

Discretización de procesos con interpolación lineal de entradas entre muestras

Antonio Sala

Control de Sistemas Complejos

DISA – Universitat Politècnica de València

Introducción

Motivación:

El control de sistemas complejos requiere implementación por computador, que toma medidas de las señales a intervalos regulares. Algunas señales tienen retenedor (acciones de control constantes entre muestras), otras no.

Objetivos:

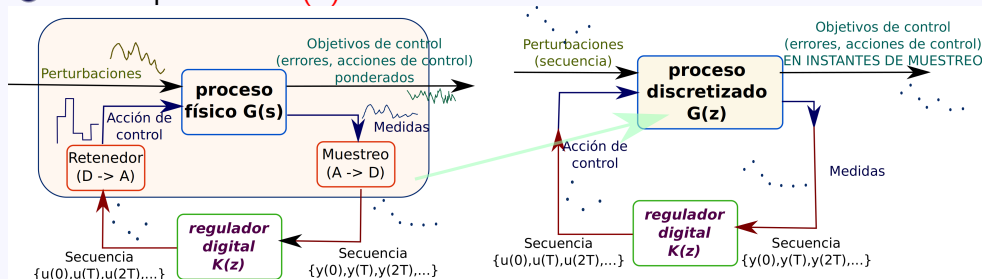
Comprender la teoría de discretización aproximada por interpolación lineal de entradas.

Contenido:

Revisión de control por computador mediante discretización de procesos. Discretización por interpolación lineal entre muestras.

Discretización de procesos + control discreto

- 1 Discretización inicial de $G(s)$ a $G(z)$.
- 2 Diseño posterior $K(z)$ en discreto.



- **Proceso lineal:** A partir de respuesta ante escalón, se puede calcular de forma **exacta** la secuencia de salidas ante $\rightarrow [\text{reten}] \rightarrow G(s) \rightarrow [\text{muestreo}] \rightarrow \dots$ pero:
 - Las entradas de perturbación **no son constantes entre muestras**.
 - Los objetivos de control “entre muestras” son descartados.

Interpolación lineal entre muestras

Para **aproximar** el efecto de **perturbaciones**, puede discretizarse *interpolándolas linealmente entre muestras*, mejorando a la aproximación constante 'zoh' (ojo: **no** válido para **actuador**, cuyo hardware es **zoh**).

Interpolación lineal \Leftrightarrow **pendiente constante** entre muestras.

Supongamos un modelo con entrada w

$$\dot{x} = A_c x + B_c w, \quad y = C_c x + D_c w$$

que verifica $\dot{w} = \delta$, siendo δ una **pendiente constante**. Como $\dot{\delta} = 0$, eso se puede expresar como:

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ w \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_c & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \\ \delta \end{pmatrix}$$

Solución mediante exponencial de matrix

La solución en $t = T$ de

$$\frac{d}{dt} \begin{pmatrix} x \\ w \\ \delta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_c & B_c & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ w \\ \delta \end{pmatrix}$$

es, usando la exponencial de matriz:

$$\begin{pmatrix} x(T) \\ w(T) \\ \delta(T) \end{pmatrix} = e^{\begin{pmatrix} A_c & B_c & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T} \cdot \begin{pmatrix} x(0) \\ w(0) \\ \delta(0) \end{pmatrix}$$

Discretización:

si denotamos:

$$e^{\begin{pmatrix} A_c & B_c & 0 \\ 0 & 0 & I \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T} = \begin{pmatrix} \Xi_{11} & \Xi_{12} & \Xi_{13} \\ 0 & I & T \cdot I \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix}$$

y sustituimos la pendiente $\delta(0) = \frac{1}{T}(w(T) - w(0))$ obtendríamos:

$$x(T) = \Xi_{11} \cdot x(0) + \left(\Xi_{12} - \frac{1}{T} \Xi_{13} \right) \cdot w(0) + \frac{1}{T} \Xi_{13} \cdot w(T)$$

que ya se podría programar si $w(T)$ fuera conocida para simular...

pero no está en forma normalizada de representación interna $\psi(T) = A_d \psi(0) + B_d w(0)$.

Representación interna normalizada

A partir de

$$x_{k+1} = \Xi_{11} \cdot x_k + \left(\Xi_{12} - \frac{1}{T} \Xi_{13} \right) \cdot w_k + \frac{1}{T} \Xi_{13} \cdot w_{k+1}$$

con el cambio de variable:

$$\psi_k = x_k - \frac{1}{T} \Xi_{13} \cdot w_k$$

escribimos la ecuación de estado normalizada discreta:

$$\begin{aligned} \psi_{k+1} &= \Xi_{11} x_k + \left(\Xi_{12} - \frac{1}{T} \Xi_{13} \right) \cdot w_k \\ &= \Xi_{11} \left(\psi_k + \frac{1}{T} \Xi_{13} \cdot w_k \right) + \left(\Xi_{12} - \frac{1}{T} \Xi_{13} \right) \cdot w_k \end{aligned}$$

con lo que la ecuación de estado normalizada discreta es:

$$\psi_{k+1} = \Xi_{11} \cdot \psi_k + \left(\Xi_{12} + \frac{1}{T} (\Xi_{11} - I) \Xi_{13} \right) \cdot w_k$$

Ecuación de salida

$$\begin{aligned}
 y_k &= C_c x_k + D_c w_k = C_c \left(\psi_k + \frac{1}{T} \Xi_{13} \cdot w_k \right) + D_c w_k \\
 &= C_c \cdot \psi_k + \left(\frac{1}{T} C_c \Xi_{13} + D_c \right) \cdot w_k
 \end{aligned}$$

Ejemplo: $\dot{x} = 0x + 1w$, $y = x$, con FdT $G(s) = 1/s$ resulta en

$$e^{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot T} = \begin{pmatrix} 1 & T & T^2/2 \\ 0 & 1 & T \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

con lo que $A_d = 1$, $B_d = T$, $C_d = 1$, $D_d = T/2$. Su función de transferencia $G(z) = C_d(zI - A_d)^{-1}B_d + D_d = \frac{T}{2} \frac{z+1}{z-1}$.

*cf. Tustin

Conclusiones

El problema de control por computador tiene entradas manipuladas con retenedor **zoh**, pero perturbaciones que **no** son *constantes entre muestras*.

- Usando exponenciales de matrices, se puede discretizar asumiendo **interpolación lineal entre muestras*** para **aproximar** el efecto de las perturbaciones.

*La idea se conoce como retenedor de orden 1 **no causal**.

El comando Matlab® que la realiza es **`sysd=c2d(sys,Ts,'foh')`**.

*Si período de muestreo suficientemente pequeño, da resultados parecidos a la opción **zoh**.

*La discretización sería **exacta** si las entradas fueran realmente de pendiente constante entre muestras. Preserva estabilidad: polos discretos = $\exp(\text{polos continuos} \cdot T)$.

*Para el integrador puro, coincide con la discretización bilineal (Tustin), pero no así con otros procesos.