二阶线性偏微分方程

Sydney

更新：November 21, 2023

1 最简单偏微分方程的分类

- 椭圆型方程的标准型：$u_{ss}+u_{rr}=H(s,r,u,u_s,u_r)$
- 双曲型方程的标准型：$u_{ss}-u_{rr}=H(s,r,u,u_s,u_r)$
- 抛物型方程的标准型：$u_{rr}=H(s,r,u_s,u_r,u_r)$

实际上，可以看出来标准型的定义是对函数 u 没有求混合偏导的形式，然后再根据对 x 的二阶导数和对 y 的二阶导数的关系分类。

2 二阶线性偏微分方程

二阶线性齐次偏微分方程的一般形式是：

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=g \tag{1}$$

先给出结论：定义 (1) 的特征方程：

$$a(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x})^2-2b\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+c=0 \tag{2}$$

- 当 $b^2-ac>0$ 时，(1) 式是一个双曲型方程。
  此时特征方程有两个不等实根，进一步可以得到关于 x 和 y 的两个通积分

  $$\begin{cases}\xi(x,y)=C_1\\ \eta(x,y)=C_2\end{cases}$$

  因此只需要作代换

  $$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$$

  即可把一般方程化成双曲线型的标准方程之一 $u_{\xi\eta}=H(\xi,\eta,u,u_\xi,u_\eta)$
  然后再进一步代换，令 $\xi=s+t,\quad \eta=s-t$ 即可得到双曲线形的标准方程

- 当 $b^2-ac=0$ 时，(1) 式是一个抛物型方程。
  此时特征方程有两个相等的实根，可以得到一个通积分

  $$\xi(x,y)=C_1$$

  这时我们取任意一个和 $\xi(x,y)$ 线性无关的函数 $\eta(x,y)$ 作代换

  $$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$$

  就可以把方程化成抛物型方程的标准形式
- 当 $b^2-ac<0$ 时，(1) 式是一个椭圆型方程。此时特征方程有两个共轭复根，可以得到两个通积分

  $$\begin{cases}\xi(x,y)=s(x,y)+\mathrm{i}r(x,y)\\ \eta(x,y)=s(x,y)-\mathrm{i}r(x,y)\end{cases}$$

  然后我们再作代换

  $$\begin{cases}s=s(x,y)\\ t=t(x,y)\end{cases}$$

  即可得到椭圆型方程的标准型

对于二阶线性偏微分方程的一般形式

$$au_{xx}+2bu_{xy}+cu_{yy}+du_x+eu_y+fu=g$$

我们希望进行适当的变换

$$\begin{cases}\xi=\xi(x,y)\\ \eta=\eta(x,y)\end{cases}$$

进行化简，并且雅可比行列式 $J=\dfrac{\partial(\xi,\eta)}{\partial(x,y)}\neq 0$ 这意味着我们需要找到一个可逆的变换

从上面的式子解出 $x=x(\xi,\eta),y=y(\xi,\eta)$ 之后，由复合函数的求导法则，有

$$\begin{cases}u_x=u_\xi\xi_x+u_\eta\eta_x\\ u_y=u_\xi\xi_y+u_\eta\eta_y\\ u_{xx}=u_{\xi\xi}\xi_x^2+2u_{\xi\eta}\xi_x\eta_x+u_{\eta\eta}\eta_x^2+u\xi_{xx}+u_\eta\eta_{xx}\\ u_{xy}=u_{\xi\xi}\xi_x\xi_y+u_{\xi\eta}(\xi_x\eta_y+\xi_y\eta_x)+u_{\eta\eta}\eta_x\eta_y+u_\xi\xi_{xy}+u_\eta\eta_{xy}\\ u_{yy}=u_{\xi\xi}\xi_y^2+2u_{\xi\eta}\xi_y\eta_y+u_{\eta\eta}\eta_y^2+u_\xi\xi_{yy}+u_{\xi\eta}\eta_{yy}\end{cases}$$

代入一般形式中，有：

$$a_1u_{\xi\xi}+2b_1u_{\xi\eta}+c_1u_{\eta\eta}+d_1u_\xi+e_1u_\eta+f_1u=g_1$$

其中，

$$\begin{cases} a_1 = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 \\ b_1 = a\xi_x\eta_x + b\left(\xi_x\eta_y + \xi_y\eta_x\right) + c\xi_y\eta_y \\ c_1 = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 \\ d_1 = a\xi_{xx} + 2b\xi_{xy} + c\xi_{yy} + d\xi_x + e\xi_y \\ e_1 = a\eta_{xx} + 2b\eta_{xy} + c\eta_{yy} + d\eta_x + e\eta_y \\ f_1 = f \\ g_1 = g \end{cases}$$

那么只需要找到 $\xi(x,y), \eta(x,y)$ 使得

$$\begin{cases} a_1 = a\xi_x^2 + 2b\xi_x\xi_y + c\xi_y^2 = 0 \\ c_1 = a\eta_x^2 + 2b\eta_x\eta_y + c\eta_y^2 = 0 \end{cases}$$

经过简单的化简就可以得到特征方程，然后对根的种类讨论过程略