Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 83

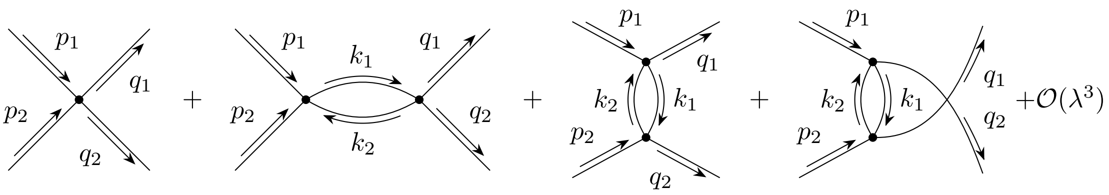
Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

22 de agosto de 2022

1. Calcular $\mathcal{M}_{2\to 2}$ a orden $\mathcal{O}\left(\lambda^3\right)$.

Siguiendo las reglas de Feynman, la número 5 dice que se deben calcular todos los diagramas conectados y amputados, a orden $\mathcal{O}\left(\lambda^3\right)$ esos son 4:



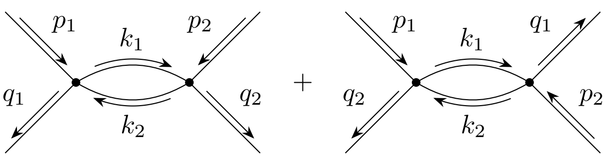
Los dos primeros diagramas los hizo Javier, sus respectivos valores son;

$$\mathcal{M}_1 = -\lambda$$

y

$$\mathcal{M}_2 = \frac{i\lambda^2}{2}\int \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}\frac{i}{(p_1 + p_2 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} = -\frac{i\lambda^2}{2}I(p_1 + p_2)$$

Para hacer los diagramas 3 y 4, basta con observar lo siguiente: El valor de un diagrama depende solamente de la forma en que los vértices y los propagadores estén conectados, la forma en que se dibuja el diagrama es completamente irrelevante. De hecho se pueden dibujar los diagramas 3 y 4 de la siguiente forma:



En efecto, un vistazo rápido muestra que estos dos diagramas tienes los mismos vértices y los mismos propagadores (conectados exactamente igual) que los antiguos diagramas 3 y 4. Pero ahora estos dos diagramas son idénticos al diagrama número 2 que Javier ya ha resuelto, la única diferencia entre los diagramas 2 y 3 es que lo que en uno es p_2, en el otro es q_1 y que apuntan en sentidos opuestos, es decir que la única diferencia es el cambio $p_2 \leftrightarrow -q_1$:

$$\mathcal{M}_3 = \frac{i\lambda^2}{2}\int \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}\frac{i}{(p_1 - q_1 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} = -\frac{i\lambda^2}{2}I(p_1 - q_1)$$

Y la única diferencia entre el diagrama 2 y 4 es el intercambio $p_2 \leftrightarrow -q_2$

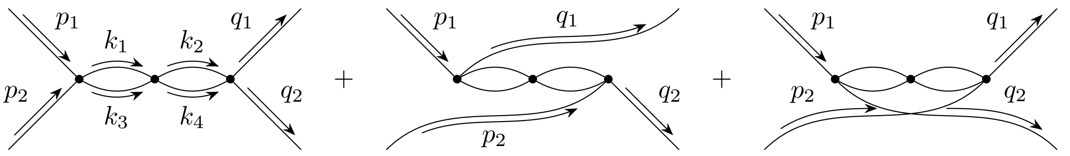
$$\mathcal{M}_3 = \frac{i\lambda^2}{2}\int \frac{i}{k^2 - m^2 + i\varepsilon}\frac{i}{(p_1 - q_2 - k)^2 - m^2 + i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4 k}{(2\pi)^4} = -\frac{i\lambda^2}{2}I(p_1 - q_2)$$

La amplitud de scattering total será por lo tanto;

$$\mathcal{M}_{2\to 2} = -\lambda - \frac{i\lambda^2}{2}\left[I(p_1 + p_2) + I(p_1 - q_1) + I(p_1 - q_2)\right] + \mathcal{O}\left(\lambda^3\right)$$

