

UNIVERSIDAD DE SANTIAGO DE CHILE
FACULTAD DE INGENIERÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INFORMÁTICA

Modelos de estados

Modelación y simulación

Nombre completo	Felipe Villalobos Padilla
Profesor	Gonzalo Acuña Leiva
Ayudante	Alan Barahona Ruiz
RUT	20.139.310-8
Fecha del Informe	25 de Julio de 2021

Índice

Índice	2
Índice de figuras	3
1 Introducción	5
2 Marco teórico	5
2.1 Zero order hold (ZOH)	6
2.2 First order hold (FOH)	6
3 Desarrollo primera parte	6
4 Desarrollo primera parte	8
5 Desarrollo tercera parte	11
6 Conclusiones	12
7 Anexos	14

Índice de figuras

1	Gráfico ejemplo Zero order hold.	14
2	Gráfico ejemplo First order hold.	15
3	Gráfico ejemplo First order hold con retraso.	16
4	Diagrama de modelo de estado.	16
5	Resultados del sistema Figura 4.	17
6	Sistema de vasos comunicantes.	17
7	Respuesta del sistema ante un escalón.	18
8	Respuesta del sistema ante un impulso.	18
9	Respuesta del sistema ante función $u(t)$	19
10	Función $u(t)$	19
11	Respuesta de sistema discreto ante un escalón con $t=0.001[s]$	20
12	Respuesta de sistema discreto ante un escalón con $t=0.1[s]$	20
13	Respuesta de sistema discreto ante un escalón con $t=2[s]$	21

índice de ecuaciones

1	Ecuación de modelo de estados.	7
2	Desarrollo del diagrama de bloques.	7
3	Transformación modelo de estados a función de transferencia 1.	7
4	Transformación modelo de estados a función de transferencia 2.	8
5	Ecuaciones del modelo fenomeológico1.	9
6	Ecuaciones del modelo fenomeológico2.	9
7	Modelo de Estados.	10
8	Desarrollo de modelo de Estados.	10

1. Introducción

A medida que la sociedad avanzaba el humano se vio en la necesidad de entender su entorno, controlarlo y obtener provecho de este, aunque sea solo una pequeña porción de todo el beneficio que se podría extraer, la simplificación inteligente de esta realidad permitió a la especie humana avanzar, logrando que tras millones de años de existencia y lento acumulo de experiencia, el desarrollo de un sistema de escritura, cambiando la forma de transmitir la información y comunicarse, ocasionando que en tan solo 5.000 años (Domínguez-Rodrigo & Baquedano, 2014), menos del 0.2 % de toda la existencia de la humanidad, el hombre pasara de vivir en pequeñas ciudades o comunidades a crear medios de transporte, medios de comunicación, maquinaria que le permitió movilizarse alrededor del mundo entero, ahora incluso llegando al espacio y en algún futuro cercano, planetas vecinos. La construcción de un sistema puede cambiar drásticamente la vida de las personas (Río Alda, 2005), aunque su correcto diseño e implementación son imprescindibles para ello, pero cuando el sistema es muy costoso de implementar y el error no es una opción, la simulación juega un papel clave para que este modelo cobre vida. Actualmente, Matlab permite llevar a cabo simulaciones de modelos tanto discretos como continuos, esto gracias a su gran cantidad de librerías que permite utilizarlo en diversos ámbitos y modelar situaciones desde consumo energético en una red a el comportamiento meteorológico.

Esta experiencia del curso de modelado y simulación de la universidad de Santiago de Chile tiene como objetivo que el alumno pueda complementar el aprendizaje de modelos de estado y sistemas discretos, a través de la realización de actividades prácticas en MATLAB.

El presente informe se estructurará de la siguiente manera, se iniciará entrando al marco teórico donde se explicaran todos los conceptos utilizados durante el transcurso de este informe, a continuación cómo se desarrolló la solución y los resultados obtenidos para pasar al capítulo donde se dará un análisis de estos últimos, tras esto se finaliza entregando diferentes conclusiones del desarrollo realizado.

2. Marco teórico

El presente capítulo tiene por objetivo introducir al lector en los conceptos teóricos que ayudarán a comprender de mejor manera el desarrollo de este informe. Por esto se hablará sobre Zero order hold y First order hold, técnicas utilizadas para convertir un sistema analógico en discreto.

Antes de continuar con la explicación de estos términos, se debe definir un sistema tiempo discreto como $x_{k+1} = f(x_k, u_k)$ mientras que su forma matricial corresponde a $x_{k+1} = Ax_k + Bu_k$, así también, las ecuaciones de salida tienen la forma

$y_{k+1} = g(x_k, u_k)$ y $y_{k+1} = Cx_k + Du_k$, donde $t := k \in 0, 1, 2, \dots$. En contraparte, un sistema de tiempo continuo se define como $\frac{dx}{dt} = f(x, u)$, mientras que su forma matricial corresponde a $\frac{dx}{dt} = Ax + Bu$, mientras que sus ecuaciones de salida tienen la forma $y(t) = g(x(t), u(t))$ y $y(t) = Cx(t) + Du(t)$, donde $t \in \mathbb{R}$ (Sala, 2020).

