

# Metody numeryczne

## Wykład nr 3

### Układy równań liniowych

Aneta Wróblewska

UMCS, Lublin

March 12, 2024

# Układ równań liniowych, zapis macierzowy

Układ  $m$  równań liniowych z  $n$  niewiadomymi:

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1n}x_n = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 + \dots + a_{2n}x_n = b_2,$$

...

$$a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 + \dots + a_{mn}x_n = b_m.$$

można zapisać następująco:

$$\sum_{j=1}^n a_{ij}x_j = b_i \quad (i = 1, 2, \dots, m),$$

lub w zapisie macierzowym

$$Ax = b$$

gdzie  $A = [a_{ij}]$  jest macierzą główną układu równań, złożoną ze współczynników układu, wektora niewiadomych  $x$  i wektora wyrazów wolnych  $b$ .

# Układ równań liniowych, zapis macierzowy

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}, \quad b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Zatem powyższy układ równań  $Ax = b$  może być przedstawiony w zapisie macierzowym w następujący sposób:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{bmatrix}$$

Symbolem  $A_b$  oznaczmy macierz o rozmiarach  $m \times (n + 1)$ , która powstaje z macierzy  $A$  przez dołączenie do niej wektora  $b$  jako  $(n + 1)$ -szej kolumny. Macierz  $A_b$  (macierz główna i kolumna wyrazów wolnych) nazywamy **macierzą rozszerzoną**.

$$A_b = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{bmatrix}$$

# Rząd macierzy, istnienie rozwiązania

Dowolną macierz  $A$ , np. macierz główną układu równań, można uważać za zbudowaną z jej wektorów kolumnowych lub jej wektorów wierszowych:

$$A = (a_{.1}, a_{.2}, \dots, a_{.n})$$

$$A = (a_1^T, a_2^T, \dots, a_m^T)^T$$

Największa liczba niezależnych liniowo wektorów kolumnowych w  $A$  jest równa największej liczbie niezależnych liniowo wektorów wierszowych w  $A$ . Ta liczba  $r$  nazywana jest **rzędem macierzy**  $A$

$$\text{rank}(A) = r$$

## Twierdzenie 1 Kroneckera-Capellego

- Jeżeli rząd macierzy głównej jest równy rzędowi macierzy rozszerzonej i liczbie niewiadomych w układzie  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A_b) = n$ , to układ ma dokładnie jedno rozwiązanie (układ oznaczony).
- Jeżeli rzędy macierzy głównej i macierzy rozszerzonej są sobie równe ale są mniejsze od liczby niewiadomych  $\text{rank}(A) = \text{rank}(A_b) < n$ , to układ ma nieskończenie wiele rozwiązań (układ nieoznaczony).
- Jeżeli rząd macierzy głównej jest mniejszy niż rząd macierzy rozszerzonej  $\text{rank}(A) < \text{rank}(A_b)$ , to układ równań nie ma rozwiązań (układ sprzeczny).

# Typy układów równań liniowych

Typy układów równań liniowych:

- **Układ jednorodny:** Jeżeli wszystkie wyrazy wolne są równe 0, to układ nazywamy jednorodnym. Taki układ ma zawsze rozwiązanie.
- **Układ kwadratowy:** Jeżeli liczba wierszy równa jest liczbie kolumn w macierzy głównej ( $m = n$ ), to układ nazywamy kwadratowym.

# Metody rozwiązywania układów równań liniowych

Metody rozwiązywania układów równań liniowych:

- **Bezpośrednie (dokładne):** dają dokładne rozwiązanie po skończonej liczbie przekształceń układu wejściowego, pomijając oczywiście błędy zaokrągleń.
  - efektywne dla układów o macierzach pełnych
  - mocno obciążają pamięć
  - ze względu na błędy zaokrągleń mogą być niestabilne
- **Iteracyjne (przybliżone):** tworzą ciąg wektorów zbieżny do szukanego rozwiązania.
  - liczba kroków nie jest z góry znana
  - dobrze się sprawdzają dla macierzy rzadkich o dużych rozmiarach
  - obciążenie pamięci nie jest zbyt duże
  - mogą wystąpić problemy ze zbieżnością rozwiązania



