Metody numeryczne
Wykład nr 6
Interpolacja

Aneta Wróblewska

UMCS, Lublin

April 8, 2024

Co to jest interpolacja?

Interpolacja to proces znajdowania takiej funkcji, która przechodzi przez zadany zbiór punktów danych. W matematyce i informatyce jest to podstawowa technika wykorzystywana do estymacji wartości między znanymi punktami danych.

Do czego służy interpolacja?

Interpolacja ma szerokie zastosowanie, w tym:

- Przetwarzanie sygnałów i obrazów,
- Aproksymacja funkcji w celu analizy numerycznej,
- Symulacje komputerowe i grafika komputerowa,
- Inżynieria i nauki przyrodnicze do modelowania zjawisk.

Rodzaje interpolacji

Wyróżniamy kilka podstawowych rodzajów interpolacji:

- Interpolacja wielomianowa, np. metoda Lagrange'a, Newtona,
- Interpolacja funkcji sklejanych, w tym splajny liniowe, kwadratowe i sześcienne,
- Interpolacja za pomocą krzywych Bezjera,
- Inne metody, takie jak interpolacja Hermite'a.

Co to jest interpolacja?

Interpolacja to proces znajdowania funkcji interpolacyjnej $W(x)$, która dokładnie przechodzi przez zbiór danych punktów (węzłów interpolacji) (x_i, y_i), gdzie $y_i = f(x_i)$, dla $i = 0, 1, 2, \ldots, n$. Celem jest przybliżenie wartości funkcji w punktach poza danymi węzłami oraz oszacowanie błędu tych przybliżonych wartości.

Konstrukcja funkcji interpolacyjnej

Funkcja interpolacyjna $W(x)$ jest konstruowana jako kombinacja liniowa $n+1$ funkcji bazowych $\phi_i(x)$, zapisywana ogólnie jako:

$$W(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i \phi_i(x) \quad \text{lub} \quad W(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \ldots + a_n\phi_n(x)$$

gdzie:

- $\phi_i(x)$ są funkcjami bazowymi,
- a_i są współczynnikami, wyznaczanymi na podstawie danych węzłów interpolacji.

Konstrukcja funkcji interpolacyjnej

Wprowadzając macierz bazową $\Phi = [\phi_0(x), \phi_1(x), \ldots, \phi_n(x)]$ i wektor współczynników $A = [a_0, a_1, \ldots, a_n]^T$, możemy zapisać $W(x)$ jako:

$$W(x) = \Phi(x) \cdot A$$

Po podstawieniu $n+1$ węzłów tworzy nam układ $n+1$ równań z $n+1$ niewiadomymi:

$$\begin{aligned}
W(x_0) &= a_0\phi_0(x_0) + a_1\phi_1(x_0) + \ldots + a_n\phi_n(x_0) = y_0, \\
W(x_1) &= a_0\phi_0(x_1) + a_1\phi_1(x_1) + \ldots + a_n\phi_n(x_1) = y_1, \\
&\vdots \\
W(x_n) &= a_0\phi_0(x_n) + a_1\phi_1(x_n) + \ldots + a_n\phi_n(x_n) = y_n.
\end{aligned}$$

Konstrukcja funkcji interpolacyjnej

W zapisie macierzowym:

$$X \cdot A = Y :$$

$$\begin{bmatrix} \phi_0(x_0) & \phi_1(x_0) & \dots & \phi_n(x_0) \\ \phi_0(x_1) & \phi_1(x_1) & \dots & \phi_n(x_1) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi_0(x_n) & \phi_1(x_n) & \dots & \phi_n(x_n) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_0 \\ y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix}$$

gdzie:

- X - macierz główna układu, $\det(X)$ musi być różne od 0,
- A - wektor współczynników, niewiadomych,
- Y - wektor z wartościami funkcji.