2.1. Zero order hold (ZOH)

Dado un sistema de tiempo continuo siendo discretizado a un sistema de tiempo discreto con un muestreo tal que $t := k \in 0, 1, 2, \dots$ con un periodo de tiempo T , los valores intermedios entre estos periodos son descartados, por lo que es necesario “rellenar” estos valores de inter muestreo. Zero order Hold o retenedor de orden cero en español, retiene el valor durante el periodo de muestreo, generando escalones cuando el periodo cambia como se puede apreciar en la Figura 1, su expresión matemática se puede definir como $u(t) = u(kT) = u[k]$ para $kT < t < (k+1)T$ (Castaño, 2018).

Este método no debe ser aplicado cuando el proceso no es lineal (invariante en el tiempo), ya que este deja de ser válido siendo necesario métodos adecuados para esta situación como podría ser Euler, bilineal/punto medio, Runge-Kutta, entre otros (Sala, 2020).

2.2. First order hold (FOH)

First order hold o también llamado interpolación lineal, como su nombre indica los valores inter muestrales son equivalentes a una interpolación lineal entre el valor del periodo T con el valor de $T+1$, y la pendiente de esta interpolación será una constante, generando rectas entre cada muestra como se aprecia en la Figura 2. Preservando la estabilidad del sistema, esto debido a que los polos discretos son iguales a la exponencial de los polos originales por el periodo de muestreo (Sala, 2021).

Existen diversas variaciones de esta interpolación lineal, una de ellas corresponde a la retención de primer orden con retraso generando rectas como las de la Figura 3, los sistemas de alto orden se pueden aproximar por sistemas de primer orden en con retardo (Skogestad, 2003). Esta es la principal razón por la cual algunos trabajos en la literatura se enfocan al diseño de estrategias de control para tales sistemas de bajo orden (Márquez-Rubio et al. 2010).

3. Desarrollo primera parte

Considerando el diagrama de bloques que se puede observar en la Figura 4 se desarrollará una función que permita obtener las matrices correspondientes del modelo de

estado, matrices que se siguen por la Ecuación 1.

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + BU \\ Y &= CX + DU\end{aligned}\tag{1}$$

Para obtener las matrices A,B,C y D que se puede observar en la Ecuación 1, es necesario desarrollar algebraica el diagrama de bloques presente en la Figura 4, este desarrollo se puede apreciar a continuación en la Ecuación 2.

$$\begin{aligned}x_1 &= \frac{a}{b * s - c} * (U - x_2) \quad | \quad x_2 = \frac{d}{e * s - f} * (x_2) \\ x_1(bs - c) &= aU - ax_2 \quad | \quad x_2(es - f) = dx_1 \\ bsx_1 - cx_1 &= aU - ax_2 \quad | \quad esx_2 - fx_2 = dx_1 \\ sx_1 &= \frac{aU - ax_2 + cx_1}{b} \quad | \quad sx_2 = \frac{dx_1 + fx_2}{e} \\ x_1 &= \frac{c}{b}x_1 - \frac{a}{b}x_2 + \frac{a}{b}U \quad | \quad x_2 = \frac{d}{e}x_1 + \frac{f}{e}x_2\end{aligned}\tag{2}$$

Quedando las matrices A y B de la forma: $A = \begin{bmatrix} \frac{c}{b} & -\frac{a}{b} \\ \frac{d}{e} & \frac{f}{e} \end{bmatrix}$ $B = \begin{bmatrix} \frac{a}{b} \\ 0 \end{bmatrix}$

Mientras que se observa en la Figura 4 que el sistema tiene solamente una salida la cuales es $y=x_1$, debido a esto las matrices C y D resultan en $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$ respectivamente.

Obtenida la estructura de las matrices A,B,C y D del sistema presente en la Figura 4 se puede generar una función en Matlab la cual ingresando como parámetros los valores de a,b,c,d,e y f sea posible calcular dichas matrices, esta función será llamada bam. Posteriormente, es posible calcular la función de transferencia del sistema mediante las matrices A,B,C y D generadas, para ello es necesario operar la Ecuación 1, aplicando la transformada de Laplace para continuar con el siguiente procedimiento.

$$\begin{aligned}sX - x(0) &= AX + BU \\ Y &= CX + DY\end{aligned}\tag{3}$$

Como se está interesado en $H(s)$ el cual es independiente de las condiciones iniciales debido a que corresponde al RESC, la condición inicial $x(0)$ se iguala a cero para su simplificación.

$$\begin{aligned}
 sX &= AX + BU \\
 Y &= CX + DU \\
 &----- \\
 (sI - A)X &= BU \\
 X &= (sI - A)^{-1}BU \\
 &----- \\
 Y &= [C(sI - A)^{-1}B + D]U \\
 \frac{Y}{U} &= H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D
 \end{aligned}
 \tag{4}$$

Realizar estas operaciones matriciales conlleva una gran cantidad de cálculos a medida que el orden de las matrices aumenta, por ello al utilizar la herramienta de Matlab esta tarea se simplifica enormemente siendo únicamente limitado por los recursos del equipo. Por esta razón se crea una función de nombre `mab` la cual, recibiendo como parámetros de entrada las matrices A, B, C y D realice los cálculos de la Ecuación 4 y de esta forma retornar la función de transferencia H del sistema.

