Metody numeryczne
Wykład nr 7
Aproksymacja

Aneta Wróblewska

UMCS, Lublin

April 15, 2024

Zagadnienie aproksymacji

Aproksymacja polega na zastąpieniu funkcji f inną funkcją f^* lub na znalezieniu funkcji f^* na podstawie pewnego znanego ciągu wartości funkcji f. Wartości te często mogą być obarczone dużym błędem (wartości empiryczne). Funkcja aproksymująca f^* powinna mieć tę własność, że łatwo przeprowadza się na niej operacje matematyczne (różniczkowanie, całkowanie). Dlatego jako funkcje aproksymujące stosuje się wielomiany algebraiczne, funkcje wymierne lub wielomiany trygonometryczne.

Źródła błędów w aproksymacji

W aproksymacji występują dwa **źródła błędów**: danych wejściowych, są to tzw. błędy pomiarów, oraz konkretnego modelu (klasy funkcji), który zamierza się dostosować do danych wejściowych, są to tzw. błędy modelu. W praktyce zarówno dane wejściowe, jak i model nie są doskonałe.
Aproksymację można traktować jako **problem dostosowania modelu matematycznego do danych**, którymi się dysponuje i do innych znanych faktów.

W aproksymacji liniowej funkcję f zastępuje się (aproksymuje) funkcją f^*, wyrażoną następującą kombinacją liniową:

$$f^*(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \ldots + a_k\phi_k(x)$$

w której znanych jest $k+1$ funkcji $\phi_0, \phi_1, \ldots, \phi_k$.
W aproksymacji tej oblicza się wartości parametrów $a_0, a_1, \ldots, a_k$.
Jeżeli np. $\phi_i(x) = x^i$, to klasą dopuszczalnych funkcji f^* jest klasa wielomianów stopnia k.
Układ $1, x, x^2, \ldots, x^k$ nazywa się **bazą zbioru wszystkich wielomianów stopnia** k. Możliwe są też inne bazy tego zbioru.

Zagadnienie aproksymacji

Zagadnienie aproksymacji można zatem zapisać w skrócie następująco: mając dany ciąg t_i, poszukujemy ciągłej funkcji, która najlepiej przybliża daną funkcję $f(t)$.
Rozważając zbiór punktów:

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n),$$

dążymy do znalezienia funkcji $f(x)$ danej klasy, która w punktach $x_1, x_2, \dots, x_n$ najefektywniej przybliża wartości y_i.
Podobne zagadnienie można sformułować dla funkcji. Dla danej funkcji $g(x)$, która ma być przybliżona przez funkcję $f(x)$ danej klasy, potrzebujemy określić miarę jakości przybliżenia - odległość między zbiorem $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$ a zbiorem $\{f(x_1), f(x_2), \dots, f(x_n)\}$ lub też między funkcją $g(x)$ a przybliżającą ją funkcją $f(x)$.

Zdefiniujemy miarę odległości w zbiorze X, zwaną metryką. Przestrzeń metryczna to para (X, d), gdzie X jest zbiorem, a d jest funkcją zdefiniowaną na $X \times X$

$$d : (x, y) \mapsto [0, 1),$$

która spełnia warunki:

1. $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
2. $d(x, y) = d(y, x)$,
3. $d(x, y) + d(y, z) \geqslant d(x, z)$.

Ostatni warunek jest znany jako warunek trójkąta. Wartość metryki $d(x, y)$ reprezentuje odległość między punktami x i y.

Normy funkcji

Niech F będzie rodziną funkcji rzeczywistych, ciągłych i ograniczonych, określonych na odcinku $K = [a, b]$ lub funkcji określonych na zbiorze $K = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Norma funkcji to odwzorowanie

$$\|\cdot\| : F \to [0, 1),$$

które funkcji $f \in F$ przypisuje nieujemną liczbę $\|f\|$ i które spełnia warunki:

1. $\|f\| = 0 \Leftrightarrow f \equiv 0$,
2. $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$,
3. $\|f\| + \|g\| \geqslant \|f + g\|$.

Ostatni warunek to warunek trójkąta. Norma określa metrykę w rodzinie funkcji. Jeśli F jest rodziną funkcji określonych na zbiorze K, to wzór

$$d_{\|\cdot\|}(f, g) = \|f - g\|$$

określa metrykę w tej rodzinie. Para $(F, d_{\|\cdot\|})$ stanowi przestrzeń metryczną.