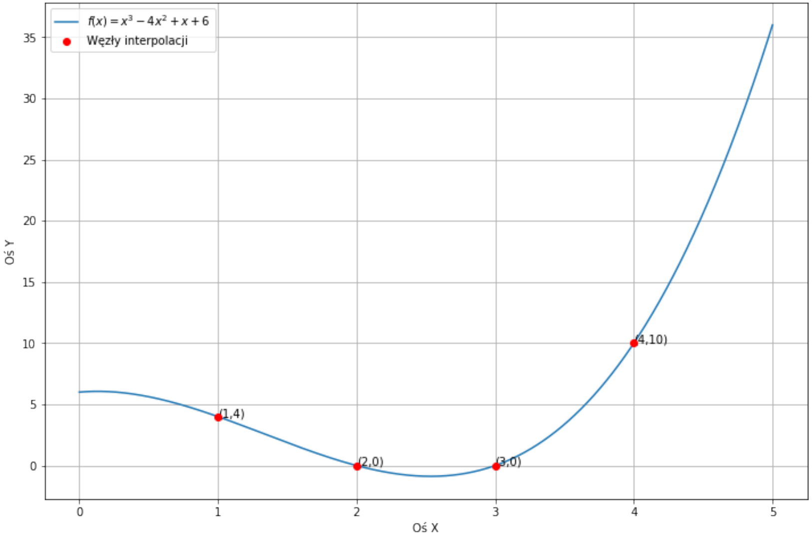
Konstrukcja funkcji interpolacyjnej

Jeżeli macierz X jest nieosobliwa, współczynniki A wyznaczane są jako $A = X^{-1} \cdot Y$, co prowadzi do postaci wielomianu interpolacyjnego:

$$W(x) = \Phi(x) \cdot X^{-1} \cdot Y$$

Tak skonstruowany wielomian interpolacyjny jest wynikiem iloczynu macierzy bazowej, macierzy interpolacyjnej X^{-1} i wektora wartości funkcji Y w węzłach interpolacji.

Przykład interpolacji



Tablicowanie vs. Interpolacja

Interpolacja można rozumieć jako proces odwrotny do tablicowania funkcji. Gdzie tablicowanie umożliwia tworzenie zestawu wartości na podstawie znanej formuły funkcji, interpolacja zajmuje się wyznaczaniem analitycznej formy funkcji bazując na zestawie danych wartości.

Tablicowanie:

- Polega na stworzeniu tablicy wartości dla danej funkcji.
- Używane, gdy znana jest analityczna postać funkcji.

Interpolacja:

- Polega na wyznaczeniu analitycznej formy funkcji, opierając się na zestawie jej wartości.
- Często wykorzystywana do określenia funkcji, której dokładna forma nie jest znana.

Poszukiwanie funkcji interpolacyjnej

W procesie interpolacji zazwyczaj dąży się do znalezienia funkcji interpolacyjnej o konkretnej, wcześniej założonej formie. Przykłady takich funkcji to:

- Wielomiany algebraiczne,
- Funkcje trygonometryczne,
- Inne postacie funkcji, które najlepiej pasują do charakteru danych.

Interpolacja wielomianowa

Interpolacja wielomianowa jest powszechnie stosowaną metodą w dziedzinie inżynierii, opartą na bazie jednomianów:

$$\phi_0(x) = 1, \phi_1(x) = x, \phi_2(x) = x^2, \ldots, \phi_n(x) = x^n$$

- Baza ta jest zamknięta dla funkcji ciągłych na skończonym przedziale $[x_0, x_n]$, co oznacza, że każdą funkcję z tej klasy można przedstawić jako szereg funkcji bazowych.

Forma wielomianu funkcyjnego

Wielomian interpolacyjny przyjmuje postać:

$$W(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

Po podstawieniu wartości w węzłach otrzymujemy następujący układ równań:

$$\begin{aligned}
W(x_0) &= a_0 + a_1 x_0 + \ldots + a_n x_0^n = y_0 \\
W(x_1) &= a_0 + a_1 x_1 + \ldots + a_n x_1^n = y_1 \\
&\vdots \\
W(x_n) &= a_0 + a_1 x_n + \ldots + a_n x_n^n = y_n
\end{aligned}$$

Warunek interpolacji wymaga, aby $W(x_i) = y_i$ dla $i = 0, 1, \ldots, n$. Oznacza to, że układ równań tworzony przez te warunki ma jednoznaczne rozwiązanie, gdy wszystkie x_i są różne.