Poniendo en práctica las funciones `bam` y `mab` descritas anteriormente con los valores $a=512$, $b=51$, $c=62$, $d=32$, $e=124$ y $f=53$, obteniendo los siguientes resultados. Como se aprecia en la Figura 5 el resultado de aplicar en conjunto las funciones `bam` y `mab`, así como aplicar una retroalimentación entre $H1$ y $H2$ utilizando la librería “Control System Toolbox” de Matlab, en las funciones se obtuvo el mismo resultado, comprobando así el correcto desarrollo algebraico realizado en el presente capítulo.

4. Desarrollo primera parte

A continuación se estudiará el sistema de vasos comunicantes que se aprecia en la Figura 6, el cual se rige por la Ecuación 5.

Aplicando la ecuación de conservación de la materia para este problema y utilizando las ecuaciones 5, el modelo fenomenológico se puede apreciar en la Ecuación 6.

$$\begin{aligned}
F_{i1} &= \frac{h_1 - h_2}{R_{i2}} \\
F_{i2} &= \frac{h_2 - h_1}{R_{i2}} \\
F_{s1} &= \frac{h_1}{R_{s1}} \\
F_{s2} &= \frac{h_1 - h_2}{R_{i2}} \\
V_1 &= A_1 * h_1 \\
V_2 &= A_2 * h_2
\end{aligned} \tag{5}$$

$$\begin{aligned}
\frac{dV_1}{dt} &= F_e - F_1 + F_2 - F_{s1} \\
\frac{dV_2}{dt} &= F_e + F_1 - F_2 - F_{s2}
\end{aligned} \tag{6}$$

Las variables en cuestión corresponden a:

- Entradas: F_e (u)
- Salidas: h_1 y h_2 ($y_1 y_2$)
- Estado: h_1 y h_2 ($x_1 x_2$)

Se decide utilizar como salida del sistema el nivel de agua de los estanques para así simular el comportamiento que toma el nivel de los estanques dado diversas entradas, de esta forma obtener un mejor control de estos estanques.

Por lo que la construcción del modelo de estado utilizando las Ecuaciones 5 para ser reemplazadas en la Ecuaciones 6 se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dA_1 h_1}{dt} &= F_e - \frac{h_1 - h_2}{R_1} + \frac{h_2 - h_1}{R_2} - \frac{h_1}{R_{s1}} \\
\frac{dA_2 h_2}{dt} &= F_e + \frac{h_1 - h_2}{R_1} - \frac{h_2 - h_1}{R_2} - \frac{h_2}{R_{s2}}
\end{aligned} \tag{7}$$

Al aplicar los cambios de variables mencionados con anterioridad en la Ecuación 7 y de esta forma desarrollarla se obtiene:

$$\begin{aligned}
\frac{dx_1}{dt} &= \frac{u}{A_1} - \frac{x_1}{R_1 A_1} + \frac{x_2}{R_1 A_1} + \frac{x_2}{R_2 A_1} - \frac{x_1}{R_2 A_1} - \frac{x_1}{R_{s1} A_1} \\
\frac{dx_1}{dt} &= x_1 \left(-\frac{1}{R_1 A_1} - \frac{1}{R_2 A_1} - \frac{1}{R_{s1} A_1} \right) + x_2 \left(\frac{1}{R_1 A_1} + \frac{1}{R_2 A_1} \right) + \frac{u}{A_1} \\
\frac{dx_2}{dt} &= \frac{u}{A_2} + \frac{x_1}{R_1 A_2} - \frac{x_2}{R_1 A_2} - \frac{x_2}{R_2 A_2} + \frac{x_1}{R_2 A_2} - \frac{x_1}{R_{s2} A_2} \\
\frac{dx_2}{dt} &= x_1 \left(\frac{1}{R_1 A_2} + \frac{1}{R_2 A_2} \right) + x_2 \left(-\frac{1}{R_1 A_2} - \frac{1}{R_2 A_2} - \frac{1}{R_{s2} A_2} \right) + \frac{u}{A_2}
\end{aligned} \tag{8}$$

Con la Ecuación 8 es posible construir las matrices A y B, las cuales resultan en $\begin{bmatrix} -\frac{1}{A_1} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{s1}} \right) & \left(\frac{1}{A_1 R_1} + \frac{1}{A_1 R_2} \right) \\ \left(\frac{1}{A_2 R_1} + \frac{1}{A_2 R_2} \right) & -\frac{1}{A_2} \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_{s2}} \right) \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} \frac{1}{A_1} \\ \frac{1}{A_2} \end{bmatrix}$ respectivamente, pero la construcción de las matrices C y D resulta ser mucho más simple de obtener, debido a que las variables de salidas son igual a las variables de estado, simplificando el problema, como resultado estas dos matrices resultan ser $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, respectivamente.