Norma jednostajna

Definiujemy normę jednostajną wzorem

$$\|f\| = \sup_{x \in K} |f(x)|,$$

gdzie supremum (sup) oznacza wartość największą w zbiorze. Jest to norma, ponieważ spełnione są warunki (1) i (2). Warunek (3) jest spełniony, ponieważ dla dowolnych $a, b \in \mathbb{R}$

$$|a| + |b| \geqslant |a + b|.$$

Przykład 1

Na przedziale $K = [-5, 5]$ mamy zdefiniowane funkcje

$$f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{10x^2}{10x^2+1},$$

$$g(x) = \frac{x}{10}.$$

Interesuje nas znalezienie maksimum ich różnicy

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{9x}{100x^2+10}.$$

Przykład 1 cd

Pochodna funkcji $h(x)$:

$$h'(x) = \frac{-9(10x^2 - 1)}{10(10x^2 + 1)^2}.$$

Dla $x > 0$, pochodna zeruje się w punkcie

$$x_0 = \sqrt{\frac{1}{10}} \approx 0.3162277660168379,$$

i to w tym punkcie funkcja h osiąga swoje maksimum.

Przykład 1 cd

Maksymalna różnica między funkcjami f i g wynosi

$$\|f - g\| = h(x_0) = \frac{9}{2 \cdot 10^{3/2}} \approx 0.142302494707577.$$

Norma L2

Zdefiniujemy normę L2, zwaną także normą kwadratową. Dla funkcji f należącej do przestrzeni F, norma L2 jest wyrażona wzorem:

$$\|f\|_2 = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx},$$

co można również zapisać jako:

$$\|f\| = \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx}.$$

Przykład 2

Rozważamy funkcje na przedziale $K = [-5, 5]$:

- $f(x) = \frac{x}{x^2+1} - \frac{10x^2}{10x^2+1}$
- $g(x) = \frac{x}{10}$

Szukamy normy L2 ich różnicy:

$$h(x) = f(x) - g(x) = \frac{9x}{100x^2 + 10}.$$

Przykład 2 cd

Obliczamy normę L2 różnicy funkcji $h(x)$:

$$\int_0^5 h^2(x)\,dx = \frac{20331}{\sqrt{10}\,\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right)} - \frac{4050}{5020000}$$
$$\approx 0.018501845745253\,32,$$

co oznacza, że norma L2 funkcji h jest równa:

$$\|h\| = \sqrt{\int_{-5}^5 h^2(x)\,dx} = \sqrt{\frac{20331}{\sqrt{10}\,\operatorname{arc\,tg}\left(\frac{5}{\sqrt{10}}\right)} - \frac{4050}{100\sqrt{251}}}$$
$$\approx 0.192363435950\,0439.$$

Norma L1

Definiujemy normę L1 dla funkcji f należącej do rodziny funkcji F za pomocą wzoru:

$$\|f\|_1 = \int_a^b |f(x)|\, dx.$$

Norma ta jest dobrze zdefiniowana, o ile całka niewłaściwa jest zbieżna.

Przykład 3

Rozważamy funkcję $h(x)$ określoną wzorem:

$$h(x) = \frac{9x}{100x^2 + 10}.$$

Obliczamy całkę normy L1 dla funkcji $h(x)$ na przedziale $[0, 5]$:

$$\int_0^5 h(x)\,dx = \frac{9\ln 210}{200} \approx 0.2486453822609302,$$

co daje normę L1 funkcji h na przedziale $[-5, 5]$ równą:

$$\|h\|_1 = \int_{-5}^{5} |h(x)|\,dx \approx 0.4972907645218605.$$

Normy funkcji określone na zbiorach skończonych lub ciągach

Normy mogą być również zdefiniowane dla funkcji określonych na zbiorach skończonych lub ciągach. Rozważmy zbiór $K = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ lub $K = \{x_1, x_2, x_3, \dots\}$, gdzie $a_i = f(x_i)$.

