UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE

FACULTAD DE INGENIERÍA

Departamento de Informática

Modelación y Simulación

Laboratorio 1

Gary Simken

Felipe Villalobos

Profesor: Gonzalo Acuña

Ayudante: Alan Barahona

Santiago – Chile

2021

TABLA DE CONTENIDO

ÍNDICE DE TABLAS

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

ÍNDICE DE ECUACIONES

CAPÍTULO 1. INTRODUCCIÓN

En las áreas de ciencias e ingeniería se van requiriendo cada vez más métodos computacionales potentes, necesitando software especializado para ello tal como lo es MATLAB, un software con un lenguaje de alto nivel que facilita llevar a cabo estos proyecto y que con su gran cantidad de librerías es posible utilizarlo en una diversidad de campos y modelar situaciones como consumos energéticos en redes inteligentes, analizar datos meteorológicos para predecir características de tormentas, en tiempos de pandemia es posible ejecutar millones de simulaciones para determinar las cantidades de dosis óptimas de medicamento y sistemas de primer orden, etc. Por estas y muchas razones de posibles aplicaciones aprender MATLAB es fundamental para el aceleramiento del trabajo gracias a su orientación matemática y estadística, por ello en el presente informe se utilizará para resolver ecuaciones diferencial mediante laplace y graficar estos como diagramas de bloques de sistemas para comprobar los resultados obtenidos manualmente.

En el curso de modelación y simulación de la Universidad de Santiago de Chile se utilizará el software de desarrollos MATLAB, por lo que para la realización óptima se ha solicitado al alumno desarrollar distintas actividades en este software con su propio lenguaje de programación. Tales como la graficación de la respuesta de sistemas avanzados con conexiones complejas y la construcción de un sistema a partir de múltiples funciones de transferencias conectadas entre sí , siendo estos los principales objetivos a desarrollar.

El documento estará organizado de la siguiente manera, primero el marco teórico, siguiendo con la descripción de los desarrollos, tanto de la parte 1 y parte 2, para luego terminar con la conclusión.

CAPÍTULO 2. MÁRCO TEÓRICO

El presente capítulo tiene por objetivo introducir al lector en los conceptos teóricos que ayudarán a comprender de mejor manera el desarrollo de este informe. Por esto se hablará sobre la Transformada de Laplace y las funciones de transferencia, puntos centrales de este informe.

2.1 TRANSFORMADA DE LAPLACE

Es una herramienta matemática de gran alcance formulada para solucionar una variedad amplia de problemas del inicial-valor. La estrategia es transformar las ecuaciones diferenciales difíciles en los problemas simples de la álgebra donde las soluciones pueden ser obtenidas fácilmente (Holbrook, 1994).

La transformada de Laplace de una función f(t) definida para todos los números positivos $t \geq 0$, es la función F(s), definida por:

$$F(s) = L\{f(t)\} = \int_{0}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Figura 2.1: Formula laplace 1

Mientras la integral esté definida. Cuando f(t) es una distribución con una singularidad en 0, la definición es (EcuRed, 2011):

$$F(s) = L\{f(t)\} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{-\varepsilon}^{\infty} e^{-st} f(t)dt$$

Figura 2.2: Formula laplace 2

2.2 FUNCIÓN DE TRANSFERENCIA

Es una expresión matemática que caracteriza las relaciones de “Entrada – Salida” de sistemas sistemas lineales lineales invariantes invariantes en el tiempo. Se define como la relación relación de la transformada de Laplace de la salida (función respuesta), a la transformada de Laplace de la entrada (función excitadora), bajo la suposición de condiciones iniciales cero de Juan Fernández (2006).

2.3 CONEXIONES EN SERIE Y EN PARALELO

Al tener las funciones de transferencia definidas como expresiones racionales, conexiones en serie y paralelo son simples de definir y de trabajar. Teniendo en cuenta dos funciones de transferencia definidas en función del parámetro s descrito anteriormente, se tiene que la conexión en paralelo corresponde a la suma de las funciones, mientras que la conexión en serie corresponde a la multiplicación

2.4 RETROALIMENTACIÓN

La retroalimentación se produce cuando las salidas del sistema o la influencia de las salidas del sistemas en el contexto, vuelven a ingresar al sistema como recursos o información. La retroalimentación permite el control de un sistema y que él mismo tome medidas de corrección en base a la información retroalimentada.(Desconocido, 2014)

CAPÍTULO 3. DESARROLLO PRIMERA PARTE

A continuación se explicará el desarrollo de la primera parte del laboratorio 2 del curso de modelación y simulación, separado en dos partes, donde en cada una se realizará el desarrollo de una ecuación diferencial siendo llevada a su función de transferencia y comparada cuando su respuesta atraviesa un lazo abierto y un lazo cerrado.

