

UNIVERSIDADE POSITIVO

DIEGO OLIVEIRA KUNRATH
GUSTAVO CROVADOR

DESENVOLVIMENTO DE *SOFTWARE* DIDÁTICO PARA ANÁLISES DE
CONDUÇÃO DE CALOR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

CURITIBA
2017

UNIVERSIDADE POSITIVO

DIEGO OLIVEIRA KUNRATH
GUSTAVO CROVADOR

DESENVOLVIMENTO DE *SOFTWARE* DIDÁTICO PARA ANÁLISES DE
CONDUÇÃO DE CALOR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Monografia apresentada à disciplina de Trabalho de Conclusão de Curso como requisito parcial à conclusão do Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Positivo.

Orientador: M. Eng. Antonio Carlos Foltran

CURITIBA

2017

TERMO DE APROVAÇÃO

DIEGO OLIVEIRA KUNRATH

GUSTAVO CROVADOR

DESENVOLVIMENTO DE *SOFTWARE* DIDÁTICO PARA ANÁLISES DE
CONDUÇÃO DE CALOR PELO MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS

Monografia aprovada como requisito parcial à obtenção do grau de Engenheiro Mecânico no Curso de Engenharia Mecânica da Universidade Positivo, pela seguinte banca examinadora:

M. Eng. Antonio Carlos Foltran (Orientador)

M. Eng. Diego Fernando Moro (Relator)

Prof. Dr. Alysson Nunes Diógenes (Relator)

Curitiba, 13 de novembro de 2017

AGRADECIMENTOS

Agradecemos a Deus, aos nossos familiares, amigos e a todos aqueles que fazem de nós seres humanos cada vez melhores ao oferecerem seu amor e carinho infindáveis e de forma desmedida. Agradecemos, também, a nosso orientador, M. Eng. Antonio Carlos Foltran, por toda sua imensa ajuda e paciência durante o desenvolvimento deste trabalho, e também pelo seu companheirismo e valioso conhecimento. À Universidade Positivo e toda sua equipe de colaboradores, pela formidável estrutura oferecida a seus alunos e professores.

RESUMO

O estudo da condução de calor por engenheiros é de suma importância. A utilização de recursos computacionais para a solução deste tipo de problema já há muito não é uma novidade. Não obstante, os autores encontraram uma carência de programas de simulação computacional genuinamente didáticos e com mínimas limitações de uso. Este trabalho buscou suprir esta necessidade a partir do desenvolvimento de um *software* didático e totalmente gratuito para análises de condução de calor bidimensionais em regime permanente, baseado no Método dos Elementos Finitos (MEF), a ser empregado por docentes e discentes como ferramenta de aprendizado e ensino. Denominado “Ignis”, seu desenvolvimento deu-se na linguagem VB.NET, da Microsoft. Ferramentas de importação de geometrias de arquivos DXF gerados por *softwares* CAD especializados como AutoCAD e SolidWorks, geração de malhas triangulares lineares não-estruturadas e diferentes métodos de visualização gráfica dos resultados foram compilados em um executável para Windows, oferecendo uma interface de usuário amigável e intuitiva. Para teste do código, resultados obtidos pelo Ignis em diversos problemas distintos foram confrontados com soluções analíticas (quando possível) e resultados gerados pelo *software* ANSYS. De modo geral, neste confronto de resultados, foram encontrados erros relativos de até 0,108%, ou seja, demonstrou-se que o Ignis pode ser utilizado como uma ferramenta útil no meio acadêmico, produzindo resultados satisfatórios. Seu código-fonte foi disponibilizado em sítio eletrônico para indivíduos interessados em analisar, incrementar e adaptar este trabalho.

Palavras-chave: *Software*, MEF, Análise, Condução, Ignis

ABSTRACT

The study of heat conduction by engineers is of utmost importance. The use of computational resources to solve this type of problem is certainly no novelty. Nevertheless, the authors have found a scarcity of genuinely didactic programs with minimum limitations for computer simulations. This work sought to fulfill this need by developing a didactic and completely free software for steady-state, two-dimensional heat conduction analyses based on the Finite Element Method (FEM), to be used by teachers and students as a learning and teaching tool. Denominated "Ignis", its development was made by using the VB.NET programming language, from Microsoft. Tools for geometry importing from DXF files generated by specialized CAD software such as AutoCAD and SolidWorks, generation of linear triangular unstructured meshes and different methods of graphics results rendering were compiled into a single Windows executable offering a friendly and intuitive user interface. To evaluate the code, results obtained using Ignis in various distinct problems were compared to analytical solutions (when possible) and results obtained using ANSYS, a software widely used by universities and industries. In general, while comparing results, the authors found relative errors lower than 0,108%, that is, it has been demonstrated that Ignis can be used as a useful tool in an academic environment, producing satisfactory results. Its source code was made available at the internet for individuals willing to analyze, increment and adapt this work.

Keywords: Software, FEM, Analysis, Conduction, Ignis

LISTA DE FIGURAS

FIGURA 1 – INTERFACE DO SOFTWARE TRANSCAL 1.1	9
FIGURA 2 – INTERFACE DO SOFTWARE CFD-STUDIO 1.0	10
FIGURA 3 – PRINCIPAIS COMPONENTES DE UMA MALHA TRIANGULAR	14
FIGURA 4 – PRINCIPAIS TIPOS DE ELEMENTOS BIDIMENSIONAIS	14
FIGURA 5 – COMPARAÇÃO ENTRE MALHAS EM UMA MESMA GEOMETRIA ...	15
FIGURA 6 – ALGUNS TIPOS DE ELEMENTO TRIANGULAR.....	16
FIGURA 7 – REPRESENTAÇÃO DE UM ELEMENTO TRIANGULAR LINEAR.....	17
FIGURA 8 – ELEMENTO SUJEITO A DIVERSAS CONDIÇÕES DE CONTORNO .	23
FIGURA 9 – VARIAÇÃO DA TEMPERATURA NO DOMÍNIO DO TEMPO	26
FIGURA 10 – MALHA 2D COM TRÊS ELEMENTOS TRIANGULARES	28
FIGURA 11 – TELA INICIAL DO IGNIS	35
FIGURA 12 – EDITOR DE GEOMETRIA.....	37
FIGURA 13 – JANELA PARA IMPORTAÇÃO DE ARQUIVO DXF	38
FIGURA 14 – EDITOR DE MALHA	40
FIGURA 15 – EDITOR DE PROPRIEDADES FÍSICAS	41
FIGURA 16 – EDITOR DE CONDIÇÕES DE CONTORNO	42
FIGURA 17 – EDITOR DE PARÂMETROS DE PROCESSAMENTO.....	42
FIGURA 18 – EDITOR DE SOLVER.....	43

FIGURA 19 – EDITOR DE PARÂMETROS DE PÓS-PROCESSAMENTO.....	44
FIGURA 20 – CONFIGURAÇÕES GERAIS DO IGNIS.....	45
FIGURA 21 – VISUALIZAÇÃO DE RESULTADOS NUMÉRICOS.....	46
FIGURA 22 – ESQUEMATIZAÇÃO DO PRIMEIRO PROBLEMA.....	51
FIGURA 23 – MALHA DO PRIMEIRO PROBLEMA.....	52
FIGURA 24 – RESULTADO GRÁFICO DO PRIMEIRO PROBLEMA.....	52
FIGURA 25 – ESQUEMATIZAÇÃO DO SEGUNDO PROBLEMA	54
FIGURA 26 – MALHA DO SEGUNDO PROBLEMA	55
FIGURA 27 – RESULTADO GRÁFICO DO SEGUNDO PROBLEMA	55
FIGURA 28 – ESQUEMATIZAÇÃO DO TERCEIRO PROBLEMA.....	56
FIGURA 29 – MALHA DO TERCEIRO PROBLEMA.....	57
FIGURA 30 – RESULTADO GRÁFICO DO TERCEIRO PROBLEMA	58
FIGURA 31 – ESQUEMATIZAÇÃO DO QUARTO PROBLEMA.....	59
FIGURA 32 – MALHA DO QUARTO PROBLEMA	60
FIGURA 33 – RESULTADO GRÁFICO DO QUARTO PROBLEMA	61
FIGURA 34 – ESQUEMATIZAÇÃO DO QUINTO PROBLEMA	62
FIGURA 35 – MALHA DO QUINTO PROBLEMA	63
FIGURA 36 – RESULTADO GRÁFICO DO QUINTO PROBLEMA.....	64
FIGURA 37 – ESQUEMATIZAÇÃO DO SEXTO PROBLEMA	65
FIGURA 38 – MALHA DO SEXTO PROBLEMA	66
FIGURA 39 – RESULTADO GRÁFICO DO SEXTO PROBLEMA	67

FIGURA 40 – ESQUEMATIZAÇÃO DO SÉTIMO PROBLEMA.....	68
FIGURA 41 – MALHA DO SÉTIMO PROBLEMA (IGNIS)	70
FIGURA 42 – MALHA DO SÉTIMO PROBLEMA (ANSYS)	70
FIGURA 43 – RESULTADO GRÁFICO DO SÉTIMO PROBLEMA (IGNIS).....	71
FIGURA 44 – RESULTADO GRÁFICO DO SÉTIMO PROBLEMA (ANSYS)	71
FIGURA 45 – ESQUEMATIZAÇÃO DO OITAVO PROBLEMA.....	73
FIGURA 46 – MALHA DO OITAVO PROBLEMA (IGNIS).....	74
FIGURA 47 – MALHA DO OITAVO PROBLEMA (ANSYS)	75
FIGURA 48 – RESULTADO GRÁFICO DO OITAVO PROBLEMA (IGNIS)	75
FIGURA 49 – RESULTADO GRÁFICO DO OITAVO PROBLEMA (ANSYS)	76

LISTA DE TABELAS

TABELA 1 – COMPARAÇÃO ENTRE FUNCIONALIDADES.....	12
TABELA 2 – ESQUEMAS DE DISCRETIZAÇÃO DO TEMPO	27
TABELA 3 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO PRIMEIRO PROBLEMA.....	53
TABELA 4 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO SEGUNDO PROBLEMA	56
TABELA 5 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO TERCEIRO PROBLEMA.....	58
TABELA 6 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO QUARTO PROBLEMA.....	61
TABELA 7 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO QUINTO PROBLEMA	64
TABELA 8 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO SEXTO PROBLEMA	67
TABELA 9 – CONDIÇÕES DE CONTORNO DO SÉTIMO PROBLEMA	69
TABELA 10 – TEMPERATURAS MÁXIMA E MÍNIMA DO SÉTIMO PROBLEMA	71
TABELA 11 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO SÉTIMO PROBLEMA.....	72
TABELA 12 – CONDIÇÕES DE CONTORNO DO OITAVO PROBLEMA.....	73
TABELA 13 – TEMPERATURAS MÁXIMA E MÍNIMA DO OITAVO PROBLEMA	76
TABELA 14 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO OITAVO PROBLEMA.....	76

LISTA DE SIGLAS

1D	Uma dimensão, unidimensional
2D	Duas dimensões, bidimensional
3D	Três dimensões, tridimensional
AEF	Análise de Elementos Finitos
CAD	<i>Computer Aided Design</i> (Desenho Assistido por Computador)
DLL	<i>Dynamic-Link Library</i> (Biblioteca de Vínculo Dinâmico)
DXF	<i>Drawing Exchange Format</i> (Formato de Intercâmbio de Desenho)
MEF	Método dos Elementos Finitos
MVF	Método dos Volumes Finitos
VB.NET	<i>Visual Basic .NET</i>

SUMÁRIO

1. INTRODUÇÃO.....	1
1.1. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA.....	3
1.2. OBJETIVO GERAL.....	4
1.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS.....	4
1.4. JUSTIFICATIVA.....	5
1.5. ESCOPO.....	6
2. PESQUISA DE MERCADO	8
2.1. PRINCIPAIS SOFTWARES SIMILARES DISPONÍVEIS PARA DOWNLOAD	8
2.1.1. TransCal 1.1.....	8
2.1.2. CFD-Studio 1.0	9
2.1.3. ANSYS Estudantil	11
2.2. COMPARAÇÃO ENTRE FUNCIONALIDADES.....	11
3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)	13
3.1. DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO	14
3.2. DEFINIÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA	16
3.3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA.....	19
3.3.1. Método de Galerkin.....	20
3.3.2. Equação de transferência de calor bidimensional	21
3.3.3. Regime Transiente	25
3.4. MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS	28
3.5. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES.....	30
3.6. CÁLCULO DAS VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS	32
4. DESENVOLVIMENTO DO SOFTWARE	33
4.1. DENOMINAÇÃO DO SOFTWARE.....	34
4.2. JANELAS PRINCIPAIS DO IGNIS.....	34
4.2.1. Tela Inicial	34
4.2.2. Editor de Geometria	36
4.2.3. Editor de Malha	39
4.2.4. Editor de Propriedades Físicas	40
4.2.5. Editor de Condições de Contorno	41
4.2.6. Editor de Parâmetros de Processamento	42
4.2.7. Editor de Solver.....	43
4.2.8. Editor de Parâmetros de Pós-Processamento.....	44
4.2.9. Configurações Gerais do Ignis.....	45

4.2.10. Visualização de Resultados Numéricos	45
4.3. DETALHES DE PROGRAMAÇÃO DO IGNIS	46
4.3.1. Facilidade de Uso	46
4.3.2. Facilidade de Interpretação do Código	47
4.3.3. Desenvolvimentos do Ignis	48
4.4. DISPONIBILIZAÇÃO DO CÓDIGO FONTE	49
5. RESULTADOS	50
5.1. PRIMEIRO PROBLEMA	51
5.2. SEGUNDO PROBLEMA	53
5.3. TERCEIRO PROBLEMA.....	56
5.4. QUARTO PROBLEMA.....	59
5.5. QUINTO PROBLEMA	62
5.6. SEXTO PROBLEMA	65
5.7. SÉTIMO PROBLEMA	68
5.8. OITAVO PROBLEMA.....	72
6. CONCLUSÕES.....	77
6.1. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS.....	78
REFERÊNCIAS.....	79

1. INTRODUÇÃO

A utilização de recursos computacionais para a solução de problemas de engenharia já há muito não é uma novidade. Desde o advento da computação digital, houve uma revolução na área de modelamento matemático (HUANG e USMANI, 2012). A demanda por *softwares* que possibilitem a realização de análises, sejam elas estruturais, térmicas, de fluidos, entre diversas outras, tem sido impulsionada, em especial, pela indústria, no intuito de obter melhorias em produtos e processos, permitindo reduções de custo e de desperdícios. Há diversos métodos de solução de problemas já consagrados e vastamente explorados, os quais possuem variados níveis de complexidade e aplicação técnica.

Os estudos de diversos fenômenos físicos realizados nas mais variadas áreas de pesquisa (*i.e.* engenharia, astronomia, oceanografia, entre outras) têm contemplado problemas cada vez mais complexos, seja das geometrias empregadas e das condições físicas do meio onde estão imersas (as “condições de contorno”). Comumente, problemas bidimensionais envolvem geometrias e/ou condições de contorno que impedem a utilização de soluções analíticas (BERGMAN *et al*, 2011). Em muitos casos, tais problemas ser representados por um modelo matemático aproximado, geralmente formado por equações diferenciais.

Para a solução deste tipo de problema, são utilizados métodos numéricos capazes de resolver este conjunto de equações, fornecendo uma aproximação (solução numérica) para a solução do modelo matemático (solução analítica). A solução da equação do modelo numérico aproxima-se da solução analítica à medida que o domínio é melhor representado em termos da sua discretização.

Os métodos numéricos mais difundidos têm como princípio básico as técnicas de “discretização” do domínio, ou seja, da repartição de um domínio complexo e contínuo em diversos subdomínios simples, regido por equações diferenciais parciais ou ordinárias. Dois dos mais explorados métodos para este tipo de estudo são o das Diferenças Finitas e o dos Elementos Finitos. Ambos representam técnicas de análises numéricas para obtenção de soluções aproximadas para uma vasta gama de problemas de engenharia (HUEBNER e THORNTON, 1982).

O método de Diferenças Finitas é vastamente aplicado em geometrias ortogonais pela relativa facilidade na formulação de um conjunto de equações algébricas que substitui a equação diferencial, geradas a partir de uma visualização discretizada do domínio de estudo, que passa a ser visto como uma série de diferenças espaciais (e, nos casos de regime transiente, temporais) finitas e conhecidas. É possível estender seu alcance a geometrias mais complexas, aplicando-se uma metodologia de transformações de coordenadas, as quais baseiam-se em complicados sistemas de equações diferenciais parciais para a geração de malhas, sendo que, após esta etapa, o problema é resolvido em um sistema de coordenadas transformado e a solução é recuperada no sistema cartesiano a partir do sistema de coordenadas utilizado para cálculo.

Como alternativa às limitações das Diferenças Finitas, surge o método dos Elementos Finitos. Suas origens são fundamentalmente matemáticas e datam do século XVIII. Tal ferramenta tornou-se mundialmente conhecida em 1956, quando Jonathan Turner, na época um dos engenheiros da fabricante de aviões Boeing, propôs um novo método de análises estruturais utilizando o conceito de elementos finitos, hoje conhecido como Método dos Elementos Finitos (MEF) (GOSZ, 2006).

Desde então, houve uma exploração exponencial de suas aplicações, sendo atualmente empregado nas engenharias mecânica, civil, química, elétrica, aeronáutica, entre outras, além de diversas outras áreas do conhecimento. Embora inicialmente destinado à mecânica estrutural, pode ser reformulado sem maiores complicações para outros tipos de estudo, como a transferência de calor, por exemplo.

Este método também se baseia na discretização do domínio de estudo, porém, neste caso, são obtidos diversos “elementos” de geometria conhecida, cujas propriedades são descritas por equações algébricas específicas a cada tipo de elemento, tornando possível o processo de cálculo de soluções, especialmente através de álgebra matricial. Suas vantagens mais proeminentes estão na possibilidade de solução de problemas contendo geometrias irregulares e complexas, com condições de contorno pouco usuais (VLACHOPOULOS, 1977).

Uma vez que o equacionamento seja adequado à formulação dos elementos, programas computacionais podem ser usados para simular diferentes classes de problemas com poucas adaptações (variando-se a geometria, condições de contorno

e propriedades do material, por exemplo). As análises realizadas por estes programas podem ser chamadas de *Finite Element Analysis*, ou Análise de Elementos Finitos (AEF).

1.1. DESCRIÇÃO DO PROBLEMA

As Análises de Elementos Finitos são estudadas e empregadas na maioria das universidades brasileiras, em especial nos cursos de Engenharia, sendo que em muitas delas, há laboratórios e salas de aula onde se disponibilizam *softwares* comerciais aos alunos. Em muitos casos, é utilizada uma parcela ínfima do potencial destes recursos, já que o foco dos estudos é, em grande parte, demasiadamente restrito ou possui um caráter estritamente auxiliar à compreensão de alguns fenômenos físicos particulares.

Muitos alunos buscam meios de desenvolver este tipo de análise em horários de estudo fora da universidade, o que os leva a obter versões de avaliação limitadas dos programas mais utilizados no meio acadêmico. Além disso, a grande quantidade de ferramentas complexas disponíveis neste tipo de programa, em uma fase de contato inicial, acaba configurando um processo pouco intuitivo, já que demandam um conhecimento prévio de como utilizá-las.

Há, neste sentido, pouco material didático disponível gratuitamente, especialmente na língua portuguesa, que possa dar ao aluno uma experiência visual suficientemente compreensível e que contribua de maneira rápida ao seu aprendizado.

Todas as estruturas da vida real são tridimensionais. São os engenheiros que fazem as aproximações como uma estrutura unidimensional ou bidimensional (KIM e SANKAR, 2011). A maioria dos problemas de transferência de calor são multidimensionais por natureza (INCROPERA e DEWITT, 1990). Ao contrário de problemas unidimensionais, situações bi ou tridimensionais são geralmente complexas e difíceis de serem resolvidas. Nestes casos, a complexidade do problema é aumentada pela ocorrência de formas geométricas irregulares e de uma apropriada implementação das condições de contorno em suas fronteiras (LEWIS, NITHIARASU e SEETHARAMU, 2004). Tratando-se de simplificações, a criação de

um *software* de análises bidimensionais torna-se consideravelmente mais fácil e viável, especialmente no que tange ao pós-processamento do problema (etapa onde os resultados calculados são exibidos graficamente ao usuário). A criação de um ambiente 3D (ou seja, com três dimensões) interativo é uma tarefa árdua e que exige vastos conhecimentos de computação por parte de quem a realiza. Entretanto, esta simplificação dimensional encontra várias aplicações em problemas reais: em muitos casos, quando não houver trocas térmicas significativas nas extremidades normais à seção plana analisada, ou quando estas encontrarem-se suficientemente distantes deste plano, de maneira a não representarem interferências significativas nos resultados, a análise de transferência de calor analisada em um determinado sólido tridimensional pode ser vista de maneira essencialmente bidimensional.

1.2. OBJETIVO GERAL

O presente trabalho tem como objetivo o desenvolvimento de um programa computacional (*software*) gratuito e disponibilizado como *open source* (código-fonte aberto), criado em linguagem de programação VB.NET, a ser utilizado no sistema operacional Windows®. Este *software* deve ser capaz de realizar simulações bidimensionais de condução de calor em regime permanente, com geometrias arbitrárias e condições de contorno e propriedades de material parametrizáveis, através da solução de cálculos matriciais concebidos com base no método matemático dos elementos finitos, primando por uma interface de usuário didática e intuitiva, que possa ser útil como ferramenta de ensino/aprendizado em ambiente universitário, especialmente em disciplinas relacionadas às Ciências Térmicas.

1.3. OBJETIVOS ESPECÍFICOS

Detalhadamente, podem-se citar os seguintes objetivos específicos:

- Realização de pesquisa técnica e de mercado com o objetivo de conhecer opções comerciais ou gratuitas de produtos semelhantes e atualmente disponíveis, para definição inicial do escopo do projeto;

- Elaboração do modelo conceitual do programa e suas características técnicas, com base nas pesquisas realizadas e na premissa didática desta proposta;
- Desenvolvimento ou adaptação de um sistema de geração de malhas simplificado, ou de um processo de importação de malhas pré-existentes geradas por *softwares* gratuitos e de fácil utilização;
- Desenvolvimento ou adaptação de uma interface gráfica bidimensional, capaz de exibir o domínio do problema analisado e os resultados obtidos, de maneira interativa e intuitiva;
- Proposta e condução testes específicos, que permitam constatar que todas as opções de problemas estão sendo resolvidas corretamente, no intuito de validar o código computacional, ou seja, garantir que este resolve corretamente as equações a que se propõe;
- Análise dos resultados gerados através da medição do erro relativo pela comparação com a solução analítica (quando possível) e pelo confronto de resultados de simulações semelhantes realizadas em outro *software* comercial utilizado na indústria e no meio acadêmico;
- Disponibilização do código-fonte do programa em *site* de fácil acesso, indicando-o neste trabalho.

1.4. JUSTIFICATIVA

Um engenheiro mecânico pode interessar-se em conhecer os mecanismos de transferência de calor envolvidos na operação de um equipamento, como, por exemplo, caldeiras, condensadores, pré-aquecedores e economizadores de ar, entre outros, em uma usina termelétrica, de maneira a melhorar seu desempenho. (LEWIS, NITHIARASU e SEETHARAMU, 2004). As Ciências Térmicas, que compõem algumas das mais importantes disciplinas na ementa do curso de Engenharia Mecânica, também representam uma das áreas que mais utiliza recursos computacionais para a resolução de problemas que, por sua natureza complexa, não possuem soluções analíticas.

No decorrer do estudo acadêmico dos fenômenos de transferência de calor, o estudante de Engenharia Mecânica certamente encontrará problemas que exijam a aplicação de métodos numéricos para a obtenção de resultados. Como citado no item 1.1 deste trabalho, este indivíduo provavelmente encontrará dificuldades em obter acesso a *softwares* gratuitos que ofereçam recursos de aplicabilidade proporcional a seus interesses, especialmente na língua portuguesa. A disponibilização de um *software* gratuito e de fácil compreensão busca atender esta demanda estudantil, além de poder, com sua proposta visualmente interativa e didática, ser utilizada por professores como ferramenta de ensino nas salas de aula das disciplinas de Termodinâmica, Transferência de Calor, entre outras.

