Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 65

Autor del curso: Javier García

Ejercicios resueltos por Miguel A. Montañez

28 de abril de 2021

Ejercicio 65.1. Demostrar que si $\underline{A} = (b^0, \vec{b}) \operatorname{sen} kx$, $b_\mu k^\mu = 0$, entonces $\vec{E} = (b^0 \vec{k} - \omega \vec{b}) \cos kx$ y $\vec{B} = (-\vec{k} \times \vec{b}) \cos kx$.

Partimos de la ecuación $\vec{E} = -\vec{\nabla} V - \dfrac{\partial \vec{A}}{\partial t}$, donde de acuerdo con $\underline{A}$, $V = b^0 \operatorname{sen} kx$ y $\vec{A} = \vec{b} \operatorname{sen} kx$.

Entonces:

$$\vec{E} = -\vec{\nabla}(b^0 \operatorname{sen} kx) - \frac{\partial}{\partial t}(\vec{b} \operatorname{sen} kx) = -b^0 \vec{\nabla}(\operatorname{sen} kx) - \vec{b} \frac{\partial}{\partial t}(\operatorname{sen} kx)$$

$$\vec{E} = -b^0 \cos kx \cdot \vec{\nabla}(kx) - \vec{b} \cos kx \cdot \frac{\partial}{\partial t}(kx)$$

Como:

$$\vec{\nabla}(kx) = (k_1, k_2, k_3) = (-k^1, -k^2, -k^3) = (-k_x, -k_y, -k_z) = -\vec{k}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(kx) = k_0 = k^0 = \omega$$

Obtenemos:

$$\vec{E} = (b^0 \vec{k} - \omega \vec{b}) \cos kx$$

Las expresiones generales de $\vec{E}$ y $\vec{B}$ para un $\underline{A}$ de este tipo son:

$$\vec{E} = E_0 \hat{n} \cos kx \quad \text{y} \quad \vec{B} = E_0 (\hat{k} \times \hat{n}) \cos kx$$

De aquí deducimos:

$$E_0 \hat{n} = b^0 \vec{k} - \omega \vec{b} \quad \text{y} \quad \hat{n} = \frac{1}{E_0}(b^0 \vec{k} - \omega \vec{b})$$

Sustituyendo $\hat{n}$ en $\vec{B}$:

$$\vec{B} = E_0 \left[\hat{k} \times \frac{1}{E_0}(b^0 \vec{k} - \omega \vec{b}) \right] \cos kx = \hat{k} \times (b^0 \vec{k} - \omega \vec{b}) \cos kx$$

$\vec{B} = -\omega (\hat{k} \times \vec{b}) \cos kx$, ya que $\hat{k} \times \vec{k} = 0$. Como $\omega = k$

$$\vec{B} = (-\vec{k} \times \vec{b}) \cos kx$$

Ejercicio 65.2. Demostrar que si $\underline{A} = (\beta, b^1, b^2, \beta)\operatorname{sen} kx$, con $\underline{b}\cdot\underline{k} = 0$, entonces: $\underline{A} = \sum_{r=0}^{3}\left[c^r \underline{\varepsilon_r}\, e^{-ikx} + (c^r)^* \underline{\varepsilon_r^*}\, e^{ikx}\right]$, donde $c^1 = -\frac{b^1}{2i}$, $c^2 = -\frac{b^2}{2i}$, $c^0 = c^3 = -\frac{\beta}{2i}$ $\underline{\varepsilon_0} = \underline{e_0} = (1,0,0,0)$, $\underline{\varepsilon_i} = \underline{e_i}$ $i = 1,2,3$.

Partimos de $\underline{A} = (\beta, b^1, b^2, \beta)\operatorname{sen} kx$, y sustituimos $\operatorname{sen} kx = \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$ en dicha expresión:

$$\underline{A} = (\beta, b^1, b^2, \beta)\,\frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} = \left(\frac{\beta}{2i}, \frac{b^1}{2i}, \frac{b^2}{2i}, \frac{\beta}{2i}\right)\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) =$$

$$\left(-\frac{\beta}{2i}, -\frac{b^1}{2i}, -\frac{b^2}{2i}, \frac{-\beta}{2i}\right) e^{-ikx} + \left(\frac{\beta}{2i}, \frac{b^1}{2i}, \frac{b^2}{2i}, \frac{\beta}{2i}\right) e^{ikx}$$

Definimos: $c^0 = c^3 = -\frac{\beta}{2i}$ $c^1 = -\frac{b^1}{2i}$ $c^2 = -\frac{b^2}{2i}$

