

Rapport du TIPE:

Durant notre TIPE, nous nous sommes demandés s'il était possible de concevoir un algorithme qui puisse créer une musique de façon aléatoire tout en respectant certaines règles afin que celle-ci reste cohérente. Pour ce faire nous souhaitions créer un premier programme qui se base sur une base de données de partitions préexistantes, puis un deuxième programme utilisant des lois mathématiques à partir des travaux du mathématicien Leonhard Euler.

Le premier programme que nous avons écrit permet de créer une musique aléatoire à partir d'une base de données de partitions.

La première note est choisie de façon aléatoire, puis le programme choisit parmi les partitions de la base de données quelles sont les notes qui la suivent et en choisit une parmi celles-là aléatoirement. Puis on répète le procédé.

Ce procédé peut être assimilé à une chaîne de Markov. En effet une variable aléatoire (X_n) suit une propriété de Markov faible si l'état de X_{n+1} ne dépend que de X_n ; ici le choix de la $n+1$ ème note ne dépend que de la note qui la précède.

On peut ensuite créer une matrice de transition M correspondant à la base de données. Il est alors possible de comparer certaines musiques entre elles en calculant la distance entre leur matrice de transition ; on peut s'attendre à ce que, plus les musiques sont proches, plus cette distance est faible.

En utilisant ce programme nous avons pu remarquer que notre algorithme permet d'obtenir une mélodie qui paraît moins anarchique et plus eurythmique que si les notes étaient choisies de façon purement aléatoire. La distance entre les matrices de transition des partitions créées par le programme et celle de la base de données est plus faible que lorsque les partitions sont créées au hasard ; nous pouvons en conclure que notre programme permet de créer des partitions relativement proches de la base de données.

Ce programme permet de créer une mélodie de façon aléatoire ; notre objectif était ensuite d'y ajouter un accompagnement toujours de façon aléatoire mais harmonieuse. Pour cela nous nous sommes basés sur les travaux d'Euler. Ce célèbre mathématicien s'est intéressé aux lois qui rendent une musique cohérente à l'oreille. Les différentes notes de la gamme se caractérisent par leur fréquence, Euler représente ainsi une note par une série de battements et considère que si l'on prend deux séries de battements différentes, plus ces deux séries seront facilement discernables, plus les deux notes jouées ensemble paraîtront harmonieuses. A partir de considérations sur les nombres premiers, Euler tire une formule générale permettant de calculer le degré de douceur de plusieurs notes basé sur leur rapport de fréquences, en faisant intervenir la décomposition en facteurs premiers.

Plus ce degré est bas, plus l'accord paraîtra harmonieux. En particulier, Euler considère que c'est entre le 7^{ème} et le 8^{ème} degré qu'un accord devient disgracieux.

Cependant le rapport de fréquences entre deux notes n'est pas si facile à déterminer.

Pour une gamme parfaitement tempérée, le rapport entre deux notes consécutives (espacée d'un demi ton) est $2^{(1/12)}$ qui est irrationnel : pour utiliser la formule d'Euler il est nécessaire de faire des approximations. Ainsi nous avons créé un programme qui calcule la fréquence p/q entre deux notes à partir du nombre d de demi tons qui les séparent. Pour cela nous avons utilisé certaines références de base comme la quinte ($d=7$) dont le rapport vaut $3/2$. Nous avons ainsi des valeurs pour $d=1, 2, 4, 5, 7, 8$ ou 9 . Pour une autre valeur de d , comme la gamme est logarithmique, il suffit de s'arranger pour écrire d comme somme d'éléments de $\{1, 2, 4, 5, 7, 8, 9\}$ et de multiplier les rapports de fréquences correspondant.

Il n'y a pas unicité de la façon de décomposer d nous avons choisi d'optimiser la décomposition en prenant celle qui permet au ppcm d'être minimale (car c'est le ppcm qui intervient dans la formule du degré de douceur).

Nous avons ensuite pu écrire un programme prenant en argument deux notes: calcule leur rapport de fréquences puis renvoie le degré de douceur.

Nous avons ensuite décidé de comparer toutes les notes jouées par la main droite à une liste de notes pouvant être jouées par la main gauche, judicieusement choisies par l'algorithme qui s'occupe de l'accompagnement en sélectionnant les notes de la main gauche qui ont un degré de douceur assez bas pour être superposées à celles de la main droite pour plus d'harmonie.

Mais, pour que l'accompagnement soit le plus réaliste possible, nous avons décidé de créer un algorithme qui travaille avec des temps réguliers ou non. Ainsi, en prenant la première note de chaque sous liste de la liste des notes pouvant être jouées par la main gauche, et en la jouant à des temps différents de celui des notes jouées par la main droite, on obtient un accompagnement plus fluide et mélodieux, tout en gardant la cohésion du degré de douceur.

Enfin le programme final prend en argument une partition, qui sera écrite par le premier programme, et lui ajoute un accompagnement, en choisissant à chaque fois parmi plusieurs notes choisies au hasard celle qui permet d'avoir un degré de douceur minimal.

En faisant la moyenne des degrés de douceur pour un accompagnement choisi de façon complètement aléatoire, nous tombons généralement sur une valeur proche de $(6,5)$, qui est en dessous de la limite de l'accord disgracieux mais qui n'en est pas très loin. En revanche en utilisant notre programme, la moyenne des degrés de douceur descend vers (3) , ce qui est mieux. Le programme permet donc de créer des musiques plus harmonieuses.