Este trabalho também busca incentivar o desenvolvimento próprio de soluções computacionais simples por qualquer indivíduo com relativo conhecimento na área de programação, além de, através da disponibilização do código-fonte, ser útil como fonte de aprendizado ao conceito do método dos elementos finitos voltado à condução de calor, já que a linguagem de programação VB.NET, da Microsoft, é relativamente simples de ser compreendida por um usuário iniciante e sua plataforma de programação, a *Visual Studio Community 2017*, possui licenciamento gratuito para equipes de até 5 programadores, desde que seus programas não sejam destinados a grandes empresas (com mais de 250 computadores ou com faturamento anual superior a um milhão de dólares) (MICROSOFT, 2017).

1.5. ESCOPO

A fim de permitir a implementação de um programa de computador que contenha substancial conteúdo com o tempo disponível para o desenvolvimento do Trabalho de Conclusão de Curso, os autores definiram o seguinte escopo:

- Realização de pesquisa de mercado, levantando características de *softwares* similares, comerciais ou não;
- Estabelecimento de premissas básicas de funcionamento a partir da definição de recursos essenciais oriundos da pesquisa de mercado;

- Elaboração de um código de programação funcional na linguagem VB.NET, capaz de converter dados de entrada (propriedades do problema analisado, tais como geometria e condições de contorno) em dados de saída (resultados numéricos), utilizando o Método dos Elementos Finitos;
- Geração de um programa executável único a ser utilizado no sistema operacional Windows® sem a necessidade de utilização de *softwares* ou extensões comerciais, ou seja, um programa fundamentalmente gratuito;
- Confronto dos resultados obtidos com resultados analíticos (quando possível, através do estudo dos fenômenos de Condução de Calor em duas dimensões) e, quando necessário, com soluções suficientemente refinadas obtidas em outro *software* similar;

Por fugir do escopo do trabalho não foi feita uma análise completa do método matemático dos Elementos Finitos. Além disso, pelas mesmas razões, não foi explorado com maior detalhamento algumas das ferramentas típicas dos *softwares* comerciais de Análises de Elementos Finitos, que envolvem, por exemplo, algoritmos inteligentes de geração de malhas estruturadas e não-estruturadas, ambientes CAD complexos e ferramentas detalhadas de pós-processamento (análise visual dos resultados obtidos).

2. PESQUISA DE MERCADO

A pesquisa de mercado baseou-se nos principais *softwares* disponíveis para *download* similares à proposta desse trabalho.

2.1. PRINCIPAIS *SOFTWARES* SIMILARES DISPONÍVEIS PARA *DOWNLOAD*

Abaixo serão listados e comparados em suas funcionalidades os dois principais *softwares* didáticos disponíveis para *download* na *web*, além de uma versão acadêmica de um dos mais renomados *softwares* de licença paga.

2.1.1. TransCal 1.1

Desenvolvido por Maliska *et al* (1997), é definido pelos autores como: “O TransCal é um *software* com fins educacionais, especialmente projetado para ser um instrumento auxiliar no ensino de disciplinas relacionadas com transferência de calor e mecânica dos fluidos. É disponibilizado em português e inglês sob os nomes TransCal e HeatTransfer, respectivamente. Desenvolvido em linguagem de programação C++, o aplicativo permite resolver problemas de condução de calor em malhas bidimensionais em coordenadas generalizadas, pelo método dos volumes finitos.”

Entre as principais características deste *software* estão:

- Discretização do problema através do Método dos Volumes Finitos (MVF);
- Análise bidimensional de problemas de condução;
- Aplicável em problemas de regime permanente e transiente;
- Análises em problemas com ou sem geração de energia;
- Domínio de solução arbitrário;
- Interface gráfica compatível com o sistema operacional Windows®;

- Permite apenas a importação de geometrias criadas nos padrões do programa;
- Não oferece gerador de malha.

Na imagem abaixo, é apresentado um dos exemplos analisados pelo programa:

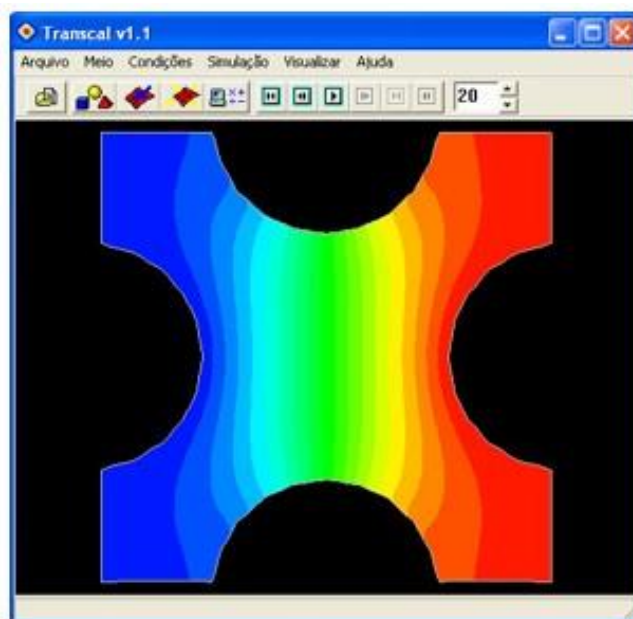


FIGURA 1 – INTERFACE DO SOFTWARE TRANSCAL 1.1

FONTE: SINMEC (2017), ACESSO EM 09/06/2017

2.1.2. CFD-Studio 1.0

Desenvolvido por Pieritz, Silva e Mendes (2001), está dentro do projeto CFD Sinflow. Segundo definição dos autores, “o CFD Studio é um *software* que permite a simulação numérica de problemas 2D envolvendo escoamentos e transferência de calor. Ele foi desenvolvido com propósitos educacionais e pode ser usado em cursos de transferência de calor (condução e convecção) e cursos de Mecânica dos Fluidos Computacional.”

Entre as principais características deste *software* estão:

- Discretização do problema através do Método dos Volumes Finitos;

- Análise bidimensional de problemas de condução e convecção;
- Aplicável em problemas de regime permanente e transiente;
- Análises em problemas com ou sem geração de energia;
- Domínio de solução arbitrário;
- Interface gráfica compatível com o sistema operacional Windows®;
- Permite a importação de geometrias complexas de outros *softwares*;
- Oferece gerador e editor de malha.

Na imagem abaixo, é apresentado um dos exemplos analisados pelo programa:

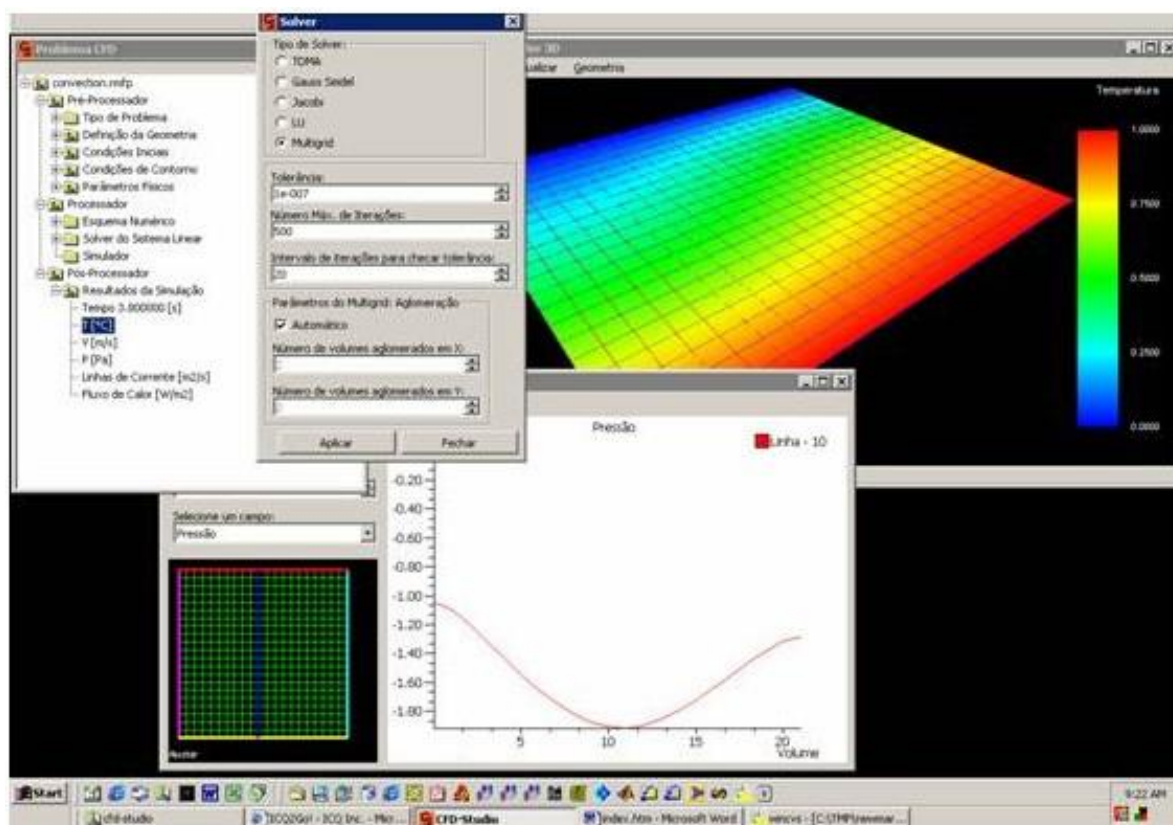


FIGURA 2 – INTERFACE DO SOFTWARE CFD-STUDIO 1.0

FONTE: SINMEC (2001), ACESSO EM 09/06/2017

2.1.3. ANSYS Estudantil

A ANSYS é uma empresa norte americana especializada no desenvolvimento de *softwares* de engenharia utilizando o método dos elementos finitos.

A empresa disponibiliza para *download* uma versão estudantil, com algumas limitações se comparada com a versão paga, a fim de que os estudantes possam ter acesso às ferramentas do sistema.

Entre as principais características deste *software* estão:

- Discretização do problema através do Método dos Elementos Finitos;
- Análise tridimensional de problemas de condução, convecção e radiação;
- Aplicável em problemas de regime permanente e transiente;
- Análises em problemas com ou sem geração de energia;
- Domínio de solução arbitrário;
- Interface gráfica compatível com o sistema operacional Windows®;
- Permite a importação de geometrias complexas de outros *softwares*;
- Oferece gerador e editor de malha;
- Limite de 32.000 nós;
- Licença temporária de seis meses.

2.2. COMPARAÇÃO ENTRE FUNCIONALIDADES

Entre os *softwares* supracitados, existem diferenças entre suas principais funcionalidades. Na Tabela 1, tais aplicativos foram comparados com a solução proposta por esse trabalho.

TABELA 1 – COMPARAÇÃO ENTRE FUNCIONALIDADES

Software	Proposta	TransCal	CFD-Studio	ANSYS
Versão	Didática	Didática	Didática	Educacional
Método Utilizado	MEF	MVF	MVF	MEF
Limite de Nós	Conforme hardware empregado	Conforme hardware empregado	Conforme hardware empregado	32.000
Material Editável	X			X
Interface Gráfica	X	X	X	X
Import. de Geometria	X		X	X
Gerador de Malhas	X		X	X
Dimensão de Análise	2D	2D	2D	2D / 3D
Tipo de Análise				
Regime Permanente	X	X	X	X
Regime Transiente		X	X	X
Fenômenos Analisados				
Condução	X	X	X	X
Convecção	X	X	X	X
Radiação				X
Tipo de Licença	Gratuita	Gratuita	Gratuita	Temporária
Código Aberto	X			

FONTE – OS AUTORES

3. MÉTODO DOS ELEMENTOS FINITOS (MEF)

De maneira geral, pode-se dizer que o Método dos Elementos Finitos é uma ferramenta numérica para se determinar soluções aproximadas para uma vasta classe de problemas de engenharia. O método foi originalmente desenvolvido para o estudo de tensões em estruturas complexas (CLOUGH, 1960), sendo mais tarde estendido ao campo geral da mecânica contínua (ZIENKIEWICZ e CHEUNG, 1965). Neste método, considera-se que o domínio do problema compreende diversos subdomínios pequenos e interconectados (os elementos), fornecendo uma aproximação “segmentada” das equações governantes, ou seja, as complexas equações diferenciais parciais são reduzidas a equações lineares ou não-lineares simultâneas. Com isso, através da discretização (ou segmentação) do domínio, reduz-se um problema contínuo a outro com um número conhecido de variáveis, calculadas em pontos específicos, chamados “nós” (LEWIS, NITHIARASU e SEETHARAMU, 2004). É justamente a arbitrariedade na formação do domínio discretizado que torna possível uma representação suficientemente aproximada do problema real.

A solução de um problema contínuo pelo Método dos Elementos Finitos é atingida ao serem seguidos os seguintes passos:

- Discretização do domínio;
- Definição das funções de forma;
- Formulação do problema;
- Montagem do sistema de equações simultâneas;
- Solução do sistema de equações;
- Cálculo das variáveis secundárias.

Cada um destes passos é brevemente explorado no decorrer deste capítulo, já que o objetivo deste trabalho não é o detalhamento do método, e sim a sua utilização para solução de problemas de transferência de calor.

3.1. DISCRETIZAÇÃO DO DOMÍNIO

A Figura 3 ilustra os principais componentes de uma geometria discretizada (ou “malha”), formada apenas por elementos triangulares.

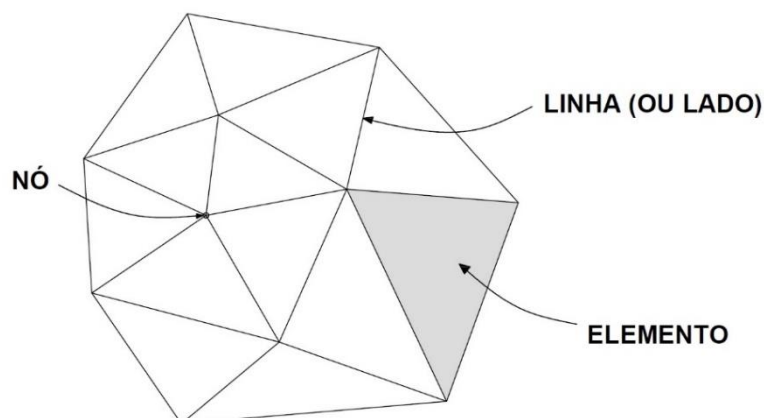


FIGURA 3 – PRINCIPAIS COMPONENTES DE UMA MALHA TRIANGULAR

FONTE: ADAPTADO DE LEWIS, NITHIARASU E SEETHARAMU (2004)

Uma malha bidimensional, que é o foco deste trabalho, pode ser composta por diversos tipos de elementos, sendo que os mais comuns estão ilustrados a seguir.

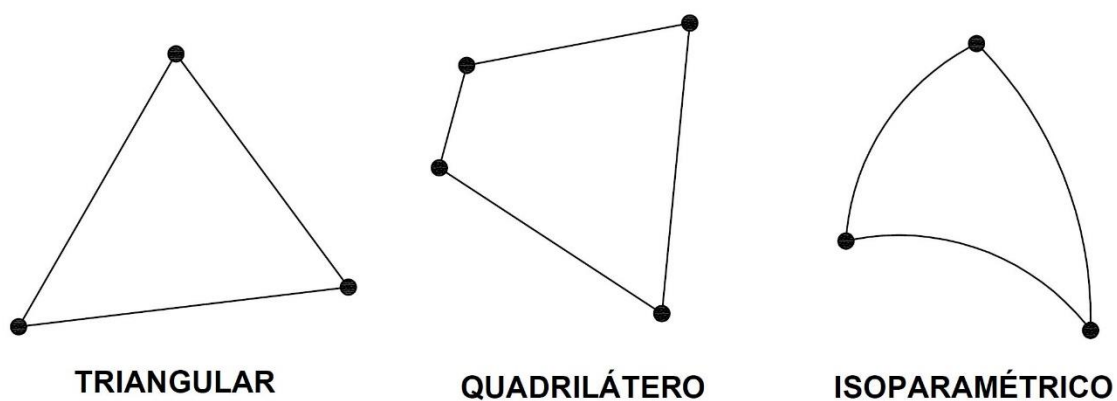


FIGURA 4 – PRINCIPAIS TIPOS DE ELEMENTOS BIDIMENSIONAIS

FONTE: ADAPTADO DE LEWIS, NITHIARASU E SEETHARAMU (2004)

Para cada tipo de elemento, há uma formulação específica para os cálculos envolvendo as variáveis do problema. É possível, entretanto, criar e utilizar uma malha composta por vários tipos de elemento, já que o processo de “montagem” dos

sistemas de equações irá agrupar (conforme explicado mais adiante) as informações nodais de cada elemento, independentemente de qual for o seu tipo.

Como já indicado nos capítulos anteriores, este trabalho focou apenas em problemas bidimensionais. Além disso, por questões de simplificação, foram utilizados apenas elementos triangulares lineares. Esta escolha vai diretamente ao encontro à grande popularidade deste tipo de elemento em análises de elementos finitos, pois sua implementação é relativamente simples e consome significativamente menos recursos computacionais (especialmente memória RAM e processamento), pois é baseada em equações lineares de fácil solução. Tal simplificação somente traz prejuízos à confiabilidade da análise quando a malha utilizada é muito grosseira, ou seja, possui elementos com área demasiadamente grande quando comparada à área da seção analisada. Esta propriedade é observada mais atentamente no decorrer deste capítulo. A Figura 5 ilustra a diferença entre uma malha grosseira e outra refinada, em uma mesma geometria.

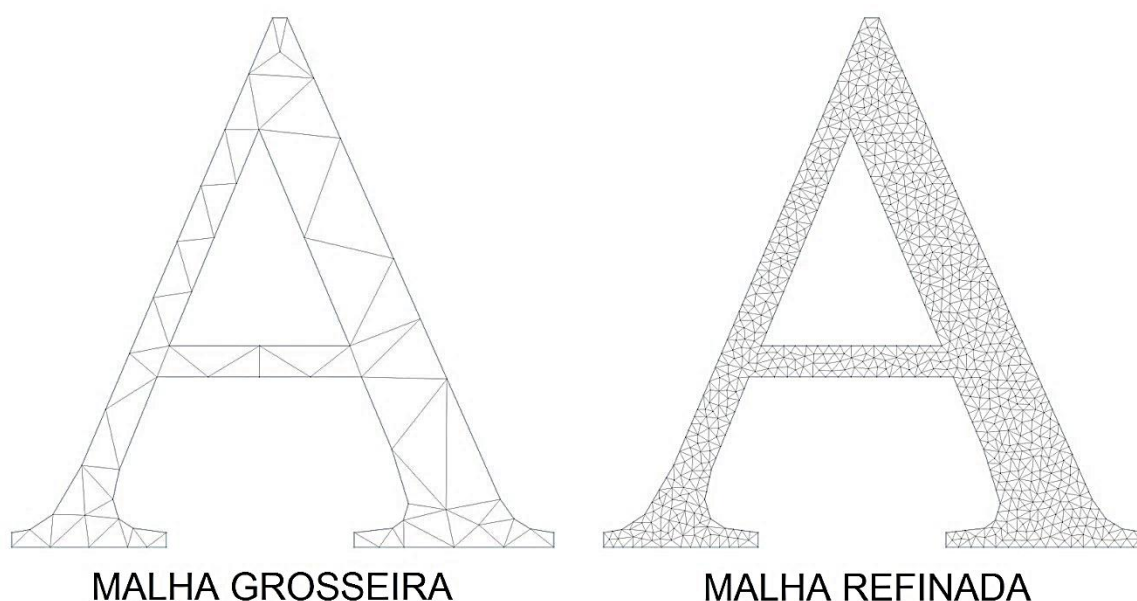


FIGURA 5 – COMPARAÇÃO ENTRE MALHAS EM UMA MESMA GEOMETRIA

FONTE: OS AUTORES

Basicamente, pode-se dizer que o tipo de elemento determina a forma de cálculo das variáveis associadas ao mesmo, já que, neste método, a obtenção de tais variáveis no interior e nas fronteiras de um elemento se dá por um processo de

interpolação. O número de nós, por sua vez, determina qual será o grau da interpolação realizada. A Figura 6 ilustra alguns diferentes tipos de elemento triangular, variando-se apenas o número de nós associado a cada um deles.

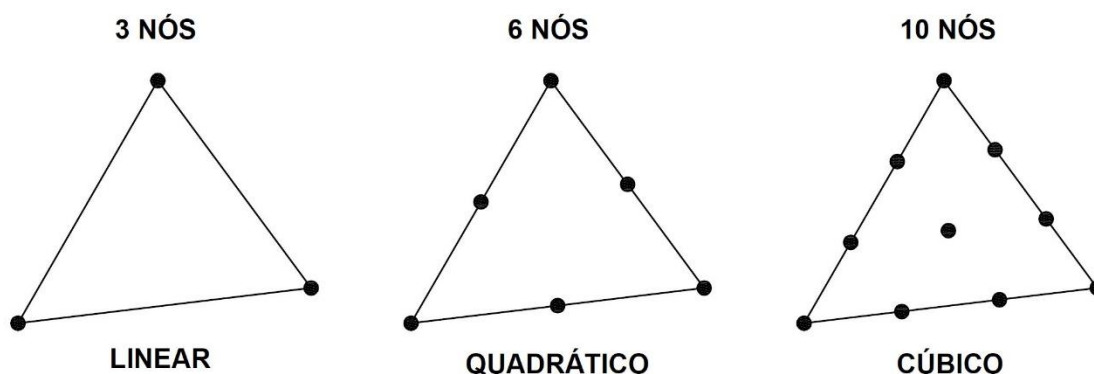


FIGURA 6 – ALGUNS TIPOS DE ELEMENTO TRIANGULAR

FONTE: ADAPTADO DE LEWIS, NITHIARASU E SEETHARAMU (2004)

Esta interpolação de variáveis dá-se pelo uso de funções simples, chamadas “funções de forma”, ou “funções de interpolação”, que representam a natureza da solução de variáveis de cada elemento, pois indicam o valor de uma variável em uma determinada posição (coordenadas X e Y , para um ambiente 2D) contida em um elemento a partir da interpolação de valores nodais já conhecidas.

Pode-se concluir que os erros de aproximação de uma interpolação linear podem ser compensados pela diminuição da distância entre os nós e, por consequência, do tamanho dos elementos. Ou seja, quanto mais refinada, ou densa, for uma malha, mais precisos serão os cálculos realizados com as funções de forma dos elementos.

3.2. DEFINIÇÃO DAS FUNÇÕES DE FORMA

Pode-se representar um elemento triangular linear (de 3 nós) em um espaço cartesiano, onde cada nó do elemento é representado por uma letra (i , j ou k) e está localizado em coordenadas x e y , conforme ilustrado na imagem a seguir.

