

Пример: линейная регрессия

Линейный случай с m объектами и n признаками: $\mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{w}) = \mathbf{X}\mathbf{w}$;
 $\mathbf{y} \sim \mathcal{N}(\mathbf{f}(\mathbf{X}, \mathbf{w}), \beta^{-1})$, $\mathbf{w} \sim \mathcal{N}(0, \mathbf{A}^{-1})$.

Запишем интеграл:

$$\begin{aligned} p(\mathcal{D}|\mathbf{h}) &= p(\mathbf{y}|\mathbf{X}, \mathbf{A}, \beta) = \frac{\sqrt{\beta \cdot |\mathbf{A}|}}{\sqrt{(2\pi)^{m+n}}} \int_{\mathbf{w}} \exp(-0.5\beta(\mathbf{y} - \mathbf{f})^T(\mathbf{y} - \mathbf{f})) \exp(-0.5\mathbf{w}^T \mathbf{A} \mathbf{w}) d\mathbf{w} = \\ &= \frac{\sqrt{\beta \cdot |\mathbf{A}|}}{\sqrt{(2\pi)^{m+n}}} \int_{\mathbf{w}} \exp(-S(\mathbf{w})) d\mathbf{w} \end{aligned}$$

Для линейного случая интеграл вычисляется аналитически:

$$\int_{\mathbf{w}} \exp(-S(\mathbf{w})) d\mathbf{w} = (2\pi)^{\frac{n}{2}} \exp(-S(\hat{\mathbf{w}})) |\mathbf{H}^{-1}|^{0.5},$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \mathbf{A} + \beta \mathbf{X}^T \mathbf{X}, \\ \hat{\mathbf{w}} &= \beta \mathbf{H}^{-1} \mathbf{X}^T \mathbf{y} \end{aligned}$$

Вывод: для линейных моделей Evidence считается аналитически.