EJERCICIO TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS **CAPÍTULO 86**

AUTOR DEL CURSO: Javier García

EJERCICIO RESUELTO: Miguel Ángel Montañez 2-08-2022

Ejercicio 86.1

a) Calcular el valor del módulo del trimomento $\mathbf{p}_c$ que hace $E_a + E_b – E_c – E_d^* = 0$.

Sea **p** (en negrita) el trimomento de la partícula, y $E_d^* = (|\mathbf{p}_c|^2 + m_d^2)^{1/2}$. Queremos encontrar el valor $|\mathbf{p}_c^*|$ que haga:

$$E_a + E_b – E_c – E_d^* = 0$$

Sustituimos:

$$E_a + E_b - (|\mathbf{p}_c^*|^2 + m_c^2)^{1/2} - (|\mathbf{p}_c^*|^2 + m_d^2)^{1/2} = 0$$

Pasamos E_d^* a la derecha:

$$E_a + E_b - (|\mathbf{p}_c^*|^2 + m_c^2)^{1/2} = (|\mathbf{p}_c^*|^2 + m_d^2)^{1/2}$$

Elevamos al cuadrado:

$$(E_a + E_b)^2 + |\mathbf{p}_c^*|^2 + m_c^2 – 2(E_a + E_b) (|\mathbf{p}_c^*|^2 + m_c^2)^{1/2} = |\mathbf{p}_c^*|^2 + m_d^2$$

$$(E_a + E_b)^2 + m_c^2 - m_d^2 = 2(E_a + E_b) (|\mathbf{p}_c^*|^2 + m_c^2)^{1/2}$$

$$(E_a + E_b)/2 + (m_c^2 - m_d^2)/2(E_a + E_b) = (|\mathbf{p}_c^*|^2 + m_c^2)^{1/2}$$

Sacamos factor común:

$$(E_a + E_b)/2 \cdot [1 + (m_c^2 - m_d^2)/(E_a + E_b)^2] = (|\mathbf{p}_c^*|^2 + m_c^2)^{1/2}$$

Elevamos al cuadrado:

$$(E_a + E_b)^2/4 \cdot [1 + (m_c^2 - m_d^2)/(E_a + E_b)^2]^2 = |\mathbf{p}_c*|^2 + m_c^2$$

Reorganizamos:

$$(E_a + E_b)^2/4 \cdot [1 + (m_c^2 - m_d^2)/(E_a + E_b)^2]^2 - m_c^2 = |\mathbf{p}_c*|^2$$

Concluyendo la demostración:

$$|\mathbf{p}_c*|^2 = (E_a + E_b)^2/4 \cdot \{[1 + (m_c^2 - m_d^2)/(E_a + E_b)^2]^2 - [2m_c/(E_a + E_b)]^2\}$$

b) Obtener una expresión para $f'(|\mathbf{p}_c|)_{pc*}$.

Sea $E_a + E_b - E_c - E_d*$ considerada como función de $|\mathbf{p}_c|$:

$$f(|\mathbf{p}_c|) = E_a + E_b - (|\mathbf{p}_c|^2 + m_c^2)^{1/2} - (|\mathbf{p}_c|^2 + m_d^2)^{1/2}$$

Derivamos respecto $|\mathbf{p}_c|$:

$$f'(|\mathbf{p}_c|) = - |\mathbf{p}_c|/(|\mathbf{p}_c|^2 + m_c^2)^{1/2} - |\mathbf{p}_c|/(|\mathbf{p}_c|^2 + m_d^2)^{1/2}$$

Si sustituimos $|\mathbf{p}_c|$ por $|\mathbf{p}_c*|$:

$$f'(|\mathbf{p}_c*|) = - |\mathbf{p}_c*|/(|\mathbf{p}_c*|^2 + m_c^2)^{1/2} - |\mathbf{p}_c*|/(|\mathbf{p}_c*|^2 + m_d^2)^{1/2} = - |\mathbf{p}_c*|/E_c* - |\mathbf{p}_c*|/E_d** \quad (1)$$

donde $E_c* = E_c(|\mathbf{p}_c*|) = (|\mathbf{p}_c*|^2 + m_c^2)^{1/2}$ y $E_d** = E_d*(|\mathbf{p}_c*|) = (|\mathbf{p}_c*|^2 + m_d^2)^{1/2}$.

Esta expresión se puede utilizar en la integral cross section; pero podemos también relacionarla con $|\mathbf{p}_c|$, E_c y E_d*.

Si tomamos $c = 1$ son válidas las siguientes expresiones:

$$E = \gamma m \qquad\qquad |\mathbf{p}| = \gamma m|\mathbf{v}| = E\cdot|\mathbf{v}|$$