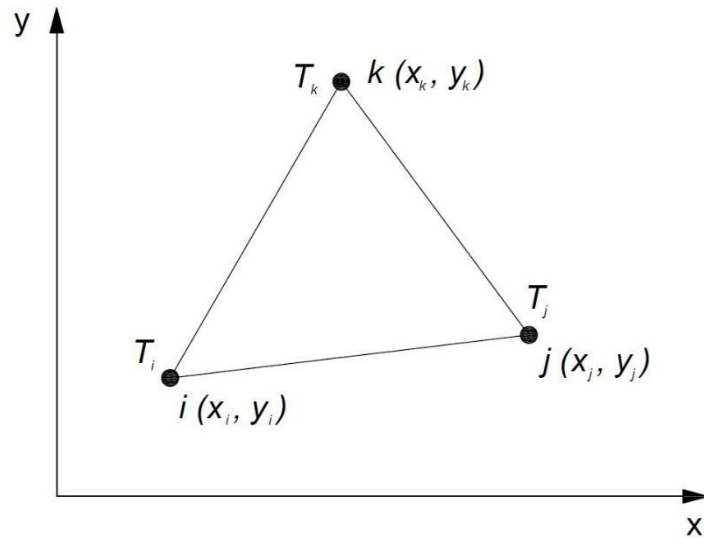


FIGURA 7 – REPRESENTAÇÃO DE UM ELEMENTO TRIANGULAR LINEAR
 FONTE: ADAPTADO DE LEWIS, NITHIARASU E SEETHARAMU (2004)

Cada nó do triângulo possui uma variável associada, sendo que na Figura 7, tais variáveis são chamadas de T_i , T_j e T_k , onde o índice inferior refere-se ao nó em questão. Para o elemento acima, em regime permanente, esta variável é obtida por uma interpolação linear, sendo representada por (LEWIS, NITHIARASU e SEETHARAMU, 2004):

$$T(x, y) = \alpha_1 + \alpha_2 x + \alpha_3 y \quad (1)$$

Pode-se observar que o polinômio é linear em x e y e contém três coeficientes. Para cada nó, deve-se utilizar as coordenadas x e y correspondentes. Os coeficientes α_1 , α_2 e α_3 podem ser escritos como:

$$\alpha_1 = \frac{1}{2A} [(x_j y_k - x_k y_j) T_i + (x_k y_i - x_i y_k) T_j + (x_i y_j - x_j y_i) T_k] \quad (2a)$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{2A} [(y_j - y_k) T_i + (y_k - y_i) T_j + (y_i - y_j) T_k] \quad (2b)$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2A} [(x_k - x_j) T_i + (x_i - x_k) T_j + (x_j - x_i) T_k] \quad (2c)$$

Onde A representa a área do triângulo, a qual é dada por:

$$2A = \det \begin{bmatrix} 1 & x_i & y_i \\ 1 & x_j & y_j \\ 1 & x_k & y_k \end{bmatrix} = (x_i y_j - x_j y_i) + (x_k y_i - x_i y_k) + (x_j y_k - x_k y_j) \quad (3)$$

Substituindo-se os valores de α_1 , α_2 e α_3 na equação 1 e confrontando os valores de T_i , T_j e T_k , tem-se:

$$T = N_i T_i + N_j T_j + N_k T_k = [N_i \quad N_j \quad N_k] \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix} \quad (4)$$

Onde N_i , N_j e N_k correspondem às chamadas “funções de forma” e são dadas por:

$$N_i = \frac{1}{2A} (a_i + b_i x + c_i y) \quad (5a)$$

$$N_j = \frac{1}{2A} (a_j + b_j x + c_j y) \quad (5b)$$

$$N_k = \frac{1}{2A} (a_k + b_k x + c_k y) \quad (5c)$$

Os coeficientes a , b e c , por sua vez, são:

$$a_i = x_j y_k - x_k y_j; \quad b_i = y_j - y_k; \quad c_i = x_k - x_j \quad (6a)$$

$$a_j = x_k y_i - x_i y_k; \quad b_j = y_k - y_i; \quad c_j = x_i - x_k \quad (6b)$$

$$a_k = x_i y_j - x_j y_i; \quad b_k = y_i - y_j; \quad c_k = x_j - x_i \quad (6c)$$

Através destas equações, conclui-se que, em todo o elemento, incluindo suas fronteiras:

$$N_i + N_j + N_k = 1 \quad (7)$$

Os gradientes da variável T são dados pelas suas derivadas parciais nas direções x e y , da seguinte maneira:

$$\frac{\partial T}{\partial x} = \frac{\partial N_i}{\partial x} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial x} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial x} T_k = \frac{b_i}{2A} T_i + \frac{b_j}{2A} T_j + \frac{b_k}{2A} T_k \quad (8a)$$

$$\frac{\partial T}{\partial y} = \frac{\partial N_i}{\partial y} T_i + \frac{\partial N_j}{\partial y} T_j + \frac{\partial N_k}{\partial y} T_k = \frac{c_i}{2A} T_i + \frac{c_j}{2A} T_j + \frac{c_k}{2A} T_k \quad (8b)$$

Ou, escritos em forma matricial:

$$\{g\} = \begin{Bmatrix} \frac{\partial T}{\partial x} \\ \frac{\partial T}{\partial y} \end{Bmatrix} = \frac{1}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix} = [B]\{T\} \quad (9)$$

Onde $[B]$ representa a matriz utilizada para interpolação do gradiente de temperaturas e $\{T\}$, por sua vez, o vetor de temperaturas nodais desconhecidas. Pode-se facilmente notar que, na formulação acima, os gradientes de temperatura $\frac{\partial T}{\partial x}$ e $\frac{\partial T}{\partial y}$ são constantes, pois b_i , b_j e b_k e c_i , c_j e c_k também são constantes. Conclui-se, portanto, que a variável T varia linearmente ao longo de um elemento triangular de 3 nós.

3.3. FORMULAÇÃO DO PROBLEMA

O MEF utiliza uma formulação padrão, que envolve a utilização de matrizes e vetores para o cálculo da solução. Tal formulação não é desenvolvida neste trabalho. Apenas sua forma final é trazida para a continuação dos cálculos. Tipicamente, a equação matricial que relaciona as variáveis nodais desconhecidas (anteriormente chamadas de T_i , T_j e T_k) e suas correspondentes “cargas” (denominação originada das análises estruturais via Análise dos Elementos Finitos), em regime permanente, é dada por:

$$[K]\{T\} = \{f\} \quad (10)$$

Em regime transiente, esta relação é dada por:

$$[C] \left\{ \frac{\partial T}{\partial t} \right\} + [K] \{T\} = \{f\} \quad (11)$$

Onde $[K]$ é a matriz de rigidez (aqui chamada de “matriz de condutividade térmica”, por se tratar de uma formulação para análises de condução de calor), $\{T\}$ é o vetor de temperaturas nodais desconhecidas, $\{f\}$ é o vetor de carga (neste trabalho, será chamado de “vetor de carga térmica”) e $[C]$ é a matriz de capacitância global, também chamada de matriz de massa.

Para a determinação destas matrizes e vetores, há diversos métodos matemáticos disponíveis. O método mais comum (utilizado neste trabalho) é o de Galerkin, que faz parte do rol de métodos envolvendo resíduos ponderados. Trata-se de uma formulação relativamente abstrata e que foge o escopo desse trabalho detalhar, portanto não é explicada em detalhes. Contudo, o MEF está fundamentado nestas técnicas de solução aproximada, e por esta razão é feita uma breve explicação para que o leitor possa compreender superficialmente seu funcionamento e aplicação nas análises a serem realizadas pelo *software* originado por este estudo.

3.3.1. Método de Galerkin

O método dos resíduos ponderados consiste na minimização do erro ou resíduo R na aproximação da solução T de uma equação diferencial, válida para um domínio Ω , por meio do somatório de n funções de forma N_i , linearmente independentes e que têm amplitudes arbitrárias A_i (adaptado de MUÑOZ, 2010). Considerando-se:

$$T = \sum_{i=1}^n A_i N_i \quad (12)$$

Substituindo o valor de T na equação diferencial, gera-se o resíduo R a se minimizar. Esta minimização é alcançada ao se multiplicar o resíduo R por uma função de ponderação Ψ_i , integrando-se em todo o domínio Ω . O resultado dessa integração, por sua vez, deve ser nulo, obtendo-se:

$$\int_{\Omega} R \Psi_i d\Omega = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (13)$$

A partir desta integração, obtém-se um sistema de n equações algébricas ou diferenciais, permitindo a determinação das amplitudes A_i desconhecidas.

Particularmente no método de Galerkin, a função de ponderação Ψ_i utilizada é exatamente igual à função de forma N_i , ou seja:

$$\Psi_i = N_i \quad (14)$$

Substituindo a equação (14) em (13), tem-se:

$$\int_{\Omega} R N_i d\Omega = 0, \text{ para } i = 1, 2, \dots, n. \quad (15)$$

A aplicação do método de Galerkin nas funções de forma do elemento e na equação de transferência de calor bidimensional fornece todo conjunto de equações necessárias à aplicação do MEF em análises desta natureza.

3.3.2. Equação de transferência de calor bidimensional

A equação governante de condução de calor em duas dimensões, em um corpo isotrópico com condutividade térmica dependente do gradiente de temperaturas, é dada por (adaptado de HUEBNER *et.al.*, 2001):

$$-\left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y}\right) + G = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (16)$$

Onde q_x e q_y são componentes de fluxo de calor por unidade de área, G é a taxa de geração de calor por unidade de volume, ρ é a massa específica do material, c é a capacidade térmica, T é a temperatura do corpo e t é o tempo transcorrido. De acordo com a Lei de Fourier, os componentes de fluxo de calor podem ser escritos como (NIKISHKOV, 2010):

$$q_x = -k \frac{\partial T}{\partial x} \quad e \quad (17a)$$

$$q_y = -k \frac{\partial T}{\partial y} \quad (17b)$$

Onde k é o coeficiente de condutividade térmica. Substituindo (17a) e (17b) em (16):

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial T}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial T}{\partial y} \right) + G = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (18)$$

Como condições de contorno mais comuns, tem-se:

- Dirichlet (temperatura prescrita);
- Neumann (fluxo de calor prescrito - condução);
- Robin (temperatura do fluido e coeficiente de transferência de calor prescritos – convecção).

Neste trabalho, é desconsiderada a condição de contorno referente à radiação, por questões de simplificação e aplicabilidade. Para análises em regime transiente (temperatura variando ao longo do tempo), deve-se conhecer a condição inicial do corpo, neste caso a temperatura inicial do domínio no instante de tempo $t = 0$, onde:

$$T(x, y, 0) = T_0(x, y) \quad (19)$$

Utilizando o método de Galerkin na equação (16), obtém-se:

$$\int_A \left(\frac{\partial q_x}{\partial x} + \frac{\partial q_y}{\partial y} - G + \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \right) N_i dA = 0 \quad (20)$$

Aplicando o Teorema de Gauss (também conhecido como Teorema da Divergência) na equação (20), pode-se chegar na seguinte relação:

$$\int_A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} N_i dA - \int_A \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \{q\} dA = \int_V G N_i dV - \int_A \{q\}^T \{n\} N_i dA \quad (21)$$

Onde:

$$\{q\}^T = \{q_x \quad q_y\} \text{ e } \{n\}^T = \{n_x \quad n_y\} \quad (22)$$

Sendo que $\{n\}$ representa o vetor normal que aponta para fora da área do elemento analisado. Considerando-se o elemento ilustrado na Figura 8, sujeito a todas as condições de contorno listadas anteriormente, tem-se:

$$\begin{aligned} \int_A \rho c \frac{\partial T}{\partial t} N_i dA - \int_A \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \quad \frac{\partial N_i}{\partial y} \right] \{q\} dA = \int_V G N_i dV - \int_{S1} \{q\}^T \{n\} N_i dS \\ + \int_{S2} q_s N_i dS - \int_{S3} h(T - T_\infty) N_i dS \end{aligned} \quad (23)$$

Onde $S1$ corresponde ao lado $i - k$, $S2$ corresponde ao lado $i - j$ e $S3$ corresponde ao lado $j - k$. Deve-se notar que:

$$\{q\} = -k[B]\{T\} \quad (24)$$

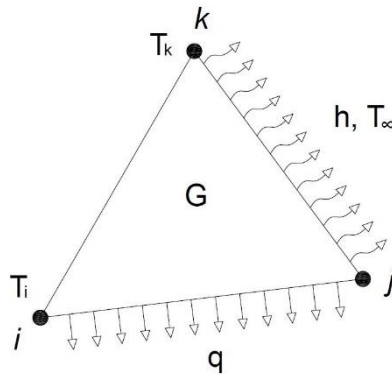


FIGURA 8 – ELEMENTO SUJEITO A DIVERSAS CONDIÇÕES DE CONTORNO
FONTE: ADAPTADO DE LEWIS, NITHIARASU E SEETHARAMU (2004)

Por fim, tem-se a seguinte relação geral:

$$[C]\{\dot{T}\} + ([K_c] + [K_h])\{T\} = \{f_T\} + \{f_G\} + \{f_q\} + \{f_h\} \quad (25)$$

Onde:

$$[C] = \int_A \rho c [N]^T [N] dA, \quad (26a)$$

$$[K_c] = \int_A k[B]^T[B]dA, \quad (26b)$$

$$[K_h] = \int_{S3} h[N]^T[N]dS, \quad (26c)$$

$$[f_T] = - \int_{S1} \{q\}^T\{n\}[N]^T dS, \quad (26d)$$

$$[f_G] = \int_V G[N]^T dV, \quad (26e)$$

$$[f_q] = \int_{S2} q_s[N]^T dS, \quad (26f)$$

$$[f_h] = \int_{S3} hT_\infty[N]^T dS, \quad (26g)$$

Na equação (25), $\{\dot{T}\}$ é o vetor de derivadas das temperaturas nodais desconhecidas em relação ao tempo. Considerando-se que o método é aplicado em um código computacional, de maneira a automatizar a solução de problemas de transferência de calor bidimensional, retoma-se à equação (10), que trata de solucionar as equações anteriores de forma matricial. Portanto, para um problema em regime permanente linear (onde a condutividade térmica do material não varia em função da temperatura), a matriz de condutividade térmica $[K]$ é dada por (adaptado de LEWIS, NITHIARASU e SEETHARAMU, 2004):

$$[K] = [K_c] + [K_h] \quad (27)$$

Também em regime permanente, o vetor de carga térmica é dado por:

$$\{f\} = [f_G] - [f_q] + [f_h] \quad (28)$$

Para um elemento como o ilustrado na Figura 8, tem-se, portanto:

$$[K]_e = \frac{kt}{4A} \begin{bmatrix} b_i^2 + c_i^2 & b_i b_j + c_i c_j & b_i b_k + c_i c_k \\ b_i b_j + c_i c_j & b_j^2 + c_j^2 & b_j b_k + c_j c_k \\ b_i b_k + c_i c_k & b_j b_k + c_j c_k & b_k^2 + c_k^2 \end{bmatrix} + \frac{htl_{jk}}{6} \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (29a)$$

$$\{f\}_e = \frac{GA t}{3} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} - \frac{q t l_{ij}}{2} \begin{Bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{Bmatrix} + \frac{h T_\infty t l_{jk}}{2} \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{Bmatrix} \quad (29b)$$

Para problemas em regime transiente linear, a partir da equação (11) a matriz de condutividade térmica é dada por:

$$[K] = [K_c] + [K_h(t)] \quad (30)$$

O vetor de carga térmica, por sua vez, é dado por:

$$\{f\} = [f_G(t)] - [f_q(t)] + [f_h(t)] \quad (31)$$

A continuação da formulação do problema em regime transiente linear foi dada no capítulo a seguir.

3.3.3. Regime Transiente

Quando deseja-se avaliar o comportamento de condução de calor ao longo de um determinado período de tempo, o equacionamento deve ser adequado a este tipo de análise. Técnicas analíticas, como a de separação de variáveis, empregadas para a solução de problemas de transferência de calor em regime transiente são de uso limitado (OZISIK, 1968) e a solução de problemas práticos através destes métodos é difícil. Por este motivo, o desenvolvimento de soluções numéricas é essencial (LEWIS, NITHIARASU E SEETHARAMU, 2004).

Neste tipo de problema, técnicas de discretização também são usadas para a “discretização” do intervalo de tempo a ser analisado. Por se tratarem de domínios distintos, é possível formular esta discretização através de métodos diferentes do utilizado para o domínio espacial (geometria). O método mais comum, neste caso, é o Método de Diferenças Finitas, em função de sua simplicidade e confiabilidade. A

Figura 9 ilustra uma típica variação de temperatura no domínio do tempo, entre os instantes t^n e t^{n+1} .

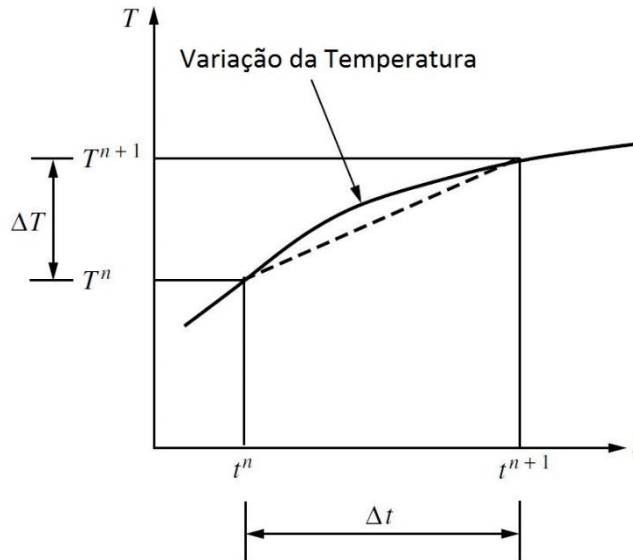


FIGURA 9 – VARIAÇÃO DA TEMPERATURA NO DOMÍNIO DO TEMPO
FONTE: ADAPTADO DE LEWIS, NITHIARASU E SEETHARAMU (2004)

Utilizando uma Série de Taylor, é possível definir a temperatura no nível $n + 1$ como (LEWIS, NITHIARASU E SEETHARAMU, 2004):

$$T^{n+1} = T^n + \Delta t \frac{\partial T^n}{\partial t} + \frac{\Delta t^2}{2} \frac{\partial^2 T^n}{\partial t^2} + \frac{\Delta t^3}{3} \frac{\partial^3 T^n}{\partial t^3} \dots \quad (32)$$

Caso os termos de segunda ordem em diante sejam desconsiderados, então obtém-se uma expressão com primeira ordem de acurácia, onde:

$$\frac{\partial T^n}{\partial t} \approx \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} + O(\Delta t) \quad (33)$$

Neste método, emprega-se o parâmetro de ponderação θ , tal que:

$$T^{n+\theta} = \theta T^{n+1} + (1 - \theta) T^n \quad (34)$$

Quando inserido na equação (11), juntamente com a equação (33), obtém-se:

$$[C] \left\{ \frac{T^{n+1} - T^n}{\Delta t} \right\} + [K] \{ \theta \{T\}^{n+1} + (1 - \theta) T^n \} = \theta \{f\}^{n+1} + (1 - \theta) \{f\}^n \quad (35)$$

A equação (35) pode ser rearranjada da seguinte maneira:

$$([C] + \theta \Delta t [K]) \{T\}^{n+1} = ([C] - (1 - \theta) \Delta t [K]) \{T\}^n + \Delta t (\theta \{f\}^{n+1} + (1 - \theta) \{f\}^n) \quad (36)$$

A equação (36) fornece os valores das temperaturas nodais no nível de tempo $n + 1$. Estas temperaturas são calculadas utilizando os valores dos n níveis de tempo. Neste caso, os vetores de carga térmica $\{f\}$ dos níveis de tempo n e $n + 1$ devem ser conhecidos. O parâmetro θ introduzido nessa formulação diz respeito ao esquema de discretização do tempo utilizado e pode ser obtido da Tabela 2:

TABELA 2 – ESQUEMAS DE DISCRETIZAÇÃO DO TEMPO

θ	Esquema	Denominação
0.0	Totalmente explícito	Diferença positiva
1.0	Totalmente implícito	Diferença negativa
0.5	Semi-implícito	Crank-Nicolson

FONTE – LEWIS, NITHIARASU E SEETHARAMU (2004)

Cada método indicado na tabela anterior diz respeito a uma forma específica de aproximação de cálculo utilizada nos níveis de tempo discretizados, fornecendo diferentes condições de estabilidade conforme a diferença temporal entre estes níveis e conforme o tamanho do elemento em análise. Observou-se que, dentre estes esquemas, o mais utilizado é o Semi-implícito (Método de Crank-Nicolson).

Embora este trabalho contemple superficialmente a teoria relacionada à solução de problemas em regime transiente, sua aplicação não foi feita no *software* gerado por não haver tempo hábil suficiente para sua total implementação.

3.4. MONTAGEM DO SISTEMA DE EQUAÇÕES SIMULTÂNEAS

A partir da formulação do problema, obtêm-se todas as matrizes e vetores necessários à solução do problema. Não obstante, estas informações ainda não compõem um sistema único, pois são inerentes a cada elemento de maneira isolada. Sabe-se, porém, que todos estes elementos compartilham seus nós entre si, de acordo com a estrutura da malha gerada. Estas informações nodais devem ser agrupadas utilizando-se um método de montagem (ou agrupamento), conforme demonstrado a seguir. A Figura 10 ilustra uma malha composta por três elementos triangulares lineares que compartilham alguns nós entre si.

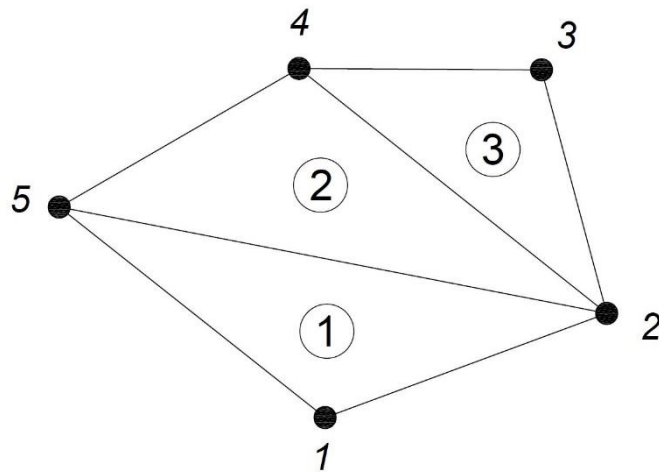


FIGURA 10 – MALHA 2D COM TRÊS ELEMENTOS TRIANGULARES

FONTE: OS AUTORES

Para os três elementos ilustrados na Figura 10, têm-se as seguintes matrizes de condutividade térmica $[K]$ (adaptado de LEWIS, NITHIARASU E SEETHARAMU, 2004):

$$[K]_1 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{15} \\ a_{21} & a_{22} & a_{25} \\ a_{51} & a_{52} & a_{55} \end{bmatrix}; [K]_2 = \begin{bmatrix} b_{22} & b_{24} & b_{25} \\ b_{42} & b_{44} & b_{45} \\ b_{52} & b_{54} & b_{55} \end{bmatrix}; [K]_3 = \begin{bmatrix} c_{22} & c_{23} & c_{24} \\ c_{32} & c_{33} & c_{34} \\ c_{42} & c_{43} & c_{44} \end{bmatrix} \quad (37)$$

Os vetores de carga térmica $\{f\}$, por sua vez, são:

$$\{f\}_1 = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 \\ d_5 \end{Bmatrix}; \quad \{f\}_2 = \begin{Bmatrix} e_2 \\ e_4 \\ e_5 \end{Bmatrix}; \quad \{f\}_3 = \begin{Bmatrix} f_2 \\ f_3 \\ f_4 \end{Bmatrix} \quad (38)$$

O vetor de temperaturas nodais desconhecidas $\{T\}$ é dado por:

$$\{T\} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} \quad (39)$$

Para a montagem da matriz global $[K]$, que representa todo o domínio do problema, deve-se agrupar as matrizes $[K]$ de cada elemento. A matriz global, através deste método, será sempre quadrada de tamanho $n \times n$, onde n é igual ao número de nós da malha. O método de montagem dá-se pela soma de todas as entradas com índice subscrito igual (ex.: a_{22} , b_{22} e c_{22}). Obtém-se, portanto, para uma malha como ilustrada na Figura 8:

$$[K] = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{15} \\ a_{21} & (a_{22} + b_{22} + c_{22}) & c_{23} & (b_{24} + c_{24}) & (a_{25} + b_{25}) \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_{34} & 0 \\ 0 & (b_{42} + c_{42}) & c_{43} & (b_{44} + c_{44}) & b_{45} \\ a_{51} & (a_{52} + b_{52}) & 0 & b_{54} & (a_{55} + b_{55}) \end{bmatrix} \quad (40)$$

Para a montagem do vetor global $\{f\}$, deve-se seguir o mesmo procedimento. Obtém-se, portanto:

$$\{f\} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 + e_2 + f_2 \\ f_3 \\ e_4 + f_4 \\ d_5 + e_5 \end{Bmatrix} \quad (41)$$

A partir destas equações, pode-se reescrever a equação (10) como:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & a_{15} \\ a_{21} & (a_{22} + b_{22} + c_{22}) & c_{23} & (b_{24} + c_{24}) & (a_{25} + b_{25}) \\ 0 & c_{32} & c_{33} & c_{34} & 0 \\ 0 & (b_{42} + c_{42}) & c_{43} & (b_{44} + c_{44}) & b_{45} \\ a_{51} & (a_{52} + b_{52}) & 0 & b_{54} & (a_{55} + b_{55}) \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \\ T_5 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} d_1 \\ d_2 + e_2 + f_2 \\ f_3 \\ e_4 + f_4 \\ d_5 + e_5 \end{Bmatrix} \quad (42)$$

3.5. SOLUÇÃO DO SISTEMA DE EQUAÇÕES

Uma vez que a equação matricial global se encontre devidamente montada, pode-se utilizar uma grande variedade de métodos de solução. Quase a totalidade dos *softwares* comerciais trabalha com ambientes 3D e está voltada a solução de problemas que utilizam malhas com um grande número de elementos e nós, utilizam-se métodos iterativos que reduzem consideravelmente o tempo de processamento da solução. Além desta opção, há também métodos de solução direta, mais lentos, que manipulam as matrizes sem a realização de iterações. Neste rol de métodos diretos, certamente o mais conhecido é o de “decomposição LU”, que faz operações a partir de matrizes simétricas.

