Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 56

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

9 de mayo de 2021

1. Demostrar que $|e^A| = e^{\mathrm{Tr}\{A\}}$.

Sea A una matriz $N \times N$ compleja, sabemos que toda matriz compleja es triangularizable, es decir se puede escribir como

$$A = PTP^{-1} \tag{1}$$

Con T una matriz triangular, es decir $T_{ij} = 0$ si $i > j$ y P cierta matriz invertible. Ahora podemos ver como se relacionan la exponencial y la traza de A con la exponencial y la traza de T. Empecemos demostrando que

$$(PTP^{-1})^n = PT^nP^{-1} \tag{2}$$

Esto se puede demostrar con inducción, para $n = 0$ tenemos

$$I = (PTP^{-1})^0 = PT^0P^{-1} = PP^{-1}$$

Y, asumiendo el caso $n = k$ podemos demostrar

$$(PTP^{-1})^{k+1} = (PTP^{-1})^k PTP^{-1} = PT^kP^{-1}PTP^{-1} = PT^{k+1}P^{-1}$$

Ahora podemos usar este resultado en la definición de exponencial

$$e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(PTP^{-1})^n}{n!} = P\sum_{n=0}^{\infty} \frac{T^n}{n!} P^{-1} = Pe^TP^{-1} \tag{3}$$

Si ahora hacemos el determinante obtenemos que

$$|e^A| = |P||e^T||P^{-1}| = |e^T| \tag{4}$$

Y para la traza, usando la propiedad cíclica:

$$\mathrm{Tr}\{A\} = \mathrm{Tr}\{PTP^{-1}\} = \mathrm{Tr}\{TP^{-1}P\} = \mathrm{Tr}\{T\} \tag{5}$$

Por lo tanto, demostrar que $|e^T| = e^{\mathrm{Tr}\{T\}}$ es equivalente a demostrarlo para la matriz A, como toda matriz A se puede expresar de la forma (1), nos basta con demostrar la propiedad para una matriz triangular arbitraria.

Notemos que si T es una matriz triangular y definimos $\lambda_i = T_{ii}$, entonces T^n es una matriz triangular y $(T^n)_{ii} = \lambda_i^n$. Esto de nuevo lo demostramos por inducción (el caso $n = 1$ es cierto por definición) En efecto para $i > j$

$$(T^{k+1})_{ij} = \sum_{l=1}^{N} (T^k)_{il}T_{lj} = \sum_{l<i} (T^k)_{il}T_{lj} + \sum_{l\geq i>j}^{N} (T^k)_{il}T_{lj} = 0$$

Donde la suma de la izquierda es cero porqué $i > l \implies (T^k)_{il} = 0$ y la de la derecha es cero porqué $l > j \implies T_{lj} = 0$. Por lo tanto, en efecto T^n es una matriz triangular y los elementos de la diagonal son

$$(T^{k+1})_{ii} = \sum_{j=1}^{N} (T^k)_{ij}T_{ji} = \sum_{j<i}^{N} (T^k)_{ij}T_{ji} + \sum_{j=i}^{N} (T^k)_{ij}T_{ji} + \sum_{j>i}^{N} (T^k)_{ij}T_{ji} = (T^k)_{ii}T_{ii} = \lambda_i^k\lambda_i = \lambda_i^{k+1}$$

Donde la suma para $j < i$ es cero debido a que T^k es triangular y la suma $j > i$ es cero debido a que T es triangular. Finalmente, de la definición de exponencial es ahora trivial ver que e^T es también triangular

$$(e^T)_{ij} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T^n)_{ij}}{n!} = 0, \qquad \text{si } i > j$$

Además

$$(e^T)_{ii} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(T^n)_{ii}}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\lambda_i^n}{n!} = e^{\lambda_i}$$

Finalmente solo nos queda por demostrar que el determinante de una matriz triangular es el producto de su diagonal, pero esto se ve fácilmente con la expresión

$$|T| = \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_N} \varepsilon_{i_1 \cdots i_N} T_{1 i_1} \cdots T_{N i_N}$$

Debido a que T es triangular, el término $T_{N i_N}$ sólo sobrevive si $i_n \geq n$, pero debido a que no puede haber dos índices repetidos, esto implica que el único término que sobrevive es $i_N = n, i_{N-1} = N-1, \ldots, i_1 = 1$. Y por lo tanto

$$|T| = T_{11} \cdots T_{NN} = \prod_{i=1}^{N} \lambda_i$$

Aplicando esta propiedad a la matriz exponencial

$$|e^T| = \prod_{i=1}^{N} e^{\lambda_i} = e^{\sum_{i=1}^{N} \lambda_i} = e^{\mathrm{Tr}\{T\}}$$

Donde, por definición,

$$\mathrm{Tr}\{T\} = \sum_{i=1}^{N} T_{ii} = \sum_{i=1}^{N} \lambda_i \tag{6}$$

Quedando demostrada la propiedad para matrices triangulares, y como hemos comentado al principio, demostrando así la propiedad para cualquier matriz compleja.