Wyznacznik macierzy i macierz odwrotna

Wartość wyznacznika macierzy głównej X, macierzy Vandermonde'a wynosi:

$$D = \det X = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{0 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j) \neq 0$$

- Macierz odwrotna do bazy wielomianowej jest czasami nazywana macierzą Lagrange'a.
- Choć ta metoda interpolacji jest matematycznie elegancka, może nie być efektywna numerycznie. Macierz X jest pełna i może być źle uwarunkowana, co prowadzi do ryzyka dużych błędów w obliczeniach numerycznych.

Obliczanie wartości a_i

Wartości a_i oblicza się ze wzoru wynikającego z twierdzenia Cramera:

$$a_i = \frac{1}{D} \sum_{j=0}^{n} y_j X_{j+1,i+1} \qquad (1)$$

gdzie D jest wyznacznikiem macierzy głównej układu, a $X_{j+1,i+1}$ są kolejnymi dopełnieniami algebraicznymi elementów $i+1$-tej kolumny macierzy głównej.

Przykład - wyznacznik Vandermonde'a

Rozważmy obliczenie wartości wyznacznika Vandermonde'a dla punktów $x_0 = 2$, $x_1 = 3$, $x_2 = 4$.

Wyznacznik Vandermonde'a jest dany przez:

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 \\ 1 & x_1 & x_1^2 \\ 1 & x_2 & x_2^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 4 \\ 1 & 3 & 9 \\ 1 & 4 & 16 \end{vmatrix}$$

Wykorzystując wzór na wyznacznik Vandermonde'a:

$$D = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)$$

Podstawiając dane wartości, otrzymujemy:

$$D = (3 - 2)(4 - 2)(4 - 3) = 2$$

Funkcje interpolacyjne

Funkcje odgrywają kluczową rolę w modelowaniu matematycznym, służąc jako narzędzia do opisu relacji między różnymi zmiennymi. W kontekście obliczeń numerycznych pojawia się wyzwanie przybliżonego przedstawiania funkcji, aby możliwe było obliczenie jej wartości dla dowolnych argumentów z przedziału $\langle a, b \rangle$ za pomocą ograniczonej liczby operacji arytmetycznych i logicznych.

Wybór funkcji przybliżającej $\tilde{f}$, która będzie reprezentować oryginalną funkcję f, może zależeć od wielu czynników. Ważne jest, aby taka funkcja umożliwiała proste obliczenie jej wartości. Dlatego często wybiera się wielomiany algebraiczne jako funkcje przybliżające ze względu na ich łatwość definiowania i obliczania.

Funkcje interpolacyjne

Wielomian algebraiczny postaci:

$$W_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots + a_n x^n$$

jest często stosowany jako funkcja przybliżająca ze względu na jego prostotę definiowania za pomocą skończonej liczby współczynników oraz łatwość obliczeń.

Funkcje interpolacyjne

Interpolacja za pomocą wielomianów umożliwia przybliżenie dowolnej funkcji, gdzie wartość $W_n(x)$ dla argumentów x, które nie są węzłami, reprezentuje estymację wartości y. Błąd przybliżenia, czyli różnica między funkcją oryginalną a przybliżającą, jest oceniany poprzez porównanie ich wartości w wybranych punktach poza węzłami interpolacji.

Przykład - interpolacja funkcji $\sin(\pi x)$

Rozważmy zadanie obliczenia współczynników wielomianu interpolującego funkcję $\sin(\pi x)$ w przedziale $< -1, 1 >$, z pięcioma węzłami interpolacji.
Dane węzły interpolacji i wartości funkcji są następujące:

- $x_0 = -1, y_0 = 0$
- $x_1 = -0.5, y_1 = -1$
- $x_2 = 0, y_2 = 0$
- $x_3 = 0.5, y_3 = 1$
- $x_4 = 1, y_4 = 0$

Formułujemy układ równań na podstawie wzoru na wielomian interpolacyjny $W_n(x)$.