Para exemplos como a equação (10), a solução mais simples e compreensível a indivíduos que não desejam se aprofundar em métodos numéricos mais complexos é dada conforme a equação (43), composta a partir de conceitos básicos de álgebra matricial:

$$\{T\} = [K]^{-1}\{f\} \quad (43)$$

Em função da proposta didática deste trabalho, o código de programação gerado utiliza o método acima, pois, embora pouco eficiente, não vislumbra grandes velocidades de processamento e tampouco é direcionado à solução de problemas envolvendo malhas de proporção demasiadamente grande. Além deste método simples de solução direta, os autores também utilizaram a Decomposição QR e Decomposição LU como parte integrante neste trabalho, através da adaptação de códigos de terceiros. Estes métodos, porém, não foram detalhados por fugirem ao escopo deste trabalho.

É possível notar que, para a solução da equação (43), deve-se conhecer a temperatura de ao menos um nó da malha, ou seja, ao menos uma condição de contorno de Dirichlet ou Robin deve ser especificada. Para aplicação específica desta condição de contorno, devem ser seguidos os seguintes passos:

- Localizar, na matriz $[K]$ global, a linha i , onde i é igual ao número do nó cuja temperatura é conhecida;

- Zerar todos os valores contidos na linha i , exceto o valor correspondente à coluna i (mesmo índice referente ao número do nó, ou seja, trata-se, na matriz $[K]$ global, do valor cujo índice subscrito é ii), que deve ser alterado para a unidade;
- Localizar, no vetor global $\{f\}$, a mesma linha i , substituindo o valor encontrado pela temperatura conhecida no nó.

Para melhor compreensão do método acima, é feita uma breve demonstração de sua aplicação. Suponha que a seguinte equação matricial é obtida a partir de todas as etapas indicadas nos subcapítulos anteriores:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ -2 & 4 & 0 & -2 \\ -2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ 8 \\ 95 \\ 72 \end{Bmatrix} \quad (44)$$

Suponha, também, que a temperatura do nó 2 (T_2) é conhecida e igual a 150°C . A partir da aplicação do método descrito anteriormente, a equação (44) seria transformada em:

$$\begin{bmatrix} 4 & -2 & -2 & 0 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ -2 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} -5 \\ \mathbf{150} \\ 95 \\ 72 \end{Bmatrix} \quad (45)$$

Onde os valores em negrito representam as alterações realizadas. A partir da aplicação da equação (43), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/7 & 4/7 & 1/14 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1/14 & 1/7 & 1/7 & 0 \\ 0 & -1/4 & 0 & 1/8 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} -5 \\ 150 \\ 95 \\ 72 \end{Bmatrix} \quad (46)$$

Resolvendo a equação (46), obtém-se:

$$\begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 \\ T_3 \\ T_4 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 91,07 \\ 150 \\ 34,64 \\ -28,5 \end{Bmatrix} \quad (47)$$

A solução anterior está em sua forma final, podendo ser utilizada, entre outras coisas, para plotagem de gráficos e/ou cálculo de variáveis secundárias, conforme demonstrado a seguir.

3.6. CÁLCULO DAS VARIÁVEIS SECUNDÁRIAS

Após a solução do vetor $\{T\}$, torna-se possível o cálculo de variáveis secundárias como, por exemplo, os vetores de fluxo de calor nas fronteiras do corpo analisado. Esta será a única variável secundária contemplada por este trabalho, pois compõe um elemento de análise adicional ao usuário do *software* em questão, contribuindo para uma melhor compreensão e visualização dos fenômenos de transferência de calor envolvidos em um determinado problema.

O cálculo do vetor de fluxo de calor de cada elemento dá-se pela utilização da equação (24), que pode ser reescrita como:

$$\begin{Bmatrix} q_x \\ q_y \end{Bmatrix} = -\frac{k}{2A} \begin{bmatrix} b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} T_i \\ T_j \\ T_k \end{Bmatrix} \quad (48)$$

Deve-se notar que o fluxo de calor é constante no interior de um elemento triangular linear.

4. DESENVOLVIMENTO DO SOFTWARE

Neste capítulo, são descritas todas as etapas referentes ao desenvolvimento do produto deste trabalho, um *software* de Análise de Elementos Finitos voltado à análise da Condução de Calor. Toda a fundamentação teórica foi convertida em um código de programação em linguagem VB.NET, o qual, quando compilado, originou um executável para Windows® capaz de realizar simulações em 2D em regime permanente. A pesquisa de mercado realizada foi utilizada como base para a definição de alguns aspectos de utilização e de recursos disponíveis ao usuário deste programa, de maneira a proporcionar uma experiência suficientemente intuitiva e produtora.

Conforme relatado nos capítulos anteriores e com base na pesquisa de mercado realizada, algumas premissas básicas foram seguidas:

- O usuário poderá importar geometrias 2D a partir de arquivos DXF, além de poder inserir manualmente as coordenadas de cada nó, indicando quais pares formam cada linha do contorno da seção analisada;
- As malhas utilizadas pelo *software* serão restritas a elementos triangulares lineares, sendo geradas por uma biblioteca de código aberto disponível na *web* com parametrizações suficientes para obtenção de uma malha de qualidade;
- As condições de contorno referentes à temperatura prescrita, fluxo prescrito e convecção são aceitas, sendo que todas são facilmente personalizáveis;
- O usuário pode personalizar as propriedades do material analisado, além da taxa de geração de calor uniforme, válida para todo o domínio;
- Há uma interface gráfica 2D, onde serão exibidas as geometrias, as malhas e onde haverá a plotagem de resultados em forma de gradientes de cor sobrepostos à seção analisada, além de linhas isotérmicas de passo editável.

Um típico *software* de AEF é composto pelos seguintes itens principais:

- Pré-processamento, que inclui a geração de malhas, montagem das matrizes fundamentais a partir dos dados do problema fornecidos pelo usuário;
- Processamento, responsável pela aplicação das condições de contorno e pelos cálculos matriciais, fornecendo os devidos valores às variáveis anteriormente desconhecidas;
- Pós-processamento, que fornece os resultados da etapa anterior em forma gráfica e numérica.

Estes passos são observáveis pelo usuário do programa e por indivíduos que desejem visualizar e/ou editar o código em VB.NET, de modo a facilitar seu entendimento.

4.1. DENOMINAÇÃO DO SOFTWARE

O *software* originado por este trabalho foi denominado Ignis, uma palavra do latim que, traduzida ao idioma português, significa “fogo”. Além da óbvia relação entre condução de calor e fogo, trata-se de um nome facilmente memorizável. Esta denominação é utilizada no decorrer deste texto a partir deste capítulo.

4.2. JANELAS PRINCIPAIS DO IGNIS

Neste tópico, são exibidas as principais telas (ou janelas) do Ignis, onde o usuário fornecerá ou visualizará as principais informações do problema a ser analisado.

4.2.1. Tela Inicial

Esta é a tela exibida sempre que o Ignis é inicializado. Pode-se dizer que esta é a tela mais importante do programa, pois contém todo o resumo das informações do problema e contém todas as funções e tarefas a serem executadas durante a

análise. Todos os dados do problema armazenados na memória do computador serão gerenciados por esta janela e serão repassados às demais janelas quando necessário.

A estrutura típica de uma AEF pode ser claramente observada nesta tela, conferindo o aspecto didático desejado para este programa.

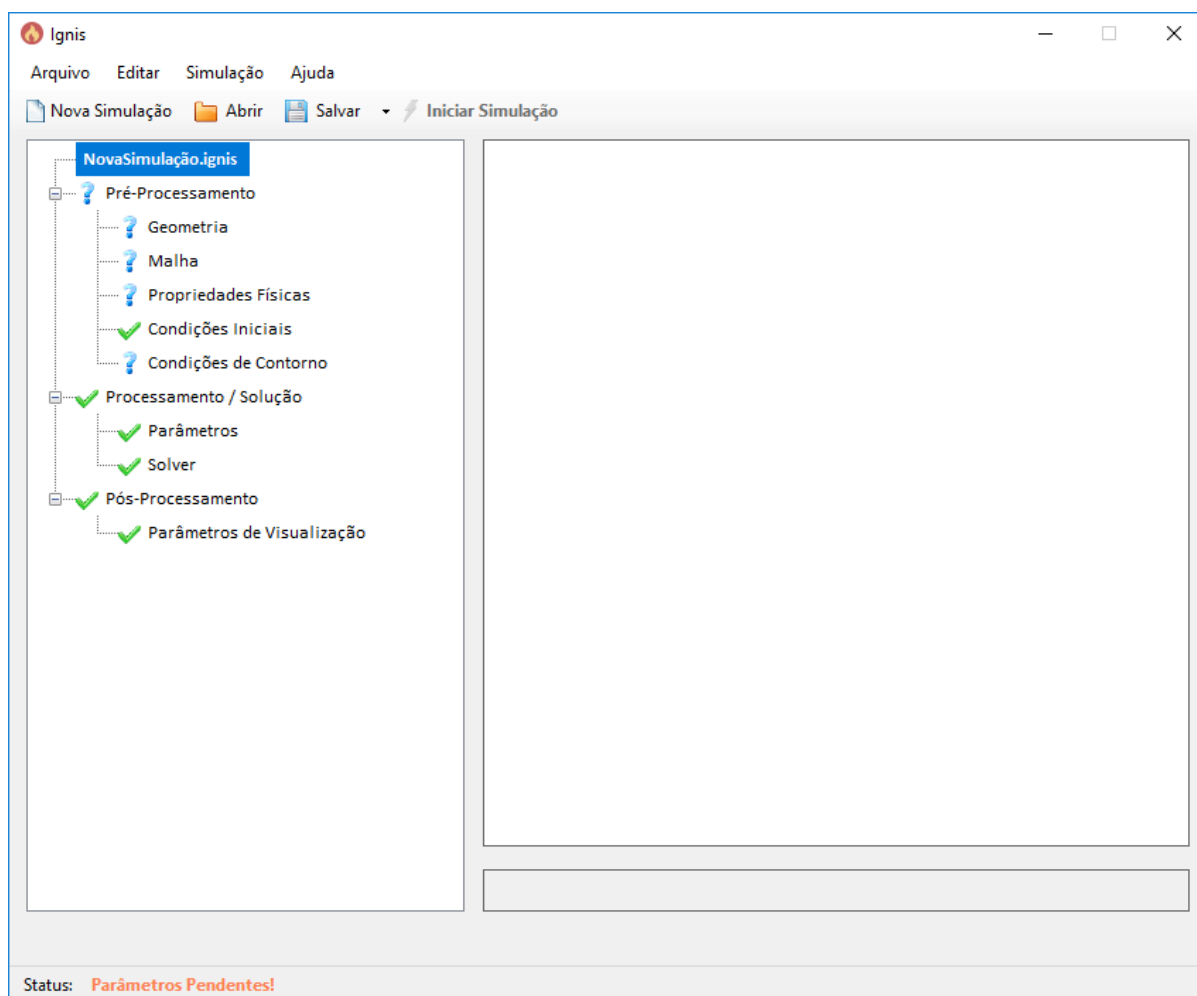


FIGURA 11 – TELA INICIAL DO IGNIS

FONTE: OS AUTORES

A tela inicial é composta pelos seguintes itens:

- Uma barra de menu superior, onde o usuário poderá fechar a simulação atual, fechar o programa, editar configurações, salvar a imagem

renderizada, obter resultados em determinadas coordenadas e obter informações acerca do programa;

- Uma barra de ícones superior, que permite o início de uma nova simulação, a abertura de um arquivo “.ignis” já existente, o salvamento da simulação atual e o início do processo de análise do problema definido;
- Uma árvore de dados de entrada do problema, contida no retângulo branco esquerdo conforme observado na Figura 11, onde estão contidas todas as entradas necessárias para a análise, bem como o *status* de cada uma delas, indicado pelo ícone à esquerda de cada item;
- Uma área de renderização de resultados, composta pelo quadrado branco à direita, onde serão exibidos graficamente os resultados de temperatura obtidos pela solução do problema;
- Uma escala de temperaturas, composta pelo retângulo localizado abaixo da área de renderização;
- Uma barra de *status* inferior, que indicará ao usuário o estado atual da simulação.

Maiores detalhes referentes ao processo de análise do problema são indicados nos itens subsequentes.

4.2.2. Editor de Geometria

O principal dado de entrada de uma simulação é a geometria 2D do problema, representando o domínio espacial de estudo. Os autores desenvolveram o código que permite ao Ignis adquirir geometrias de duas maneiras distintas: através da inserção manual de pontos sucessivos que definirão os contornos ou pela leitura de arquivos em formato DXF gerados em *softwares* terceiros utilizando uma rotina capaz de interpretar diversas versões deste formato de arquivo.

A tela para definição e edição da geometria está ilustrada na Figura 12.

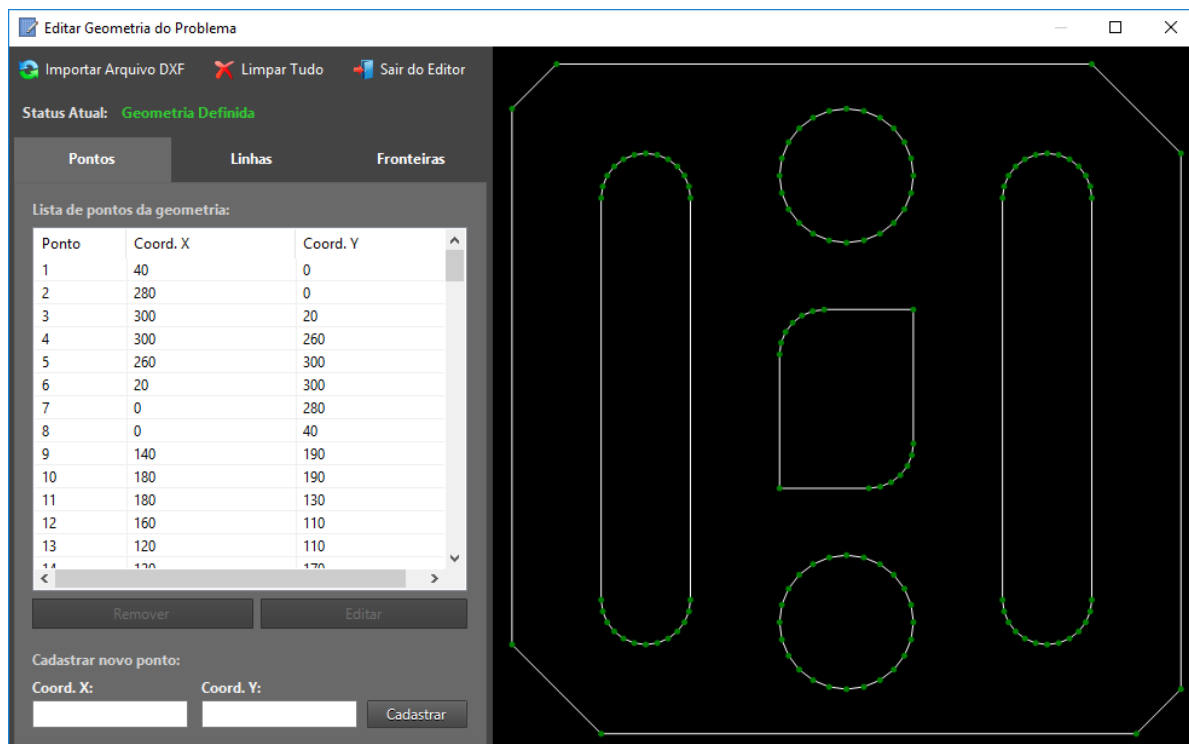


FIGURA 12 – EDITOR DE GEOMETRIA

FONTE: OS AUTORES

A área localizada ao lado direito da janela, com fundo na cor preta, é um ambiente 2D interativo, onde o usuário pode, utilizando o *mouse* do computador, dar *zoom* em regiões específicas do domínio e, através de um clique, identificar as coordenadas de um ponto específico. O código utilizado neste recurso foi adaptado de Woltering (2012), denominado Triangle.NET, que além de oferecer recursos de geração de malhas triangulares, também inclui um simplificado renderizador de geometrias 2D. Esta biblioteca é gratuita e disponibilizada como código aberto, tendo sido programada na linguagem C#.

Nesta mesma janela, também é possível utilizar a função de importação de arquivos DXF, permitindo que o usuário crie, utilizando linhas, círculos e arcos, a geometria do problema em um *software* CAD dedicado e que possibilite a composição de uma geometria mais complexa. Ao pressionar o botão “Importar Arquivo DXF”, a seguinte janela é exibida:

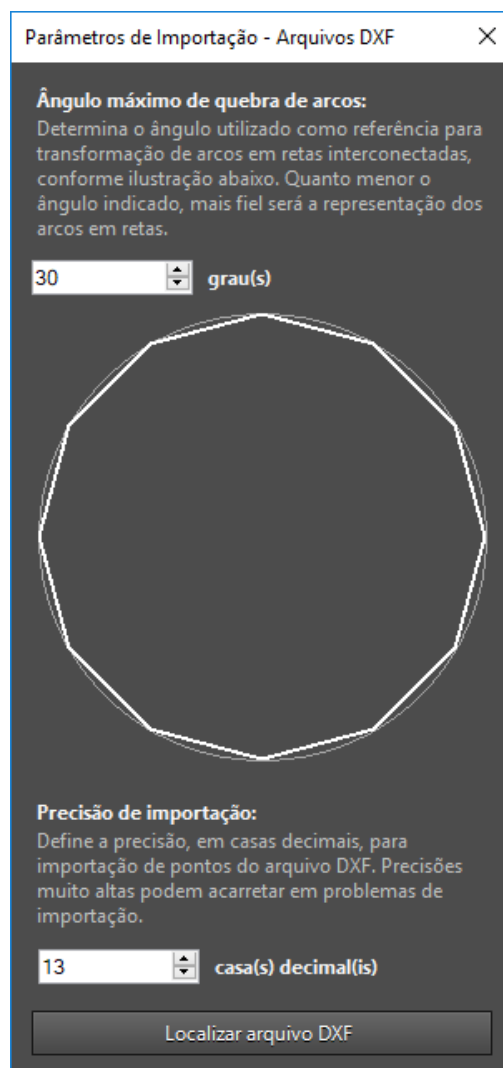


FIGURA 13 – JANELA PARA IMPORTAÇÃO DE ARQUIVO DXF

FONTE: OS AUTORES

Na janela indicada na Figura 13, o usuário pode especificar dois parâmetros de importação da geometria contida no arquivo DXF desejado: o ângulo máximo de quebra de arcos e círculos, que define a forma como estes componentes serão “quebrados” em linhas (já que o Ignis trabalha apenas com elementos triangulares), ou seja, seu refinamento, e, por último, a precisão de importação, que consiste no número de casas decimais a serem utilizadas para arredondamento das coordenadas de pontos encontrados durante a importação. Esta última propriedade é útil quando se deseja evitar possíveis desencontros entre linhas da geometria, situação comumente observada em arquivos DXF gerados em *softwares* terceiros.

A importação de um arquivo DXF, quando bem-sucedida, traz uma geometria completamente definida e pronta para uso. Caso o usuário opte por definir a geometria manualmente, deve acompanhar o *status* da mesma na parte superior da janela, que, a cada alteração, exibe o texto “Geometria Definida” ou “Geometria Indefinida”. Quando totalmente definida, a janela pode ser fechada e o ícone da árvore do problema referente à Geometria indica uma seta verde (ver Figura 11).

4.2.3. Editor de Malha

Após a definição da geometria do corpo a ser analisado, o Ignis permite que o usuário acesse o editor de malha integrado. Os autores optaram por utilizar um código de terceiros para a triangulação e refinamento das malhas, conforme já mencionado no item 4.2.2. deste trabalho. O Triangle.NET oferece diversos recursos que permitem a geração de malhas triangulares para geometrias de diferentes níveis de complexidade. A adaptação destes recursos permite a leitura dos contornos definidos na etapa anterior, manipulando-os conforme os parâmetros de qualidade e algoritmos de triangulação configurados pelo usuário.

Nesta janela, além de parametrizar a triangulação e refinamento, o usuário poderá observar a malha gerada de forma interativa (através dos mesmos recursos já explicados no item 4.2.2.) e visualizar as estatísticas referentes à qualidade dos elementos triangulares.

Este recurso adaptado da biblioteca Triangle.NET pode, eventualmente, apresentar dificuldades na geração de malhas complexas, porém recomenda-se que o usuário insatisfeito com a qualidade da malha gerada apenas com a definição dos parâmetros de qualidade simples (ângulo máximo e mínimo e área máxima) utilize as demais ferramentas fornecidas, que são: Delaunay Conforme, Malha Convexa e *Sweep*line. Além disso, recomenda-se a suavização da malha a cada nova triangulação, buscando minimizar o erro numérico proporcionado pela discretização do domínio.

A janela do editor está ilustrada na Figura 14.

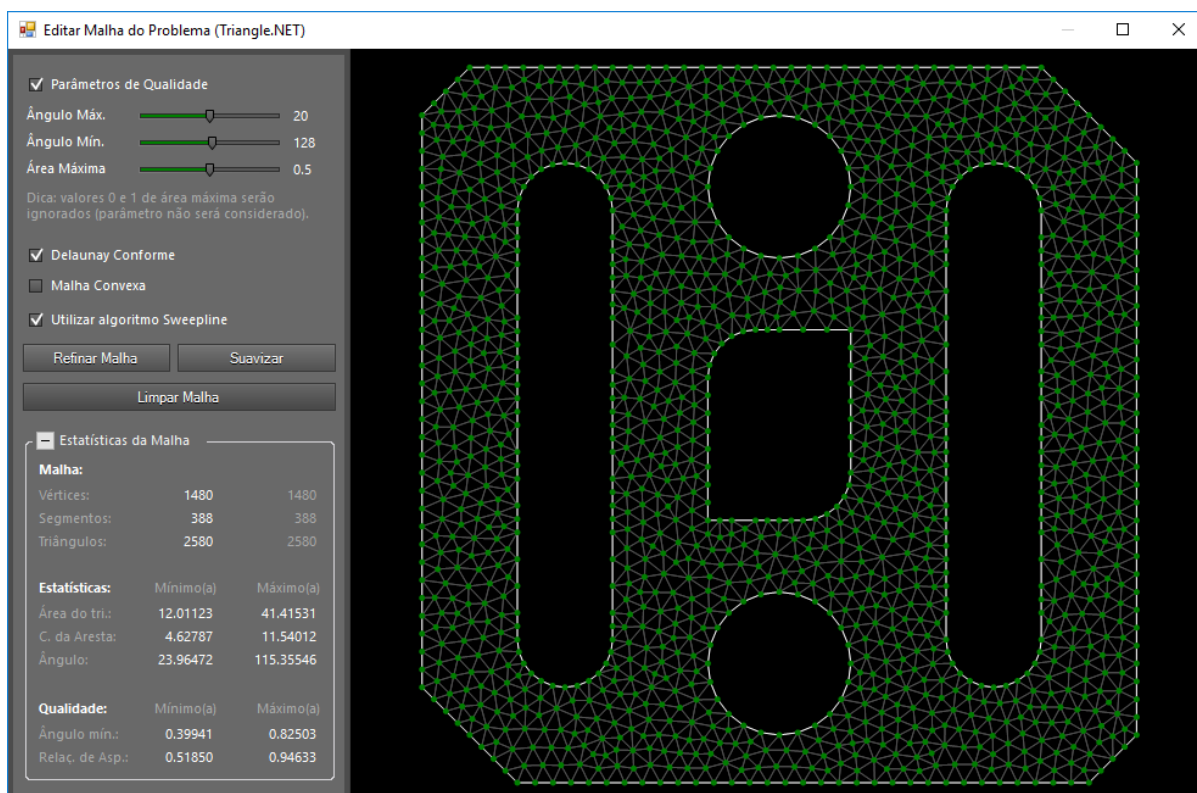


FIGURA 14 – EDITOR DE MALHA

FONTE: OS AUTORES

4.2.4. Editor de Propriedades Físicas

Nesta tela, o usuário deve obrigatoriamente especificar a espessura e a condutividade térmica do material do corpo analisado. Há, ainda, a possibilidade de especificar a taxa de geração de calor do material (uniforme para todo o domínio), como parâmetro opcional. Como o Ignis foi inicialmente projetado para realizar análises em regime transiente, os campos de massa específica e calor específico são exibidos, porém encontram-se inativos.

