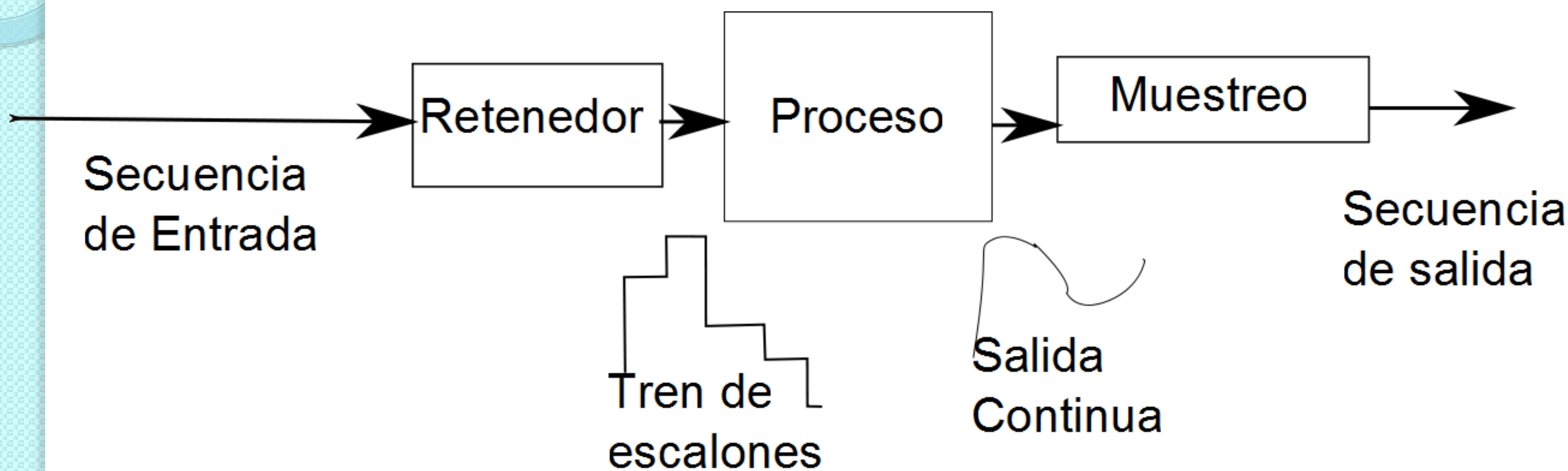
Discretización de sistemas lineales
representación interna, retenedor orden cero

Antonio Sala

Notas de clase sobre ing. control, control multivariable

Bucle de control por computador

- Retenedor->Proceso->Muestreador



- Período de muestreo regular
- Medir y(k); calcular control; escribir control u(k); esperar hasta siguiente muestra.

Variables de estado

Concepto de estado: Las variables de estado (vector de estado x) son aquéllas que almacenan la energía/historia pasada de modo que las trayectorias futuras de todas las variables de interés y sólo dependen de condiciones iniciales de ellas y de valores presentes y futuros de entrada.

$$y(t) = \Xi(x(0), u(\xi)_{\xi \in [0,t]})$$

Representación normalizada (1):

Ecuaciones de estado: En sistemas no-lineales genéricos (izquierda) o lineales/linealizados (derecha), se tiene:

- Sistemas de tiempo **continuo**, $t \in \mathbb{R}$:

$$\frac{dx}{dt} = f(x, u) \qquad\qquad \frac{dx}{dt} = Ax + Bu$$

- Sistemas de tiempo **discreto**, $t := k \in \{0, 1, 2, \dots\}$:

$$x_{k+1} = f(x_k, u_k) \qquad\qquad x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$$

- Sistemas **muestreados** (período de muestreo T):
  - Muestreo: $x_k := x(kT)$. Se descartan x intermedios.
  - Retenedor: fórmula de $u(t)$ para $kT \leq t < (k+1)T$.
    - ZOH, retenedor orden cero: $u(t) = u_k$. El usado en aplicaciones.
    - Otros retenedores: extrapolación basado en muestras pasadas... sólo tienen interés "teórico".