Entonces:

$$(c^0, c^1, c^2, c^3)\, e^{-ikx} + \left[(c^0)^*, (c^1)^*, (c^2)^*, (c^3)^*\right] e^{ikx}$$

Nos centramos en los cuadrivectores:

$$(c^0, c^1, c^2, c^3) = c^0 \underline{e_0} + c^1 \underline{e_1} + c^2 \underline{e_2} + c^3 \underline{e_3} = c^0 \underline{\varepsilon_0} + c^1 \underline{\varepsilon_1} + c^2 \underline{\varepsilon_2} + c^3 \underline{\varepsilon_3}$$

$$((c^0)^*, (c^1)^*, (c^2)^*, (c^3)^*) = (c^0)^* \underline{e_0^*} + (c^1)^* \underline{e_1^*} + (c^2)^* \underline{e_2^*} + (c^3)^* \underline{e_3^*} =$$

$$(c^0)^* \underline{\varepsilon_0^*} + (c^1)^* \underline{\varepsilon_1^*} + (c^2)^* \underline{\varepsilon_2^*} + (c^3)^* \underline{\varepsilon_3^*}$$

Aquí hemos tomado:

$\underline{e_0} = \underline{\varepsilon_0}$ $\underline{e_1} = \underline{\varepsilon_1}$ $\underline{e_2} = \underline{\varepsilon_2}$ $\underline{e_3} = \underline{\varepsilon_3}$ $\underline{e_0^*} = \underline{\varepsilon_0} = \underline{e_0}$ $\underline{e_i^*} = \underline{\varepsilon_i} = \underline{e_i}$ $i = 1,2,3$

Entonces:

$$\underline{A} = \sum_{r=0}^{3}\left[c^r \underline{\varepsilon_r}\, e^{-ikx} + (c^r)^* \underline{\varepsilon_r^*}\, e^{ikx}\right]$$

Ejercicio 65.3. Dada $\underline{A} = \left(\alpha^0, -\frac{E_0}{\omega}, 0, \alpha^0\right) \operatorname{sen} kx + \left(\beta^0, 0, \frac{E_0}{\omega}, \beta^0\right) \cos kx$, demostrar $\underline{A} = \sum_r \left[c^r \underline{\varepsilon_r} e^{-ikx} + (c^r)^* \underline{\varepsilon_r}^* e^{ikx} \right]$, $r = 0, +1, -1, 3$

$c^0 = c^3 = \frac{\beta^0}{2} + \frac{i\alpha^0}{2}$ $\quad c^{+1} = \frac{iE_0}{\sqrt{2}\omega}$ $\quad c^{-1} = 0$ $\quad \underline{\varepsilon_0} = \underline{e_0}$ $\quad \underline{\varepsilon_3} = \underline{e_3}$

$\underline{\varepsilon_{+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, -1, -i, 0)$ $\quad \underline{\varepsilon_{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0)$ → cuadrivectores de polarización de helicidad.

Partimos: $\underline{A} = \left(\alpha^0, -\frac{E_0}{\omega}, 0, \alpha^0\right) \operatorname{sen} kx + \left(\beta^0, 0, \frac{E_0}{\omega}, \beta^0\right) \cos kx$

sustituimos: $\operatorname{sen} kx = \dfrac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i}$ $\quad \cos kx = \dfrac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2}$

$$\underline{A} = \left(\alpha^0, -\frac{E_0}{\omega}, 0, \alpha^0\right) \frac{e^{ikx} - e^{-ikx}}{2i} + \left(\beta^0, 0, \frac{E_0}{\omega}, \beta^0\right) \frac{e^{ikx} + e^{-ikx}}{2} =$$

$$\underline{A} = \left(\frac{\alpha^0}{2i}, \frac{-E_0}{2i\omega}, 0, \frac{\alpha^0}{2i}\right)\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) + \left(\frac{\beta^0}{2}, 0, \frac{E_0}{2\omega}, \frac{\beta^0}{2}\right)\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)$$

$$\underline{A} = \left(-\frac{i\alpha^0}{2}, \frac{iE_0}{2\omega}, 0, \frac{-i\alpha^0}{2}\right)\left(e^{ikx} - e^{-ikx}\right) + \left(\frac{\beta^0}{2}, 0, \frac{E_0}{2\omega}, \frac{\beta^0}{2}\right)\left(e^{ikx} + e^{-ikx}\right)$$

$$\underline{A} = \left(\frac{\beta^0}{2} + \frac{i\alpha^0}{2}, \frac{-iE_0}{2\omega}, \frac{E_0}{2\omega}, \frac{\beta^0}{2} + \frac{i\alpha^0}{2}\right) e^{-ikx} + \left(\frac{\beta^0}{2} - \frac{i\alpha^0}{2}, \frac{iE_0}{2\omega}, \frac{E_0}{2\omega}, \frac{\beta^0}{2} - \frac{i\alpha^0}{2}\right) e^{ikx}$$