Para realizar el cálculo de una con lazo cerrado, asi como tambien modelos de mayor complejidad en cuanto a su diseño, se utiliza el método de mason, este consiste en seguir los siguientes pasos:

1. Identificar los lazos presentes en el diagrama, en ambas situaciones sólo tenemos uno y será una retroalimentación negativa quedando L=-Fcn
2. Identificar los lazos disjuntos en el diagrama, algo que no se presenta en este problema
3. Identificar los trayectos directos desde inicio a fin presentes en el diagrama, estos aumentan con las conexiones en paralelo y cuando existen más de 1 entrada en el sistema, en ambos sistemas vistos a continuación solo se presenta uno resultando en $T_1 = Fcn$.
4. Cálculo de los cofactores, esto se realiza por cada trayecto obtenido en el paso anterior y se calcula restando uno con todos los lazos sobrevivientes si el trayecto es eliminado, $\triangle_1 = 1 - 0$.
5. Calcular el determinante de la función, para esto se utiliza $\triangle = 1 - \sum_{n=1}^{n} L_i + \sum_{n=1}^{n} L_i^d$, resultando en $\triangle = 1 + Fcn$ para ambas ecuaciones.
6. Finalmente se calcula la función de transferencia mediante la fórmula $H(s) = \frac{\sum_{n=1}^{n} T_i * \triangle_1}{\triangle}$. y para el caso particular de las partes uno y dos resulta en $H(s) = \frac{Fcn}{1+Fcn}$.

3.1 PRIMERA ECUACIÓN

La ecuación diferencial a desarrollar en esta primera parte corresponde a:

$$6\dot{y}(t) + 2y(t) = 8\dot{u}(t) \tag{3.1}$$

En la ecuación 3.2 se puede apreciar el procedimiento para obtener la función de transferencia con lazo abierto.

$$\begin{aligned}
6\mathcal{L}[\dot{y}(t)] + 2\mathcal{L}[y(t)] &= 8\mathcal{L}[\dot{u}(t)] \\
6[sY(s) - y(0)] + 2Y(s) &= 8[U(s) - u(0)] \\
Y(s)[6s+2] &= 8U(s) - 6y(0) \\
Y(s) &= \frac{8U(s)}{6s+2} - \frac{6y(0)}{6s+2} \\
H(s) &= \frac{8}{6s+2}
\end{aligned} \tag{3.2}$$

A continuación, se verá la ecuación de lazo cerrado por lo que la función de salida del sistema cambiará según los pasos mencionados anteriormente, debido a esto la función de transferencia correspondiente es:

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{Fcn}{1+Fcn} \\
H(s) &= \frac{\frac{8}{6s+2}}{1+\frac{8}{6s+2}} \\
H(s) &= \frac{\frac{8}{6s+2}}{\frac{6s+2}{6s+2}+\frac{8}{6s+2}} \\
H(s) &= \frac{8}{6s+2} * \frac{6s+2}{6s+10} \\
H(s) &= \frac{8}{6s+10}
\end{aligned} \tag{3.3}$$

Considerando que solo se desea estudiar su respuesta de estado cero o RESC, no existe la necesidad de tener valores iniciales y calcular el RENC. Al darle de entrada una función escalón mediante la función step(H(s), t) de matlab, la cual necesita como parámetros la función de transferencia (ecuación 3.2) y de forma opcional, el tiempo que se desea observar el comportamiento, medido en segundos. Al realizar el mismo procedimiento con la ecuación 3.3 , al graficar ambos resultados se puede apreciar a simple vista la velocidad con que ambos sistemas se estabilizan, siendo el sistema de lazo cerrado el que más rápido lo hace, esto gracias tener una retroalimentación que permite una estabilización más rápida, esta información se puede apreciar en la tabla 3.1 de forma más precisa, así como también otras características de las funciones de transferencias como son sus polos, siendo ambos negativos por lo que se podría tratar de sistemas estables, aunque es necesario comprobarlo con algún método o teorema como podría ser el teorema de Ruth-Hurwitz, por último se puede apreciar un gran cambio en la ganancia estática de ambas funciones, en donde la existencia del lazo cerrado causó una disminución del 80 % de la ganancia estática.