# Typy zagadnień w rozwiązaniach numerycznych

Spotykane w praktyce inżynierskiej macierze współczynników dzielą się ogólnie na dwie grupy:

- 1 **Macierze pełne (ale nieduże):** Mają one mało elementów niezerowych. Nieduże oznacza, że są stopnia mniejszego np. od 30 (od 1 000). Macierze takie występują w różnych zadaniach statystyki, w fizyce matematycznej i w technice, np. przy obliczaniu reakcji w podporach belek, sił w prętach kratownicy itp.
- 2 **Macierze rzadkie (ale najczęściej bardzo duże):** Mają one mało elementów niezerowych. Macierze te można tak skonstruować, że elementy niezerowe leżą zawsze bardzo blisko głównej diagonal. Przez duże rozumie się macierze stopnia 100 (10 000) lub większe. Występują one powszechnie w rozwiązywaniu numerycznym równań różniczkowych częściowych, np. w wyznaczaniu pól temperatury, pól przemieszczeń, odkształceń i naprężeń, itd.

# Metody bezpośrednie i iteracyjne

Do metod bezpośrednich należą m.in.:

- 1 użycie macierzy odwrotnej,
- 2 wzory Cramera,
- 3 układ równań z macierzą trójkątną,
- 4 metoda eliminacji Gaussa,
- 5 rozkłady trójkątne macierzy,
- 6 Gaussa-Jordana,
- 7 Doolittle'a,
- 8 Crout'a,
- 9 Choleski'ego (Banachiewicza).

Do metod iteracyjnych należą m.in.:

- 1 Jacobi'ego,
- 2 Gaussa-Seidel'a,
- 3 Czebyszewa.

Pierwsza, omówiona tutaj, metoda bezpośrednia rozwiązywania układ równań będzie polegała na wykorzystaniu macierzy odwrotnej odpowiadającej danemu układowi równań.

Przypomnijmy z poprzedniego wykładu, że dla macierzy odwrotnej  $A^{-1}$  do macierzy kwadratowej  $A$ , zachodzi:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$

gdzie  $I$  jest macierzą jednostkową.

# Rozwiązanie układu równań z użyciem macierzy odwrotnej

Układ równań w postaci macierzowej:

$$Ax = b$$

można rozwiązać następująco, jeśli znamy macierz odwrotną:

$$A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow Ix = A^{-1}b$$

czyli:

$$x = A^{-1}b$$

Kolejnym sposobem rozwiązywania układu równań są **wzory Cramera**.

Jeżeli wyznacznik macierzy głównej układu równań  $Ax = b$  jest różny od zera,  $\det(A) \neq 0$ , tzn. jeśli macierz  $A$  składa się z wektorów niezależnych liniowo (jest nieosobliwa), to

$$x_k = \frac{\det(A_k)}{\det(A)} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

gdzie  $A_k$  jest macierzą powstałą przez zastąpienie  $k$ -tej kolumny wektorem wyrazów wolnych  $b$ .

# Wzory Cramera, zapis wektorowy

Układ równań  $Ax = b$  można zapisać w postaci wektorowej następująco

$$\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = b$$

gdzie  $\alpha_k (k = 1, 2, \dots, n)$  oznacza wektor o składowych  $(a_{1k}, a_{2k}, \dots, a_{nk})$ , natomiast  $b$  - wektor o składowych  $(b_1, b_2, \dots, b_n)$ .

Jeżeli  $\det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \neq 0$ , tzn. jeśli wektory  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  są niezależne liniowo (macierz  $A$  jest nieosobliwa), to

$$x_k = \frac{\det(\alpha_1, \dots, \alpha_{k-1}, \beta, \alpha_{k+1}, \dots, \alpha_n)}{\det(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n)} \quad k = 1, 2, \dots, n$$

Wzory noszą nazwę wzorów Cramera.

