.

Macierze szczególne

Macierz wierszowa - macierz o wymiarze $1 \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \end{bmatrix}$$

Macierz kolumnowa - macierz o wymiarze $m \times 1$:

$$A = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_{m-1} \\ a_m \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{m-1} & a_m \end{bmatrix}^T$$

Macierz $A = [a_{i,j}]$ nazywamy macierzą zerową, jeśli zawiera same 0.

Macierz kwadratowa

Macierz kwadratowa - macierz, w której liczba wierszy i kolumn jest jednakowa. Tę liczbę nazywamy **stopniem macierzy**.
Na przykład następująca macierz

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} \end{bmatrix}$$

jest macierzą kwadratową stopnia trzeciego.
Macierz symetryczna - macierz, której elementy spełniają równość $a_{i,j} = a_{j,i}$.

Macierz diagonalna

Macierz diagonalna - macierz kwadratowa, w której wszystkie elementy z wyjatkiem leżącej na diagonali sa równe 0

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{2,2} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Szczególnym przypadkiem macierzy diagonalnej jest **macierz jednostkowa**, zawierająca na diagonali same jedynki.

Macierz górna trójkątna

Macierz górna trójkątna - macierz kwadratowa, w której elementy leżące na diagonali i powyżej niej są różne od 0.

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Macierz dolna trójkątna - macierz kwadratowa, w której elementy leżące na diagonali i poniżej niej są różne od 0.

$$\mathbf{L} = \begin{bmatrix} a_{1,1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n-1,1} & a_{n-1,2} & \dots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

Dodawanie i odejmowanie macierzy

Aby dodać (odjąć) macierze, muszą one mieć takie same wymiary.

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \pm \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,n} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m,1} & b_{m,2} & \dots & b_{m,n} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{1,1} \pm b_{1,1} & a_{1,2} \pm b_{1,2} & \dots & a_{1,n} \pm b_{1,n} \\ a_{2,1} \pm b_{2,1} & a_{2,2} \pm b_{2,2} & \dots & a_{2,n} \pm b_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} \pm b_{2,n} & a_{m,2} \pm b_{m,2} & \dots & a_{m,n} \pm b_{m,n} \end{bmatrix}$$

Dodawanie i odejmowanie macierzy jest operacją przemienną i łączną.

Mnożenie macierzy przez liczbę rzeczywistą

Macierz A pomnożona przez liczbę rzeczywistą k jest następującej postaci:

$$\begin{bmatrix} ka_{1,1} & ka_{1,2} & \dots & ka_{1,n} \\ ka_{2,1} & ka_{2,2} & \dots & ka_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ ka_{m,1} & ka_{m,2} & \dots & ka_{m,n} \end{bmatrix}$$

Transpozycja macierzy

Macierz transponowana do macierzy A to macierz A^T, która powstaje przez zamianę jej wierszy na kolumny i kolumn na wiersze.

Własności transpozycji

- $(A^T)^T = A$
- $(A \pm B)^T = A^T \pm B^T$
- $(kA)^T = kA^T$
- $(AB)^T = B^T A^T$
- $\det(A^T) = \det(A)$

Macierz symetryczna

Macierz symetryczna - macierz kwadratowa A, dla której zachodzi $A^T = A$

Macierz ortogonalna - macierz wymiaru $m \times n$, dla której zachodzi $A^T A = \mathbf{I}$. W przypadku, gdy $m = n$ mamy $A^T A = A A^T = \mathbf{I}$ oraz $A^T = A^{-1}$

Mnożenie macierzy

Iloczynem macierzy

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & \dots & a_{m,n} \end{bmatrix} \text{ i } B = \begin{bmatrix} b_{1,1} & b_{1,2} & \dots & b_{1,m} \\ b_{2,1} & b_{2,2} & \dots & b_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n,1} & b_{n,2} & \dots & b_{n,m} \end{bmatrix}$$

jest macierz kwadratowa $C = AB = \begin{bmatrix} c_{1,1} & c_{1,2} & \dots & c_{1,m} \\ c_{2,1} & c_{2,2} & \dots & c_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m,1} & c_{m,2} & \dots & c_{m,m} \end{bmatrix}$

której elementy oblicza się ze wzoru:
$c_{i,k} = \sum_{j=1}^{n} a_{i,j} b_{j,k} \ (i, k = 1, 2, \dots, m)$

