Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 56

Autor del curso: Javier García

Ejercicios resueltos por Miguel A. Montañez

6 abril de 2021

Ejercicio 56.1. Demostrar que $\det(e^A) = e^{\mathrm{Tr}\,A}$

Sea A una matriz cuadrada. Sea M la matriz formada por los autovectores de A puestos en columnas. Entonces:

$$D = M^{-1} A M \qquad D \text{ es una matriz diagonal}$$

Como D y A son similares, se cumple:

$$\det A = \det D \qquad \mathrm{Tr}\,A = \mathrm{Tr}\,D$$

Se define $e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}$, donde $A^0 = I$ (identidad)

Ahora vamos a hacer la siguiente operación:

$$M^{-1} e^A M = M^{-1}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}\right) M = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{M^{-1}A^k M}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = e^D$$

Tengamos en cuenta que $M^{-1} A^k M = D^k$

Como e^A y e^D son matrices similares, $\det(e^A) = \det(e^D)$

Ahora bien, al ser D una matriz diagonal:

$$e^D = \begin{pmatrix} e^{D_1} & 0 & 0 & \cdots \\ 0 & e^{D_2} & 0 & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ & & & e^{D_N} \end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \det e^D = e^{D_1} \cdot e^{D_2} \cdots e^{D_N} = e^{\mathrm{Tr}\,D}$$

Como más arriba se ha demostrado que $\mathrm{Tr}\,D = \mathrm{Tr}\,A$

$$\det(e^A) = \det(e^D) = e^{\mathrm{Tr}\,D} = e^{\mathrm{Tr}\,A}$$

Ejercicio 56.2. Demostrar teniendo en cuenta las propiedades i) Bilinealidad y iii) $A * A = 0$ del álgebra de Lie que $A * B = -B * A$.

Consideramos $(A+B)*(A+B) = 0$, por la propiedad iii).
Aplicando la propiedad i):

$$A*A + A*B + B*A + B*B = 0$$

Otra vez por la propiedad iii) $A*A = 0$ y $B*B = 0$

Despejando: $A*B = -B*A = (-B)*A$

Ejercicio 56.3. Definida la operación $*$ en el espacio vectorial de polinomios de grado 2, demostrar que es un álgebra de Lie.

La operación $*$ se define de la siguiente forma:

$$(a_1x^2 + a_2x + a_3)*(b_1x^2 + b_2x + b_3) = (a_2b_3 - a_3b_2)x^2 + (a_3b_1 - a_1b_3)x + a_1b_2 - a_2b_1$$

Esta operación se puede definir como un determinante.
Llamamos $P_a = a_1x^2 + a_2x + a_3$ y $P_b = b_1x^2 + b_2x + b_3$.

$$P_a * P_b = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

La propiedad iii) del álgebra de Lie se demuestra fácilmente:

$$P_a * P_a = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

, por tener dos filas iguales.

Para demostrar la propiedad i) bilinealidad hacemos uso de las propiedades de los determinantes:

$$(\lambda P_a + \mu P_b) * P_c = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 & \lambda a_2 + \mu b_2 & \lambda a_3 + \mu b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

λ y μ son constantes, y $P_c = c_1 x^2 + c_2 x + c_3$. Entonces:

$$\begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ \lambda a_1 + \mu b_1 & \lambda a_2 + \mu b_2 & \lambda a_3 + \mu b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ \lambda a_1 & \lambda a_2 & \lambda a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ \mu b_1 & \mu b_2 & \mu b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$= \lambda \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \mu \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} =$$

$$\lambda (P_a * P_c) + \mu (P_b * P_c) = (\lambda P_a + \mu P_b) * P_c$$

Por último, para demostrar la propiedad ii) identidad de Jacobi, hacemos las siguientes operaciones:

$$(P_a * P_b) * P_c = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ a_2 b_3 - a_3 b_2 & a_3 b_1 - a_1 b_3 & a_1 b_2 - a_2 b_1 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

$$(P_c * P_a) * P_b = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ c_2 a_3 - c_3 a_2 & c_3 a_1 - c_1 a_3 & c_1 a_2 - c_2 a_1 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

$$(P_b * P_c) * P_a = \begin{vmatrix} x^2 & x & 1 \\ b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_1 & a_2 & a_3 \end{vmatrix}$$

Para demostrar ii) $(P_a * P_b) * P_c + (P_c * P_a) * P_b + (P_b * P_c) * P_a = 0$ basta con asegurarse de que las sumas de los siguientes menores dan cero:

$$\begin{vmatrix} a_3b_1 - a_1b_3 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_3a_1 - c_1a_3 & c_1a_2 - c_2a_1 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_3c_1 - b_1c_3 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 & a_1b_2 - a_2b_1 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_2a_3 - c_3a_2 & c_1a_2 - c_2a_1 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 & b_1c_2 - b_2c_1 \\ a_1 & a_3 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} a_2b_3 - a_3b_2 & a_3b_1 - a_1b_3 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c_2a_3 - c_3a_2 & c_3a_1 - c_1a_3 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b_2c_3 - b_3c_2 & b_3c_1 - b_1c_3 \\ a_1 & a_2 \end{vmatrix} = 0$$