1. Norma jednostajna $\|f\| = \sup\{|a_1|, |a_2|, \dots\}$.
2. Norma L2 $\|f\|_2 = \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} a_i^2}$.
3. Norma L1 $\|f\|_1 = \sum_{i=1}^{\infty} |a_i|$.

Aproksymacja wielomianowa

1. Szeregi potęgowe i ich zastosowania w aproksymacji

Szeregi potęgowe

Szereg potęgowy zdefiniowany dla pewnego punktu x_0 wyraża się jako:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k,$$

gdzie $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, a r jest promieniem zbieżności szeregu. Dla x spoza tego przedziału, szereg jest rozbieżny.

Forma szeregu potęgowego

Możemy zapisać szereg potęgowy jako:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x - x_0)^k + R_n,$$

gdzie R_n jest resztą szeregu.

Aproksymacja szeregu potęgowego - wzór Taylora i Maclaurina

Jeśli:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x - x_0)^k + R_n$$

i $x \in (x_0 - r, x_0 + r)$, to

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} a_k (x - x_0)^k.$$

Powyższy wzór, gdzie $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$ nazywamy wzorem Taylora.

Dla $x_0 = 0$ wzór Taylora nazywamy wzorem Maclaurina:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n-1} a_k x^k.$$

Przykład 4 - aproksymacja $\sin x$

Przybliżenie funkcji $\sin x$ wzorem Maclaurina ma następującą formę:

$$\sin x \approx \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \frac{x^{2k-1}}{(2k-1)!} = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}.$$

2. Wielomiany Czebyszewa i ich zastosowanie w aproksymacji

Definicja wielomianów Czebyszewa

Wielomiany Czebyszewa definiuje się rekurencyjnie:

$$\begin{aligned} T_0(x) &= 1, \\ T_1(x) &= x, \\ T_k(x) &= 2xT_{k-1}(x) - T_{k-2}(x), \quad k \geqslant 2. \end{aligned}$$

W przedziale $[-1, 1]$, wielomiany Czebyszewa wyrażają się jako:

$$T_k(x) = \cos(k \arccos x),$$

dla $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Aproksymacja funkcji $f(x)$ sumami wielomianów Czebyszewa $T_k(x)$:

$$f(x) \approx \frac{c_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} c_k T_k(x),$$

gdzie

$$c_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} \frac{f(x) T_k(x)}{\sqrt{1 - x^2}} dx.$$

Przykład 5 - funkcja signum (sgn)

Rozważamy funkcję $sgn(x)$, określoną jako:

$$sgn(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x > 0, \\ -1 & \text{dla } x < 0, \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Ograniczając do dziedziny $(-1, 1)$, otrzymujemy:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (0, 1), \\ -1 & \text{dla } x \in (-1, 0), \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Można wykazać, że współczynniki c_k dla funkcji $sgn(x)$ wynoszą:

$$c_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k = 2i, \\ (-1)^{k+1} \frac{4}{\pi k} & \text{dla } k = 2i + 1, \quad k = 0, 1, \ldots . \end{cases}$$

Aproksymacja szeregami trygonometrycznymi

Szeregi trygonometryczne Fouriera

Szereg trygonometryczny Fouriera dla funkcji okresowej ma postać:

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)),$$

gdzie $x \in [-\pi, \pi]$, pod warunkiem zbieżności szeregu. Funkcja $f(x)$ jest okresowa z okresem 2π.
Aproksymację funkcji $f(x)$ uzyskujemy, biorąc początkowe składniki sumy szeregu trygonometrycznego:

$$f(x) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos(kx) + b_k \sin(kx)).$$

Przykład 6 - funkcja signum (sgn)

Rozważamy funkcję $sgn(x)$ na dziedzinie $(-\pi, \pi)$:

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in (0, \pi), \\ -1 & \text{dla } x \in (-\pi, 0), \\ 0 & \text{dla } x = 0. \end{cases}$$

Współczynniki szeregu Fouriera dla funkcji $sgn(x)$ są takie, że $a_k = 0$ oraz:

$$b_k = \begin{cases} 0 & \text{dla } k = 2i, \\ \frac{4}{\pi k} & \text{dla } k = 2i + 1, \end{cases}$$

gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots$.