# Wzory Cramera - przykład 3x3

Rozwiązać układ równań posługując się wzorami Cramera

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

Obliczamy wyznacznik macierzy głównej:

$$\det(A) = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

# Wzory Cramera - przykład 3x3 cd.

Obliczamy kolejno

$$x_1 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{bmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{\det(A_1)}{\det(A)}$$

$$x_2 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{bmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{bmatrix} \equiv \frac{\det(A_2)}{\det(A)}$$

$$x_3 = \frac{1}{\det(A)} \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{bmatrix} \equiv \frac{\det(A_3)}{\det(A)}$$



# Rozwiązanie układu równań z macierzą trójkątną

Jezeli macierz układu równan liniowych jest macierzą trójkątną, rozwiązuje się go szczególnie łatwo. Dla ustalenia uwagi przyjmijmy, że  $A$  jest macierzą trójkątną górną. Aby istniało jednoznaczne rozwiązanie, macierz musi być nieosobliwa. Innymi słowy, wszystkie elementy na głównej przekątnej macierzy  $A$  muszą być różne od zera.

# Rozwiązanie układu równań z macierzą trójkątną

Nasz układ będzie miał postać:

$$\begin{aligned}a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \quad (1) \\&\dots \\&\dots \quad a_{nn}x_n = b_n\end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że składową  $x_n$  wektora niewiadomych  $x$  obliczymy natychmiast z ostatniego równania powyższego układu. Podstawiając wynik do przedostatniego równania, wyznaczamy  $x_{n-1}$ . Procedurę kontynuujemy aż do wyliczenia  $x_1$ .

# Rozwiązanie układu równań z macierzą trójkątną

Rozwiązanie zapisze się wzorem:

$$x_n = \frac{b_n}{a_{nn}}, \quad x_i = \frac{b_i - \sum_{k=i+1}^n a_{ik}x_k}{a_{ii}}, \quad i = n-1, n-2, \dots, 1. \quad (2)$$

Ponieważ obliczenia zaczynamy od ostatniej składowej wektora niewiadomych, metoda ta nazywana jest podstawianiem w tył. Do znalezienia  $x$  musimy wykonać  $M = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$  mnożeń i dzielenia oraz  $D = \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n$  dodawań. Koszt obliczeń jest więc niewiele większy od kosztu mnożenia wektora przez macierz trójkątną!

# Rozwiązanie układu równań z macierzą trójkątną

W podobny sposób znajdziemy rozwiązanie układu z macierzą trójkątną dolną, tym razem wykonując podstawianie w przód:

$$x_1 = \frac{b_1}{a_{11}} \quad (3)$$
$$x_i = \frac{b_i - \sum_{k=1}^{i-1} a_{ik}x_k}{a_{ii}}, \quad i = 2, 3, \dots, n.$$

Koszt obliczeń jest oczywiście taki sam jak poprzednio. Wiele metod numerycznego rozwiązywania układów równań z dowolnymi macierzami polega na sprowadzeniu układu wyjściowego do postaci trójkątnej, a następnie zastosowaniu jednego ze wzorów (2)-(3).

Jedną z takich właśnie metod jest eliminacja Gaussa. Chociaż nazwana tak na cześć Carla Friedricha Gaussa, po raz pierwszy została zaprezentowana dużo wcześniej, bo już około 150 roku p.n.e w słynnym chińskim podręczniku matematyki „Dziewięć rozdziałów sztuki matematycznej”.

Dla ułatwienia założymy, że macierz układu jest wymiaru  $3 \times 3$ , tzn.

