Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 72

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

17 de marzo de 2022

1. Calcular el conmutador $[a_k, a_q^\dagger]$

Sabemos que el campo ϕ lo podemos escribir usando la ecuación (70.4) como

$$\phi(t,\vec{x}) = \int a_k f_k(t,\vec{x}) + a_k^\dagger f_k^*(t,\vec{x})\mathrm{d}^3\vec{k} \tag{1}$$

Con los operadores a_k y $a_k^\dagger$ definidos por los productos

$$a_k = (f_k, \phi), \qquad a_k^\dagger = -(f_k^*, \phi) \tag{2}$$

Con los productos definidos por la ecuación (69.2)

$$(f_k, \phi) = i\int (f_k^*\partial_t\phi - \phi\partial_t f_k^*)\mathrm{d}^3\vec{x} \tag{3}$$

Con esto podemos reescribir el conmutador como

$$\begin{aligned}
[a_k, a_q^\dagger] &= \left[i\int (f_k^*(t,\vec{x})\partial_t\phi(t,\vec{x}) - \phi(t,\vec{x})\partial_t f_k^*(t,\vec{x}))\mathrm{d}^3\vec{x}, -i\int (f_q(t,\vec{y})\partial_t\phi(t,\vec{y}) - \phi(t,\vec{y})\partial_t f_q(t,\vec{y}))\mathrm{d}^3\vec{y}\right] \\
&= \int \Big\{ f_k^*(t,\vec{x}) f_q(t,\vec{y})[\partial_t\phi(t,\vec{x}), \partial_t\phi(t,\vec{y})] - \partial_t f_k^*(t,\vec{x}) f_q(t,\vec{y})[\phi(t,\vec{x}), \partial_t\phi(t,\vec{y})] \\
&\qquad - f_k^*(t,\vec{x})\partial_t f_q(t,\vec{y})[\partial_t\phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{y})] + \partial_t f_k^*(t,\vec{x})\partial_t f_q(t,\vec{y})[\phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{y})]\Big\}\mathrm{d}^3\vec{x}\mathrm{d}^3\vec{y}
\end{aligned} \tag{4}$$

Por lo que nos queda todo en función de cuatro conmutadores fundamentales;

$$[\partial_t\phi(t,\vec{x}), \partial_t\phi(t,\vec{y})] = 0, \qquad [\phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{y})] = 0,$$
$$[\phi(t,\vec{x}), \partial_t\phi(t,\vec{y})] = -[\partial_t\phi(t,\vec{x}), \phi(t,\vec{y})] = i\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})$$

Aplicando estos conmutadores podemos simplificar la ecuación (4) de la siguiente manera

$$\begin{aligned}
[a_k, a_q^\dagger] &= \int \Big\{ -i\partial_t f_k^*(t,\vec{x}) f_q(t,\vec{y})\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y}) + i f_k^*(t,\vec{x})\partial_t f_q(t,\vec{y})\delta^{(3)}(\vec{x}-\vec{y})\Big\}\mathrm{d}^3\vec{x}\mathrm{d}^3\vec{y} \\
&= i\int \Big\{ -\partial_t f_k^*(t,\vec{x}) f_q(t,\vec{x}) + f_k^*(t,\vec{x})\partial_t f_q(t,\vec{x})\Big\}\mathrm{d}^3\vec{x} = (f_k, f_q)
\end{aligned}$$

Por lo que el conmutador de a y $a^\dagger$ se corresponde con el producto de las funciones f. Estos productos ya los conocemos, usando los resultados de la fórmula (70.3) podemos escribir

$$\boxed{[a_k, a_q^\dagger] = (f_k, f_q) = \delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})} \tag{5}$$

De forma completamente análoga se demuestran los conmutadores

$$[a_k, a_q] = -(f_k, f_q^*) = 0, \qquad \left[a_k^\dagger, a_q^\dagger\right] = -(f_k^*, f_q) = 0 \tag{6}$$

2. Demostrar las fórmulas (72.2)

La primera ecuación que tenemos que demostrar es el producto

$$(f,g)^* = -(f^*,g^*) \tag{7}$$

Empecemos por el lado derecho, usando la definición (69.2)

$$\begin{aligned}-(f^*,g^*) &= -i\int(f\partial_t g^* - g^*\partial_t f)\mathrm{d}^3\vec{x} = -i\int(f^*\partial_t g - g\partial_t f^*)^*\mathrm{d}^3\vec{x} = -i\left(\int(f^*\partial_t g - g\partial_t f^*)\mathrm{d}^3\vec{x}\right)^* \\ &= \left(i\int(f^*\partial_t g - g\partial_t f^*)\mathrm{d}^3\vec{x}\right)^* = (f,g)^*\end{aligned}$$

La segunda ecuación que debemos demostrar es

$$(f,g) = -(g^*,f^*) \tag{8}$$

Pero, junto con la ecuación previa esta es completamente equivalente a la ecuación

$$(f,g) = -(g,f)^* \tag{9}$$

Para demostrar esta equivalencia solo tenemos que darnos cuenta que la primera ecuación, si intercambiamos f y g nos dice que

$$(g,f)^* = -(g^*,f^*)$$

Para demostrar esta ecuación de nuevo empezaremos por el lado derecho;

$$\begin{aligned}-(g,f)^* &= -\left(i\int(g\partial_t f^* - f^*\partial_t g)\mathrm{d}^3\vec{x}\right)^* = -i\int(g\partial_t f^* - f^*\partial_t g)^*\mathrm{d}^3\vec{x} = -i\int(g^*\partial_t f - f\partial_t g^*)\mathrm{d}^3\vec{x} \\ &= i\int(f^*\partial_t g - g\partial_t f^*)\mathrm{d}^3\vec{x} = (f,g)\end{aligned}$$

Demostrando así la segunda ecuación.