Przykład 6 cd

Aproksymacja funkcji $sgn(x)$ szeregiem trygonometrycznym:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} b_{2k+1} \sin((2k+1)x),$$

gdzie $s(k,x) = b_k \sin(kx)$, a więc:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} s(2k+1, x).$$

Aproksymacja średniokwadratowa

Kolejnym zagadnieniem jest aproksymacja średniokwadratowa (metoda najmniejszych kwadratów) i jej zastosowanie do przybliżania funkcji z użyciem normy L_2.

Dla zbioru punktów (x_i, y_i), gdzie $y_i = f(x_i)$, szukamy funkcji $F(x)$ takiej, że dla pewnej funkcji wagowej $w(x)$ wyrażenie:

$$||F - f||_2 = \sum_{i=1}^{n} w(x_i)(F(x_i) - y_i)^2$$

osiąga minimum.
Dla uproszczenia w dalszych rozważaniach przyjmujemy $w(x) = 1$.

Aproksymacja liniowa

Najprostszym przypadkiem aproksymacji średniokwadratowej jest aproksymacja liniowa. W aproksymacji liniowej szukamy $F(x) = ax + b$, minimalizując:

$$h(a, b) = \sum_{i=1}^{n} (ax_i + b - y_i)^2.$$

Obliczamy pochodne cząstkowe $h(a, b)$ po a i b, a następnie rozwiązujemy układ równań:

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b)x_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (y_i - ax_i - b) = 0. \end{cases}$$

Po przekształceniach otrzymujemy:

$$a = \frac{nA - BC}{nD - B^2}, \quad b = \frac{CD - AB}{nD - B^2},$$

gdzie:

$$A = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i, \quad B = \sum_{i=1}^{n} x_i, \quad C = \sum_{i=1}^{n} y_i, \quad D = \sum_{i=1}^{n} x_i^2.$$

Przykład 9 - aproksymacja liniowa

Mając dane przedstawione poniższą tabelą

x_i	y_i
1	1
3	12
5	25
7	38

możemy obliczyć współczynniki a i b jako:

$$a = 6.2, \quad b = -5.8.$$

Przyjmujemy formę funkcji aproksymującej:

$$F(x) = a_0\phi_0(x) + a_1\phi_1(x) + \ldots + a_m\phi_m(x),$$

gdzie dla uproszczenia $\phi_k(x) = x^k$.
Zadaniem jest minimalizacja funkcji błędu:

$$h(a_0, a_1, \ldots, a_m) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - y_i \right)^2 .$$

Dla każdego $i = 0, 1, \ldots, m$ otrzymujemy układ $m + 1$ równań z $m + 1$ niewiadomymi:

$$\frac{\partial h}{\partial a_i} = 2 \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j - y_i \right) x_i^i = 0.$$

Układ równań w postaci macierzowej dla dwóch niewiadomych a_0 i a_1 (wielomian 1-go stopnia, czyli równanie prostej: $y = ax + b$).

$$\begin{bmatrix} n & \sum_{i=1}^{n} x_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i & \sum_{i=1}^{n} x_i^2 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} b \\ a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=1}^{n} y_i \\ \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \end{bmatrix}$$

Budowa układu równań - ciąg dalszy

$$nb + a\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} y_i$$

$$b\sum_{i=1}^{n} x_i + a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

Przykład 10 - aproksymacja wielomianem drugiego stopnia

Dla danych z poniższej tabeli znajdziemy wielomian aproksymujący drugiego stopnia.

x_i	y_i
0	2.00
0.5	2.48
1.0	2.84
1.5	3.00
2.0	2.91

Przykład 10 cd

Poszukujemy wielomianu $F(x) = ax^2 + bx + c$. Równania wynikające z minimalizacji błędu to:

$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^4 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + c\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i,$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^3 + b\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + c\sum_{i=1}^{n} x_i = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i,$$
$$a\sum_{i=1}^{n} x_i^2 + b\sum_{i=1}^{n} x_i + nc = \sum_{i=1}^{n} y_i.$$

Przykład 10 cd

Rozwiązując powyższy układ równań, uzyskujemy:

$$a = -\frac{67}{175}, \quad b = \frac{2159}{1750}, \quad c = \frac{6953}{3500}.$$

Wielomian aproksymujący:

$$F(x) = -\frac{67}{175}x^2 + \frac{2159}{1750}x + \frac{6953}{3500}.$$