Obtenidas las matrices A, B, C y D es posible simular el comportamiento del sistema de vasos comunicantes, por lo que utilizando la función mab vista en el capítulo anterior, con los siguientes valores a reemplazar: $A_1 = 2[m^2]$, $A_2 = 4[m^2]$, $R_{i1} = 0,25[s/m^2]$, $R_{i2} = 0,0625[s/m^2]$, $R_{s1} = 0,1[s/m^2]$, $R_{s2} = 0,1[s/m^2]$, se pueden observar diferentes resultados dependiendo de la entrada en el sistema, en la Figura 7 en la cual entra un escalón unitario al sistema, se aprecia como el nivel de los estanques crece rápidamente pero este tiende al equilibrio en alrededor de los dos segundos, no sufriendo perturbaciones gracias al flujo constante de agua entrante. Al cambiar la entrada a un impulso, se puede

observar en la Figura 8 un rápido pero momentáneo aumento del nivel de los estanques en los primeros 0.15 segundos, pero que lentamente va disminuyendo hasta dejar el estanque totalmente vacío, concordante con la entrada, una repentina gran descarga de agua pero de breve duración que pone en tensión a los estanques de agua, pero que este lentamente se van vaciando al no seguir recibiendo suministros, estabilizándose en cero, aunque también se puede observar que ambos estanques no se llenan de igual manera, apreciándose un mayor estrés sobre el estanque 1, situación que no ocurre en las otras entradas estudiadas, por lo que se debe tener en consideración el estanque 1 antes constantes situaciones de estrés, ya que este almacenará más carga durante estos eventos indeseados como lo es un impulso. En ambas respuestas se aprecia un sistema estable, es decir, un estanque que no se desbordara ante una inyección repentina de agua como lo es un impulso, o, un flujo constante como lo es un escalón.

Cambiando el tipo de entrada a una sinusoidal como se aprecia en la Figura 10, en la que debemos destacar su gran amplitud en comparación al escalón unitario ingresado anteriormente, se observa un comportamiento estable y constante de parte del nivel de agua del estanque, el cual se va llenando a medida que la senoide crece y se vacía cuando está decrece como se observa en la Figura 9.

5. Desarrollo tercera parte

Al aplicar una discretización al sistema visto en el capítulo anterior se aprecia cómo a medida que el tiempo de muestreo aumenta, la respuesta obtenida entre los métodos difiere, tal como se aprecia en las Figura 12 y la Figura 13 donde el tiempo de muestreo es de 0.1[s] y 2[s] respectivamente, cuando se comparan con la Figura 11, se puede notar como el tiempo de muestreo tiene un gran impacto en el resultado. Al observar la Figura 11 no se aprecia diferencia entre ambos métodos de discretización, situación que como indica Sala, 2021, si el periodo de muestreo es suficientemente pequeño, el método FOH da resultados parecidos a ZOH, a pesar de que esta diferencia no es tan grande. La rapidez de muestreo dependerá de las características del modelo que se desea discretizar así como también la entrada que este está sufriendo, dado el sistema de la Figura 5 el tiempo de muestreo debe ser inferior a 0.5 [s] cuando la entrada es un escalón para apreciar cuando este se estabiliza de mejor manera, pero cuando la entrada es la función $u(t)$ de la Figura 10 este tiempo puede aumentar ligeramente, debido a que el sistema de vasos comunicantes sufre variaciones en el nivel de los estanques de forma más paulatina con dicha entrada.

6. Conclusiones

A modo de desenlace, los objetivos planteados al inicio de este informe correspondientes al aprendizaje de modelos de estado y sistemas discretos mediante el manejo de Matlab fueron cumplidos a lo largo de este. El uso del lenguaje de programación Matlab simplifica en gran medida la implementación de sistemas presentes en el mundo real, esto gracias a la gran diversidad de librerías que van desde el procesamiento de señales, control, diseño y análisis de sistemas como también machine learning, permitiendo simular y visualizar una gran variedad de situaciones del mundo real, todo esto acompañado con una documentación oficial ordenada y de fácil acceso. Una dificultad que se esperaba durante el desarrollo de esta experiencia consistió en la discretización de un sistema continuo y analizar el comportamiento que éste tendría dependiendo del método utilizado, pero gracias a lo mencionado anteriormente esto fue realizado sin problemas revisando la documentación de Matlab.