Entonces:

$$f'(|\mathbf{p}_c{}^*|) = - |\mathbf{p}_c{}^*|/E_c{}^* - |\mathbf{p}_c{}^*|/E_d{}^{**} = - |\mathbf{p}_c{}^*|/(1/E_c{}^* + 1/E_d{}^{**}) = - \gamma_c{}^* m_c|\mathbf{v}_c{}^*| /(1/\gamma_c{}^* m_c + 1/\gamma_c{}^* m_d)$$

donde $\gamma_c{}^* = \gamma_d{}^* = \gamma(\mathbf{v}_c{}^*)$, que se puede simplificar quedando:

$$f'(|\mathbf{p}_c{}^*|) = - m_c|\mathbf{v}_c{}^*| /(1/m_c + 1/m_d)$$

Si hacemos lo mismo con $f'(|\mathbf{p}_c|)$ obtenemos:

$$f'(|\mathbf{p}_c|) = - m_c|\mathbf{v}_c| /(1/m_c + 1/m_d)$$

Si dividimos una entre otra obtenemos la relación:

$$f'(|\mathbf{p}_c{}^*|) = (|\mathbf{v}_c{}^*|/|\mathbf{v}_c|)\, f'(|\mathbf{p}_c|) = (|\mathbf{v}_c{}^*|/|\mathbf{v}_c|)\, (- |\mathbf{p}_c|/E_c - |\mathbf{p}_c|/E_d{}^*) \quad (2)$$

Esta expresión también se puede utilizar en la integral cross section.

Vamos a comprobarlo primero con la forma (1); nos centramos en la integral:

$$\int d|\mathbf{p}_c|\ |\mathbf{p}_c|^2\,|\mathcal{M}|^2\ \delta(E_a + E_b - E_c - E_d{}^*) /[E_c E_d{}^*\ |f'(|\mathbf{p}_c|)_{pc^*}|]$$

Sustituyendo la expresión (1):

$$\int d|\mathbf{p}_c|\ |\mathbf{p}_c|^2\,|\mathcal{M}|^2\,\delta(|\mathbf{p}_c| - |\mathbf{p}_c{}^*|) /[E_c E_d{}^*\ |\mathbf{p}_c{}^*|\ (1/E_c{}^* + 1/E_d{}^{**})]$$

Los valores $|\mathbf{p}_c{}^*|$, $E_c{}^*$ y $E_d{}^{**}$ son fijos, por lo que podemos sacarlos de la integral:

$$E_c{}^*E_d{}^{**} /[|\mathbf{p}_c{}^*|\ (E_c{}^* + E_d{}^{**})] \cdot \int d|\mathbf{p}_c|\ |\mathbf{p}_c|^2\,|\mathcal{M}|^2\ \delta(|\mathbf{p}_c| - |\mathbf{p}_c{}^*|) /E_c E_d{}^*$$

Integrando:

$$E_c{}^*E_d{}^{**}\ |\mathbf{p}_c{}^*|^2\,|\mathcal{M}|^2 /[|\mathbf{p}_c{}^*|\ (E_c{}^* + E_d{}^{**})\ E_c{}^*E_d{}^{**}]$$

Resultando:

$$|\mathbf{p}_c^*|\ |\mathcal{M}|^2/(E_c^* + E_d^{**}) = |\mathbf{p}_c^*|\ |\mathcal{M}|^2/(E_a + E_b)$$

ya que $E_c^* + E_d^{**} = E_a + E_b$.

Vamos a comprobarlo ahora con la forma (2):

$$\int d|\mathbf{p}_c|\ |\mathbf{p}_c|^2\, |\mathcal{M}|^2\, \delta(E_a + E_b - E_c - E_d^*)\ /[E_cE_d^*\ |f'(|\mathbf{p}_c|)_{pc^*}|]$$

Sustituyendo la expresión (2):

$$\int d|\mathbf{p}_c|\ |\mathbf{p}_c|^2\, |\mathcal{M}|^2\, \delta(|\mathbf{p}_c| - |\mathbf{p}_c^*|)\ /[E_cE_d^*\ (|\mathbf{v}_c^*|/|\mathbf{v}_c|)\ (|\mathbf{p}_c|/E_c + |\mathbf{p}_c|/E_d^*)]$$

Ahora solo podemos sacar de la integral $|\mathbf{v}_c^*|$:

$$(1/|\mathbf{v}_c^*|) \int d|\mathbf{p}_c|\ |\mathbf{p}_c|^2\, |\mathcal{M}|^2\, \delta(|\mathbf{p}_c| - |\mathbf{p}_c^*|)\ /[E_cE_d^*\ (1/|\mathbf{v}_c|)\ (|\mathbf{p}_c|/E_c + |\mathbf{p}_c|/E_d^*)]$$

Integrando:

$$(1/|\mathbf{v}_c^*|)\ |\mathbf{p}_c^*|^2\, |\mathcal{M}|^2/[E_c^*E_d^{**}\ (1/|\mathbf{v}_c^*|)\ (|\mathbf{p}_c^*|/E_c^* + |\mathbf{p}_c^*|/E_d^{**})]$$

Resultando:

$$|\mathbf{p}_c^*|\ |\mathcal{M}|^2/(E_c^* + E_d^{**}) = |\mathbf{p}_c^*|\ |\mathcal{M}|^2/(E_a + E_b)$$

que coincide con el caso anterior.

Ejercicio 86.2 Determina las dimensiones de la integral cross section.

Partimos de la definición de la diferencial cross section que Javier nos dio en el capítulo 85:

$$d\sigma = dP(i-f) \cdot \#/[T \cdot Flujo] = dP(i-f)\ \#/[T \cdot (\#/ST)] = dP(i-f) \cdot S$$

es el número de partículas, T el tiempo, S la superficie y dP la diferencial de probabilidad. La probabilidad es un número sin dimensión y S tiene dimensión L^2, por ello $d\sigma$ y σ tienen dimensión de superficie.