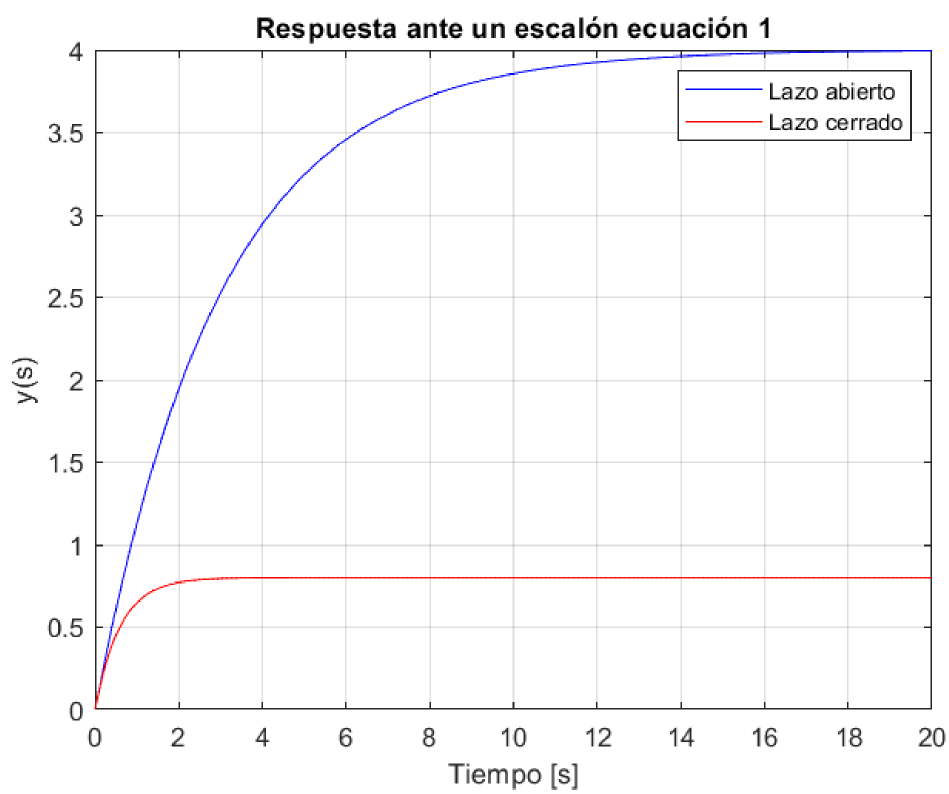

Figura 3.1: Gráfico función transferencia Ec. 1

A continuación se puede observar una tabla de comparación de los resultado obtenidos ante la reacción del sistema ante un escalón unitario.

	Lazo abierto	Lazo cerrado
Ganancia estática	4	0.8
Tiempo de estabilización	12	2.4
Ceros	-	-
Polos	-0.3333	-3.1667

Tabla 3.1: Valores ecuación 1

3.2 SEGUNDA ECUACIÓN

La ecuación diferencial a desarrollar en esta segunda parte corresponde a:

$$y(t) + 6\dot{y}(t) + 3y(t) - 5u(t) + 5\dot{u}(t) - u(t) = 0 \tag{3.4}$$

En la ecuación 3.5 se puede apreciar el procedimiento para obtener la función de transferencia con lazo abierto.

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}[y(t)] + 6\mathcal{L}[\dot{y}(t)] + 3\mathcal{L}[y(t)] - 5 = \mathcal{L}[\dot{u}(t)] - 7\mathcal{L}[\dot{u}(t)] - \mathcal{L}[u(t)] \\
&Y(s)[s^2 + 6s + 3] - sy(0) - y'(0) - 6y(0) = U(s)[5s^2 + 7s + 1] - su(0) - u'(0) \\
&Y(s) = \frac{U(s)[5s^2 + 7s + 1]}{s^2 + 6s + 3} + \frac{sy(0) + y'(0) + 6y(0) - su(0) - u'(0)}{s^2 + 6s + 3} \\
&H(s) = \frac{[5s^2 + 7s + 1]}{s^2 + 6s + 3}
\end{aligned} \tag{3.5}$$

A continuación, se verá la ecuación de lazo cerrado por lo que la función de salida del sistema cambiará según los pasos mencionados anteriormente, debido a esto la función de transferencia correspondiente es:

$$\begin{aligned}
H(s) &= \frac{Fcn}{1 + Fcn} \\
H(s) &= \frac{5s^2 + 7s + 1}{6s^2 + 13s + 4}
\end{aligned} \tag{3.6}$$