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1,$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2, \quad (4)$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3.$$

# Eliminacja Gaussa

Naszym celem jest sprowadzenie tego układu do postaci trójkątnej. Odejmując od drugiego wiersza układu (4) pierwszy pomnożony przez  $a_{21}/a_{11}$ , a od trzeciego pierwszy pomnożony przez  $a_{31}/a_{11}$ , otrzymamy:

$$\begin{aligned}a_{11}^{(0)} x_1 + a_{12}^{(0)} x_2 + a_{13}^{(0)} x_3 &= b_1^{(0)}, \\a_{22}^{(1)} x_2 + a_{23}^{(1)} x_3 &= b_2^{(1)}, \\a_{32}^{(1)} x_2 + a_{33}^{(1)} x_3 &= b_3^{(1)},\end{aligned}\quad (5)$$

gdzie

$$\begin{aligned}a_{ij}^{(0)} &= a_{ij}, \quad b_i^{(0)} = b_i, \quad i, j = 1, 2, 3, \\a_{ij}^{(1)} &= a_{ij}^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)} a_{1j}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \quad b_i^{(1)} = b_i^{(0)} - \frac{a_{i1}^{(0)} b_1^{(0)}}{a_{11}^{(0)}}, \quad i, j = 2, 3.\end{aligned}$$

# Eliminacja Gaussa

Aby wyeliminować zmienną  $x_2$  z trzeciego równania w układzie (5), odejmujemy od niego drugie pomnożone przez  $a_{32}^{(1)}/a_{22}^{(1)}$ :

$$a_{11}^{(0)}x_1 + a_{12}^{(0)}x_2 + a_{13}^{(0)}x_3 = b_1^{(0)},$$

$$a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = b_2^{(1)},$$

$$a_{33}^{(2)}x_3 = b_3^{(2)},$$

gdzie

$$a_{ij}^{(2)} = a_{ij}^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}a_{2j}^{(1)}}{a_{22}^{(1)}},$$

$$b_i^{(2)} = b_i^{(1)} - \frac{a_{i2}^{(1)}b_2^{(1)}}{a_{22}^{(1)}}, \quad i, j = 3.$$

# Eliminacja Gaussa

Wzory na współczynniki macierzy i wyrazy wolne w każdym kroku eliminacji Gaussa łatwo jest uogólnić na przypadek macierzy dowolnego rozmiaru:

$$a_{ij}^{(k)} = a_{ij}^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} a_{kj}^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i, j = k+1, k+2, \dots, n,$$
$$b_i^{(k)} = b_i^{(k-1)} - \frac{a_{ik}^{(k-1)} b_k^{(k-1)}}{a_{kk}^{(k-1)}}, \quad i, j = k+1, k+2, \dots, n.$$

Tym sposobem rzeczywiście otrzymaliśmy układ trójkątny, który można teraz rozwiązać podstawianiem wstecz (6):

$$x_i = \frac{b_i^{(i-1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij}^{(i-1)} x_j}{a_{ii}^{(i-1)}}, \quad i = n, n-1, \dots, 1. \quad (6)$$



# Wybór elementu podstawowego

Eliminacja Gaussa w formie przedstawionej powyżej nie jest niezawodna.

Jeśli macierz jest nieosobliwa, to istnieje jednoznaczne rozwiązanie. W przypadku, gdy  $a_{11} = 0$  eliminacja Gaussa zawodzi już w pierwszym kroku, ponieważ algorytm wymaga dzielenia przez  $a_{11}$ . Dlatego najczęściej stosuje się pewną modyfikację metody Gaussa, zwana **częściowym wyborem elementu podstawowego**.

**Elementem podstawowym** nazywamy ten element macierzy  $A$ , za pomocą którego dokonujemy eliminacji zmiennej z dalszych równań.

# Wybór elementu podstawowego

- W przypadku, gdy któryś z elementów na głównej diagonalu, tzn. któryś z elementów podstawowych (ang. pivot) jest równy zero, tj.  $a_{kk}^{(k)} = 0$ , należy tak przekształcić układ równań, o ile tylko jest on nieosobliwy, aby wartość  $a_{kk}^{(k)} \neq 0$ .
- Należy w tym celu wykonać operację przestawienia wierszy, tj.  $(E_k) \leftrightarrow (E_p)$  gdzie  $k + 1 \leq p \leq n$ .
- W praktyce często żąda się dodatkowo, aby element podstawowy przyjmował jak największą wartość absolutną.