Nos centramos en los cuadrivectores:

Si definimos $c^0 = c^3 = \frac{\beta^0}{2} + \frac{i\alpha^0}{2}$ $\quad \underline{e_0} = \underline{\varepsilon_0}$ $\quad \underline{e_3} = \underline{\varepsilon_3}$

$$\left(c^0, \frac{-iE_0}{2\omega}, \frac{E_0}{2\omega}, c^3\right) = c^0 \underline{e_0} - \frac{iE_0}{2\omega}\underline{e_1} + \frac{E_0}{2\omega}\underline{e_2} + c^3 \underline{e_3}$$

$$\left((c^0)^*, \frac{iE_0}{2\omega}, \frac{E_0}{2\omega}, (c^3)^*\right) = (c^0)^* \underline{e_0} + \frac{iE_0}{2\omega}\underline{e_1} + \frac{E_0}{2\omega}\underline{e_2} + (c^3)^* \underline{e_3}$$

Como $\underline{e_0}^* = \underline{e_0} = \underline{\varepsilon_0}^*$ $\quad \underline{e_3}^* = \underline{e_3} = \underline{\varepsilon_3}^*$, las componentes 0 y 3 de los dos cuadrivectores ya las tenemos.

Nos centramos en las componentes 1 y 2 del primer cuadrivector:

$$-\frac{iE_0}{2\omega}\underline{e_1} + \frac{E_0}{2\omega}\underline{e_2} = \frac{iE_0}{\sqrt{2}\omega}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e_1} - \frac{i}{\sqrt{2}}\underline{e_2}\right)$$

Definimos $c^{+1} = \frac{iE_0}{\sqrt{2}\omega}$ y $\underline{\varepsilon_{+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\underline{e_1} - i\,\underline{e_2}\right)$ → cuadrivector covariante

Si queremos hallar las componentes de ε_{+1} debemos hacerlo en la base contravariante $\underline{e}^{\mu}$. Por ello:

$$\underline{\varepsilon_{+1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underline{e}^{1} + i\,\underline{e}^{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,1,i,0\right)$$ → componentes covariantes, base contravariante

$\underline{\varepsilon_{+1}}$ es autovector de la matriz J^{12} con autovalor $+1$.

Hacemos lo mismo con el segundo cuadrivector:

$$\frac{iE_0}{2\omega}\underline{e_1} + \frac{E_0}{2\omega}\underline{e_2} = \frac{iE_0}{\sqrt{2}\omega}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\underline{e_1} - \frac{i}{\sqrt{2}}\underline{e_2}\right)$$

Definimos $\underline{\varepsilon_{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\underline{e_1} - i\,\underline{e_2}\right)$ → cuadrivector covariante

Para hallar las componentes de $\underline{\varepsilon_{-1}}$, debemos hacerlo en la base contravariante $\underline{e}^{\mu}$.

$$\underline{\varepsilon_{-1}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\underline{e}^{1} + i\,\underline{e}^{2}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,-1,i,0\right)$$ → componentes covariantes, base contravariante

$\underline{\varepsilon_{-1}}$ es autovector de la matriz J^{12} con autovalor -1.

Con estos resultados y definiendo $c^{-1} = 0$ obtenemos la expresión deseada.

Vamos a comprobarlo con el primer cuadrivector:

$$c^{r}\underline{\varepsilon_r} = c^{0}\underline{\varepsilon_0} + c^{+1}\underline{\varepsilon_{+1}} + \overbrace{c^{-1}\underline{\varepsilon_{-1}}}^{\to 0} + c^{3}\underline{\varepsilon_3} = c^{0}\underline{e_0} + c^{+1}\underline{\varepsilon_{+1}} + c^{3}\underline{e_3} =$$

$$\left(\frac{\beta^0}{2} + \frac{i\alpha^0}{2}\right)\underline{e_0} + \frac{iE_0}{\sqrt{2}\omega}\frac{1}{\sqrt{2}}\left(0,1,i,0\right) + \left(\frac{\beta^0}{2} + \frac{i\alpha^0}{2}\right)\underline{e_3}$$