O usuário pode notar que nenhum parâmetro do Ignis utiliza um sistema de unidades predefinido, portanto deve-se sempre tomar o cuidado de utilizar a mesma referência para todos os valores informados.

A janela para definição das propriedades físicas encontra-se ilustrada na Figura 15.

Editar Propriedades Físicas [X]

Definição das propriedades físicas do problema:
 Nesta janela, definem-se as propriedades físicas do material a ser simulado neste problema. Considera-se que todos os parâmetros abaixo são fixos, ou sejam, não sofrem variações ao longo do espaço e do tempo e tampouco são afetados por variações de temperatura ao longo da área analisada.

Espessura do corpo:	Condutiv. Térmica (k):
<input type="text" value="5,0000"/>	<input type="text" value="2,0000"/>
Geração de Calor:	Massa Específica:
<input type="text" value="1,2000"/>	<input type="text" value="0,0000"/>
Calor Específico:	
<input type="text" value="0,0000"/>	

FIGURA 15 – EDITOR DE PROPRIEDADES FÍSICAS

FONTE: OS AUTORES

4.2.5. Editor de Condições de Contorno

O editor de condições de contorno permite ao usuário indicar linhas da geometria que possuem condições de contorno conhecidas. Como já explicado anteriormente, o Ignis permitirá a especificação das três principais condições de contorno: Dirichlet, Neumann e Robin. Cada uma delas, ao ser selecionada, exigirá a indicação dos parâmetros correspondentes. São eles:

- Dirichlet: temperatura;
- Neumann: fluxo de calor;
- Robin: coeficiente de convecção e temperatura do fluido.

O usuário também pode, caso deseje, incluir uma descrição para cada uma das condições de contorno definidas para o problema, de modo a facilitar a interpretação física do problema.

Para facilitar a visualização das linhas ou fronteiras correspondentes à condição de contorno selecionada, o visualizador interativo localizado à direita destaca na cor vermelha as linhas referentes à condição de contorno selecionada.

A janela deste editor pode ser observada na Figura 16.

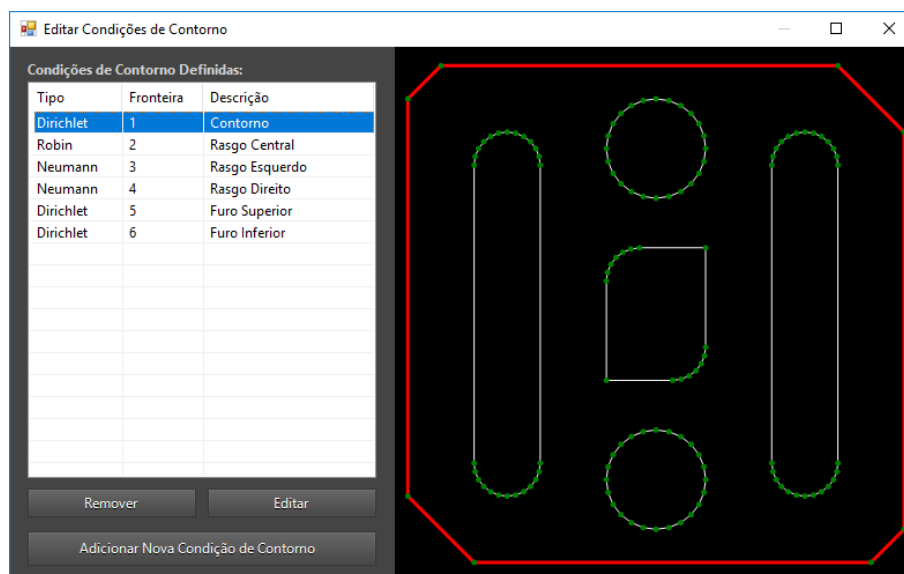


FIGURA 16 – EDITOR DE CONDIÇÕES DE CONTORNO

FONTE: OS AUTORES

4.2.6. Editor de Parâmetros de Processamento

No editor de parâmetros de processamento, permite-se que o usuário especifique o tipo de análise a ser realizada. A única opção disponível para uso, no entanto, é a de Condução de Calor em Regime Permanente. A opção referente ao regime transiente encontra-se desativada, pois os autores optaram por manter a estrutura básica para implantação de problemas desta natureza. A Figura 17 ilustra esta janela.

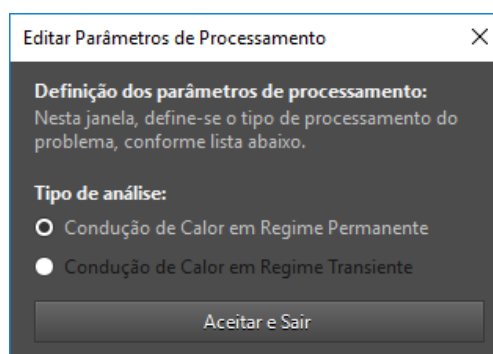


FIGURA 17 – EDITOR DE PARÂMETROS DE PROCESSAMENTO

FONTE: OS AUTORES

4.2.7. Editor de Solver

Nesta janela, o usuário pode especificar qual tipo de *solver* (método de solução do sistema de equações) deseja utilizar para a análise em questão. Há três métodos disponíveis para uso: o Simples, de inversão de matriz, realizado por meio da biblioteca “Math.NET Numerics” (MATH.NET, 2015), disponibilizada gratuitamente como extensão *Dynamic-Link Library* (DLL) e que manipula um formato de matriz chamado “*Dense Matrix*”, o qual fornece diversas ferramentas úteis para solução de sistemas de equações; o método de Decomposição QR, também fornecido pela mesma biblioteca supracitada e, por fim, o método de Decomposição LU, implementado no Ignis através da adaptação (referente a otimizações de processamento) de um código portado da linguagem C#, disponibilizado no “Windows Dev Center” por Williams Jr. (2015).

A janela deste editor encontra-se ilustrada na Figura 18:

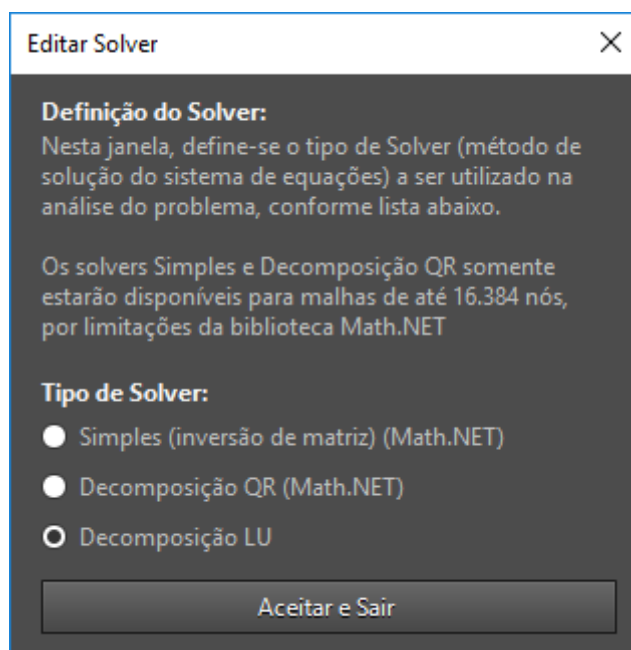


FIGURA 18 – EDITOR DE SOLVER

FONTE: OS AUTORES

Conforme indicado na própria janela, é sabido que o tipo de matriz “*Dense Matrix*”, utilizado pela biblioteca Math.NET, comporta apenas matrizes de tamanho 16.384 linhas por 16.384 colunas (ou seja, a malha poderá ter apenas 16.384 nós

caso o usuário deseje utilizar os dois primeiros métodos de solução). Já no método de Decomposição LU, esta limitação dá-se apenas pelo *hardware* (neste caso, memória RAM) utilizado no computador em que o Ignis realiza a simulação, e é por esta razão que os autores recomendam seu uso, apesar do adequado funcionamento dos demais métodos disponíveis.

4.2.8. Editor de Parâmetros de Pós-Processamento

Nesta janela, é possível definir alguns parâmetros de pós-processamento de resultados, de maneira a visualizá-los na interface gráfica da tela principal do Ignis. O usuário poderá escolher a forma de visualização, que poderá dar-se através de um gradiente de temperaturas (colorido ou em escala de cinza) e de uma visualização de linhas isotérmicas (ou seja, de mesma temperatura) com passo editável (traçar isoterma a cada 10 °C de diferença de temperatura, por exemplo). Também é possível escolher o tamanho em *pixels* da imagem a ser renderizada. Com isso, ao salvar a imagem obtida na análise, o usuário terá uma melhor definição para visualização dos resultados, podendo ampliar a imagem sem perda de qualidade. Este editor está ilustrado na Figura 19:

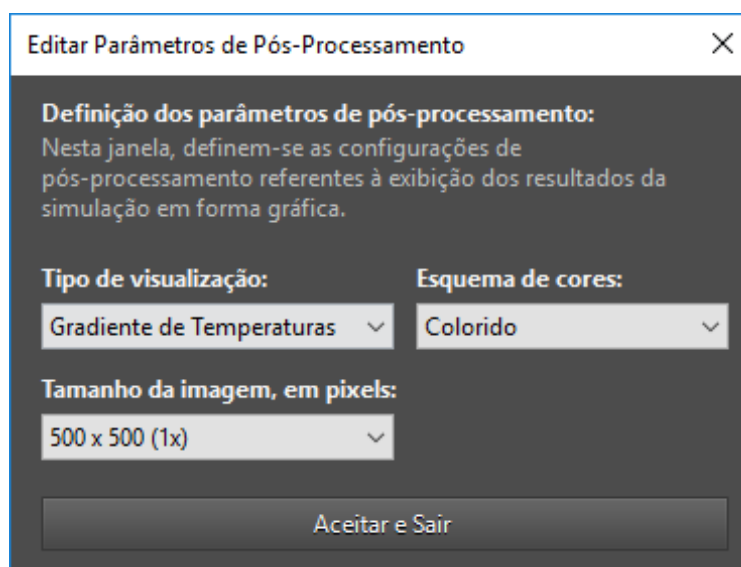


FIGURA 19 – EDITOR DE PARÂMETROS DE PÓS-PROCESSAMENTO

FONTE: OS AUTORES

4.2.9. Configurações Gerais do Ignis

Nesta tela de configurações, permite-se que sejam parametrizadas algumas configurações do Ignis, de modo que as mesmas reflitam apenas para o usuário da sessão atual do Windows. Esta janela encontra-se ilustrada na Figura 20:

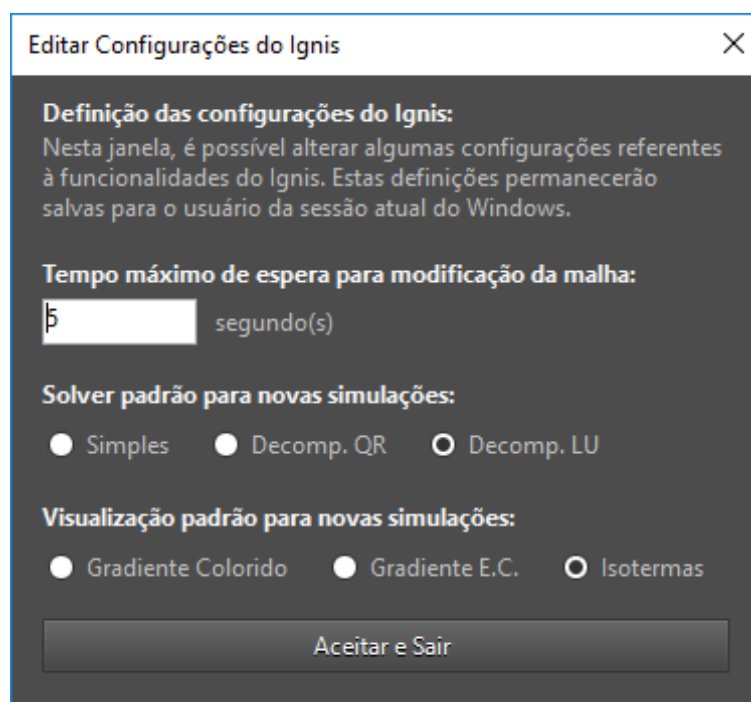


FIGURA 20 – CONFIGURAÇÕES GERAIS DO IGNIS

FONTE: OS AUTORES

4.2.10. Visualização de Resultados Numéricos

Após a conclusão do processo de solução do problema, o usuário tem acesso à tela de visualização de resultados numéricos, onde poderá obter a temperatura e o fluxo de calor em determinada posição dentro do domínio analisado. É possível observar esta janela na Figura 21.

Visualizar Resultados Numéricos

Visualização de resultados numéricos:
Aqui é possível obter os resultados numéricos em coordenadas específicas da geometria.

Temperatura e Fluxo na posição

Posição X: Posição Y: Obter

Fluxo X: Fluxo Y: Temperatura:

Aceitar e Sair

FIGURA 21 – VISUALIZAÇÃO DE RESULTADOS NUMÉRICOS

FONTE: OS AUTORES

4.3. DETALHES DE PROGRAMAÇÃO DO IGNIS

O Ignis foi concebido para operar de maneira intuitiva, com o mínimo de intervenção do usuário, ou seja, o mesmo necessita especificar o mínimo necessário para que se possibilite a realização de uma análise. Além disso, o conceito didático deve estender-se à compreensão do código em VB.NET, possibilitando futuras alterações e melhorias sem a necessidade de um aprofundado estudo de funcionamento e estruturação. Para atingir este objetivo, diversos recursos foram empregados, alguns deles desenvolvidos exclusivamente para o Ignis sem a utilização de bibliotecas de terceiros. A seguir, serão indicados alguns detalhes do desenvolvimento do Ignis, separados por categoria.

4.3.1. Facilidade de Uso

- Uma nova simulação pode ser criada e exibir resultados com apenas 12 cliques do *mouse* (este número varia conforme a complexidade do problema). Alguns parâmetros pré-programados a cada nova simulação visam agilizar este processo;

- Há tratamento de erros em quase todo o código, evitando a ocorrência de exceções (erros sem tratamento programado). Isso evita que os usuários sejam surpreendidos por travamentos ou encerramentos inesperados do programa. Esta característica dá-se pela aplicação de blocos de código “*Try/Catch*” nas principais funções suscetíveis a erros;
- Durante a triangulação da geometria, há um temporizador que controla o tempo máximo de processamento, sendo que o usuário poderá especificar quantos segundos deseja esperar até que a malha seja atualizada conforme os parâmetros programados. Isso evita travamentos e perda de dados por um fechamento forçado do programa;
- Todas as etapas da AEF ocorrem em um processo secundário monitorado, chamado *thread*. Isso permite que a janela principal do problema permaneça ativa durante a análise, além de possibilitar a interrupção do processo com um único clique;
- Permite-se ao usuário salvar o problema mesmo que a análise se encontre incompleta, possibilitando a continuação do processo em outro momento.

4.3.2. Facilidade de Interpretação do Código

- Todos os objetos existentes no Ignis (variáveis, botões, caixas de texto, listas, matrizes, etc) possuem nome autoexplicativo e em português, de modo a facilitar a compreensão por parte do leitor;
- Grande parte do código encontra-se comentado, ou seja, possui observações que explicam seu funcionamento e facilitam sua interpretação;
- Na janela principal, que detém toda a informação vital para a realização da análise, foi realizado um trabalho de agrupamento de código por tipo de função, por exemplo: “Configurações do Ignis”, “Dados do Problema”, “Interatividade com Interface de Usuário”, etc. Isso visa facilitar a localização de partes específicas do código, evitando que haja poluição visual;

- Toda a sequência da Análise de Elementos Finitos pode ser facilmente observada e compreendida no código-fonte do Ignis. Isso facilita o estudo e posteriores continuações e melhorias deste trabalho.

4.3.3. Desenvolvimentos do Ignis

- Toda a lógica de programação utilizada na renderização de gradientes de temperatura e de linhas isotérmicas foi desenvolvida pelos autores, ou seja, não depende de bibliotecas desenvolvidas por terceiros e permite que usuários interessados possam customizá-la e utiliza-la em outras aplicações relacionadas;
- Todo o código referente ao processo de importação de arquivos DXF também foi desenvolvido exclusivamente para o Ignis e pode ser aplicado em outros *softwares* de manipulação de geometrias 2D. Este algoritmo conta com diversos testes de integridade da geometria, permitindo a importação de arquivos sem grandes dificuldades;
- A biblioteca Triangle.NET foi adaptada de modo a permitir uma melhor visualização das renderizações de geometrias e malhas a partir da customização do esquema de cores e espessura de linhas utilizado. Além disso, esta biblioteca não possuía integrações com *softwares* CAD, ou seja, apenas permitia a introdução de geometrias de forma manual;
- Para a utilização do gerador de malhas, fez-se necessário a implementação de um algoritmo capaz de detectar automaticamente os furos de uma geometria, localizando um ponto qualquer que, de forma assegurada, esteja no interior de cada um dos mesmos. Este desenvolvimento permite a geração de malhas íntegras e coerentes, respeitando os limites internos e externos da geometria;
- Também na biblioteca Triangle.NET, os autores realizaram uma customização que permite o destacamento de linhas e/ou fronteiras selecionadas, renderizando-as na cor vermelha e com espessura diferenciada. Isso facilita o uso e a visualização de informações de geometria do Ignis;

- Utilizou-se um algoritmo eficiente que permite verificar se determinado ponto está contido em determinado polígono, chamado PNPOLY e que se baseia no método “*ray-casting*”, aplicado no renderizador e no visualizador de resultados (FRANKLIN, 1970);
- Desenvolveu-se um algoritmo para aplicação das condições de contorno do problema, que garante a transmissão das informações referentes às propriedades conhecidas de cada linha a todos os elementos que possuam nós contidos nas mesmas. Para isso, dentre outros esforços, fez-se necessário uma modificação adicional à biblioteca Triangle.NET.
- Os autores empregaram trechos de código que permitem ao Ignis um processamento paralelo (ou seja, utilizando múltiplos núcleos de processamento de forma simultânea, conforme disponibilidade de *hardware*) no *solver* “decomposição LU”, bem como na tarefa de renderização de gradientes de temperatura, otimizando consideravelmente o tempo de solução e visualização do problema.

4.4. DISPONIBILIZAÇÃO DO CÓDIGO FONTE

Em atendimento a um dos objetivos específicos deste trabalho, os autores disponibilizaram o código-fonte do Ignis na *web*, em um site especializado neste tipo de conteúdo. Há, ainda, um comprometimento na manutenção da disponibilidade desse código por, ao menos, 2 anos.

O *website* pelo qual se optou para a divulgação do código é o GitHub, que possui fácil integração com a plataforma Visual Studio da Microsoft. O endereço onde o leitor pode-se encontrar o código-fonte é: <https://github.com/Crovadore/Ignis>.

5. RESULTADOS

Para validação do código do Ignis, utilizou-se duas fontes de dados para confronto de resultados: soluções analíticas e simulações realizadas no *software* ANSYS. De maneira a testar todas as funcionalidades do Ignis, foram simulados 8 problemas que utilizam todos os recursos nele disponíveis, de forma individual e combinada. Cabe ressaltar que todos os problemas ocorrem em regime permanente, considerando-se materiais com condutividade térmica constante e, quando aplicável, geração de calor uniforme em todo o domínio, utilizando malhas bidimensionais compostas apenas por triângulos lineares, em concordância com as limitações já definidas do *software*.

Para definição das malhas utilizadas em todos os problemas, utilizou-se um critério de refinamento onde as malhas geradas no Ignis e no ANSYS (quando aplicável) foram refinadas sucessivamente, analisando-se os novos resultados obtidos em diversas coordenadas e comparando-os com os resultados anteriores, de modo que, para uma solução numérica obtida ser considerada “convergida”, a diferença numérica encontradas nestes pontos, em ambos os *softwares*, não ultrapassou 10^{-4} unidades de temperatura.

Nos problemas a seguir, foram utilizados todos os 15 algarismos fornecidos pela precisão dupla das variáveis (pontos flutuantes) declaradas no código do Ignis. Para análise do erro relativo encontrado, os autores basearam-se na premissa didática do *software*, ou seja, arbitrariamente levaram em conta que erros relativos de até 5% são considerados suficientemente bons para o atendimento da proposta, levando-se em consideração o critério de refinamento de malha supracitado. Deve-se notar, porém, que nenhum estudo aprofundado envolvendo análise de erros numéricos foi conduzido, tal como recomendado pelas normas da ASME (2009) e AIAA (1998), sendo esta uma sugestão de melhoria indicada ao término deste trabalho.

5.1. PRIMEIRO PROBLEMA

Neste primeiro problema, aplicou-se apenas a condição de contorno Dirichlet de maneira isolada em duas fronteiras distintas. Trata-se, neste caso, de um problema unidimensional (1D) com solução analítica conhecida. No Ignis, entretanto, as simulações são exclusivamente bidimensionais, porém é possível resolver problemas 1D de forma similar. A Figura 22 ilustra o problema analisado.

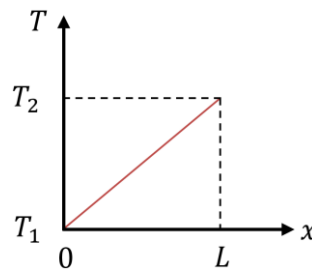


FIGURA 22 – ESQUEMATIZAÇÃO DO PRIMEIRO PROBLEMA
FONTE: OS AUTORES

A solução analítica para este problema é dada por:

$$T_{(x)} = \frac{(T_2 - T_1)}{L}x + T_1 \quad (49)$$

Onde $T_{(x)}$ é a temperatura em função da coordenada x do domínio, T_2 é a temperatura na face direita do corpo, T_1 é a temperatura na face esquerda e L é o comprimento do corpo.

Os seguintes parâmetros foram utilizados para a modelagem do problema:

- $L = 2m$;
- $T_1 = -15^{\circ}C$;
- $T_2 = 80^{\circ}C$.

No Ignis, a malha foi gerada com 128 triângulos e 81 vértices, conforme ilustrado na Figura 23.

Para a realização da simulação pelo *software*, apenas as duas linhas laterais foram configuradas com condições de contorno (conforme parâmetros anteriores). Da forma como está programado, o Ignis automaticamente considera todas as linhas

da geometria que não possuem condição de contorno definida como sendo fronteiras adiabáticas (ou seja, com fluxo de calor igual a zero). Neste problema, os resultados independem da profundidade (ou espessura) do corpo e da condutividade térmica do material, portanto estes valores foram considerados como sendo unitários. Utilizou-se uma geometria quadrada, embora as coordenadas y não interfiram nos resultados.