Postać macierzy Vandermonde'a

Dla zadanych węzłów interpolacji i funkcji $\sin(\pi x)$, macierz Vandermonde'a ma postać:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & x_0^3 & x_0^4 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & x_1^3 & x_1^4 \\ 1 & x_2 & x_2^2 & x_2^3 & x_2^4 \\ 1 & x_3 & x_3^2 & x_3^3 & x_3^4 \\ 1 & x_4 & x_4^2 & x_4^3 & x_4^4 \end{pmatrix}$$

Podstawiając wartości węzłów:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -0.5 & 0.25 & -0.125 & 0.0625 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0.5 & 0.25 & 0.125 & 0.0625 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Macierz i wyznacznik Vandermonde'a

Wyznacznik $D = det(X)$ obliczamy jako:

$$D = (x_1 - x_0)(x_2 - x_0)(x_3 - x_0)(x_4 - x_0) \cdot \ldots \cdot (x_4 - x_3)$$

Co daje nam:

$$D = 9/32$$

Obliczanie współczynników i postaci wielomianu interpolacyjnego

Współczynniki a_i wielomianu interpolacyjnego obliczamy używając wzoru Cramera (1). Po podstawieniu wartości y i obliczeniach otrzymujemy:

$$a_0 = 0, a_1 = 8/3, a_2 = 0, a_3 = -8/3, a_4 = 0$$

Ostatecznie, wielomian interpolacyjny przyjmuje postać:

$$W_3(x) = \frac{8}{3}x - \frac{8}{3}x^3$$

Interpolacja Lagrange'a

W interpolacji Lagrange'a dla $n+1$ węzłów:

$$(x_0, y_0), \ldots, (x_n, y_n)$$

funkcje bazowe są zdefiniowane jako:

$$\phi_i(x) = \prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} (x - x_j),$$

gdzie dla każdego i, funkcja $\phi_i(x)$ pomija czynnik $(x - x_i)$, będąc wielomianem stopnia n.

Układ równań interpolacji Lagrange'a

Równania dla współczynników a_i wynikają z:

$$W(x_i) = y_i, \quad \text{dla } i = 0, 1, \ldots, n,$$

co prowadzi do macierzy głównej układu równań, gdzie każda funkcja bazowa $\phi_i(x)$ zeruje się dla $x = x_i$ oprócz jednego węzła, co upraszcza rozwiązanie układu.

Rozwiązanie układu równań

Wielomian interpolacyjny Lagrange'a można zapisać w uproszczonej formie:

$$W(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i \left(\prod_{\substack{j=0 \\ j \neq i}}^{n} \frac{x - x_j}{x_i - x_j} \right),$$

co daje nam bezpośrednią metodę obliczania wartości wielomianu interpolacyjnego w dowolnym punkcie x, nie będącym węzłem interpolacji.

(przykład na tablicy)

Interpolacja Newtona

Wzór interpolacyjny Newtona

Wielomian $p \in P_n$, spełniający dla danej funkcji f warunki

$$p(x_i) = f(x_i),$$

dla $i = 0, 1, \ldots, n$ w parami różnych węzłach x_i, można wyrazić za pomocą wzoru interpolacyjnego Newtona:

$$p(x) = \sum_{k=0}^{n} f[x_0, x_1, \ldots, x_k] \prod_{j=0}^{k-1} (x - x_j)$$

Ilorazy różnicowe $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$

Wartość $f[x_0, x_1, \ldots, x_k]$ zależy tylko od węzłów $x_0, x_1, \ldots, x_k$ i wartości funkcji w tych węzłach. Jest to iloraz różnicowy rzędu k dla funkcji f i wymienionych wyżej węzłów.
Ilorazy różnicowe:

- rzędu zerowego
$$f[x_i] = f(x_i),$$
- rzędu pierwszego
$$f[x_i, x_{i+1}] = \frac{f[x_{i+1}] - f[x_i]}{x_{i+1} - x_i}$$
- rzędu k:
$$f[x_i, x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] = \frac{f[x_{i+1}, \ldots, x_{i+k}] - f[x_i, \ldots, x_{i+k-1}]}{x_{i+k} - x_i}$$

dla $i = 0, \ldots, n$

Ilorazy różnicowe wyznaczamy przy pomocy tablicy trójkątnej, którą można utworzyć znając węzły i wartości funkcji w tych węzłach:

$$
\begin{array}{lllll}
x_0 & f[x_0] & & & \\
 & & f[x_0, x_1] & & \\
x_1 & f[x_1] & & f[x_0, x_1, x_2] & \\
 & & f[x_1, x_2] & & f[x_0, x_1, x_2, x_3] \\
x_2 & f[x_2] & & f[x_1, x_2, x_3] & \\
 & & f[x_2, x_3] & & \\
x_3 & f[x_3] & & &
\end{array}
$$

(przykład na tablicy)

Zbieżność wielomianów interpolacyjnych i błąd interpolacji

Twierdzenia o zbieżności

Twierdzenie 1 (Fabera)

Dla dowolnego ciągu układów węzłów $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$, istnieje taka funkcja ciągła w $[a, b]$, że ciąg wielomianów interpolacyjnych zbudowanych dla tych węzłów nie jest do niej zbieżny.

Twierdzenie 2

Jeżeli f jest funkcją ciągłą w $[a, b]$, to istnieje taki ciąg układów węzłów $a \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant b$, że zbudowane dla nich wielomiany interpolacyjne tworzą ciąg zbieżny do f.

Błąd interpolacji

Dość naturalne wydaje się przyjęcie, że zwiększenie liczby węzłów interpolacji (lub stopnia wielomianu interpolacyjnego) pociąga za sobą coraz lepsze przybliżenie funkcji $f(x)$ wielomianem $L_n(x)$.
Idealna byłaby zależność:

$$\lim_{n \to \infty} L_n(x) = f(x),$$

tj. dla coraz większej liczby węzłów wielomian interpolacyjny staje się „coraz bardziej podobny" do interpolowanej funkcji.
Dla węzłów równo odległych tak być nie musi $\to$ efekt Rungego.

Błąd interpolacji

Można dowieść, że dla każdego wielomianu interpolacyjnego stopnia n, przybliżającego funkcję $f(x)$ w przedziale $[a, b]$ na podstawie $n+1$ węzłów, istnieje taka liczba ξ zależna od x, że dla reszty interpolacji $r(x)$:

$$\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot p_n(x) = r(x),$$

gdzie $p_n(x) = (x - x_0)(x - x_1) \ldots (x - x_n)$, a $\xi \in (a; b)$ jest liczbą zależną od x.
Do oszacowania z góry wartości $r(x)$ można posłużyć się wielomianami Czebyszewa stopnia $n+1$ do oszacowania wartości $p_n(x)$ dla $x \in [-1, 1]$. Dla przedziału $[a, b]$ wystarczy dokonać przeskalowania wielomianu $p_n(x)$.

Kiedy występuje problem?

- Interpolowane funkcje mają wysoki stopień.
- Węzły interpolacyjne są równoodległe.

Problem ten pojawia się zwłaszcza na końcach przedziału interpolacji i jest szczególnie widoczny dla funkcji, które mają duże drugie lub wyższe pochodne w obrębie przedziału interpolacji, ponieważ wysokiego stopnia wielomiany mają tendencję do wykazywania oscylacji między punktami węzłowymi, co prowadzi do znacznego wzrostu błędu interpolacji na krańcach przedziału.