2. Bonus: Calcular $\mathcal{M}_{2\to 2}$ a orden $\mathcal{O}\left(\lambda^4\right)$

Para calcular los diagramas de orden 3, vamos a agrupar los diagramas en dos grupos, el primer grupo contiene los siguientes diagramas:



Siguiendo las reglas de Feynman para el primer diagrama, por cada propagador interno se debe multiplicar por el propagador de Feynman e integramos;

$$\int \frac{i}{k_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{k_2^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{k_3^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{k_4^2-m^2+i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_3}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_4}{(2\pi)^4}$$

Luego, por cada vértice, se multiplica por $(2\pi)^4\delta$;

$$\begin{aligned}(-i\lambda)^3\int \frac{i}{k_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{k_2^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{k_3^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{k_4^2-m^2+i\varepsilon}(2\pi)^{12}\delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_3)\times \\ \delta^{(4)}(k_1+k_3-k_2-k_4)\delta^{(4)}(k_2+k_4-q_1-q_2)\frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_3}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_4}{(2\pi)^4}\end{aligned} \tag{1}$$

Finalmente, se divide por el factor de simetría (en este caso 4). Haciendo las integrales respecto de k_3 y k_4;

$$\begin{aligned}\frac{-i\lambda^3}{4}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)\int\frac{1}{k_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_1+p_2-k_1)^2-m^2+i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\times \\ \int\frac{1}{k_2^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_1+p_2-k_2)^2-m^2+i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\end{aligned} \tag{2}$$

Por lo que la amplitud asociada a este diagrama es

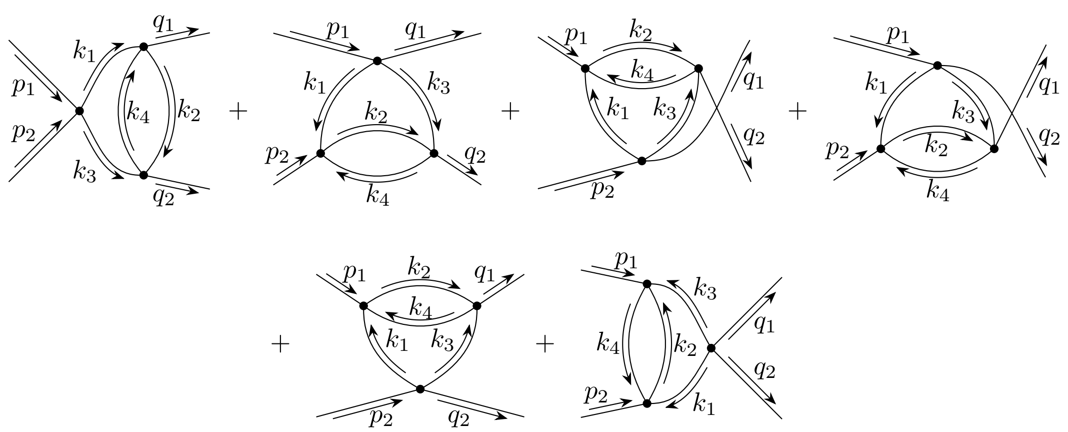
$$\mathcal{M}_{11}=\frac{-\lambda^3}{4}\left(\int\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_1+p_2-k)^2-m^2+i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\right)^2=\frac{-\lambda^3}{4}I^2(p_1+p_2)$$

Usando el mismo razonamiento que en el apartado anterior;

$$\mathcal{M}_{12}=\frac{-\lambda^3}{4}\left(\int\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_1-q_1-k)^2-m^2+i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\right)^2=\frac{-\lambda^3}{4}I^2(p_1-q_1)$$

$$\mathcal{M}_{13}=\frac{-\lambda^3}{4}\left(\int\frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_1-q_2-k)^2-m^2+i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\right)^2=\frac{-\lambda^3}{4}I^2(p_1-q_2)$$

