Th. Cuántica de Campos.

LAURA INCERA

## Ejercicio 2

Definición:

Valor medio: $$\langle \square \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, \square \, e^{-\frac{a}{2}x^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-\frac{a}{2}x^2}}$$

a) ¿cuánto vale el valor medio de x $\langle x \rangle$?

b) $\langle x^2 \rangle$

c) $\langle x^{2n} \rangle = \frac{1}{a^n}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots 5\cdot 3\cdot 1$

$$\langle x^4 \rangle = \frac{1}{a^2} 3\cdot 1 = \frac{3}{a^2}$$

$$\langle x^6 \rangle = \frac{1}{a^3} 5\cdot 3\cdot 1$$

a)

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot x \, e^{-a/2\, x^2} \quad (1)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-a/2\, x^2} \quad (2)}$$

$$(1) = \frac{-1}{a}\int_{-\infty}^{\infty} dx \cdot (-a) x \, e^{-a/2\, x^2}$$

Multiplicamos y dividimos por $(-a)$ y conseguimos tener una integral de la forma $\int f' e^f$

$$= \frac{-1}{a}\left[e^{-a/2\, x^2}\right]_{-\infty}^{\infty}$$

$$= \frac{-1}{a}\left[e^{-\infty} - e^{-\infty}\right] = \boxed{0}$$

(2) será la misma para los tres apartados

$$(2) = \int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-\frac{a}{2}x^2} = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$ Como se demuestra en el vídeo.

$$\boxed{\langle x \rangle = \frac{0}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}} = 0}$$

b)

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} \quad (1)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-\frac{a}{2}x^2} \quad (2) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}}$$

$$(1) = \frac{\sqrt{\pi}}{2\left(\frac{a}{2}\right)^{3/2}}$$

$$\boxed{\langle x^2 \rangle = \sqrt{\frac{\frac{\cancel{\pi}}{4\left(\frac{a}{2}\right)^3}}{\frac{2\cancel{\pi}}{a}}} = \frac{1}{a}}$$

c)

$$\langle x^{2n} \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} \quad (1)}{\int_{-\infty}^{\infty} dx \, e^{-a/2 x^2} \quad (2) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}}$$

Se puede observar que al utilizar el truco de derivar a ambos lados con respecto a "a" el resultado $\int e^{-ax^2} dx = \sqrt{\pi} \cdot a^{1/2}$ siempre va a

Teor. Cuántica de Campos
LAURA INCERA

"sacar" un $x^2$, voy a probar derivando varias veces a ver si obtengo alguna relación para la derivada n-ésima... (lo hago con 'a' y luego lo sustituiré por $\frac{a}{2}$)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-ax^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$$

1era derivada: $$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-ax^2} dx = \frac{+1}{2}\sqrt{\pi}\, a^{-3/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}}$$

2a derivada: $$\int_{-\infty}^{\infty} + x^4 e^{-ax^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot a^{-5/2} = \frac{3\sqrt{\pi}}{4a^{5/2}}$$

3a derivada: $$\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-ax^2} dx = \frac{3}{4}\sqrt{\pi}\,\frac{5}{2}\, a^{-7/2} = \frac{15\sqrt{\pi}}{8a^{7/2}}$$

la pista!

n-ésima $$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-ax^2} dx = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots\sqrt{\pi}}{2^n\, a^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)}}$$

Entonces $$(2) = \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots\cdot\sqrt{\pi}}{2^n \left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2n+1}{2}}}$$

$$\boxed{\langle x^{2n} \rangle = \frac{\dfrac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\dots\sqrt{\pi}}{2^n\left(\frac{a}{2}\right)^{\left(\frac{2n+1}{2}\right)}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}}} = \frac{(2n-1)(2n-3)\dots}{2^n\left(\frac{a}{2}\right)^{\frac{2n+1}{2}-\frac{1}{2}}} = \boxed{\frac{(2n-1)(2n-3)\dots}{a^n}}$$

Salió!