pasamos a base covariante $\underline{e_\mu}$

$$\left(\frac{\beta^0}{2} + \frac{i\alpha^0}{2}\right)\underline{e_0} + \frac{iE_0}{2\omega}\left(-\underline{e_1} - i\,\underline{e_2}\right) + \left(\frac{\beta^0}{2} + \frac{i\alpha^0}{2}\right)\underline{e_3}$$

$$\left(\frac{\beta^0}{2} + \frac{i\alpha^0}{2}\right)\underline{e_0} - \frac{iE_0}{2\omega}\underline{e_1} + \frac{E_0}{2\omega}\underline{e_2} + \left(\frac{\beta^0}{2} + \frac{i\alpha^0}{2}\right)\underline{e_3}$$

$$\left(\frac{\beta^0}{2} + \frac{i\alpha^0}{2},\ -\frac{iE_0}{2\omega},\ \frac{E_0}{2\omega},\ \frac{\beta^0}{2} + \frac{i\alpha^0}{2}\right)$$ → componentes contravariantes, base covariante

Vamos a comprobarlo con el segundo cuadrivector:

$$(C^r)^* \underline{\varepsilon}_r^* = (C^0)^* \underline{\varepsilon}_0^* + (C^{+1})^* \underline{\varepsilon}_{+1}^* + \underbrace{(C^{-1})^*}_{0} \underline{\varepsilon}_{-1} + (C^3)^* \underline{\varepsilon}_3^*$$

Como $\underline{\varepsilon}_0^* = \underline{\varepsilon}_0 = \underline{e}_0$ y $\underline{\varepsilon}_3^* = \underline{\varepsilon}_3 = \underline{e}_3$

$$\left(\frac{\beta^0}{2} - \frac{i\alpha^0}{2}\right) \underline{e}_1 - \frac{iE_0}{\sqrt{2}\,\omega} \frac{1}{\sqrt{2}}(0, 1, -i, 0) + \left(\frac{\beta^0}{2} - \frac{i\alpha^0}{2}\right) \underline{e}_3$$

pasamos a base covariante $\underline{e}_\mu$

$$\left(\frac{\beta^0}{2} - \frac{i\alpha^0}{2}\right) \underline{e}_1 - \frac{iE_0}{2\omega}\left(- \underline{e}_1 + i\, \underline{e}_2\right) + \left(\frac{\beta^0}{2} - \frac{i\alpha^0}{2}\right) \underline{e}_3$$

$$\left(\frac{\beta^0}{2} - \frac{i\alpha^0}{2}\right) \underline{e}_1 + \frac{iE_0}{2\omega} \underline{e}_1 + \frac{E_0}{2\omega} \underline{e}_2 + \left(\frac{\beta^0}{2} - \frac{i\alpha^0}{2}\right) \underline{e}_3$$

$$\left(\frac{\beta^0}{2} - \frac{i\alpha^0}{2},\ \frac{iE_0}{2\omega},\ \frac{E_0}{2\omega},\ \frac{\beta^0}{2} - \frac{i\alpha^0}{2}\right) \rightarrow \text{componentes contravariantes en base covariante}$$

Con esto queda demostrada la expresión de $\underline{A}$.

Ejercicio 65.4. Demostrar la relación de completitud:

$$\sum_{r=0}^{3} \gamma_r (\varepsilon_r)^\mu (\varepsilon_r^*)^\nu = g^{\mu\nu} \qquad \gamma_r = \begin{cases} 1 & \text{si } r=0 \\ -1 & \text{si } r = 1,2,3 \end{cases} \qquad \varepsilon_r^* \cdot \varepsilon_s = g_{rs}$$

Primero lo vamos a hacer para cuadrivectores reales. Tomamos la base canónica de Minkowski $\underline{e}^r$. Sabemos:

$$\underline{e}^r \cdot \underline{e}^s = g^{rs} \quad g^{00} = 1, \quad g^{ii} = -1 \text{ y } g^{rs} = 0 \quad r \neq s$$

Consideremos una transformación Λ que conserve el producto escalar, de modo que $\Lambda^T g \Lambda = g$.

Los vectores transformados $\underline{\varepsilon}^\mu = \Lambda^\mu{}_r \underline{e}^r$ cumplen también $\underline{\varepsilon}^\mu \cdot \underline{\varepsilon}^\nu = g^{\mu\nu}$.