Referencias

- Yll, S. & Encarna, M. (1991). Modelos explicativos sobre los orígenes y evolución de la humanidad. *Mujeres y sociedad. Nuevos enfoques teóricos y metodológicos*. L. Luna, ed, 149-166.
- Skogestad, S. (2003). Simple analytic rules for model reduction and PID controller tuning. *Journal of process control*, 13(4), 291-309.
- Río Alda, Á. d. (2005). *Escritura y alfabetización: su impacto en la antigüedad*. Universidad Complutense de Madrid, Servicio de Publicaciones.
- de Juan Fernández, A. (2006). Modelos de Función de Transferencia. *Universidad Autónoma de Madrid. España*.
- Márquez-Rubio, G., Muro-Cuéllar, B., Velasco-Villa, M. & Álvarez-Ramírez, J. (2010). Un esquema observador para sistemas de primer orden con retardo. *Revista Mexicana de Ingeniería Química*, 9(1), 43-52. <https://doi.org/10.24275/rmiq/ed1924>
- Domínguez-Rodrigo, M. & Baquedano, E. (2014). La cuna de la Humanidad. *Museo Arqueológico Regional y Museo de la Evolución Humana. Madrid*.
- Castaño, S. (2018). Respuesta Temporal Sistema Discreto. <https://controlautomaticoeducacion.com/sistemas-dinamicos-lineales/3-2-respuesta-temporal-sistema-discreto/>
- Sala, A. (2020). Discretización de sistemas lineales por representación interna, retenedor orden cero. <http://personales.upv.es/asala/DocenciaOnline/Video/dfoh.html>
- MathWorks. (2021). Documentación.
- Sala, A. (2021). Discretización de sistemas lineales por interpolación entre muestras (foh). <http://personales.upv.es/asala/DocenciaOnline/Video/dfoh.html>

7. Anexos

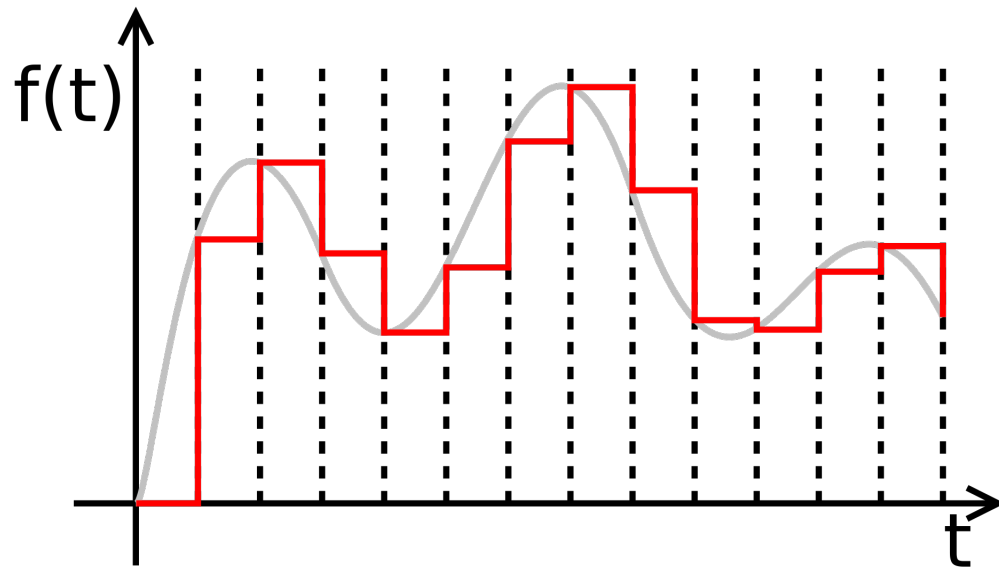


Figura 1: Gráfico ejemplo Zero order hold.

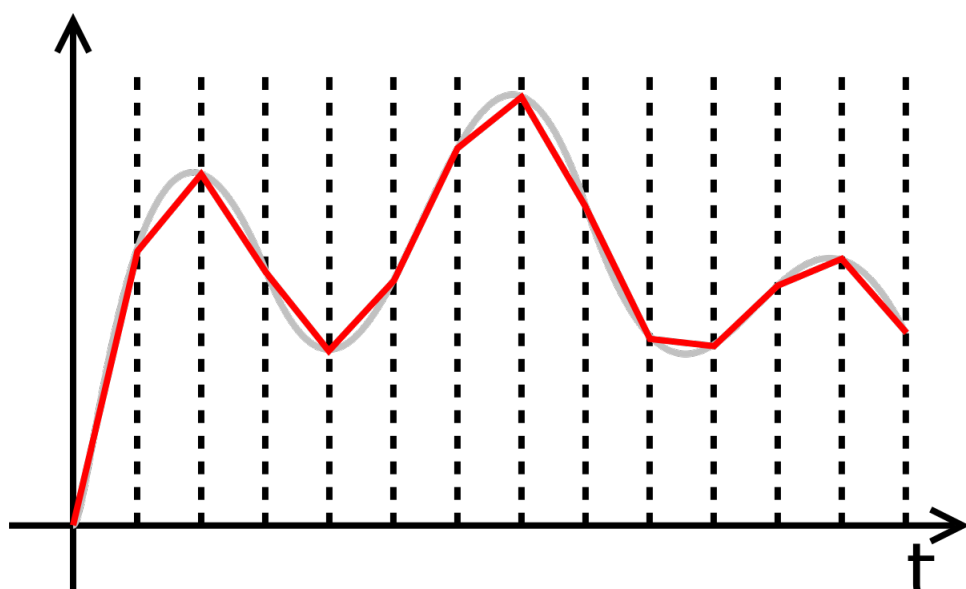


Figura 2: Gráfico ejemplo First order hold.