El segundo grupo de diagramas lo forman los restantes



De nuevo, las reglas de Feynman para el primer diagrama dan, por cada propagador interno,

$$\int \frac{i}{k_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{k_2^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{k_3^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{k_4^2-m^2+i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_3}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_4}{(2\pi)^4}$$

por cada vértice,

$$\begin{aligned}(-i\lambda)^3\int \frac{i}{k_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{k_2^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{k_3^2-m^2+i\varepsilon}\frac{i}{k_4^2-m^2+i\varepsilon}(2\pi)^{12}\delta^{(4)}(p_1+p_2-k_1-k_3)\times\\ \delta^{(4)}(k_1+k_4-q_1-k_2)\delta^{(4)}(k_2+k_3-q_2-k_4)\frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_3}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_4}{(2\pi)^4}\end{aligned} \tag{3}$$

Y al dividir por el factor de simetría (en este caso 2), y hacer las integrales respecto de k_3 y k_4;

$$\begin{aligned}\frac{-i\lambda^3}{2}(2\pi)^4\delta^{(4)}(p_1+p_2-q_1-q_2)\int \frac{1}{k_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{k_2^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_1+p_2-k_1)^2-m^2+i\varepsilon}\times\\ \frac{1}{(q_1+k_2-k_1)^2-m^2+i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\end{aligned} \tag{4}$$

Finalmente, la amplitud de scattering será

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{21} &= \frac{-\lambda^3}{2}\int \frac{1}{k_1^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{k_2^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_1+p_2-k_1)^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(q_1+k_2-k_1)^2-m^2+i\varepsilon}\frac{\mathrm{d}^4k_1}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{d}^4k_2}{(2\pi)^4}\\ &= \frac{-\lambda^3}{2}\int \frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_1+p_2-k)^2-m^2+i\varepsilon}I(k-q_1)\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}\end{aligned}$$

Los otros 5 diagramas son idénticos con los siguientes cambios: El segundo es idéntico al primero con el intercambio $p_2 \leftrightarrow -q_1$. El tercero con $p_1 \leftrightarrow -q_1$, el cuarto $p_2 \to -q_2 \to -q_1 \to p_2$, el quinto $p_1 \to -q_2 \to -q_1 \to p_1$ y el sexto $p_1 \leftrightarrow -q_2, p_2 \leftrightarrow -q_1$. Por lo que las amplitudes que faltan son

$$\mathcal{M}_{22} = \frac{-\lambda^3}{2}\int \frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_1-q_1-k)^2-m^2+i\varepsilon}I(k+p_2)\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}$$

$$\mathcal{M}_{23} = \frac{-\lambda^3}{2}\int \frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_2-q_1-k)^2-m^2+i\varepsilon}I(k+p_1)\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}$$

$$\mathcal{M}_{24} = \frac{-\lambda^3}{2}\int \frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_1-q_2-k)^2-m^2+i\varepsilon}I(k+p_2)\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}$$

$$\mathcal{M}_{25} = \frac{-\lambda^3}{2}\int \frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(p_2-q_2-k)^2-m^2+i\varepsilon}I(k+p_1)\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}$$

$$\mathcal{M}_{26} = \frac{-\lambda^3}{2}\int \frac{1}{k^2-m^2+i\varepsilon}\frac{1}{(q_2+q_1+k)^2-m^2+i\varepsilon}I(k+p_2)\frac{\mathrm{d}^4k}{(2\pi)^4}$$

La amplitud será, por lo tanto,

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{2\to2} =& -\lambda - \frac{i\lambda^2}{2}\left[I(p_1+p_2)+I(p_1-q_1)+I(p_1-q_2)\right]+\mathcal{M}_{11}+\mathcal{M}_{12}+\mathcal{M}_{13}\\ &+\mathcal{M}_{21}+\mathcal{M}_{22}+\mathcal{M}_{23}+\mathcal{M}_{24}+\mathcal{M}_{25}+\mathcal{M}_{26}+\mathcal{O}\left(\lambda^4\right)\end{aligned}$$