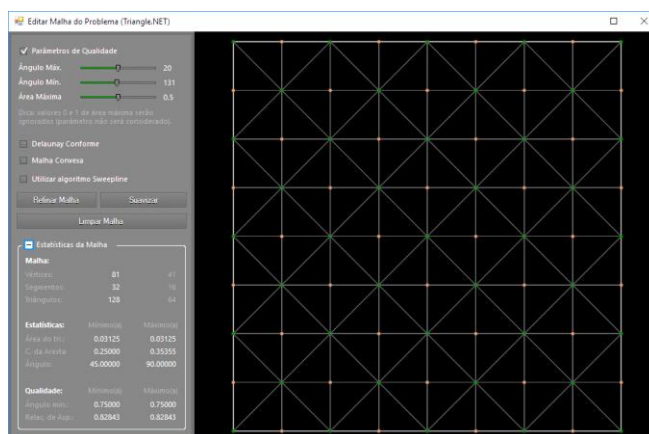


FIGURA 23 – MALHA DO PRIMEIRO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

A Figura 24 ilustra o campo de temperaturas renderizado pelo *software*. De modo geral, na escala de cores, a cor azul representa a temperatura mais baixa de todo o domínio, enquanto a cor vermelha representa a temperatura mais alta.



FIGURA 24 – RESULTADO GRÁFICO DO PRIMEIRO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

Para verificação desta solução, foram confrontados resultados referentes a cinco pontos distintos no contidos neste corpo, obtidos através da solução analítica e da simulação realizada no Ignis, conforme listado na Tabela 3.

TABELA 3 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO PRIMEIRO PROBLEMA

x [m]	Analítico [°C]	Ignis [°C]	Erro Absoluto [°C]
0,01	-14,5250000000000	-14,5250000000000	0,000000000000000
0,5	8,750000000000000	8,749999999999999	0,000000000000001
1	32,500000000000000	32,500000000000000	0,000000000000000
1,5	56,250000000000000	56,250000000000000	0,000000000000000
1,99	79,525000000000000	79,525000000000000	0,000000000000000

FONTE – OS AUTORES

Neste problema, o único erro absoluto encontrado foi de $1 \times 10^{-14} \text{ }^{\circ}\text{C}$ (equivalente a $1,143 \times 10^{-13} \%$).

5.2. SEGUNDO PROBLEMA

Neste problema, aplicou-se apenas a condição de contorno Dirichlet em um problema bidimensional com solução analítica conhecida. A Figura 25 ilustra o problema analisado.

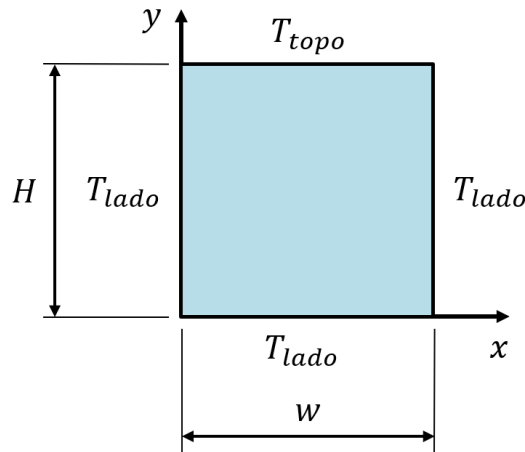


FIGURA 25 – ESQUEMATIZAÇÃO DO SEGUNDO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

A solução analítica para este problema é dada por (HOLMAN, 1989):

$$T_{(x,y)} = (T_{topo} - T_{lado}) \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} + 1}{n} \operatorname{sen}\left(\frac{n\pi x}{w}\right) \frac{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi y}{w}\right)}{\operatorname{senh}\left(\frac{n\pi H}{w}\right)} + T_{lado} \quad (50)$$

Onde $T_{(x,y)}$ é a temperatura em função das coordenadas x e y do domínio, T_{topo} é a temperatura na face superior do corpo, T_{lado} é a temperatura nas faces laterais e inferior, n é o índice do somatório, w é a largura e H é a altura do corpo. Também neste problema, a espessura da peça e a condutividade térmica do material não interferem nos resultados calculados.

Os seguintes parâmetros foram utilizados para a modelagem do problema:

- $T_{topo} = 520^{\circ}\text{C}$;
- $T_{lado} = 180^{\circ}\text{C}$;
- $n_{m\acute{a}x} = 50$;
- $w = 15\text{m}$;
- $H = 8\text{m}$.

No Ignis, a malha foi gerada com 1738 triângulos e 917 vértices, conforme ilustrado na Figura 26.

A Figura 27 ilustra o campo de temperaturas renderizado pelo *software*. Também nesta solução foram confrontados resultados referentes a cinco pontos distintos contidos neste corpo, obtidos através da solução analítica e da simulação realizada no Ignis, conforme listado na Tabela 4.

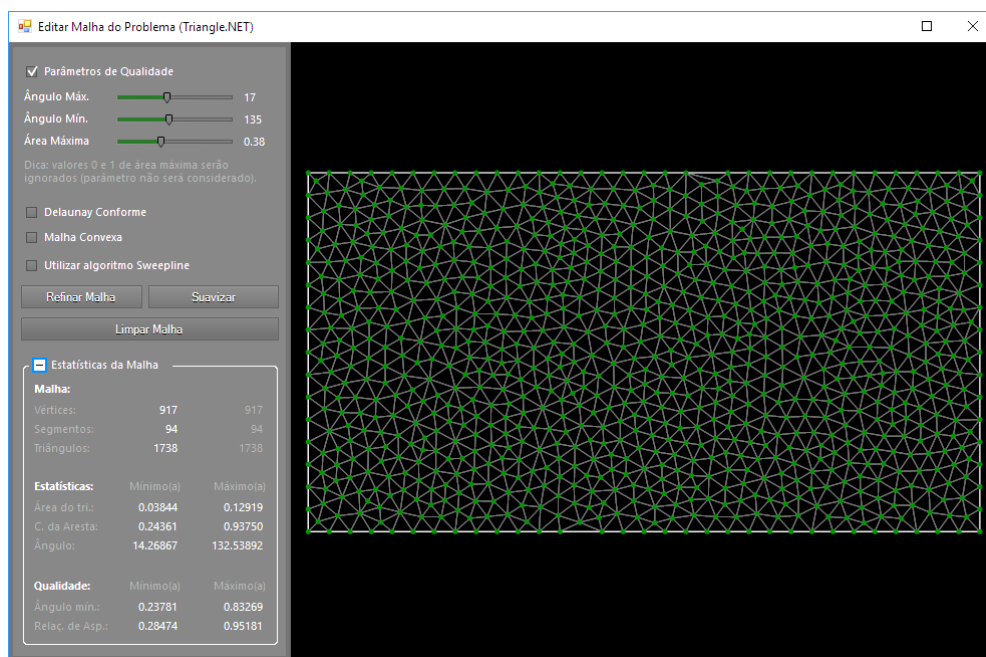


FIGURA 26 – MALHA DO SEGUNDO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

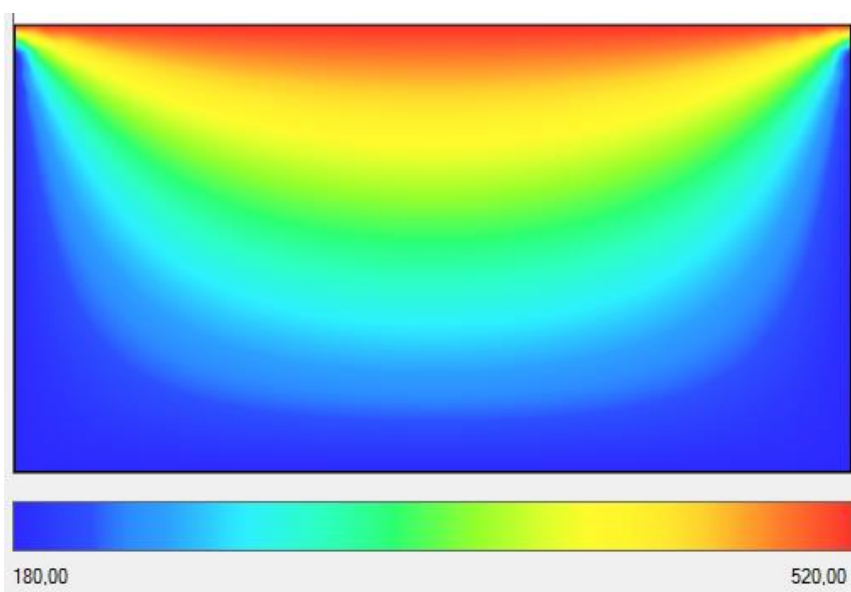


FIGURA 27 – RESULTADO GRÁFICO DO SEGUNDO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

TABELA 4 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO SEGUNDO PROBLEMA

x [m]	y [m]	Análítico [°C]	Ignis [°C]	Erro Absoluto [°C]
7,5	4	327,317768971976	327,317239226954	0,00052974502200
3,75	2	233,263943384989	233,259503566944	0,00443981804500
11,25	6	391,860039708285	391,852744387064	0,00729532122100
1,5	4	239,609419299044	239,597649337349	0,01176996169500
13,5	4	239,609419299044	239,631851370561	0,02243207151700

FONTE – OS AUTORES

Neste problema, foram encontrados pequenos erros absolutos entre os valores de temperatura obtidos analiticamente e no Ignis, sendo o maior deles de aproximadamente 0,022 °C (equivalente a $9,361 \times 10^{-3}\%$).

5.3. TERCEIRO PROBLEMA

Neste problema, aplicou-se apenas a condição de contorno Dirichlet em um problema radial com solução analítica conhecida. A Figura 28 ilustra o problema analisado.

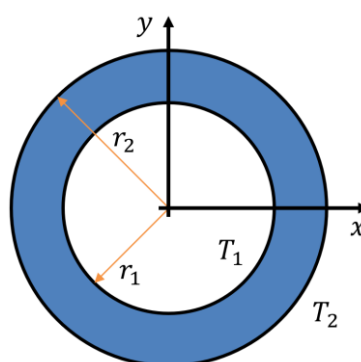


FIGURA 28 – ESQUEMATIZAÇÃO DO TERCEIRO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

A solução analítica para este problema é dada por:

$$T_{(r)} = \frac{(T_1 - T_2)}{\ln\left(\frac{r_1}{r_2}\right)} \ln\left(\frac{r}{r_1}\right) + T_1 \quad (51)$$

Onde $T_{(r)}$ é a temperatura em função do raio r , T_1 e T_2 são as temperaturas nas faces interna e externa do anel, respectivamente, e r_1 e r_2 são os raios interno e externo do anel, respectivamente. A espessura do corpo e a condutividade térmica do material também não interferem nos resultados calculados.

Os seguintes parâmetros foram utilizados para a modelagem do problema:

- $T_1 = 235^\circ C$;
- $T_2 = 60^\circ C$;
- $r_1 = 20cm$;
- $r_2 = 30cm$;

No Ignis, a malha foi gerada com 1146 triângulos e 669 vértices, conforme ilustrado na Figura 29.

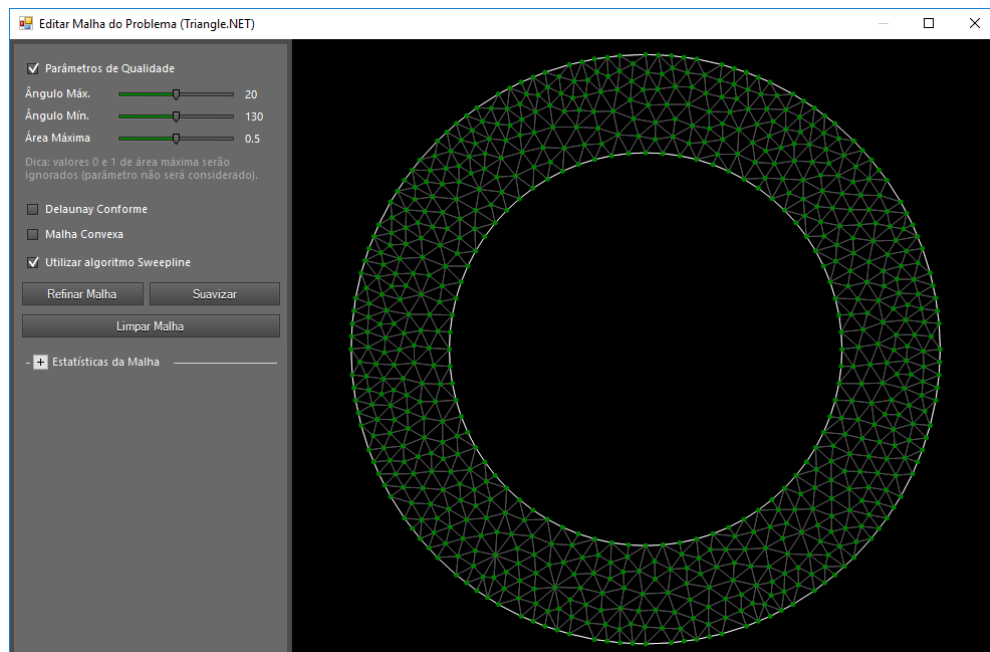


FIGURA 29 – MALHA DO TERCEIRO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

A Figura 30 ilustra o campo de temperaturas renderizado pelo *software*. Também nesta solução foram confrontados resultados referentes a cinco pontos distintos no contidos neste corpo, obtidos através da solução analítica e da simulação realizada no Ignis, conforme listado na Tabela 5.

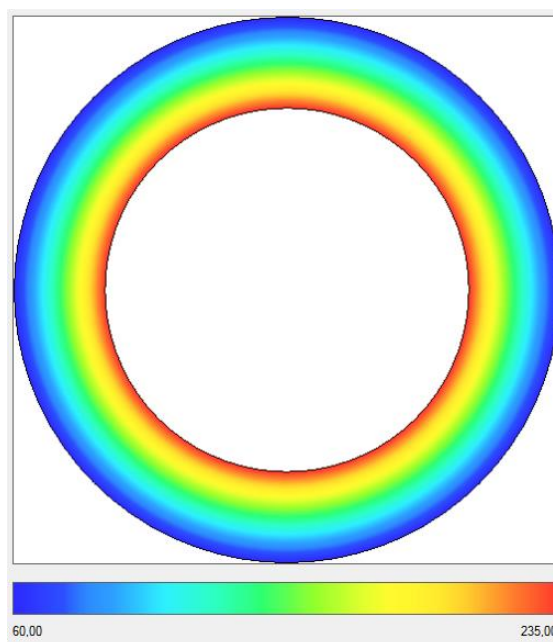


FIGURA 30 – RESULTADO GRÁFICO DO TERCEIRO PROBLEMA
FONTE: OS AUTORES

TABELA 5 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO TERCEIRO PROBLEMA

r [cm]	x [cm]	y [cm]	Analítico [°C]	Ignis [°C]	Erro Absoluto [°C]
25	25	0	138,690550187689	138,796771065518	0,10622087782900
25	17,678	17,678	138,690550187689	138,693616308052	0,00306612036300
21	0	21	213,942013606328	214,025338892673	0,08332528634500
22,5	19,486	11,25	184,164475986505	184,081071500215	0,08340448629000
24	23,182	6,212	156,309449812312	156,170602139795	0,13884767251700

FONTE – OS AUTORES

Neste problema, foram encontrados pequenos erros absolutos, sendo o maior deles de aproximadamente $0,1388\text{ }^{\circ}\text{C}$ (equivalente a $0,089\%$).

5.4. QUARTO PROBLEMA

Neste problema, aplicou-se a condição de contorno Neumann, combinada com uma condição de contorno Dirichlet em um problema unidimensional com solução analítica conhecida. A Figura 31 ilustra o problema analisado.

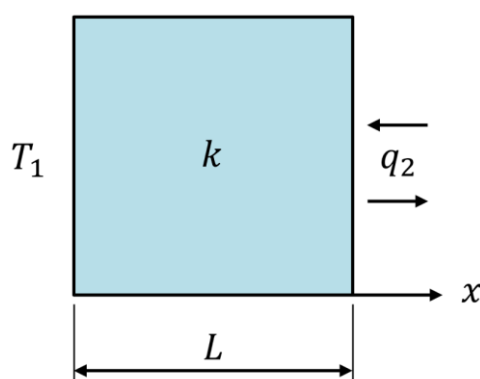


FIGURA 31 – ESQUEMATIZAÇÃO DO QUARTO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

A solução analítica para este problema é dada por:

$$T_{(x)} = \frac{-q_2}{kA}x + T_1 \quad (52)$$

Onde $T_{(x)}$ é a temperatura em função da coordenada x do domínio, T_1 é a temperatura na face esquerda do corpo, q_2 é a taxa de calor na face direita do corpo, k é a condutividade térmica do material e A é a área de uma das laterais do corpo (o qual, por consequência, deve possuir uma espessura definida). Neste problema, diferentemente dos anteriores, a espessura e a condutividade térmica influenciam diretamente nos resultados calculados.

No Ignis, utilizou-se uma geometria quadrada por motivos de simplificação. Com isso, para obtenção da área de 20m^2 nas laterais do corpo, o qual possui lados com comprimento de 10m , considerou-se uma espessura de 2m .

Os seguintes parâmetros foram utilizados para a modelagem do problema:

- $L = 10m$;
- $T_1 = 500^{\circ}C$;
- $q_2 = -5525W$;
- $A = 20m^2$;
- $k = 30 \frac{W}{m^{\circ}C}$.

A malha foi gerada com 512 triângulos e 289 vértices, conforme ilustrado na Figura 32.

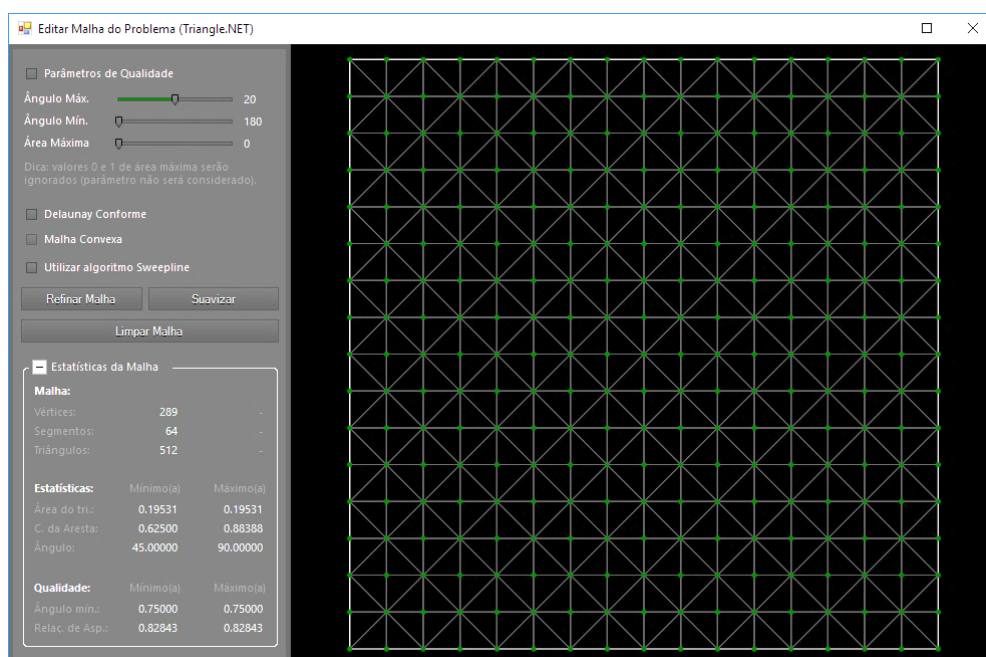


FIGURA 32 – MALHA DO QUARTO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

A Figura 33 ilustra o campo de temperaturas renderizado pelo *software*. Nesta solução, também foram confrontados resultados referentes a cinco pontos distintos contidos neste corpo, obtidos através da solução analítica e da simulação realizada no Ignis, conforme listado na Tabela 6.

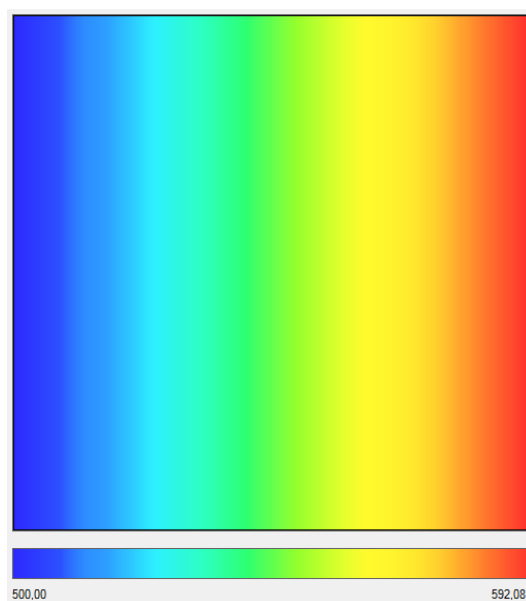


FIGURA 33 – RESULTADO GRÁFICO DO QUARTO PROBLEMA
 FONTE: OS AUTORES

TABELA 6 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO QUARTO PROBLEMA

x [m]	Analítico [°C]	Ignis [°C]	Erro Absoluto [°C]
1	509,208333333333	509,208333333333	0,00000000000000
2,5	523,020833333333	523,020833333334	0,00000000000001
5	546,041666666667	546,041666666668	0,00000000000001
7,5	569,062500000000	569,062500000002	0,00000000000002
9	582,875000000000	582,875000000002	0,00000000000002

FONTE – OS AUTORES

Neste problema, o maior erro absoluto encontrado foi de $2 \times 10^{-14} \text{ °C}$ (equivalente a $3,515 \times 10^{-13} \%$).

5.5. QUINTO PROBLEMA

Neste problema, aplicou-se a condição de contorno Robin, combinada com uma condição de contorno Dirichlet em um problema unidimensional com solução analítica conhecida. A Figura 34 ilustra o problema analisado.

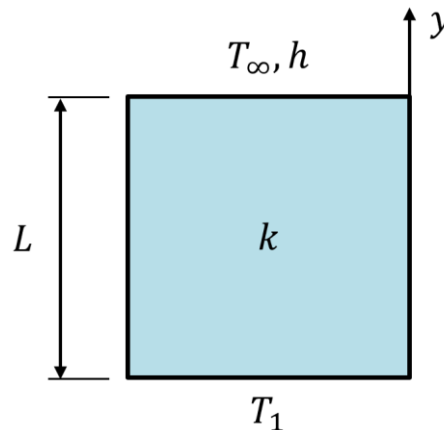


FIGURA 34 – ESQUEMATIZAÇÃO DO QUINTO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

A solução analítica para este problema é dada por:

$$T_{(y)} = \frac{h(T_{\infty} - T_1)}{k + hL} y + T_1 \quad (53)$$

Onde $T_{(y)}$ é a temperatura em função da coordenada y do domínio, T_1 é a temperatura na face inferior do corpo, T_{∞} é a temperatura do fluido em contato com a face superior, h é o coeficiente de convecção deste fluido, k é a condutividade térmica do material e L é o comprimento do corpo na direção y .

Neste problema, a condutividade térmica influencia diretamente nos resultados calculados, ao contrário da espessura, que não exerce influência. No Ignis, utilizou-se uma geometria quadrada com espessura unitária, por motivos de simplificação.

Os seguintes parâmetros foram utilizados para a modelagem do problema:

- $L = 22m$;
- $T_1 = 250^{\circ}C$;
- $T_{\infty} = 32^{\circ}C$;

- $h = 35 \frac{W}{m^2 \cdot ^\circ C};$
- $k = 55 \frac{W}{m \cdot ^\circ C}.$

No Ignis, a malha foi gerada com 2048 triângulos e 1089 vértices, conforme ilustrado na Figura 35.