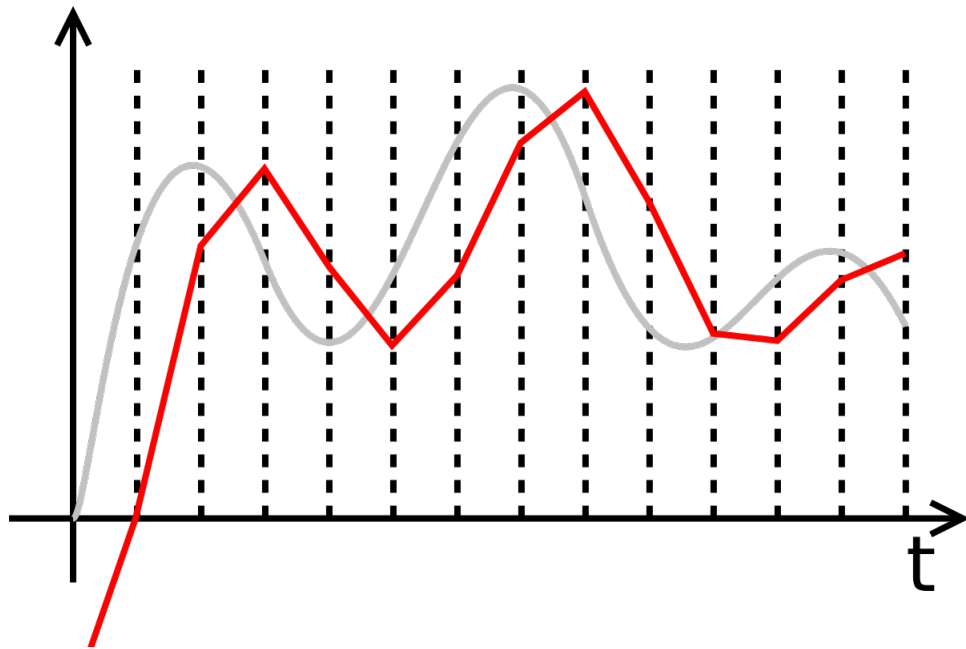


Figura 3: Gráfico ejemplo First order hold con retraso.

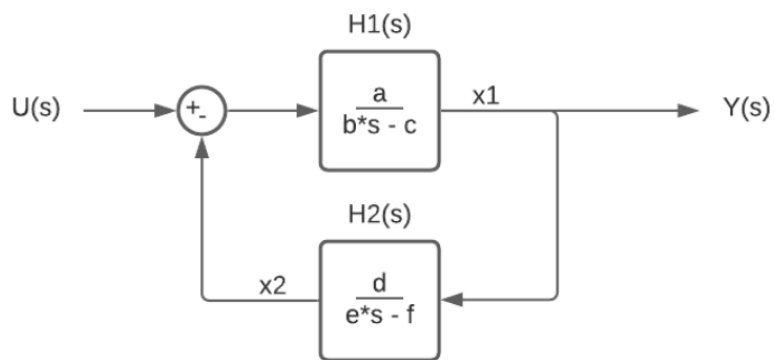


Figura 4: Diagrama de modelo de estado.

