

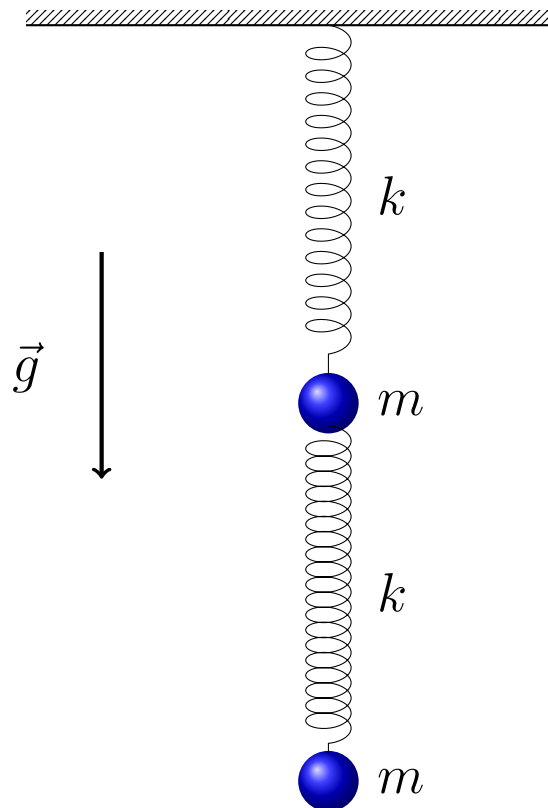
Mecánica Teórica

Prof. Javier Garcia

25 de julio de 2019

Problema propuesto en el Capítulo 6

Considere el sistema mecánico a continuación. Se compone de dos masas iguales sujetadas por dos resortes que tienen la misma constante elástica, ambas bajo la fuerza de gravedad \vec{g} . Ambas masas se mueven en una sola dimensión, a lo largo del eje vertical.



Calcule lo siguiente:

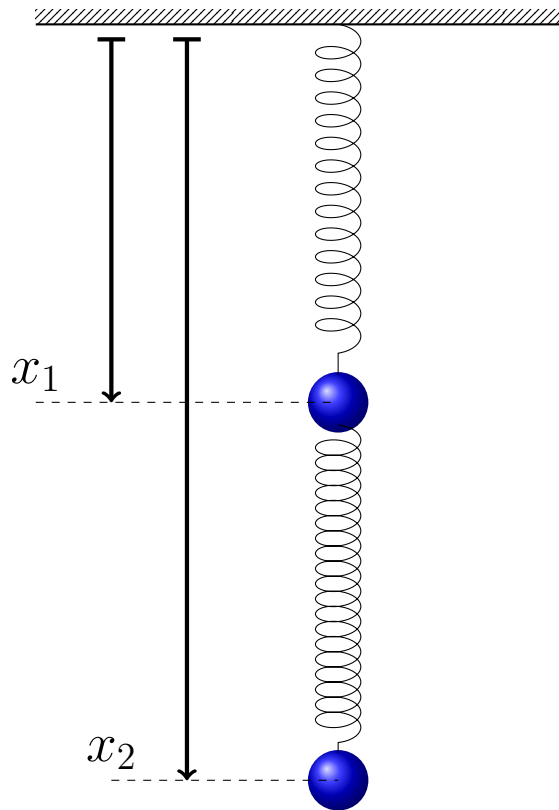
1. El Lagrangiano del sistema.
2. La diagonalización de la matriz en la forma cuadrática del potencial elástico.
3. La solución de las ecuaciones de Euler-Lagrange.

Solución

El Lagrangiano

Las Coordenadas

Lo primero es buscar las coordenadas que caracterizan el estado del sistema, que salten a la vista. Ambas masas se mueven arriba y abajo solamente. Para la primera masa (la mas próxima al techo) usaré x_1 para denotar el desplazamiento vertical desde el techo, y usaré x_2 para el desplazamiento medido desde el techo, para la otra masa. Ambas coordenadas son funciones de tiempo:



La Energía Cinética

Si x_1 y x_2 son las posiciones en función del tiempo, entonces es fácil ver que

$$T(t) = \frac{m}{2} \dot{x}_1^2(t) + \frac{m}{2} \dot{x}_2^2(t) = \frac{m}{2} (\dot{x}_1^2(t) + \dot{x}_2^2(t))$$

donde el punto representa la tasa de cambio con respecto al tiempo, osea la derivada $\frac{d}{dt}$.

La Energía Potencial Elástica

En el video, el profesor habló del modelo para calcular esta energía. Mientras mas estirado esta el resorte (comparado con una longitud "natural" a), con mas fuerza el resorte tiende a

restaurarse a su longitud natural a . Si la longitud en un instante t es $L(t)$, entonces

$$U(t) = \frac{k}{2} (L(t) - a)^2$$

es la *energía potencial*, donde k viene dada por propiedades elásticas del material que sufre el estiron. Cada resorte se estira independientemente, por tanto la energía potencial total es la suma

$$U_{elastica}(t) = \frac{k}{2} (x_1(t) - a)^2 + \frac{k}{2} (x_2(t) - x_1(t) - a)^2 = \frac{k}{2} ((x_1(t) - a)^2 + (x_2(t) - x_1(t) - a)^2)$$

En esta expresión, x_1 representa el estiramiento del primer resorte. Obviamente, el estiramiento del segundo resorte es $x_2 - x_1$ y esa es la que se compara con a . En adelante, suprimo la dependencia explícita en t por vagancia.