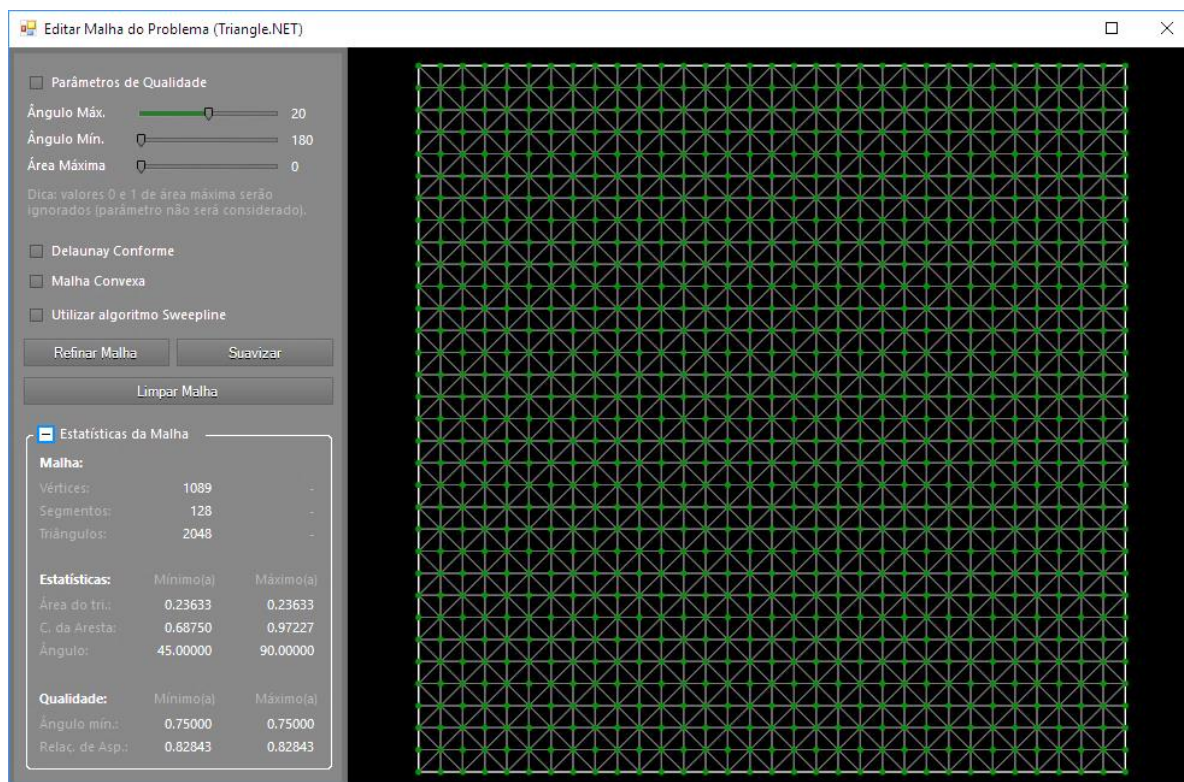


FIGURA 35 – MALHA DO QUINTO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

A Figura 36 ilustra o gradiente de temperaturas renderizado pelo *software*. Nesta solução, como nos problemas anteriores, foram confrontados resultados referentes a cinco pontos distintos no contidos neste corpo, obtidos através da solução analítica e da simulação realizada no Ignis, conforme listado na Tabela 7.

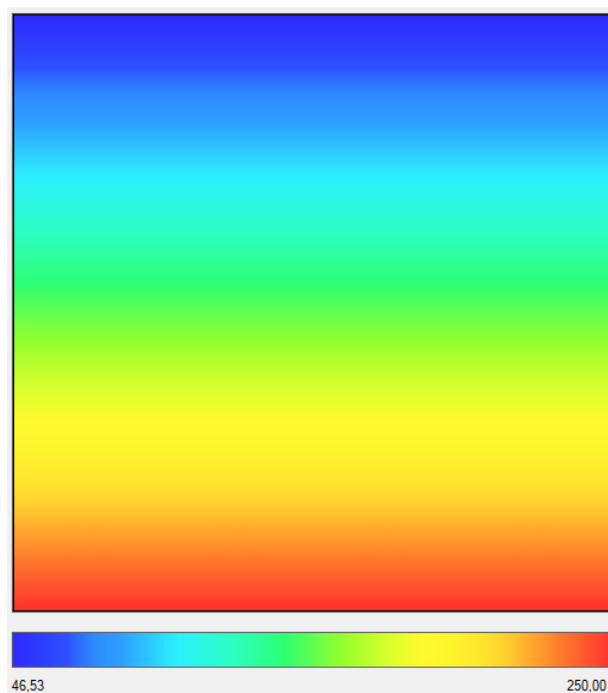


FIGURA 36 – RESULTADO GRÁFICO DO QUINTO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

TABELA 7 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO QUINTO PROBLEMA

y [m]	Analítico [°C]	Ignis [°C]	Erro Absoluto [°C]
2,2	229,653333333333	229,653333333332	0,00000000000001
6	194,509090909091	194,509090909089	0,00000000000002
11	148,266666666667	148,266666666664	0,00000000000003
16	102,024242424242	102,024242424240	0,00000000000002
19,8	66,8800000000000	66,8799999999989	0,00000000000012

FONTE – OS AUTORES

Neste problema, o único erro absoluto encontrado foi de $1,2 \times 10^{-13} \text{ }^{\circ}\text{C}$ (equivalente a $1,645 \times 10^{-12}\%$).

5.6. SEXTO PROBLEMA

Neste problema, buscou-se validar a capacidade do Ignis em resolver corretamente problemas envolvendo corpos com geração de calor uniforme em todo o domínio. Também foi utilizada uma condição de contorno Dirichlet para permitir a obtenção de um único resultado. Este problema é unidimensional e sua solução analítica pode ser fabricada a partir das condições de contorno. A Figura 37 ilustra o problema analisado.

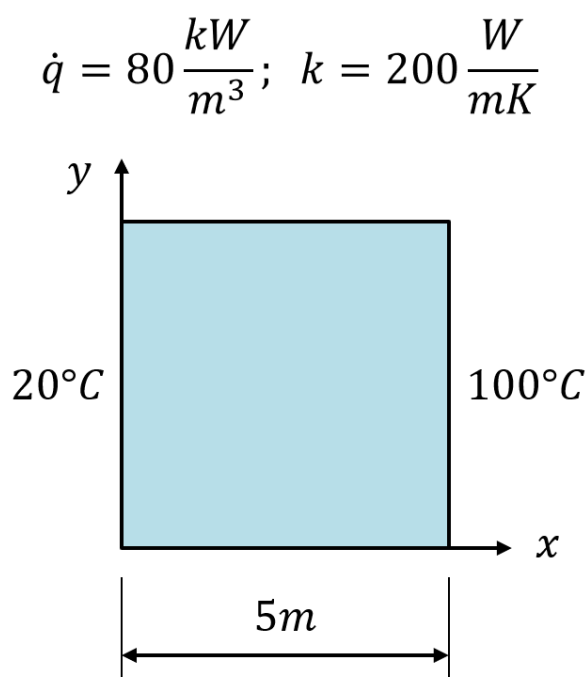


FIGURA 37 – ESQUEMATIZAÇÃO DO SEXTO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

A solução analítica fabricada para este problema é dada por:

$$T_{(x)} = -200x^2 + 1016x + 20 \quad (54)$$

Onde $T_{(x)}$ é a temperatura em função da coordenada x do domínio. Na Figura 37, \dot{q} representa a taxa de geração de calor uniforme conhecida e k é a condutividade térmica do material.

Neste problema, em função do termo fonte \dot{q} , que representa a energia fornecida por tempo e por volume, faz-se necessária a especificação da espessura

do corpo. Considerou-se, para a fabricação da solução analítica, uma espessura de 1m. Além disso, a da condutividade térmica do material também exerce influência direta nos resultados calculados. No Ignis, também neste problema, utilizou-se uma geometria quadrada por motivos de simplificação.

A malha foi gerada com 4472 triângulos e 2306 vértices e pode ser vista na Figura 38.

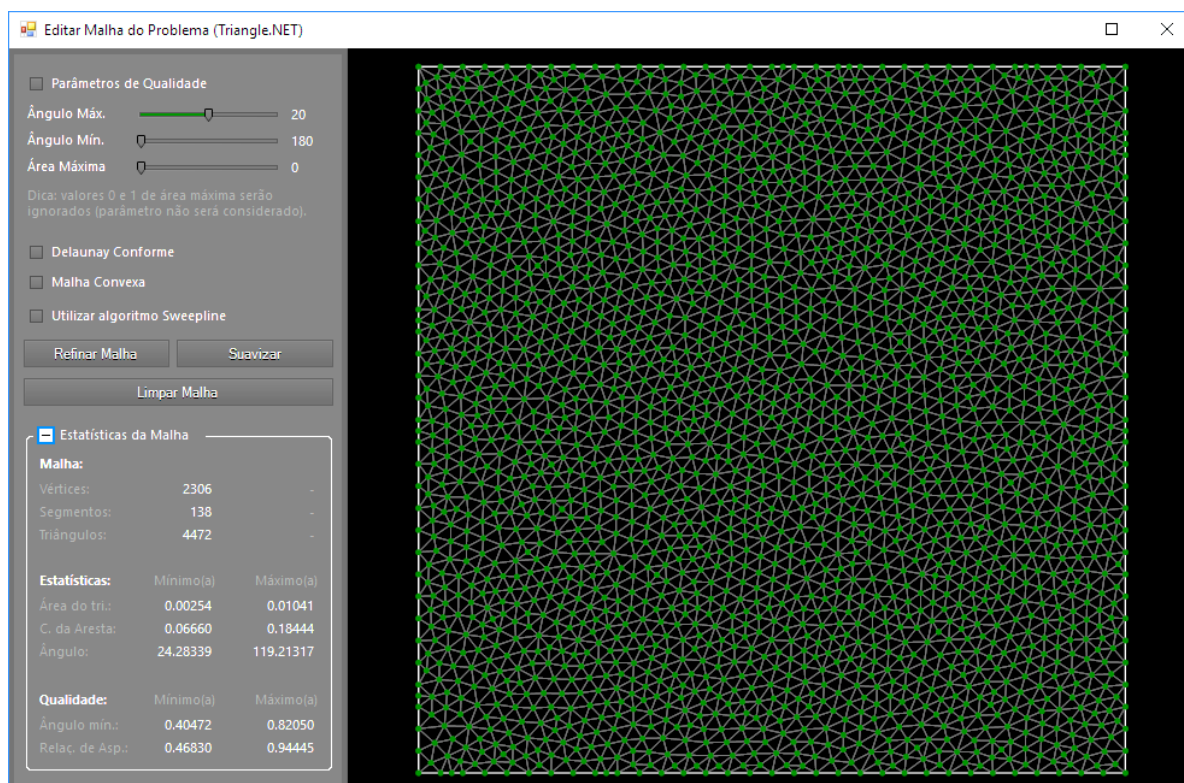


FIGURA 38 – MALHA DO SEXTO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

A Figura 39 ilustra o campo de temperaturas renderizado pelo *software*. Nesta solução, como nos problemas anteriores, foram confrontados resultados referentes a cinco pontos distintos no contidos neste corpo, obtidos através da solução analítica e da simulação realizada no Ignis, conforme listado na Tabela 8.

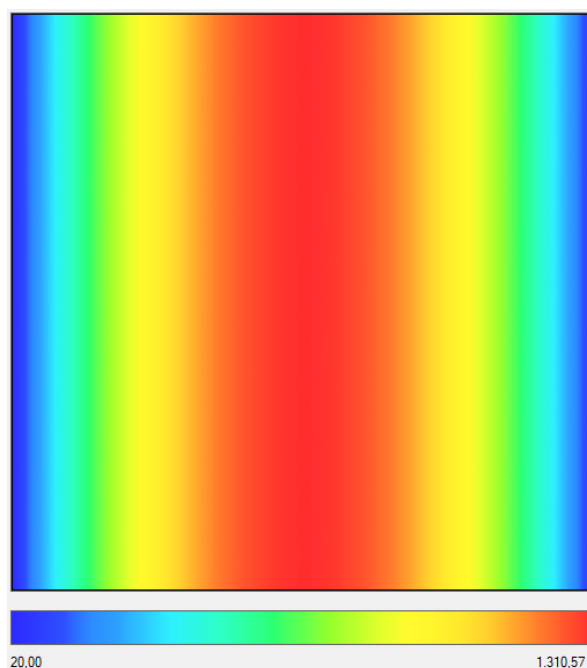


FIGURA 39 – RESULTADO GRÁFICO DO SEXTO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

TABELA 8 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO SEXTO PROBLEMA

y [m]	Analítico [°C]	Ignis [°C]	Erro Absoluto [°C]
0,5	478,000000000000	477,746543537227	0,25345646277300
1,5	1094,000000000000	1093,43506584865	0,56493415135000
2,5	1310,000000000000	1309,66192150796	0,33807849204000
3,5	1126,000000000000	1125,68485870784	0,31514129216000
4,5	542,000000000000	541,413060686646	0,58693931335400

FONTE – OS AUTORES

Neste problema, o maior erro absoluto encontrado entre os resultados analítico e numérico foi de 0,587 °C (equivalente a 0,108%).

5.7. SÉTIMO PROBLEMA

A partir deste problema, buscou-se testar a capacidade do Ignis em resolver corretamente problemas envolvendo corpos com geometrias mais complexas, utilizando diversas condições de contorno simultaneamente. Este problema é bidimensional e não há solução analítica conhecida, portanto, fez-se uso do *software* ANSYS APDL para confronto de resultados e cálculo do erro relativo. Por padrão, o ANSYS fornece apenas 6 algarismos significativos em seus resultados, portanto as tabelas de resultados deste problema terão esta limitação.

Deve-se notar que o ANSYS, mesmo utilizando o MEF, é programado de forma muito distinta ao Ignis, pois não utiliza elementos triangulares lineares por padrão, além de utilizar métodos iterativos para solução das equações.

A Figura 40 ilustra o problema analisado, enumerando as fronteiras internas do corpo (furos) para identificação de suas condições de contorno na Tabela 9. Todas as dimensões indicadas são expressas em milímetros.

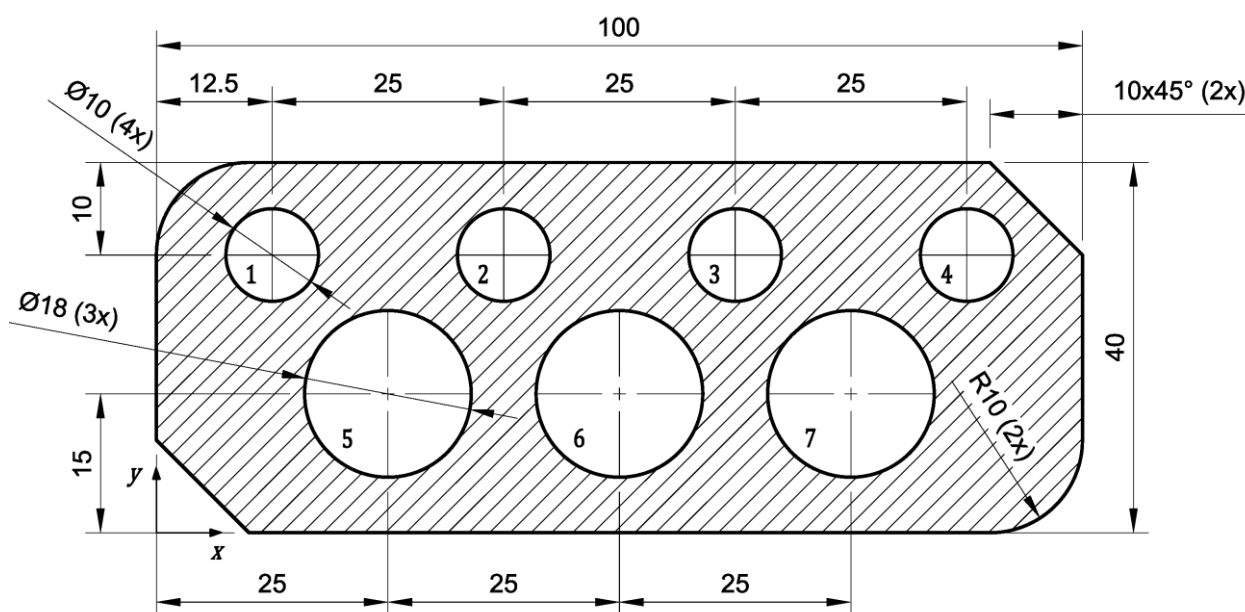


FIGURA 40 – ESQUEMATIZAÇÃO DO SÉTIMO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

Na Tabela 9, os parâmetros 1 e 2 representam as seguintes propriedades:

- **Parâmetro 1:**
 - Dirichlet: Temperatura;
 - Neumann: Fluxo de calor;
 - Robin: Coeficiente de convecção.

- **Parâmetro 2:**
 - Dirichlet: Não se aplica;
 - Neumann: Não se aplica;
 - Robin: Temperatura do fluido.

TABELA 9 – CONDIÇÕES DE CONTORNO DO SÉTIMO PROBLEMA

Fronteira	Cond. Cont.	Parâmetro 1	Parâmetro 2
Externa	Neumann	-18 W/mm^2	---
1	Dirichlet	520°C	---
2	Dirichlet	430°C	---
3	Dirichlet	315°C	---
4	Dirichlet	278°C	---
5	Robin	$20 \text{ W/(mm}^2\text{ }^\circ\text{C)}$	$50,12^\circ\text{C}$
6	Robin	$18,2 \text{ W/(mm}^2\text{ }^\circ\text{C)}$	$61,2^\circ\text{C}$
7	Robin	$14,27 \text{ W/(mm}^2\text{ }^\circ\text{C)}$	$91,1^\circ\text{C}$

FONTE – OS AUTORES

Além dos parâmetros acima, considerou-se a espessura do corpo como sendo igual a 1 mm e condutividade térmica do material igual a $8 \frac{\text{W}}{\text{mm}^\circ\text{C}}$.

No Ignis, a malha utilizada para cálculo dos resultados foi gerada com 3662 triângulos e 2063 vértices e pode ser vista na Figura 41. No ANSYS, a malha foi

gerada com 3508 triângulos e 7434 vértices (por se tratar de uma malha de elementos quadráticos).

A Figura 43 ilustra o gradiente de temperaturas obtido no Ignis, enquanto a Figura 44 ilustra os resultados gráficos calculados pelo ANSYS. Nesta solução, foram confrontados resultados referentes a três pontos distintos no contidos neste corpo, além das temperaturas máxima e mínima encontradas em todo o domínio, conforme listado nas tabelas 10 e 11.

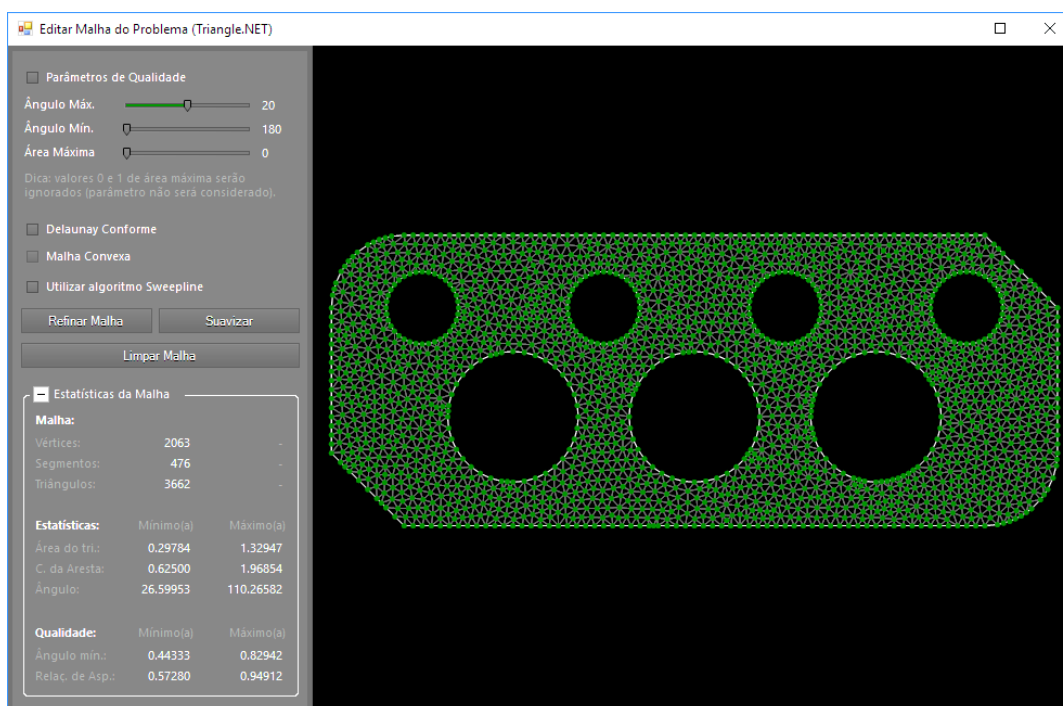


FIGURA 41 – MALHA DO SÉTIMO PROBLEMA (IGNIS)

FONTE: OS AUTORES

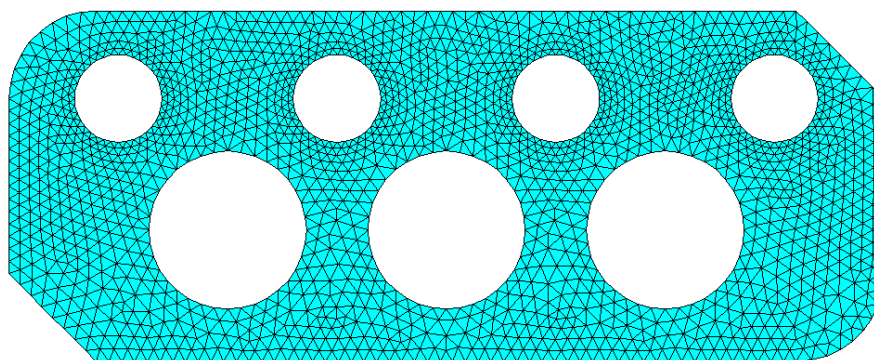


FIGURA 42 – MALHA DO SÉTIMO PROBLEMA (ANSYS)

FONTE: OS AUTORES

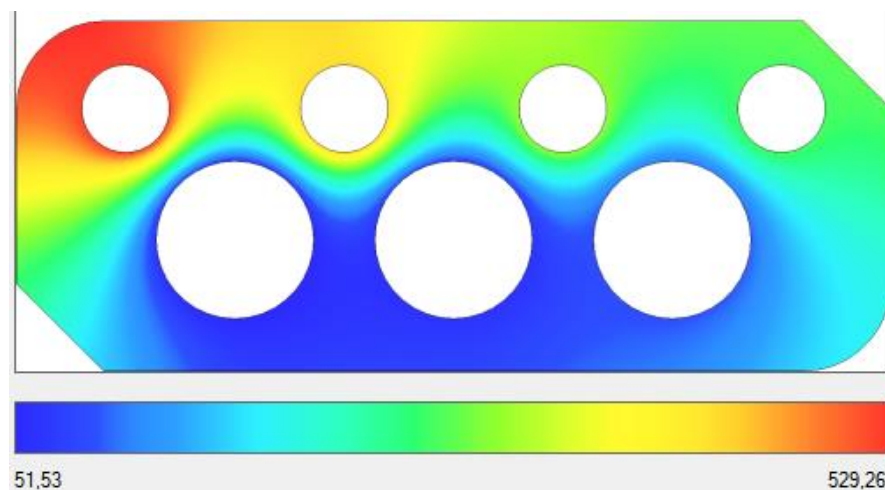


FIGURA 43 – RESULTADO GRÁFICO DO SÉTIMO PROBLEMA (IGNIS)

FONTE: OS AUTORES

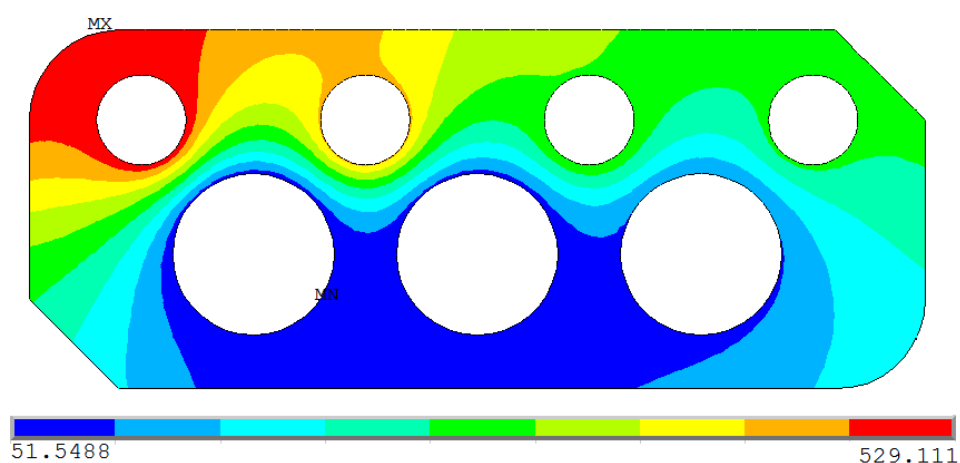


FIGURA 44 – RESULTADO GRÁFICO DO SÉTIMO PROBLEMA (ANSYS)

FONTE: OS AUTORES

TABELA 10 – TEMPERATURAS MÁXIMA E MÍNIMA DO SÉTIMO PROBLEMA

	ANSYS [°C]	Ignis [°C]	Erro Absoluto [°C]
$T_{m\acute{a}x}$	529,111	529,255	0,1450
$T_{m\acute{i}n}$	51,5488	51,5349	0,0139

FONTE – OS AUTORES

TABELA 11 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO SÉTIMO PROBLEMA

x [mm]	y [mm]	ANSYS [°C]	Ignis [°C]	Erro Absoluto [°C]
50	30	270,097	270,171	0,07400
62	6	84,8632	84,9317	0,06850
5,58	23,41	422,362	422,121	0,24100

FONTE – OS AUTORES

Neste problema, o maior erro absoluto encontrado entre os resultados obtidos nos dois *softwares* foi de 0,241 °C (equivalente a 0,057%).