Sustituimos $\underline{\varepsilon}^\mu = \Lambda^\mu{}_r \underline{e}^r$ y $\underline{\varepsilon}^\nu = \Lambda^\nu{}_s \underline{e}^s$ en la expresión anterior:

$$\Lambda^\mu{}_r \underline{e}^r \cdot \Lambda^\nu{}_s \underline{e}^s = g^{\mu\nu}$$

Podemos subir y bajar los índices r y s sin alterar nada:

$$\Lambda^{\mu r} \underline{e_r} \cdot \Lambda^{\nu s} \underline{e_s} = g^{\mu\nu} \qquad \Lambda^{\mu r}\Lambda^{\nu s} \underline{e_r}\cdot\underline{e_s} = g^{\mu\nu}$$

luego:

$$\Lambda^{\mu r}\Lambda^{\nu s} g_{rs} = g^{\mu\nu}$$

Si tenemos en cuenta que:

$$\underline{\varepsilon}^\mu = \Lambda^\mu{}_r \underline{e}^r = \Lambda^{\mu r}\underline{e_r} \qquad \underline{\varepsilon}^\nu = \Lambda^\nu{}_s \underline{e}^s = \Lambda^{\nu s}\underline{e_s}$$

$\Lambda^{\mu r}$ es la componente r del vector contravariante $\underline{\varepsilon}^\mu$ en la base covariante $\{\underline{e_r}\}$. Podemos expresarlo $\Lambda^{\mu r} = (\varepsilon^r)^\mu$. Igualmente $\Lambda^{\nu s} = (\varepsilon^s)^\nu$.

sustituyendo:

$$(\varepsilon^r)^\mu(\varepsilon^s)^\nu g_{rs} = g^{\mu\nu} \qquad \sum_{r=0}^{3} (\varepsilon^r)^\mu(\varepsilon_r)^\nu = g^{\mu\nu}$$

Si expresamos $\varepsilon^r = \gamma_r \varepsilon_r$, donde $\gamma_0 = 1$ y $\gamma_i = -1$ $i = 1,2,3$.

$$\sum_{r=0}^{3} \gamma_r(\varepsilon_r)^\mu(\varepsilon_r)^\nu = g^{\mu\nu}$$

Esta demostración se puede generalizar para cuadrivectores complejos.

Sea $\underline{u}^r$ una base compleja que cumple $\underline{u}^{*r}\cdot\underline{u}^s = g^{rs}$.

Consideremos una transformación Λ que conserve el producto escalar, de modo que $\Lambda^\dagger g \Lambda = g$.

Los vectores transformados $\underline{\varepsilon}^\mu = \Lambda^\mu{}_r \underline{u}^r$ cumplen también:

$$\underline{\varepsilon}^{*\mu}\cdot\underline{\varepsilon}^\nu = g^{\mu\nu}$$

Sustituimos $\underline{\varepsilon}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{r} \underline{u}^{r}$ y $\underline{\varepsilon}^{\nu} = \Lambda^{\nu}{}_{s} \underline{u}^{s}$ en la expresión anterior:

$$(\Lambda^{\mu}{}_{r} \underline{u}^{r})^{*} \cdot \Lambda^{\nu}{}_{s} \underline{u}^{s} = g^{\mu\nu}$$

Subimos y bajamos los índices r y s:

$$(\Lambda^{\mu r} \underline{u}_{r})^{*} \cdot \Lambda^{\nu s} \underline{u}_{s} = g^{\mu\nu} \qquad \Lambda^{*\mu r} \Lambda^{\nu s} \underline{u}_{r}^{*} \cdot \underline{u}_{s} = g^{\mu\nu}$$

luego:

$$\Lambda^{*\mu r} \Lambda^{\nu s} g_{rs} = g^{\mu\nu}$$

Por la misma razón que antes:

$$\Lambda^{*\mu r} = (\varepsilon^{*r})^{\mu} \qquad \Lambda^{\nu s} = (\varepsilon^{s})^{\nu}$$

Sustituyendo:

$$(\varepsilon^{*r})^{\mu} (\varepsilon^{s})^{\nu} g_{rs} = g^{\mu\nu} \qquad \sum_{r=0}^{3} (\varepsilon^{*r})^{\mu} (\varepsilon_{r})^{\nu} = g^{\mu\nu}$$

Como $\varepsilon^{*r} = \gamma_r \varepsilon_r^{*}$ $\quad \gamma_0 = 1$ y $\gamma_i = -1$ $i = 1,2,3$

$$\sum_{r=0}^{3} \gamma_r (\varepsilon_r^{*})^{\mu} (\varepsilon_r)^{\nu} = g^{\mu\nu}$$