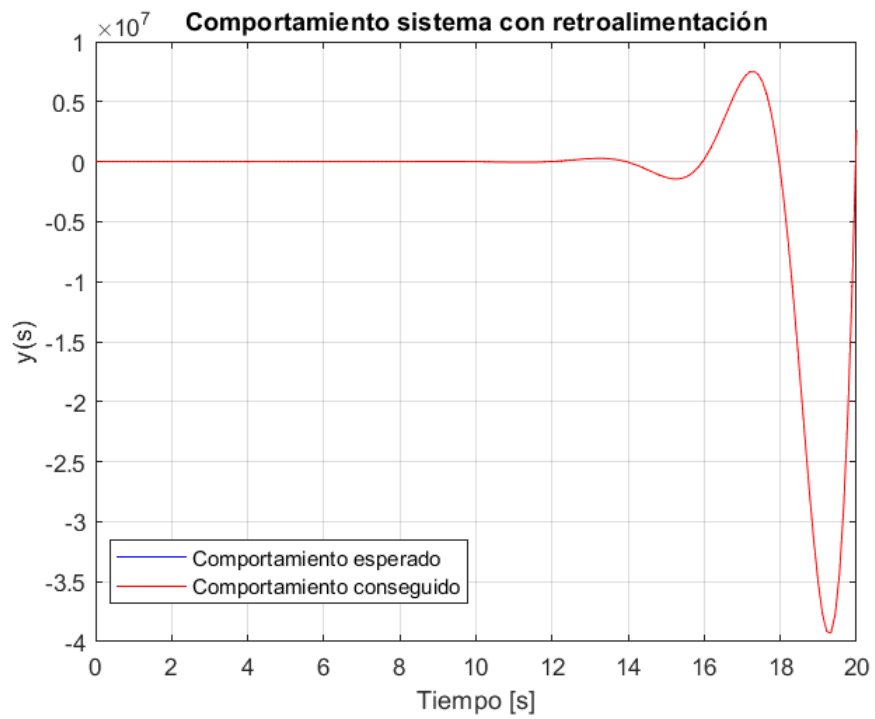


Figura 5: Resultados del sistema Figura 4.

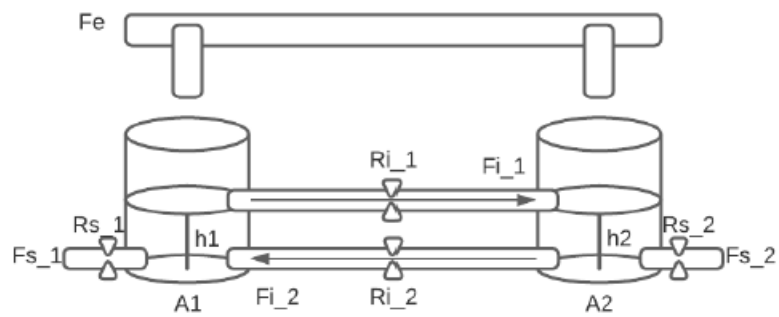


Figura 6: Sistema de vasos comunicantes.

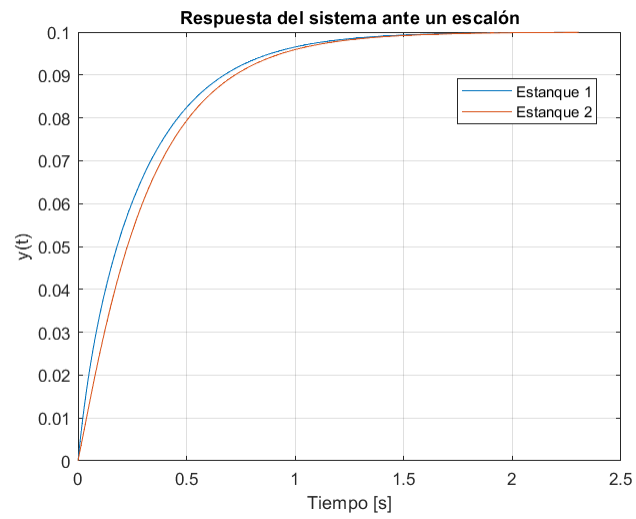


Figura 7: Respuesta del sistema ante un escalón.

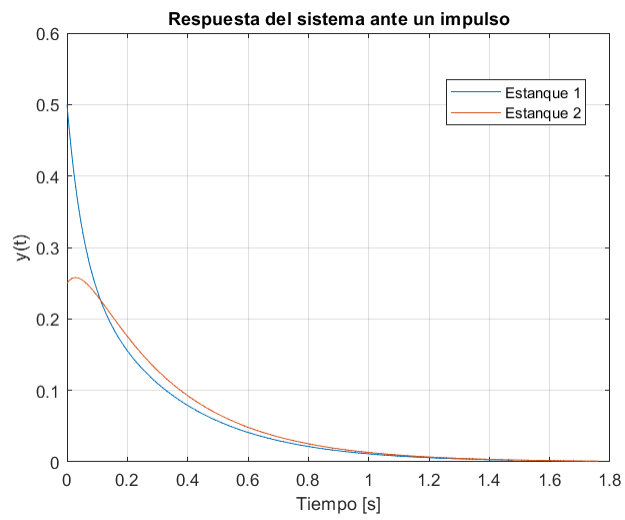


Figura 8: Respuesta del sistema ante un impulso.

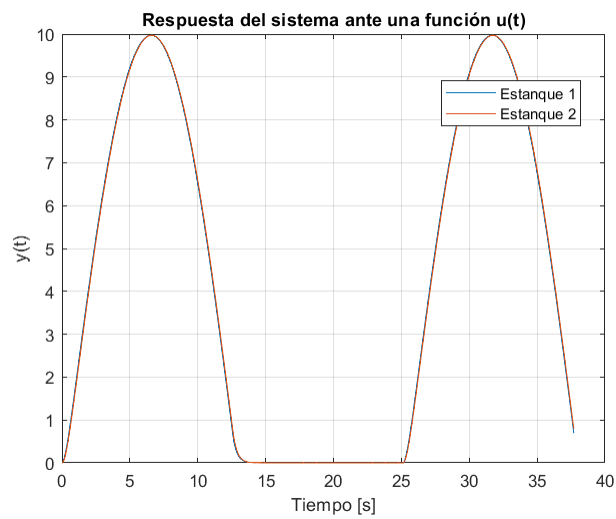


Figura 9: Respuesta del sistema ante función $u(t)$.