Rozwiązanie problemu

- Użycie interpolacji kawałkowej, takiej jak funkcje sklejane (splajny), które zamiast jednego wielomianu wysokiego stopnia używają serii wielomianów niskiego stopnia na mniejszych podprzedziałach.
- Użycie węzłów Czebyszewa zamiast równoodległych punktów.

Interpolacja funkcjami sklejanymi

Funkcje sklejane

Interpolacja funkcjami sklejanymi (ang. spline interpolation) to metoda przybliżania funkcji za pomocą kawałkami wielomianów niskiego stopnia, które są "sklejane" w taki sposób, aby całość była gładka.

Funkcja sklejana stopnia k to funkcja, która na każdym podprzedziale zadanego przedziału interpolacji jest wielomianem stopnia co najwyżej k i która ma ciągłe pochodne do rzędu $k-1$ w punktach sklejenia.

Interpolacja funkcjami sklejanymi oferuje elastyczne i wydajne narzędzie do przybliżania funkcji, szczególnie gdy potrzebujemy wysokiej dokładności i gładkości interpolowanej funkcji.

Funkcje sklejane liniowe

Najprostszy typ funkcji sklejanych. Dla każdego podprzedziału $[x_i, x_{i+1}]$ interpolacja liniowa definiowana jest wzorem:

$$S(x) = y_i + \frac{y_{i+1} - y_i}{x_{i+1} - x_i}(x - x_i)$$

Funkcje sklejane kubiczne

Są to funkcje sklejane stopnia 3, najczęściej używane w praktyce ze względu na dobrą równowagę między złożonością obliczeniową a jakością interpolacji. Warunki sklejenia zapewniają gładkość przejść między wielomianami.

$$S_i(x) = a_i + b_i(x - x_i) + c_i(x - x_i)^2 + d_i(x - x_i)^3$$

Warunki interpolacji i naturalności

- W węzłach zewnętrznych $s_0(x_0) = f(x_0)$ i $s_{n-1}(x_n) = f(x_n)$.
- Warunek naturalności: $s_0''(x_0) = s_{n-1}''(x_n) = 0$.

Warunki w węzłach wewnętrznych Dla każdego węzła wewnętrznego x_i dla $i = 1, 2, \ldots, n-1$:

- $s_{i-1}(x_i) = s_i(x_i) = f(x_i)$,
- $s_{i-1}'(x_i) = s_i'(x_i)$,
- $s_{i-1}''(x_i) = s_i''(x_i)$.

Zastosowanie krzywych Béziera w interpolacji

Krzywej Béziera

Krzywe Béziera są szeroko stosowane w grafice komputerowej, animacji oraz w projektowaniu CAD (Computer-Aided Design) do modelowania gładkich i łatwo kontrolowalnych kształtów.

Krzywa Béziera stopnia n jest zdefiniowana jako kombinacja liniowa punktów kontrolnych $P_0, P_1, \ldots, P_n$ z wykorzystaniem wielomianów bazowych Bernsteina:

$$B(t) = \sum_{i=0}^{n} P_i B_{i,n}(t)$$

gdzie $B_{i,n}(t) = \binom{n}{i} t^i (1-t)^{n-i}$ dla $t \in [0,1]$.

Właściwości krzywych Béziera i obliczanie punktów na krzywej

- Krzywa zaczyna się w P_0 i kończy w P_n.
- Tylko punkty kontrolne P_0 i P_n leżą na krzywej. Pozostałe wpływają na jej kształt.
- Krzywa jest zawsze zawarta w otoczce wypukłej swoich punktów kontrolnych.

Wyznaczeniu punktów na krzywej Béziera pomaga **algorytm de Casteljau** Jest to podstawowa metoda rekurencyjna służąca rysowaniu krzywych Béziera.

Podsumowanie - problemy i wyzwania

Interpolacja, pomimo swej użyteczności, wiąże się z pewnymi problemami:

- Efekt Rungego przy interpolacji wielomianowej na równoodległych węzłach.
- Wybór odpowiedniej metody interpolacji dla danego problemu.
- Obliczeniowa złożoność niektórych metod interpolacyjnych.