Mnożenie macierzy - własności

- mnożenie macierzy nie jest przemienne: $AB \neq BA$
- mnożenie macierzy jest łączne $(AB)C = A(BC)$
- mnożenie macierzy jest rozłączne względem dodawania $A(B + C) = AB + AC$
- macierz jednostkowa jest elementem neutralnym $AI = A$ oraz $IA = A$

Przekształcenia elementarne

Elementarne przekształcenia macierzy dzielą się na przekształcenia pierwszego i drugiego rodzaju.

Przekształceniami pierwszego rodzaju macierzy A są:

- przestawienie dwóch wierszy,
- pomnożenie dowolnego wiersza przez liczbę różną od zera,
- dodanie do wiersza krotności innego wiersza.

Przekształcenia drugiego rodzaju są analogiczne i dotyczą kolumn.

Przekształceniami drugiego rodzaju macierzy A są:

- przestawienie dwóch kolumn,
- pomnożenie dowolnej kolumny przez liczbę różną od zera,
- dodanie do kolumny krotności innej kolumny.

Znaczenie przekształceń elementarnych

liczenie rzędu macierzy

- na rząd macierzy nie mają wpływu żadne operacje elementarne, wszystkie je można stosować

liczenie wyznacznika macierzy kwadratowej

- wartości wyznacznika nie zmienia tylko dodanie wielokrotności jednego wiersza do drugiego albo jednej kolumny do drugiej
- pomnożenie wiersza lub kolumny o wartość k zwiększa wyznacznik k razy
- zmiana miejscami wierszy lub kolumn zmienia znak wyznacznika

Znaczenie przekształceń elementarnych

rozwiązywanie układów równań liniowych

- można działać wyłącznie na wierszach, zmiany w kolumnach wprowadzają do układu nowe zmienne

znajdowanie macierzy odwrotnej

- można działać na wierszach albo na kolumnach ale nie wolno mieszać jednych operacji z drugimi

Wyznacznik macierzy

Wyznacznik – funkcja przyporządkowująca każdej macierzy kwadratowej $A_{n,n}$ pewną liczbę.
Wyznacznik macierzy kwadratowej A oznaczany jest przez $\det(A)$ albo $|A|$

Jeżeli $\det(A) \neq 0$, to macierz A nazywa się **nieosobliwą**. Jeżeli $\det(A) = 0$, to macierz A nazywa się **osobliwą**.
Własności:

- $\det(A) = \det(A^T)$
- $\det(AB) = \det(A)\det(B)$

Wyznaczanie wyznacznika macierzy - rozwinięcie Laplace'a

Rozważmy macierz A o wymiarach $n \times n$:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

Wyznacznik macierzy A za pomocą rozwinięcia Laplace'a:

- $\det(A) = a_{11}$ jeśli $n = 1$
- $\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} M_{ij}$ jeśli $n > 1$

gdzie M_{ij} to macierz stopnia $n-1$ powstałą z macierzy A poprzez skreślenie i-tego wiersza i j-tej kolumny (minor). Powyższa definicja opiera się o rozwinięcie wzdłuż j-tej kolumny.

det$A$ - przypadki elementarne

Dla macierzy stopnia 1 ($n = 1$):

$$A = [a_{11}], \quad \det(A) = a_{11}$$

Dla macierzy stopnia 2 ($n = 2$):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

det$A$ - przypadki elementarne

Dla macierzy stopnia 3 ($n = 3$):

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32}$$

$$-a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} - a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33} - a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32}$$

