Ejercicios Mecánica Teórica. Capítulo 20

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

12 de agosto de 2019

Sean los corchetes de Poisson definidos como

$$\{A, B\} \equiv \left(\frac{\partial A}{\partial z}\right)^T J \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right) \tag{1}$$

1. Demostrar la identidad de Jacobi

La identidad de Jacobi nos dice que

$$\{A, \{B, C\}\} + \{B, \{C, A\}\} + \{C, \{A, B\}\} = 0 \tag{2}$$

Calculemos primero $\{A, \{B, C\}\}$:

$$\{A, \{B, C\}\} = \left\{A, \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)^T J \left(\frac{\partial C}{\partial z}\right)\right\} = \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)^T J \left\{A, \frac{\partial C}{\partial z}\right\} + \left\{A, \left(\frac{\partial B}{\partial z}\right)^T\right\} J \frac{\partial C}{\partial z} \tag{3}$$

$$= J_{ij} J_{kl} \frac{\partial A}{\partial z_k} \frac{\partial B}{\partial z_i} \frac{\partial^2 C}{\partial z_j \partial z_l} + J_{ij} J_{kl} \frac{\partial A}{\partial z_i} \frac{\partial^2 B}{\partial z_j \partial z_k} \frac{\partial C}{\partial z_l} \tag{4}$$

Donde la última igualdad la he escrito en componentes usando el convenio de Einstein. Cambiando ahora cíclicamente A, B y C tenemos que

$$\{B, \{C, A\}\} = J_{ij} J_{kl} \frac{\partial^2 A}{\partial z_j \partial z_l} \frac{\partial B}{\partial z_k} \frac{\partial C}{\partial z_i} + J_{ij} J_{kl} \frac{\partial A}{\partial z_l} \frac{\partial B}{\partial z_i} \frac{\partial^2 C}{\partial z_j \partial z_k} \tag{5}$$

$$\{C, \{A, B\}\} = J_{ij} J_{kl} \frac{\partial A}{\partial z_i} \frac{\partial^2 B}{\partial z_j \partial z_l} \frac{\partial C}{\partial z_k} + J_{ij} J_{kl} \frac{\partial^2 A}{\partial z_j \partial z_k} \frac{\partial B}{\partial z_l} \frac{\partial C}{\partial z_i} \tag{6}$$

La suma que aparece en la identidad de Jacobi entonces la podemos escribir (reordenando términos) como

$$\left(J_{ij} J_{kl} \frac{\partial^2 A}{\partial z_j \partial z_l} \frac{\partial B}{\partial z_k} \frac{\partial C}{\partial z_i} + J_{ij} J_{kl} \frac{\partial^2 A}{\partial z_j \partial z_k} \frac{\partial B}{\partial z_l} \frac{\partial C}{\partial z_i}\right) + \tag{7}$$

$$\left(J_{ij} J_{kl} \frac{\partial A}{\partial z_i} \frac{\partial^2 B}{\partial z_j \partial z_k} \frac{\partial C}{\partial z_l} + J_{ij} J_{kl} \frac{\partial A}{\partial z_i} \frac{\partial^2 B}{\partial z_j \partial z_l} \frac{\partial C}{\partial z_k}\right) + \tag{8}$$

$$\left(J_{ij} J_{kl} \frac{\partial A}{\partial z_k} \frac{\partial B}{\partial z_i} \frac{\partial^2 C}{\partial z_j \partial z_l} + J_{ij} J_{kl} \frac{\partial A}{\partial z_l} \frac{\partial B}{\partial z_i} \frac{\partial^2 C}{\partial z_j \partial z_k}\right) \tag{9}$$

La primera suma se puede simplificar, cambiando los índices $k \leftrightarrow l$ en el segundo término y sacando factor común las derivadas

$$(J_{ij}J_{kl} + J_{ij}J_{lk}) \frac{\partial^2 A}{\partial z_j \partial z_l} \frac{\partial B}{\partial z_k} \frac{\partial C}{\partial z_i} \tag{10}$$

Pero, dado que J es antisimétrica, $J_{kl} = -J_{lk}$, por lo que el término entre paréntesis se anula. Las otras dos sumas son completamente equivalentes, y haciendo el mismo cambio $k \leftrightarrow l$ se demuestra que también valen 0. Con esto se demuestra la identidad de Jacobi.