**Przykład:** Rozważmy układ, biorąc pod uwagę jego macierz rozszerzoną w następującej postaci:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 3 & 3 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 1 & 2 \end{array} \right]$$

# Zamiana wierszy w macierzy układu

Wiemy już, że  $a_{11} = 0$  nie może być elementem podstawowym. Dlatego skorzystamy ze wspomnianej powyżej własności układów równań i zamienimy ze sobą wiersze w macierzy układu, tak aby nowy element diagonalny w jej pierwszym wierszu był różny od zera.

# Wybór elementu podstawowego

Ze względu na błędy zaokrągleń w  $i$ -tym kroku eliminacji Gaussa powinniśmy się kierować wartościami elementów w  $i$ -tej kolumnie i wybierać wiersz, który ma największy element (wartość bezwzględna).

Po zamianie wierszy otrzymujemy następującą macierz, na której możemy wykonać pierwszy krok eliminacji Gaussa:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 1 \end{array} \right]$$

# Wybór elementu podstawowego

W kolejnym kroku nie musimy zamieniać wierszy ze sobą:

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 3 & 3 & 0 & 3 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & \frac{3}{2} \end{array} \right]$$

Końcowe rozwiązanie znajdziemy ze wzoru (6):

$$x_3 = \frac{b_3^{(3)}}{a_{33}^{(3)}} = \frac{3}{4},$$

$$x_2 = \frac{b_2^{(3)} - a_{23}^{(3)} x_3}{a_{22}^{(3)}} = -\frac{1}{4},$$

$$x_1 = \frac{b_1^{(3)} - a_{12}^{(3)} x_2 - a_{13}^{(3)} x_3}{a_{11}^{(3)}} = \frac{5}{4}.$$

# Wybór elementu podstawowego

Taka metoda postępowania jest częściowym wyborem elementu głównego. Pełny wybór realizowalibyśmy wyszukując współczynnika największego co do modułu nie tylko w kolumnie pod napotkanym zerem ale w całej podmacierzy "w dół i w prawo". Może to jeszcze poprawić dokładność ale jest znacznie bardziej czasochłonne.

# Rozkład LU

Wiemy już, że rozwiązanie układu równań z macierzami trójkątnymi jest szczególnie łatwe. Przypuśćmy zatem, że macierz  $A$  dowolnego układu da się przedstawić w postaci iloczynu macierzy trójkątnej dolnej  $L$  i trójkątnej górnej  $U$ ,

$$A = LU.$$

Jeżeli macierz  $A$  jest nieosobliwa, zachodzi

$$A^{-1} = (LU)^{-1} = U^{-1}L^{-1},$$

a więc rozwiązanie układu da się przedstawić w postaci

$$x = A^{-1}b = U^{-1}(L^{-1}b).$$

Aby znaleźć rozwiązanie  $x$  układu dysponując rozkładem LU jego macierzy, wystarczy rozwiązać dwa układy trójkątne:

$$Ly = b,$$

$$Ux = y.$$



# Eliminacja Gaussa a rozkład LU

Okazuje się, że jednym ze sposobów uzyskania rozkładu LU jest omówiona już eliminacja Gaussa.

W wyniku eliminacji Gaussa zostanie uzyskana macierz górnotrójkątna  $U$ . Z kolei macierz dolnotrójkątną  $L$  należy wyznaczyć w następujący sposób. Pierwszy krok eliminacji Gaussa polega na wyzerowaniu kolumny poniżej elementu  $a_{11}$ . Zerując  $i$ -tym wierszem  $j$ -ty wiersz należy wpisać na pozycji  $L_{ji}$  współczynnik przez który został pomnożony wiersz  $i$ -ty. Ponadto macierz dolnotrójkątna  $L$  ma zawsze na diagonalu wartości 1. Po wykonaniu eliminacji Gaussa zostaną uzyskane dwie macierze  $L$  i  $U$ .