Representación normalizada (2):

Ecuaciones de salida:

- Son ecuaciones **estáticas**, todas en el mismo instante. Tienen la misma forma sea el tiempo discreto o continuo dado que se refieran a un instante "aislado":

$$y(t) = g(x(t), u(t)) \qquad y(t) = Cx(t) + Du(t)$$
$$y_k = g(x_k, u_k) \qquad y_k = Cx_k + Du_k$$

DISCRETIZACIÓN:

- Obtener las ecuaciones discretas (estado y salida) de un sistema contínuo muestreado.
- Ecuaciones de salida no cambian.
- Ecuaciones de estado requieren resolver la EDO continua: calcular $x((k+1)T)$ en función de $x(kT)$ y la entrada (desde kT a $(k+1)T$, según fórmula de retenedor). Se abordará el caso **lineal**.

Revisión de conceptos: EDO de primer orden

- Consideremos la ecuación diferencial lineal

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

- Si A fuera una constante, el resultado sería

$$x(t) = e^{At}x(0)$$

- En efecto,

$$\dot{x} = Ae^{At}x(0) = A \cdot (e^{At}x(0)) = A \cdot x(t)$$

EDO primer orden MATRICIAL

- Consideremos la ecuación diferencial lineal
$$\frac{dx}{dt} = Ax$$
- El concepto de exponencial de matriz generaliza esa solución al caso matricial $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$.
$$e^{At} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i t^i = I + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \frac{1}{2\cdot 3}A^3t^3 + \dots$$
- Derivando respecto al tiempo se cumple $\boxed{\frac{d}{dt}e^{At} = Ae^{At}}$; en efecto:
$$\frac{d}{dt}e^{At} = 0 + A + A^2t + \frac{1}{2}A^3t^2 + \dots = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} A^i \cdot i \cdot t^{i-1}$$
$$= \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{(i-1)!} A^i \cdot t^{i-1} \underset{j=i-1}{=} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^{j+1} t^j = A \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j!} A^j t^j = Ae^{At} = e^{At}A$$

EDO matricial: conclusiones

Teorema

La solución de la ecuación diferencial multivariable

$$\frac{dx}{dt} = Ax$$

viene dada por $$x(t) = e^{At}x(0)$$

Matlab: Se utiliza el comando `expm(A)`.

***Nota:** Si la matriz es diagonalizable, $A = V \cdot D \cdot V^{-1}$ entonces $e^{At} = V \cdot e^{Dt} \cdot V^{-1}$ siendo la exponencial de una matriz diagonal la exponencial de los elementos en dicha diagonal: `expm(diag([d1, d2, ...])=diag([exp(d1),exp(d2),...])`.

Discretización "retenedor orden cero"

- Consideremos un sistema continuo con ecuación de estado:

$$\frac{dx}{dt} = A_c x + B_c u$$

- La ecuación de un **retenedor de orden cero** es $\boxed{\frac{du}{dt} = 0}$.

  Expresando el modelo y el retenedor en forma normalizada, tenemos:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

- Equivalentemente, reescribimos la ecuación con la notación de vectores y matrices ampliados:

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Discretización "retenedor orden cero"

- Consideremos un sistema continuo con ecuación de estado:

$$\frac{dx}{dt} = A_c x + B_c u$$

- La ecuación de un **retenedor de orden cero** es $\boxed{\frac{du}{dt} = 0}$.

  Expresando el modelo y el retenedor en forma normalizada, tenemos:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

- Equivalentemente, reescribimos la ecuación con la notación de vectores y matrices ampliados:

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{d\xi}{dt} = \mathcal{A}\xi}$$

Discretización "retenedor orden cero"

- Consideremos un sistema continuo con ecuación de estado:

$$\frac{dx}{dt} = A_c x + B_c u$$

- La ecuación de un **retenedor de orden cero** es $\boxed{\frac{du}{dt} = 0}$.