Macierz odwrotna

Rozważmy kwadratową macierz A o wymiarach $n \times n$. Macierzą odwrotną do macierzy A jest macierz A^{-1}, spełniająca następujący warunek:

$$A \cdot A^{-1} = A^{-1} \cdot A = I$$

gdzie I to macierz jednostkowa.
Warunkiem koniecznym i wystarczającym istnienia macierzy odwrotnej dla macierzy A jest:

$$\det(A) \neq 0$$

Odwracanie macierzy przy pomocy macierzy dopełnień

Niech A będzie nieosobliwą macierzą kwadratową, czyli $\det(A) \neq 0$. Element A_{ij} to **dopełnienie algebraiczne** elementu a_{ij}, obliczone ze wzoru:

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

gdzie M_{ij} to wyznacznik macierzy powstałej poprzez usunięcie i-tego wiersza i j-tej kolumny z macierzy A.

Macierz dopełnień

Przez A^D oznaczmy macierz dopełnień algebraicznych, a przez $(A^D)^T$ jej transpozycję:

$$(A^D)^T = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & \dots & A_{n1} \\ A_{12} & A_{22} & \dots & A_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{1n} & A_{2n} & \dots & A_{nn} \end{bmatrix}$$

gdzie A_{ij} to dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} macierzy A.

Odwracanie macierzy przy pomocy macierzy dopełnień

Transponowaną macierz dopełnień algebraicznych nazywamy **macierzą dołączoną** do macierzy A. **Macierz odwrotną** A^{-1} można otrzymać dzieląc wszystkie elementy macierzy dołączonej przez $\det(A)$:

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)}(A^D)^T$$

Odwracanie macierzy - przykłady

Przykład 1: Rozważmy macierz A o wymiarach 2×2:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

Jeśli $\det(A) \neq 0$, to macierz odwrotna A^{-1} istnieje i jest równa:

$$A^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Przykład 2: Dla macierzy A o wymiarach 3×3 można skorzystać z rozwinięcia Laplace'a - przykład na tablicy.

Zależności dla macierzy odwrotnej

- $(A^{-1})^{-1} = A$
- $(kA)^{-1} = \frac{1}{k}A^{-1}$, gdzie k jest liczbą różną od zera
- $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$, gdzie A^T to macierz transponowana
- $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$, gdzie AB to iloczyn macierzy
- $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$

Te zależności są istotne przy manipulacjach na macierzach odwrotnych w różnych kontekstach matematycznych.

Przekształcenia elementarne a odwracanie macierzy

Z definicji mnożenia macierzy wynika, że dla dowolnej macierzy A: operacji elementarnej na wierszach macierzy A odpowiada pomnożenie macierzy A z lewej strony przez macierz, która powstaje z macierzy jednostkowej I przez wykonanie na niej tej samej operacji.

Stosując operacje elementarne na wierszach nieosobliwej macierzy A (tzn. takiej, że $\det(A) \neq 0$), możemy ją przekształcić do macierzy jednostkowej I. Wynika stąd, że istnieją macierze $B_1, B_2, \ldots, B_s$ takie, że

$$B_s \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot A = I.$$

Zatem $A^{-1} = B_s \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1$, czyli $A^{-1} = B_s \cdot \ldots \cdot B_2 \cdot B_1 \cdot I$. Stąd macierz A^{-1} powstaje z macierzy I przez wykonanie na niej tych samych operacji elementarnych, co na macierzy A.

Przekształcenia elementarne a odwracanie macierzy

W praktyce przy obliczaniu macierzy odwrotnej do macierzy nieosobliwej A przy pomocy operacji elementarnych na wierszach (dodawanie wielokrotności jednego wiersza do innego; mnożenie wiersza przez skalar lub zamiana miejscami dwóch wierszy) postępujemy w sposób następujący.
Z prawej strony macierzy A dopisujemy macierz jednostkową tego samego stopnia. Na wierszach otrzymanej w ten sposób macierzy blokowej $[A|I]$ wykonujemy operacje elementarne aż do uzyskania macierzy blokowej postaci $[I|B]$. Macierz B jest szukaną macierzą odwrotną do macierzy A, tj. $B = A^{-1}$. Symbolicznie można zapisać: $[A|I] \sim [I|A^{-1}]$.