5.8. OITAVO PROBLEMA

Neste último, buscou-se validar o código do Ignis quanto à sua capacidade em resolver corretamente problemas envolvendo corpos com geometrias mais complexas, utilizando todas as três condições de contorno disponíveis (Dirichlet, Neumann e Robin) e utilizando uma taxa de geração de calor uniforme em todo o domínio. Este problema é bidimensional e, como o anterior, não há solução analítica conhecida, portanto, fez-se uso do *software* ANSYS para confronto de resultados. Sua configuração engloba todos os recursos disponíveis no Ignis, representando, portanto, um teste completo das funcionalidades do *software*.

A Figura 45 ilustra o problema analisado e, como no problema anterior, enumera as fronteiras internas do corpo (furos) para identificação de suas condições de contorno, as quais encontram-se listadas na Tabela 12. As dimensões indicadas encontram-se expressas em milímetros.

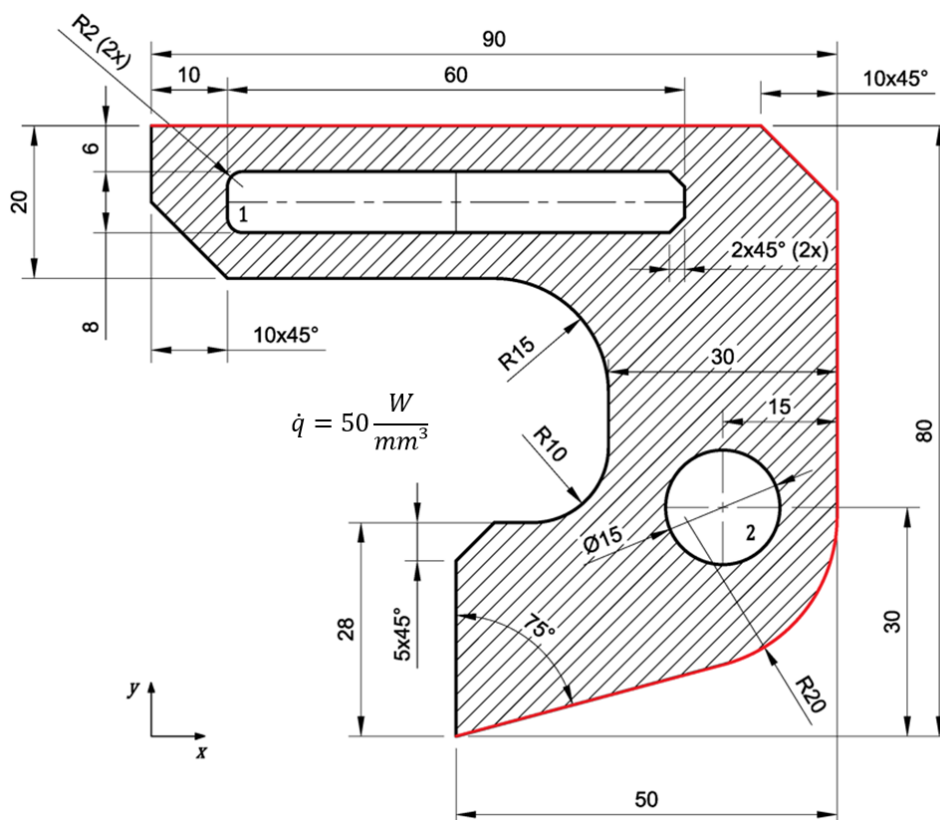


FIGURA 45 – ESQUEMATIZAÇÃO DO OITAVO PROBLEMA

FONTE: OS AUTORES

Os parâmetros 1 e 2 indicados na Tabela 12 representam as mesmas propriedades referentes ao problema anterior.

TABELA 12 – CONDIÇÕES DE CONTORNO DO OITAVO PROBLEMA

Fronteira	Cond. Cont.	Parâmetro 1	Parâmetro 2
Externa (Preto)	Dirichlet	300°C	---
Externa (Vermelho)	Neumann	38,2 W/mm ²	---
1	Robin	52 W/(mm ² °C)	97,42°C
2	Dirichlet	532°C	---

FONTE – OS AUTORES

Além dos parâmetros da Tabela 12, considerou-se a espessura do corpo como sendo igual a 20mm e condutividade térmica do material igual a $55 \frac{W}{\text{mm}^{\circ}\text{C}}$.

No Ignis, a malha utilizada para cálculo dos resultados foi gerada com 9242 triângulos e 4939 vértices e pode ser observada na Figura 46. No ANSYS, a malha foi gerada com 9117 triângulos e 18872 vértices.

A Figura 48 ilustra o campo de temperaturas obtido no Ignis, enquanto a Figura 49 ilustra os resultados gráficos calculados pelo ANSYS. Nesta solução, como já feito no problema anterior, foram confrontados resultados referentes a três pontos distintos no contidos neste corpo, além das temperaturas máxima e mínima encontradas em todo o domínio, cujos valores encontram-se listados nas tabelas 13 e 14.

Neste último problema, o maior erro absoluto encontrado entre os resultados obtidos nos dois *softwares* foi de $0,249^{\circ}\text{C}$ (equivalente a $0,043\%$).

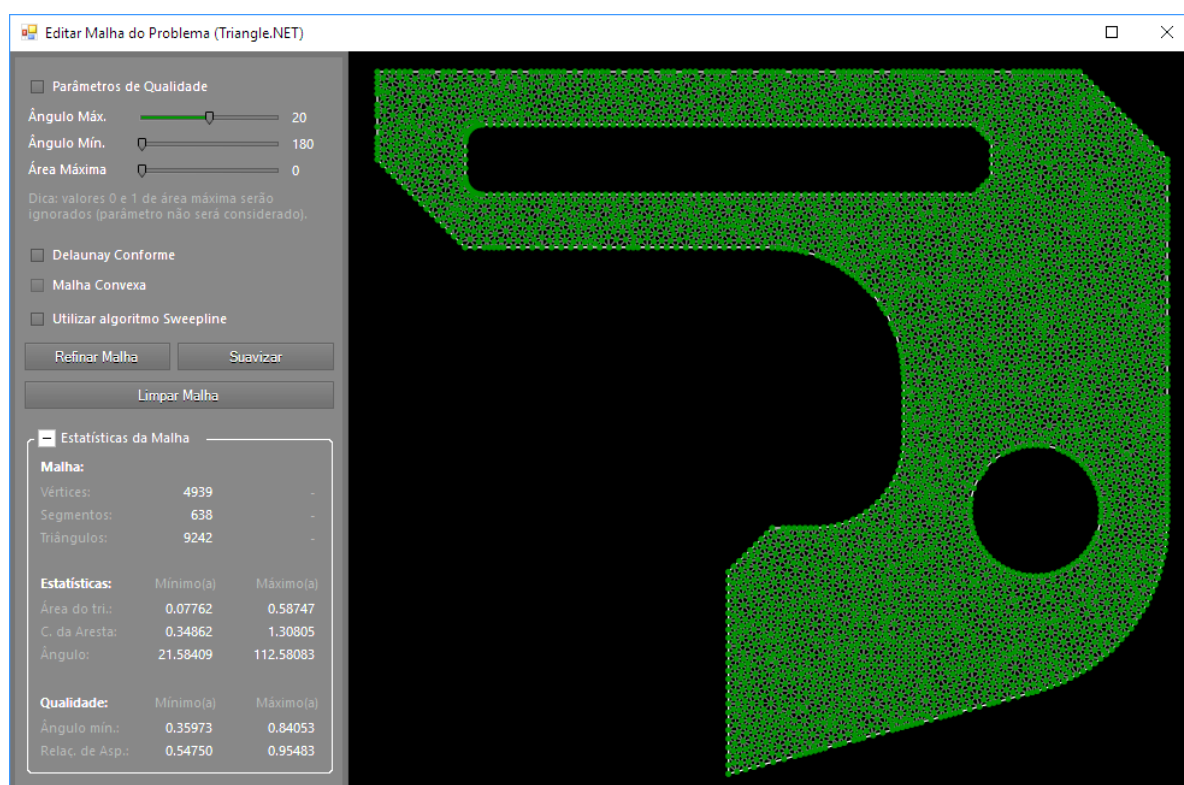


FIGURA 46 – MALHA DO OITAVO PROBLEMA (IGNIS)

FONTE: OS AUTORES

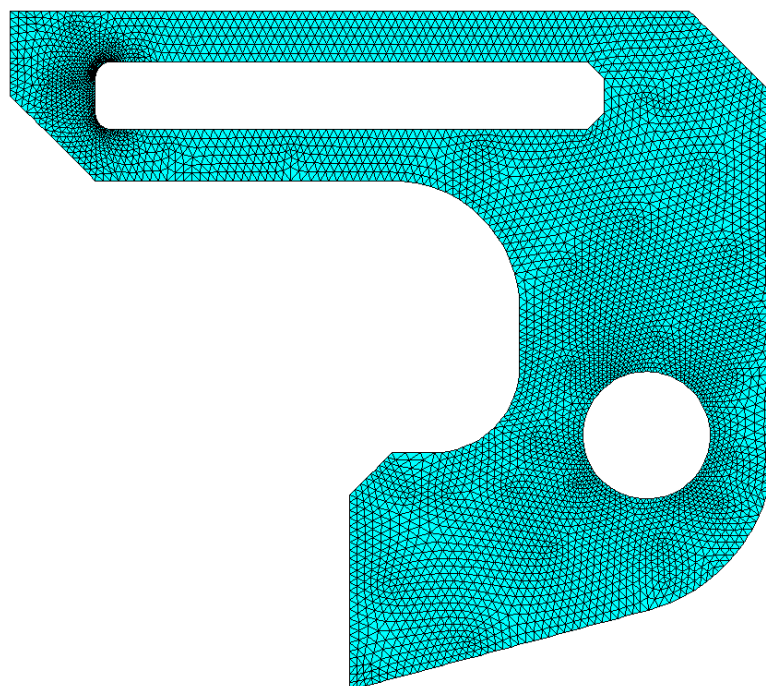


FIGURA 47 – MALHA DO OITAVO PROBLEMA (ANSYS)

FONTE: OS AUTORES

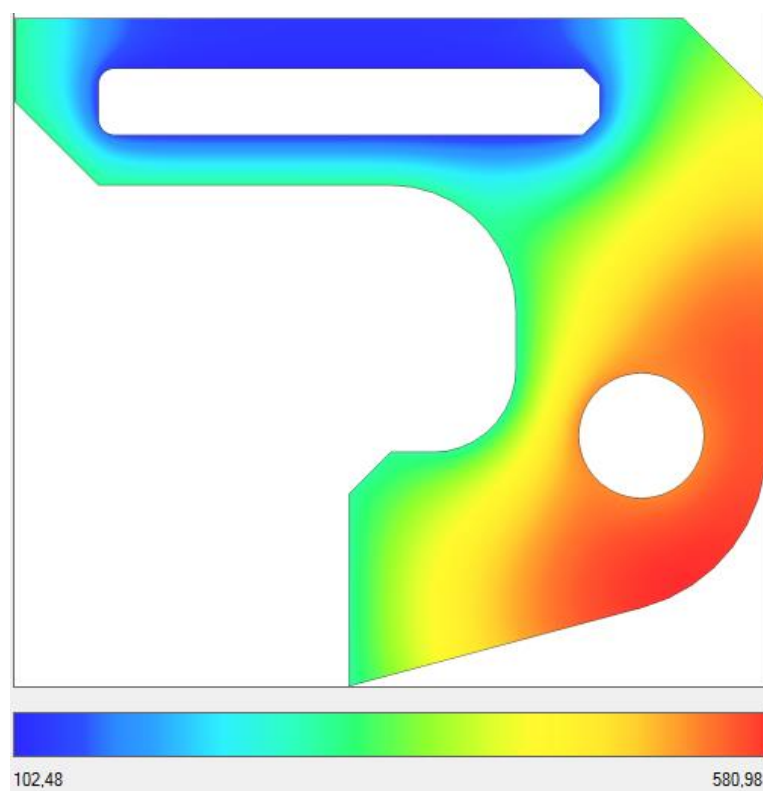


FIGURA 48 – RESULTADO GRÁFICO DO OITAVO PROBLEMA (IGNIS)

FONTE: OS AUTORES

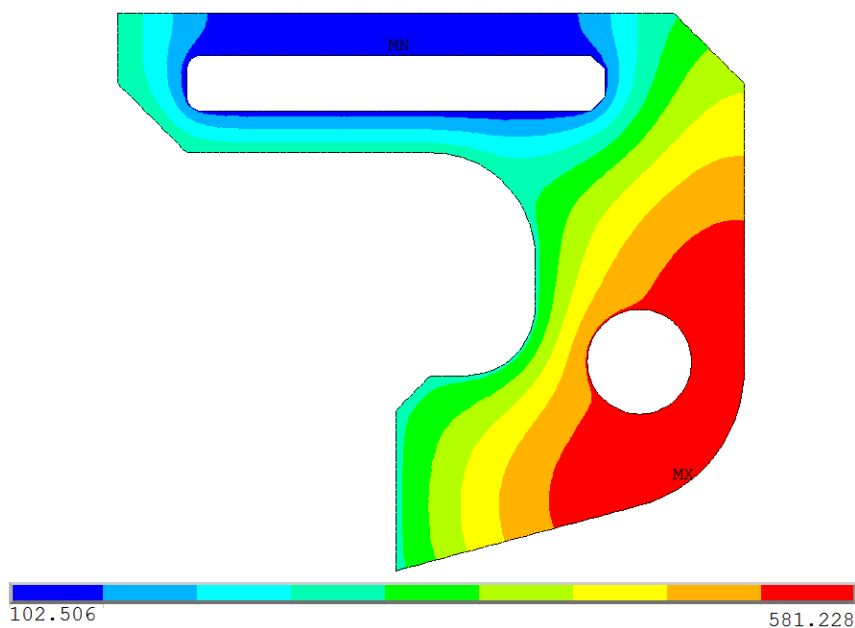


FIGURA 49 – RESULTADO GRÁFICO DO OITAVO PROBLEMA (ANSYS)

FONTE: OS AUTORES

TABELA 13 – TEMPERATURAS MÁXIMA E MÍNIMA DO OITAVO PROBLEMA

	ANSYS [°C]	Ignis [°C]	Erro Absoluto [°C]
$T_{máx}$	581,228	580,979	0,2490
$T_{mín}$	102,506	102,483	0,0230

FONTE – OS AUTORES

TABELA 14 – CONFRONTO DE RESULTADOS DO OITAVO PROBLEMA

y [mm]	y [mm]	ANSYS [°C]	Ignis [°C]	Erro Absoluto [°C]
50	16	416,598	416,614	0,0160
35	52	460,493	460,592	0,0990
30	77	190,008	190,166	0,1580

FONTE – OS AUTORES

6. CONCLUSÕES

A partir dos resultados obtidos e listados no capítulo anterior, os autores identificaram que o Ignis é capaz de produzir resultados satisfatórios (tendo encontrado, na análise de oito problemas distintos, erros relativos de até 0,108%) a partir da aplicação de todos os recursos disponibilizados pelo *software*, desde que malhas suficientemente refinadas sejam empregadas. As simulações realizadas buscaram testar de forma aprofundada a aplicação das três condições de contorno referentes à condução de calor (Dirichlet, Neumann e Robin) em geometrias simples e complexas, obtendo diferenças de resultados inferiores a 5%, limite máximo estabelecido pelos autores para atendimento à premissa didática do programa.

Embora as soluções analíticas estejam disponíveis, em geral, em problemas de geometria e condições de contorno simples, as mesmas foram fundamentais para um procedimento parcial de verificação do código (ASME, 2009). Com isso, na segunda etapa de testes (sétimo e oitavo problemas), testes mais complexos foram realizados a partir de um confronto de resultados fornecidos pelo ANSYS e o Ignis continuou a apresentar soluções muito próximas ao objeto de comparação, demonstrando, embora de forma não extensiva, que o programa resolve corretamente o modelo numérico proposto.

A análise acima permite concluir que este trabalho atingiu seu objetivo principal, o de desenvolver um *software* gratuito e código aberto para Windows, capaz de realizar simulações de condução de calor bidimensionais e em regime permanente através da aplicação do Método dos Elementos Finitos, permitindo, ainda, a geração de malhas triangulares lineares de forma integrada e automática e a parametrização de condições de contorno, tudo isso numa interface de usuário com aspecto didático, de fácil uso.

A disponibilização do código-fonte permitirá que indivíduos interessados possam analisar, incrementar e adaptar o programa para suas necessidades. Com isso, conclui-se que o Ignis contribui de forma significativa não só para docentes e discentes que poderão utilizar seu executável como ferramenta de aprendizado e

ensino, mas também para o desenvolvimento de soluções simples, criativas e confiáveis de programas didáticos para a engenharia.

6.1. SUGESTÕES PARA TRABALHOS FUTUROS

Durante o desenvolvimento deste trabalho, os autores identificaram diversas oportunidades de melhoria e incrementos ao *software*, bem como a possibilidade de derivações da sua aplicação à outras áreas da engenharia. São elas:

- Implementação da condição de contorno referente à radiação;
- Realização de análises de condução de calor em regime transiente;
- Desenvolvimento de métodos mais rápidos de renderização de imagens;
- Implementação de métodos de solução (*solvers*) iterativos;
- Integração de ambiente CAD completo, com possibilidade de geração de geometrias 2D complexas utilizando o *mouse*;
- Melhorias no gerador de malhas, introduzindo ferramentas de manipulação direta dos elementos;
- Utilização de elementos quadriláteros e isoparamétricos;
- Utilização de elementos quadráticos e cúbicos;
- Adaptações no código que permitam a análise de diversos corpos de diferentes propriedades físicas numa mesma simulação;
- Inclusão de modelo de condutividade térmica em função da temperatura;
- Disponibilização do *software* como aplicativo *web*, permitindo sua utilização em computadores que utilizem outros sistemas operacionais diferentes do Windows, incluindo *smartphones* e *tablets*.
- Realização de estudo aprofundado de erros numéricos associados ao Ignis, segundo parâmetros determinados por *The American Institute of Aeronautics and Astronautics* (AIAA, 1998) e *American Society of Engineers* (ASME, 2009), entre outros.

REFERÊNCIAS

AIAA; **Guide for the Verification and Validation of Computational Fluid Dynamics Simulations – G-077- 1998**; Reston; 1998.

ASME; **Standard for Verification and Validation in Computational Fluid Dynamics and Heat Transfer – ASME V&V 20-2009**; Nova Iorque; 2009.

BERGMAN, T. L.; LAVINE, A. S.; INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**; 7ª Edição; Editora John Wiley & Sons; Nova Iorque; 2011.

CLOUGH, R. W.; **The Finite Element Analysis in Plane Stress Analysis**; 2ª ASCE Conference on Electronic Computation; Pittsburgh; 1960.

FRANKLIN, W. R.; **PNPOLY - Point Inclusion in Polygon Test**; Disponível em: <https://wrf.ecse.rpi.edu//Research/Short_Notes/pnpoly.html>. Acesso em 02 de junho de 2017; 1970.

GOSZ, M. R.; **Finite Element Method: Applications in Solids, Structures, and Heat Transfer**; 1ª Edição; Editora CRC; Boca Raton; 2006.

HOLMAN, J. P.; **Heat Transfer**; 7ª Edição; Editora McGraw-Hill; Nova Iorque; 1989.

HUANG, H.; USMANI, A. S.; **Finite Element Analysis for Heat Transfer**; 2ª Edição; Editora Springer London; Londres; 2012.

HUEBNER, K. H.; THORNTON, E. A.; **The Finite Element Method for Engineers**; 2ª Edição; Editora John Wiley & Sons; Nova Iorque; 1982.

HUEBNER, K. H.; DEWHIRST, D. L.; SMITH, D. E.; BYROM, T. G.; **The Finite Element Method for Engineers**; 4ª Edição; Editora Wiley Interscience; Nova Iorque; 2001.

INCROPERA, F. P.; DEWITT, D. P.; **Fundamentals of Heat and Mass Transfer**; 3ª Edição; Editora John Wiley & Sons; Nova Iorque; 1990.

KIM, N.; SANKAR, B. V.; **Introdução à Análise e ao Projeto em Elementos Finitos**; 1ª Edição; Editora LTC; Rio de Janeiro; 2011.

LEWIS, R. W.; NITHIARASU, P.; SEETHARAMU, K. N.; **Fundamentals of the Finite Element Method for Heat and Fluid Flow**; 1ª Edição; Editora Wiley; Chichester; 2004.

MALISKA, C. R.; DIHLMANN, A.; MALISKA JR., C. R.; REIS, M. V. F. D.; CABRAL, R. B.; **Transcal I – Software com fins Educacionais**; Florianópolis; 1997.

MATH.NET; **Math.NET Numerics**. Disponível em: <<https://github.com/mathnet/mathnet-numerics>>. Acesso em 15 de abril de 2017; 2015.

MICROSOFT; **Termos de Licença para Software Microsoft Visual Studio Community 2015**. Disponível em: <<https://www.visualstudio.com/pt-br/license-terms/mt171547/>>. Acesso em 02 de abril de 2017; 2017.

MUÑOZ, L. F. P.; **Análise Dinâmica de Vigas Apoiadas em Fundação Elástica sob a Ação de Cargas Móveis**; PUC-Rio; Rio de Janeiro; 2010.

NIKISHKOV, G. P.; **Programming Finite Elements in Java**; 1ª Edição; Editora Springer; Nova Iorque; 2010.

OZISIK, M. N.; **Boundary Value Problems of Heat Conduction**; 1ª Edição; Editora Springer; Nova Iorque; 1968.

PIERITZ, R. A.; SILVA, R. F. A. F.; MENDES, R.; **Projeto CFD Sinfow**; Florianópolis; 2001.

SINMEC; Disponível em: <<http://www.sinmec.ufsc.br/site/softwares.php?id=2>>. Acesso em 09 de junho de 2017; 2017.

SINMEC; Disponível em: <<http://www.sinmec.ufsc.br/cfd/doc/pt/pt-cfd-studio/index.html>>. Acesso em 09 de junho de 2017; 2001.

VLACHOPOULOS, J.; **Should You Use Finite Difference or Finite Element Methods**; 35ª ANTEC, SPE; Technical Papers; Vol. 24; Nova Iorque; Pág. 519; 1977.

WILLIAMS JR., J. P.; **Linear Systems Solving Class Library**. Disponível em: <<https://code.msdn.microsoft.com/windowsdesktop/Linear-Systems-Solving-8562e8b8>>. Acesso em 02 de abril de 2017; 2017.

WOLTERING, C.; **Triangle.NET**; Disponível em: <<https://triangle.codeplex.com/>>. Acesso em 06 de março de 2017; 2012.

ZIENKIEWICZ, O. C.; CHEUNG, K.; **Finite Elements in the Solution of Field Problems**; Engineer, 200; Technical Papers; Nova Iorque; Pág. 507-510; 1965.