# Eliminacja Gaussa a rozkład LU

Nie każda macierz nieosobliwa można przedstawić w postaci  $A = LU$ . Aby rozkład istniał, wszystkie minory główne macierzy muszą być różne od zera. Jednak, jeżeli eliminację Gaussa można przeprowadzić do końca, rozkład LU na pewno istnieje. Jeżeli eliminacja Gaussa wymaga zamiany wierszy, wówczas zamiast rozkładu LU macierzy  $A$  znajdziemy rozkład permutacji jej wierszy,

$$PA = LU,$$

gdzie  $P$  to macierz permutacji. Jej znaczenie najlepiej jest zilustrować na przykładzie:

$$PA = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Macierz permutacji ma następującą własność:

$$P^T P = I \quad \Rightarrow \quad P^T = P^{-1}.$$

Stąd wynika

$$A = P^T L U.$$

Rozkład LU możemy poszukać również w inny sposób, traktując równość (7) jako układ  $n^2$  równań dla  $n^2$  niewiadomych  $l_{ij}$  i  $u_{ij}$ :

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{bmatrix}$$

Stąd

$$u_{11} = a_{11}, \quad u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13},$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}}, \quad u_{22} = a_{22} - l_{21}u_{12}, \quad u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13},$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}, \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}}, \quad u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}.$$

W przypadku ogólnym elementy macierzy  $L$  i  $U$  obliczamy kolejno dla  $i = 1, 2, \dots, n$  z następujących wzorów:

$$\begin{aligned} u_{ij} &= a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik} u_{kj}, & j &= i, i+1, \dots, n, \\ l_{ji} &= \frac{a_{ji} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} u_{ki}}{u_{ii}}, & j &= i+1, i+2, \dots, n. \end{aligned} \quad (8)$$

Metoda Doolittle'a staje się niezawodna dopiero w połączeniu z wyborem elementu podstawowego. Wiersze powinniśmy zamieniać ze sobą miejscami tak, aby element  $u_{ii}$  we wzorze (8) był jak największy.

Do tej pory zakładaliśmy po cichu, że elementy diagonalne macierzy  $L$  są równe 1. Jeżeli dla odmiany przyjmiemy, że to  $U$  ma na głównej przekątnej same jedynki:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ponownie potraktujemy powyższe wyrażenie jak równanie na niewiadome elementy macierzy trójkątnych. Otrzymamy metodę zaproponowaną przez Crouta:

$$u_{12} = a_{12}, \quad u_{13} = a_{13},$$

$$l_{21} = \frac{a_{21}}{u_{11}},$$

$$u_{23} = a_{23} - l_{21}u_{13},$$

$$l_{31} = \frac{a_{31}}{u_{11}}, \quad l_{32} = \frac{a_{32} - l_{31}u_{12}}{u_{22}},$$

$$u_{33} = a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23}.$$



Rozkład macierzy  $A$  na iloczyn  $LU$  nie jest jedynym możliwym rozkładem. Omówimy krótko jeszcze jeden z nich - rozkład Cholesky'ego (Banachiewicza).

# Rozkład Cholesky'ego (Banachiewicza)

Jeżeli macierz układu jest macierzą symetryczną, tzn.

$$a_{ij} = a_{ji}, \quad i, j = 1, \dots, n,$$

i dodatnio określona,

$$\mathbf{x}^T \mathbf{A} \mathbf{x} > 0 \quad \text{dla każdego } \mathbf{x},$$

to istnieje dla niej bardziej wydajny od  $LU$  rozkład na macierze trójkątne, a mianowicie

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \mathbf{L}^T,$$

gdzie  $\mathbf{L}$  to macierz trójkątna dolna. Traktując to jako układ równań ze względu na elementy macierzy  $\mathbf{L}$ , znajdziemy:

$$l_{ii} = \sqrt{a_{ii} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{ik}^2},$$
$$l_{ji} = \frac{1}{l_{ii}} \left( a_{ij} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{jk} l_{ik} \right), \quad j = i+1, i+2, \dots, n.$$

# Rozkład Cholesky'ego

Ilość operacji potrzebna do znalezienia rozkładu Cholesky'ego jest o połowę mniejsza w porównaniu z  $LU$ . Dodatkową zaletą, związaną z własnościami macierzy  $A$ , jest niezawodność (metoda nie wymaga wyboru elementu podstawowego) i stabilność numeryczna.