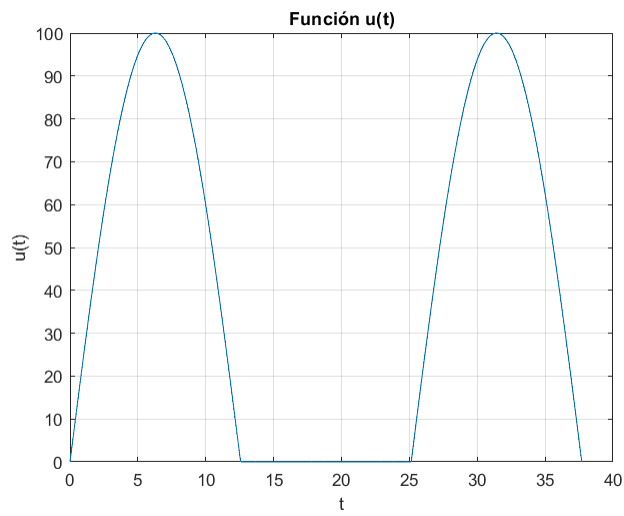


Figura 10: Función $u(t)$.

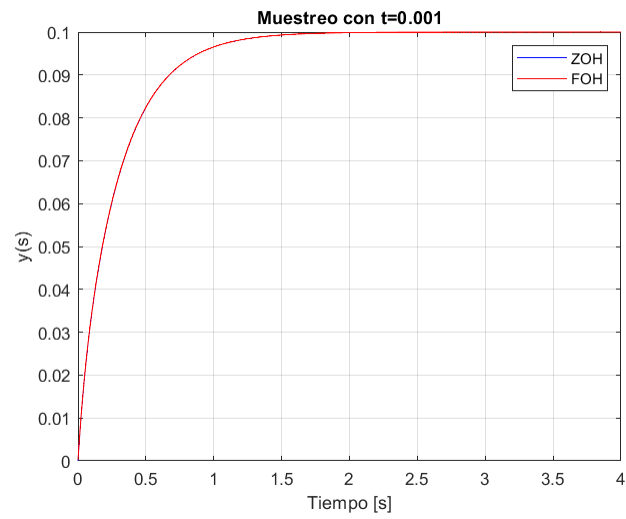


Figura 11: Respuesta de sistema discreto ante un escalón con $t=0.001$ [s].

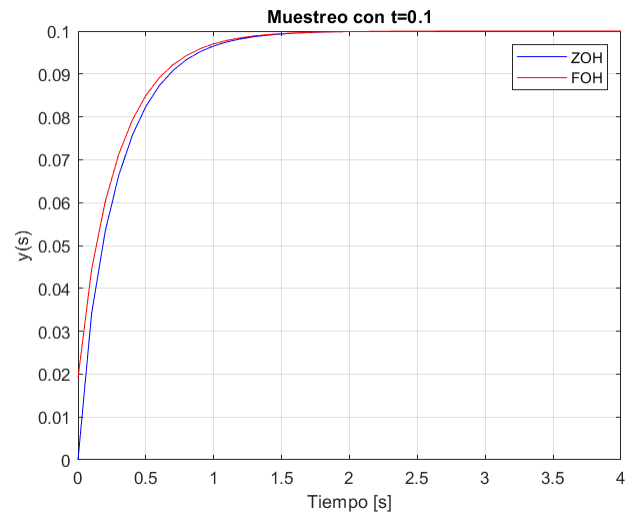


Figura 12: Respuesta de sistema discreto ante un escalón con $t=0.1$ [s].

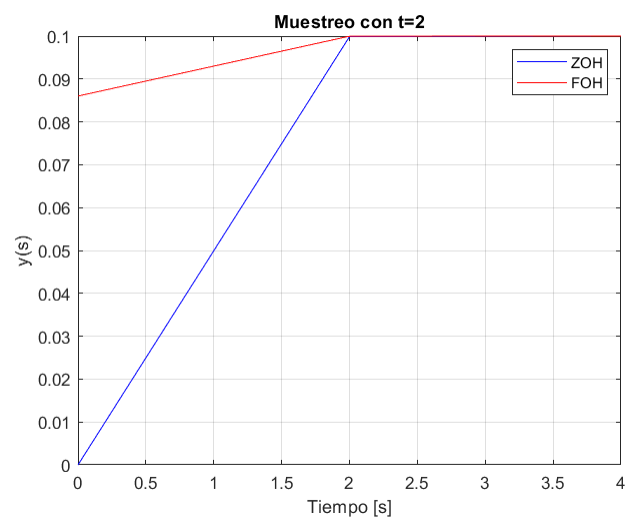


Figura 13: Respuesta de sistema discreto ante un escalón con $t=2[s]$..