Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 68

Autor del curso: Javier García

Ejercicio resuelto por Miguel A. Montañez

18 de mayo de 2021

Ejercicio 68. Calcular el producto escalar de los estados de oscilación excitados $|\vec{k}_1\vec{k}_2\rangle$ y $|\vec{q}_1\vec{q}_2\rangle$.

Partimos de los estados $|\vec{q}_1\vec{q}_2\rangle$ y $|\vec{k}_1\vec{k}_2\rangle$. Entonces:

$$\langle\vec{k}_1\vec{k}_2|\vec{q}_1\vec{q}_2\rangle = \langle 0|a(\vec{k}_2)a(\vec{k}_1)a^+(\vec{q}_1)a^+(\vec{q}_2)|0\rangle$$

Por las propiedades del conmutador:

$$[a(\vec{k}),a^+(\vec{q})] = (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})$$

$$\langle 0|a(\vec{k}_2)\left(a^+(\vec{q}_1)a(\vec{k}_1)+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{q}_1)\right)a^+(\vec{q}_2)|0\rangle =$$

$$\langle 0|a(\vec{k}_2)a^+(\vec{q}_1)a(\vec{k}_1)a^+(\vec{q}_2)|0\rangle + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{q}_1)\langle 0|a(\vec{k}_2)a^+(\vec{q}_2)|0\rangle$$

Nos centramos en el primer sumando y aplicamos, de nuevo, las propiedades del conmutador:

$$\langle 0|a(\vec{k}_2)a^+(\vec{q}_1)a(\vec{k}_1)a^+(\vec{q}_2)|0\rangle = \langle 0|a(\vec{k}_2)a^+(\vec{q}_1)\left(a^+(\vec{q}_2)a(\vec{k}_1)+(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{q}_2)\right)|0\rangle$$

$$= \langle 0|a(\vec{k}_2)a^+(\vec{q}_1)a^+(\vec{q}_2)\underbrace{a(\vec{k}_1)|0\rangle}_{\to 0} + (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{q}_2)\langle 0|a(\vec{k}_2)a^+(\vec{q}_1)|0\rangle =$$

$$(2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{q}_2)\langle 0|a(\vec{k}_2)a^+(\vec{q}_1)|0\rangle$$

Aplicando otra vez las propiedades del conmutador:

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{q}_2) \langle 0| a^\dagger(\vec{q}_1)\, a(\vec{k}_2) + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_2-\vec{q}_1)|0\rangle =$$

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{q}_2)\left(\underbrace{\langle 0| a^\dagger(\vec{q}_1)\, a(\vec{k}_2)|0\rangle}_{\searrow 0} + \langle 0|(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_2-\vec{q}_1)|0\rangle \right)$$

Luego el primer sumando nos queda:

$$(2\pi)^6\, \delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{q}_2)\, \delta^{(3)}(\vec{k}_2-\vec{q}_1)$$

Ahora tomamos el segundo sumando y aplicamos las propiedades del conmutador:

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{q}_1) \langle 0| a^\dagger(\vec{q}_2)\, a(\vec{k}_2) + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_2-\vec{q}_2)|0\rangle =$$

$$(2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{q}_1)\left(\underbrace{\langle 0| a^\dagger(\vec{q}_2)\, a(\vec{k}_2)|0\rangle}_{\searrow 0} + (2\pi)^3 \delta^{(3)}(\vec{k}_2-\vec{q}_2)\langle 0|0\rangle \right) =$$

$$(2\pi)^6\, \delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{q}_1)\, \delta^{(3)}(\vec{k}_2-\vec{q}_2)$$

Combinando ambos sumandos:

$$\langle \vec{k}_1 \vec{k}_2 | \vec{q}_1 \vec{q}_2 \rangle = (2\pi)^6 \left(\delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{q}_2)\, \delta(\vec{k}_2-\vec{q}_1) + \delta^{(3)}(\vec{k}_1-\vec{q}_1)\, \delta^{(3)}(\vec{k}_2-\vec{q}_2) \right)$$