La Energía Potencial Gravitatoria

Esta varia directamente con la distancia al origen, mientras mas grande sea el valor de x menos energía potencial tiene la masa,

$$U_{gravitacional} = -mgx_1 - mgx_2 = -mg(x_1 + x_2)$$

Entonces, *El Lagrangiano* seria

$$\mathcal{L} = \frac{k}{2} (\dot{x}_1^2 + \dot{x}_2^2) - \frac{k}{2} ((x_1 - a)^2 + (x_2 - x_1 - a)^2) + mg(x_1 + x_2)$$

El problemilla con este lagrangiano es que el potencial elástico tiene términos cruzados. Si expandimos los cuadrados se ve claro:

$$a^2k - akx_2 + kx_1^2 + \frac{kx_2^2}{2} - kx_1x_2$$

Al derivar con respecto a una de las variables, la otra quedara en la expresión resultante. Esto hace que las ecuaciones de Euler-Lagrange sean ecuaciones diferenciales *acopladas*. La diagonalización es precisamente, el procedimiento para desacoplar el sistema.

La Diagonalización

Siguiendo el ejemplo en el video, podemos empezar transformando las variables: $y_1 = x_1 - a$ y $y_2 = x_2 - 2a$. Con esta transformacion el lagrangiano se transforma así

$$\mathcal{L} = \frac{k}{2} (\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) - \frac{k}{2} (2y_1^2 - 2y_2y_1 + y_2^2) + mg(3a + y_1 + y_2)$$

En esta forma, el término de la energía potencial elástica es una forma cuadrática:

$$\frac{k}{2} \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$$

Lo que procede ahora es hacer una factorización de la matriz de coeficientes, usando los autovalores y autovectores (normalizados). La ecuación característica es $\lambda^2 - 3\lambda + 1 = 0$, de donde obtenemos los autovalores $\lambda = \frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ y $\lambda = \frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$. Los autovectores asociados se pueden obtener por el método de eliminación de Gauss. Para $\frac{1}{2}(3 - \sqrt{5})$ y $\frac{1}{2}(3 + \sqrt{5})$, respectivamente obtenemos,

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Para no formar un revolú de simbolos, sean $\psi = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$ y $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. La matriz de autovectores seria

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{2}(-1 - \sqrt{5}) & \frac{1}{2}(-1 + \sqrt{5}) \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\phi & -\psi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, luego de simplificar, la matriz con los autovectores normalizados seria

$$\begin{pmatrix} \frac{-\phi}{\sqrt{1+\phi^2}} & \frac{-\psi}{\sqrt{1+\psi^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\phi^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\psi^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-1}{\sqrt{1+\psi^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\phi^2}} \\ \frac{1}{\sqrt{1+\phi^2}} & \frac{1}{\sqrt{1+\psi^2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & \Omega \\ \Omega & A \end{pmatrix}$$

Con esta factorización, la forma cuadrática se ve así

$$\frac{k}{2} \left(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} -A & \Omega \\ \Omega & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 + \phi & 0 \\ 0 & 1 + \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -A & \Omega \\ \Omega & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$$

Haciendo un nuevo cambio de variables $\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A & \Omega \\ \Omega & A \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$ la expresión de la energia potencial elástica queda diagonalizada así,

$$\frac{k}{2} \left(\begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 1 + \phi & 0 \\ 0 & 1 + \psi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_1 \\ q_2 \end{pmatrix} \right)$$

Es fácil ver que la energia cinética queda de la misma forma algebraica $\frac{m}{2}(\dot{y}_1^2 + \dot{y}_2^2) = \frac{m}{2}(\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2)$ porque el cambio de coordenadas es lineal (coeficientes constantes) y además $A^2 + \Omega^2 = 1$.

Siempre vamos a derivar para obtener las ecuaciones de Euler-Lagrange, por tanto podemos ignorar constantes. Al hacer este último cambio de variables obtenemos un *3amg* pero al derivarlo desaparece de las ecuaciones diferenciales. El lagrangiano queda así,

$$\mathcal{L} = \frac{m}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2) - \frac{k}{2} ((1 + \phi)q_1^2 + (1 + \psi)q_2^2) + mg(\Omega - A)q_1 + mg(\Omega + A)q_2$$

Solución de las Ecuaciones de Euler-Lagrange

Las ecuaciones son

$$\ddot{q}_1 + \frac{k}{m}(1 + \phi)q_1 - g(\Omega - A) = 0 \quad (1)$$

$$\ddot{q}_2 + \frac{k}{m}(1 + \psi)q_2 - g(\Omega + A) = 0 \quad (2)$$

Ambas tienen la misma forma $y'' + Cy + D = 0$ cuya solución general es $y(t) = R_1 \cos[\sqrt{C}t] + R_2 \sin[\sqrt{C}t] + \frac{D}{C}$, donde R_1 y R_2 son constantes arbitrarias. Los modos normales serían $\cos()$, $\sin()$ y la función constante (aun expresando la solución general en términos de las variables originales x_1 y x_2).