Considerando que solo se desea estudiar su respuesta de estado cero o RESC, no existe la necesidad de tener valores iniciales y calcular el RENC. Al darle de entrada una función escalón mediante la función step(H(s), t) de matlab, la cual necesita como parámetros la función de transferencia (ecuación 3.5) y de forma opcional, el tiempo que se desea observar el comportamiento, medido en segundos. Al realizar el mismo procedimiento con la ecuación 3.6 , al graficar ambos resultados se puede observar que tanto su ganancia estática como su tiempo de estabilización son cercanos y al revisar la tabla 3.2 se aprecia como la ganancia estática es la misma, mientras que la diferencia entre los tiempos de estabilización es menos de un segundo y añadiendo a esto en ambos casos los polos son negativos y distintos denotando sistemas sobreamortiguados los que concuerdan con la respuesta obtenida ante un escalón unitario.

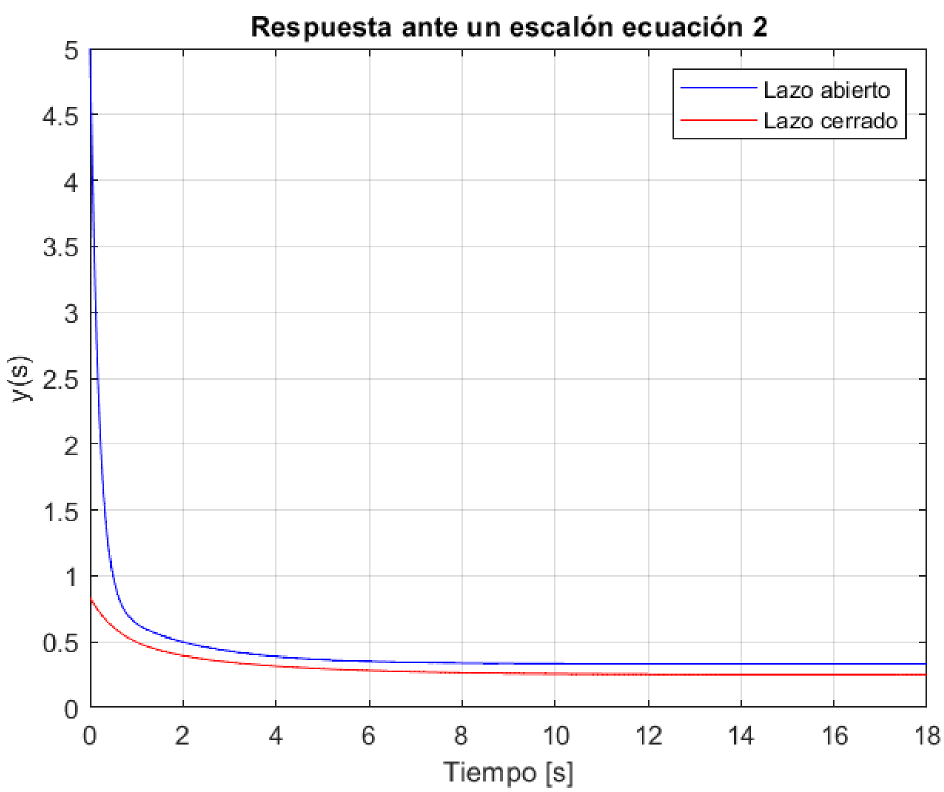

Figura 3.2: Gráfico función transferencia Ec. 2

A continuación se puede observar una tabla de comparación de los resultado obtenidos ante la reacción del sistema ante un escalón unitario.

	Lazo abierto	Lazo cerrado
Ganancia estática	5	5
Tiempo de estabilización	1.09	5.003
Ceros	[-1.2385 , -0.1615]	[-1.2385, -0.1615]
Polos	[-5.4495 , -0.5505]	[-12.6847, -0.3153]

Tabla 3.2: Valores ecuación 2

CAPÍTULO 4. DESARROLLO SEGUNDA PARTE

El desarrollo y análisis de un diagrama de bloque tomando como entrada distintos valores como podría ser un escalón unitario, un impulso o una rampa se pueden desarrollar de distintas formas en Matlab, una de ellas grafica con Simulink, mientras que también se puede realizar a través de comandos utilizando la libreria “Control System Toolbox”, utilizando esta última forma se analizará y graficara la respuesta del siguiente diagrama de bloques:

