Ejercicio Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 62

Autor del curso: Javier García

Ejercicio resuelto por Miguel A. Montañez

11 de abril de 2021

Ejercicio 62.1. A partir de $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ y $\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0$, demostrar que para $\nu = 2,3$ obtenemos:

$$-\partial_0 E_y + (\vec{\nabla}\times\vec{B})_y = 0 \qquad -\partial_0 E_z + (\vec{\nabla}\times\vec{B})_z = 0$$

Partimos de $\partial_\mu(\partial^\mu A^\nu - \partial^\nu A^\mu) = 0$ y hacemos $\nu = 2$.

$$\partial_0(\partial^0 A^2 - \partial^2 A^0) + \partial_1(\partial^1 A^2 - \partial^2 A^1) + \partial_2\underbrace{(\partial^2 A^2 - \partial^2 A^2)}_{0} + \partial_3(\partial^3 A^2 - \partial^2 A^3) = 0$$

Bajamos los índices de las derivadas:

$$\partial_0(\partial_0 A^2 + \partial_2 A^0) + \partial_1(\partial_2 A^1 - \partial_1 A^2) + \partial_3(\partial_2 A^3 - \partial_3 A^2) = 0$$

sustituimos números por letras y $A^0 = V$:

$$\partial_0(\partial_0 A_y + \partial_y V) + \partial_x(\partial_y A_x - \partial_x A_y) + \partial_z(\partial_y A_z - \partial_z A_y) = 0$$

Ahora bien:

$$\partial_0 A_y + \partial_y V = -E_y \qquad \partial_y A_x - \partial_x A_y = -(\mathrm{rot}\vec{A})_z \qquad \partial_y A_z - \partial_z A_y = (\mathrm{rot}\vec{A})_x$$

Luego podemos escribir:

$$-\partial_0 E_y - \partial_x(\mathrm{rot}\vec{A})_z + \partial_z(\mathrm{rot}\vec{A})_x = 0$$

Como $\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A}$,

$$-\partial_0 E_y + \partial_z B_x - \partial_x B_z = 0$$

Entonces:

$$-\partial_0 E_y + (\mathrm{rot}\vec{B})_y = 0,$$ como queríamos demostrar

Para $\nu = 3$ hacemos algo similar:

$$\partial_0(\partial^0 A^3 - \partial^3 A^0) + \partial_1(\partial^1 A^3 - \partial^3 A^1) + \partial_2(\partial^2 A^3 - \partial^3 A^2) + \partial_3(\overset{\to 0}{\partial^3 A^3 - \partial^3 A^3}) = 0$$

Bajamos los índices de las derivadas:

$$\partial_0(\partial_0 A^3 + \partial_3 A^0) + \partial_1(\partial_3 A^1 - \partial_1 A^3) + \partial_2(\partial_3 A^2 - \partial_2 A^3) = 0$$

Sustituimos números por letras y $A^0 = V$:

$$\partial_0(\partial_0 A_z + \partial_z V) + \partial_x(\partial_z A_x - \partial_x A_z) + \partial_y(\partial_z A_y - \partial_y A_z) = 0$$

Ahora bien:

$$\partial_0 A_z + \partial_z V = -E_z \qquad \partial_z A_x - \partial_x A_z = (\mathrm{rot}\,\vec{A})_y \quad \partial_z A_y - \partial_y A_z = -(\mathrm{rot}\,\vec{A})_x$$

Luego podemos escribir:

$$-\partial_0 E_z + \partial_x(\mathrm{rot}\,\vec{A})_y - \partial_y(\mathrm{rot}\,\vec{A})_x = 0$$

Como $\vec{B} = \mathrm{rot}\,\vec{A}$

$$-\partial_0 E_z + \partial_x B_y - \partial_y B_x = 0$$

Entonces:

$-\partial_0 E_z + (\mathrm{rot}\,\vec{B})_z = 0$, como queríamos demostrar.

Ejercicio Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 62

Autor del curso: Javier García

Ejercicio resuelto por Miguel A. Montañez

11 de abril de 2021

Ejercicio 62.2. A partir de la identidad de Bianchi demostrar que $\vec{\nabla}\times\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$ y $\vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$.

Partimos de la identidad de Bianchi:

$$\partial^{\mu}F^{\alpha\beta} + \partial^{\beta}F^{\mu\alpha} + \partial^{\alpha}F^{\beta\mu} = 0 \qquad F^{\mu\nu} = -F^{\nu\mu}$$

Si tomamos dos índices iguales nos da una trivialidad de la que no obtendríamos ningún resultado. Por ello los índices tienen que ser diferentes.

1º Empezamos con $\mu = 1$, $\alpha = 2$, $\beta = 3$

$$\partial^1 F^{23} + \partial^3 F^{12} + \partial^2 F^{31} = 0$$

Bajamos los índices de las derivadas:

$$-\partial_1 F^{23} - \partial_3 F^{12} - \partial_2 F^{31} = 0 \qquad \partial_1 F^{23} + \partial_3 F^{12} + \partial_2 F^{31} = 0$$

Ahora:

$$F^{23} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 = \partial_3 A^2 - \partial_2 A^3 = \partial_z A_y - \partial_y A_z = -(\text{rot}\vec{A})_x = -B_x$$

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = \partial_2 A^1 - \partial_1 A^2 = \partial_y A_x - \partial_x A_y = -(\text{rot}\vec{A})_z = -B_z$$

$$F^{31} = \partial^3 A^1 - \partial^1 A^3 = \partial_1 A^3 - \partial_3 A^1 = \partial_x A_z - \partial_z A_x = -(\text{rot}\vec{A})_y = -B_y$$