2. Demostrar que las propiedades bilineal y nilpotente son equivalentes a la propiedad antisimétrica.

La propiedad bilineal de un corchete de Lie nos dice que

$$[\lambda A + \mu B, C] = \lambda [A, C] + \mu [B, C] \tag{7}$$

$$[A, \lambda B + \mu C] = \lambda [A, B] + \mu [A, C] \tag{8}$$

Y la propiedad nilpotente nos dice que

$$[A, A] = 0 \tag{9}$$

Con ambas propiedades, podemos calcular el corchete de Lie de $A + B$ consigo misma:

$$0 \overset{(9)}{=} [A+B, A+B] \overset{(7)}{=} [A, A+B] + [B, A+B] \overset{(7)}{=} [A, A] + [A, B] + [B, A] + [B, B] \overset{(9)}{=} [A, B] + [B, A]$$

De esta ecuación se deduce entonces que

$$[A, B] = -[B, A] \tag{10}$$

Claramente, el razonamiento es válido para cualquier par de matrices A y B.

3. Demostrar que los polinomios de grado dos con el corchete definido (11) es un álgebra de Lie.

$$[a,b] = [a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0] = (a_1b_0 - a_0b_1)x^2 + (a_0b_2 - a_2b_0)x + (a_2b_1 - a_1b_2) \tag{11}$$

En efecto, veamos que cumple la propiedad bilineal:

$$\begin{aligned}
[\lambda a + \mu b, c] &= ((\lambda a_1 + \mu b_1)c_0 - (\lambda a_0 + \mu b_0)c_1)x^2 + ((\lambda a_0 + \mu b_0)c_2 - (\lambda a_2 + \mu b_2)c_0)x \\
&\quad + ((\lambda a_2 + \mu b_2)c_1 - (\lambda a_1 + \mu b_1)c_2) \\
&= \lambda\left[(a_1c_0 - a_0c_1)x^2 + (a_0c_2 - a_2c_0)x + (a_2c_1 - a_1c_2)\right] \\
&\quad + \mu\left[(b_1c_0 - b_0c_1)x^2 + (b_0c_2 - b_2c_0)x + (b_2c_1 - b_1c_2)\right] \\
&= \lambda[a,c] + \mu[b,c]
\end{aligned}$$

Demostremos ahora la propiedad antisimétrica:

$$\begin{aligned}
[a,b] &= (a_1b_0 - a_0b_1)x^2 + (a_0b_2 - a_2b_0)x + (a_2b_1 - a_1b_2) \\
&= -(b_1a_0 - b_0a_1)x^2 - (b_0a_2 - b_2a_0)x - (b_2a_1 - b_1a_2) \\
&= -[b,a]
\end{aligned}$$

Con la propiedad antisimétrica podemos demostrar que el corchete es también bilineal por la derecha:

$$[a, \lambda b + \mu c] \overset{(10)}{=} -[\lambda b + \mu c, a] \overset{(7)}{=} -\lambda[b,a] - \mu[c,a] \overset{(10)}{=} \lambda[a,b] + \mu[a,c]$$

La propiedad nilpotente tampoco es difícil de demostrar

$$[a,a] = (a_1a_0 - a_0a_1)x^2 + (a_0a_2 - a_2a_0)x + (a_2a_1 - a_1a_2) = 0x^2 + 0x + 0 = 0 \tag{12}$$

Demostrar la identidad de Jacobi es un poco más pesado, pero afortunadamente, usemos las propiedades que ya hemos demostrado para simplificar la expresión del corchete:

$$[a,b] = [a_2x^2 + a_1x + a_0, b_2x^2 + b_1x + b_0] = (a_2b_1 - a_1b_2)[x^2, x] + (a_2b_0 - a_0b_2)[x^2, 1] + (a_1b_0 - a_0b_1)[x, 1]$$

Por lo que en realidad solo estamos interesados en conocer los corchetes $[x^2, x]$, $[x^2, 1]$, $[x, 1]$. Usando la definición

$$[x^2, x] = 1, \qquad [x^2, 1] = -x, \qquad [x, 1] = x^2 \tag{13}$$

En general podemos afirmar que

$$[x^a, x^b] = -\varepsilon^{abc}x^c \tag{14}$$

Donde x^a significa, por una vez, exponenciación, y no un superíndice. La identidad de Jacobi la podemos escribir entonces como

$$\begin{aligned}
[[x^a, x^b], x^c] + [[x^b, x^c], x^a] + [[x^c, x^a], x^b] &= [-\varepsilon^{abd}x^d, x^c] + [-\varepsilon^{bcd}x^d, x^a] + [-\varepsilon^{cad}x^d, x^b] \\
&= \left[\varepsilon^{abd}\varepsilon^{dce} + \varepsilon^{bcd}\varepsilon^{dae} + \varepsilon^{cad}\varepsilon^{dbe}\right] x^e \\
&= \left[\delta^{ac}\delta^{be} - \delta^{ae}\delta^{bd} + \delta^{ba}\delta^{ce} - \delta^{be}\delta^{ca} + \delta^{cb}\delta^{ae} - \delta^{ce}\delta^{ab}\right] x^e \\
&= 0
\end{aligned}$$

Demostrando la identitdad de Jacobi, y por lo tanto, que los polinomios de grado 2 con el corchete (11) forman un álgebra de Lie.