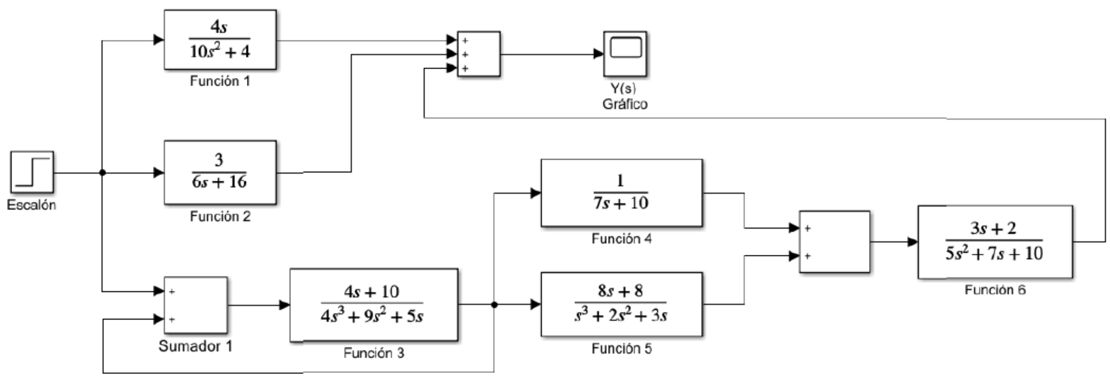

Figura 4.1: Diagrama de bloque

Para obtener la respuesta de este sistema es necesario realizar las conexiones que se aprecian en la Figura 4.1, por ello se hará en 5 etapas:

1. Se realiza la retroalimentación positiva que sufre la Función 3 consigo misma, para ello se utiliza la función feedback(Fcn3,1,+1) donde sus parámetros de entrada corresponden a la función en primera instancia, continúa las funciones que están presentes en la parte inferior del lazo, algo que no está presente en esta situación por lo que toma un valor 1, y finalmente debido a que esta retroalimentación es positiva es necesario plasmar dicha información a través de un +1, retornando una función de transferencia descrita en este pequeño fragmento del diagrama.

2. Con la retroalimentación obtenida del paso anterior se continuará siguiendo el mismo trayecto, el cual se separa en dos caminos en paralelos que contienen las Funciones 4

y Funciones 5 respectivamente, aunque independiente de esta separación de caminos, la retroalimentación obtenida en 1 se conecta de forma serial con cada una de estas funciones, generando dos nuevas operaciones:

   a) FcnSerie4= FcnRetro*Fcn4

   b) FcnSerie5= FcnRetro*Fcn5

3. Obtenido el Sumador 2 se puede realizar la operación en serie que se genera con la Función 6.

   a) FcnSerie6= Sum2*Fcn6

4. Finalmente es posible calcular el Sumador 3 que conecta las Funciones 1, Función 2 y Función obtenida en (4), generando la operación:

   a) HFinal= Fcn1 + Fcn2 + FcnSerie6

La función final obtenida es:

$$\begin{aligned} a = 30240s^{1^4} + 317936s^{1^3} + 1{,}549e06s^{1^2} + 4{,}5e06s^{1^1} + 8{,}41e06s^{1^0} + \\ 1{,}046e07s^9 + 9{,}403e06s^8 + 7{,}386e06s^7 + \\ 4{,}592e06s^6 - 351956s^5 - 3{,}876e06s^4 - \\ 4{,}339e06s^3 - 4{,}77e06s^2 - 3{,}646e06s - 1{,}024e06 \end{aligned} \tag{4.1}$$

$$\begin{aligned} b = 33600s^{1^5} + 403040s^{1^4} + 2{,}192e06s^{1^3} + \\ 7{,}077e06s^{1^2} + 1{,}465e07s^{1^1} + 1{,}886e07s^{1^0} + \\ 1{,}105e07s^9 - 8{,}155e06s^8 - 2{,}369e07s^7 - \\ 2{,}155e07s^6 - 6{,}748e06s^5 + 4{,}474e06s^4 + \\ 6{,}246e06s^3 + 4{,}304e06s^2 + 1{,}92e06s \end{aligned} \tag{4.2}$$

$$H(s) = \frac{a}{b} \tag{4.3}$$

Estudiando dicha Función con el teorema de Ruth-Hurwitz el cual dice que si el polinomio del denominador presenta al menos uno de usos coeficientes un signo distinto a otros, entonces el sistema es inestable, por esto al estudiar al ecuación 4.2 del sistema de la Figura 4.1 este resulta en inestable, y al aplicarle una entrada como podría ser un escalón unitario a través de la función step(HFinal, 20) de Matlab, siendo sus parámetros de entrada la función en cuestión y 20 el tiempo en segundos que se graficara la respuesta, resulta en la Figura 4.2 que describe un comportamiento que crece al infinito, algo esperado al resultar en un sistema inestable.