Entonces:

$$\partial_x B_x + \partial_y B_y + \partial_z B_z = 0 \quad , \text{ o sea, } \quad \vec{\nabla}\cdot\vec{B} = 0$$

2º Elegimos $\mu=1,\ \alpha=2,\ \beta=0$

$$\partial^1 F^{20} + \partial^0 F^{12} + \partial^2 F^{01} = 0$$

Bajamos los índices de las derivadas:

$$-\partial_1 F^{20} + \partial_0 F^{12} + \partial_2 F^{01} = 0$$

Ahora:

$$F^{20} = \partial^2 A^0 - \partial^0 A^2 = -\partial_2 A^0 - \partial_0 A^2 = -\partial_y V - \partial_0 A_y = \mathcal{E}_y$$

$$F^{12} = \partial^1 A^2 - \partial^2 A^1 = -\partial_1 A^2 + \partial_2 A^1 = \partial_y A_x - \partial_x A_y = -(\mathrm{rot}\vec{A})_z = -B_z$$

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \partial_0 A^1 + \partial_1 A^0 = \partial_0 A_x + \partial_x V = -\mathcal{E}_x$$

Entonces:

$$-\partial_x \mathcal{E}_y - \partial_0 B_z + \partial_y \mathcal{E}_x = 0 \qquad -(\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}})_z - \partial_0 B_z = 0$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}})_z = -\partial_0 B_z \quad \rightarrow \quad \underline{\text{ecuación } 1}$$

3º Elegimos $\mu=1,\ \alpha=3,\ \beta=0$

$$\partial^1 F^{30} + \partial^0 F^{13} + \partial^3 F^{01} = 0$$

Bajamos los índices de las derivadas:

$$-\partial_1 F^{30} + \partial_0 F^{13} - \partial_3 F^{01} = 0$$

Ahora:

$$F^{30} = \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 = -\partial_3 A^0 - \partial_0 A^3 = -\partial_z V - \partial_0 A_z = \mathcal{E}_z$$

$$F^{13} = \partial^1 A^3 - \partial^3 A^1 = -\partial_1 A^3 + \partial_3 A^1 = \partial_z A_x - \partial_x A_z = (\mathrm{rot}\vec{A})_y = B_y$$

$$F^{01} = \partial^0 A^1 - \partial^1 A^0 = \partial_0 A^1 + \partial_1 A^0 = \partial_0 A_x + \partial_x V^0 = -\mathcal{E}_x$$

Entonces:

$$-\partial_x \mathcal{E}_z + \partial_0 B_y + \partial_z \mathcal{E}_x = 0 \qquad (\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}})_y + \partial_0 B_y = 0$$

$$(\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}})_y = -\partial_0 B_y \quad \rightarrow \quad \underline{\text{ecuación } 2}$$

4º Por último, elegimos $\mu=2$, $\alpha=3$, $\beta=0$

$$\partial^2 F^{30} + \partial^0 F^{23} + \partial^3 F^{02} = 0$$

Bajamos los índices de las derivadas:

$$-\partial_2 F^{30} + \partial_0 F^{23} - \partial_3 F^{02} = 0$$

Ahora:

$$F^{30} = \partial^3 A^0 - \partial^0 A^3 = -\partial_3 A^0 - \partial_0 A^3 = -\partial_z V - \partial_0 A_z = \mathcal{E}_z$$

$$F^{23} = \partial^2 A^3 - \partial^3 A^2 = -\partial_2 A^3 + \partial_3 A^2 = \partial_z A_y - \partial_y A_z = -(\mathrm{rot}\vec{A})_x = -B_x$$

$$F^{02} = \partial^0 A^2 - \partial^2 A^0 = \partial_0 A^2 + \partial_2 A^0 = \partial_0 A_y + \partial_y V = -\mathcal{E}_y$$

Entonces:

$$-\partial_y \mathcal{E}_z - \partial_0 B_x + \partial_z \mathcal{E}_y = 0 \qquad -(\mathrm{rot}\vec{\mathcal{E}})_x - \partial_0 B_x = 0$$

$$(\mathrm{rot}\vec{\mathcal{E}})_x = -\partial_0 B_x \quad \rightarrow \quad \underline{\text{ecuación 3}}$$

Las ecuaciones 1, 2 y 3 nos proporcionan el resultado deseado:

$$\mathrm{rot}\,\vec{\mathcal{E}} = -\partial_0 \vec{B}$$

También podríamos haber obtenido estos resultados teniendo en cuenta las propiedades de los operadores div, grad y rot. Para cualquier vector $\vec{v}$ de $\mathbb{R}^3$ y cualquier campo ϕ escalar se cumple:

$$\mathrm{div}\,\mathrm{rot}\,\vec{v} = 0 \qquad \mathrm{rot}\,\mathrm{grad}\,\phi = 0$$

entonces, si consideramos las ecuaciones demostradas en el curso:

$$\vec{B} = \mathrm{rot}\vec{A} \qquad \mathrm{div}\vec{B} = \mathrm{div}\,\mathrm{rot}\vec{A} = 0 \qquad \mathrm{div}\vec{B} = 0$$

$$\vec{\mathcal{E}} = -\mathrm{grad}V - \frac{\partial \vec{A}}{\partial t} \qquad \mathrm{rot}\vec{\mathcal{E}} = -\mathrm{rot}\,\mathrm{grad}V - \mathrm{rot}\frac{\partial \vec{A}}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\mathrm{rot}\vec{A} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}$$

Suponiendo que las derivadas parciales se "porten bien".