  Expresando el modelo y el retenedor en forma normalizada, tenemos:

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}$$

- Equivalentemente, reescribimos la ecuación con la notación de vectores y matrices ampliados:

$$\xi = \begin{pmatrix} x \\ u \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_c & B_c \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{d\xi}{dt} = \mathcal{A}\xi}$$

Retenedor orden cero, continuación:

- Resolvemos la ecuación diferencial:

$$\frac{d\xi}{dt} = \mathcal{A}\xi \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\xi(t) = e^{\mathcal{A}t}\xi(0)}$$

- dicha ecuación, un período de muestreo, denotado como T, más tarde, dará lugar a:

$$\xi(T) = \begin{pmatrix} x(T) \\ u(T) \end{pmatrix} = e^{\mathcal{A}\cdot T} \begin{pmatrix} x(0) \\ u(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} \\ \Xi_{21} & \Xi_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x(0) \\ u(0) \end{pmatrix}$$

donde Ξ_{ij} denotan submatrices de $e^{\mathcal{A}\cdot T}$ con las dimensiones adecuadas.

Fórmula final

Dividimos las filas en *dos* grupos (actualización de estado, actualización de entrada):

$$x(T) = \Xi_{11}x(0) + \Xi_{12}u(0), \qquad u(T) = \Xi_{21}x(0) + \Xi_{22}u(0)$$

- El izquierdo es la **nueva ecuación de estado** discreta, definiendo $A_d := \Xi_{11}$, $B_d := \Xi_{12}$, y dando como condición inicial $x(0) = x_k$, $u(0) = u_k$, siendo el estado T segundos después $x(T) = x_{k+1}$:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k$$

- Como con entrada $u = 0$ la respuesta libre es $\dot{x} = A_c x$, por fuerza $\Xi_{11} = e^{A_c T}$.
- El derecho siempre sale $u(T) = u(0)$, dado que es la discretización de $\dot{u} = 0$: $\Xi_{21} = 0$, $\Xi_{22} = I$. Como T segundos después la acción de control sí cambia, el término derecho se DESECHA.

Fórmula final

Dividimos las filas en *dos* grupos (actualización de estado, actualización de entrada):

$$x(T) = \Xi_{11}x(0) + \Xi_{12}u(0), \qquad u(T) = \Xi_{21}x(0) + \Xi_{22}u(0)$$

- El izquierdo es la **nueva ecuación de estado** discreta, definiendo $A_d := \Xi_{11}$, $B_d := \Xi_{12}$, y dando como condición inicial $x(0) = x_k$, $u(0) = u_k$, siendo el estado T segundos después $x(T) = x_{k+1}$:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k$$

- Como con entrada $u = 0$ la respuesta libre es $\dot{x} = A_c x$, por fuerza $\Xi_{11} = e^{A_c T}$.
- El derecho siempre sale $u(T) = u(0)$, dado que es la discretización de $\dot{u} = 0$: $\Xi_{21} = 0$, $\Xi_{22} = I$. Como T segundos después la acción de control **sí** cambia, el término derecho se DESECHA.

Conclusiones

- Fórmula **exacta** de discretización de sistemas lineales multivariables con retenedor orden cero (entrada constante entre muestreos)
- Basada en la **exponencial** de una matriz **ampliada** $\mathcal{A}$.
- Si la entrada **no es constante** entre muestreos, o si el proceso **no es lineal** (invariante en tiempo), la fórmula ya **no es válida**.
    - En ese caso, aplicar EULER, bilineal/punto medio, Runge-Kutta, ...
    - La fórmula exponencial sirve para discretizar *procesos continuos controlados por computador* pero **no** *reguladores continuos* (su entrada no es *constante entre muestreos*).