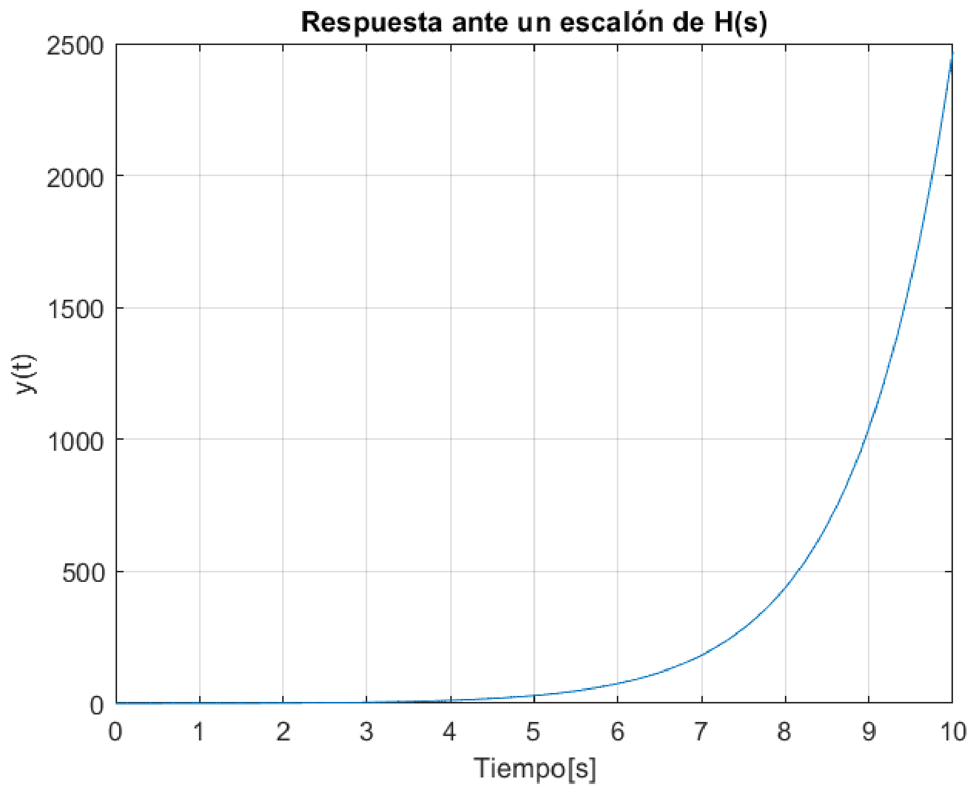

Figura 4.2: Gráfico respuesta al escalón del diagrama de bloques

CAPÍTULO 5. CONCLUSIONES

A modo de desenlace, los objetivos planteados al inicio de este informe correspondientes al acercamiento al al manejo de MATLAB fue cumplido a lo largo de este. El uso del lenguaje de programación Matlab simplifica en gran medida la implementación de algoritmos matemáticos y su visualización, además de permitir llevar a la práctica ciertos algoritmos que en otros lenguajes de programación sería más complicado y con menos documentación oficial ordenada y de fácil acceso como la existente en Matlab , permitiendo que todos los puntos planteados en el laboratorio fueran cumplidos de forma exitosa. Una de las mayores complicaciones durante el desarrollo fue el desconocimiento de las funciones necesarias para realizar la actividad.

BIBLIOGRAFÍA

Cortés, F. J. (2013). Una introduccion instrumentada a la transformada de laplace.

de Juan Fernández, A. (2006). Modelos de función de transferencia. *Universidad Autónoma de Madrid. España*.

Desconocido (2014).
URL http://teoriageneraldesistemasdb.blogspot.com/2014/04/retroalimentacion.html

EcuRed (2011). Transformada de laplace - ecured.
URL https://www.ecured.cu/Transformada_de_Laplace

Holbrook, J. G. (1994). *TRANSFORMADAS DE LAPLACE*.

MathWorks (2021). Documentación. Recuperado desde https://es.mathworks.com/help/".