Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 76.

Autor del curso: Javier García

Ejercicios resueltos por Miguel A. Montañez

19 de enero de 2022

Ejercicio 76.1

Dentro de la teoría de K-G demostrar:

$$\vec{\phi}(t,\vec{x}) = e^{itH}\,\vec{\phi}(\vec{x})\,e^{-itH}$$

$\vec{\phi}(t,\vec{x}) \rightarrow$ operador campo en la imagen de Heisenberg

$\vec{\phi}(\vec{x}) \rightarrow$ operador campo en la imagen de Schrödinger

---

Sabemos que:

$$\vec{\phi}(t,\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a(\vec{k})\,e^{-i\omega_{\vec{k}}t+i\vec{k}\vec{x}} + a^{+}(\vec{k})\,e^{i\omega_{\vec{k}}t-i\vec{k}\vec{x}}\right)$$

$$\vec{\phi}(\vec{x}) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a(\vec{k})\,e^{i\vec{k}\vec{x}} + a^{+}(\vec{k})\,e^{-i\vec{k}\vec{x}}\right)$$

$U = e^{-itH} \rightarrow$ operador evolución $\quad H = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\,\omega_k a^{+}_k a_k \quad \hbar = 1$

Como U es un operador, actúa sobre otros operadores y no sobre números, la demostración queda resuelta si:

$$e^{itH}\,a(\vec{k})\,e^{-itH} = a(\vec{k})\,e^{-i\omega_k t}$$

$$e^{itH}\,a^{+}(\vec{k})\,e^{-itH} = a^{+}(\vec{k})\,e^{i\omega_k t}$$

$$e^{itH} a_{(\vec{k})} e^{-itH} = a_{(\vec{k})} + [H, a_{(\vec{k})}] it + \frac{1}{2!}[H,[H,a_{(\vec{k})}]](it)^2 + \frac{1}{3!}[H,[H,[H,a_{(\vec{k})}]]](it)^3 + \ldots\ldots$$

$$[H, a_{(\vec{k})}] = -\omega_k a_{(\vec{k})} \quad [H,[H,a_{(\vec{k})}]] = \omega_k^2 a_{(\vec{k})} \quad [H,[H,[H,a_{(\vec{k})}]]] = -\omega_k^3 a_{(\vec{k})}$$

$$e^{itH} a_{(\vec{k})} e^{-itH} = a_{(\vec{k})} - it\omega_k a_{(\vec{k})} + \frac{1}{2!}(it\omega_k)^2 a_k - \frac{1}{3!}(it\omega_k)^3 a_k + \ldots\ldots$$

$$e^{itH} a_{(\vec{k})} e^{-itH} = a_{(\vec{k})}\left[1 - it\omega_k + \frac{1}{2!}(it\omega_k)^2 - \frac{1}{3!}(it\omega_k)^3 + \ldots\ldots\ldots\right]$$

Luego:

$$e^{itH} a_{(\vec{k})} e^{-itH} = a_{(\vec{k})} e^{-i\omega_k t}$$

Si tomamos el transpuesto conjugado:

$$\left(e^{itH} a_{(\vec{k})} e^{-itH} = a_{(\vec{k})} e^{-i\omega_k t}\right)^+$$

$$e^{itH} a^+_{(\vec{k})} e^{-itH} = a^+_{(\vec{k})} e^{i\omega_k t} \qquad H^+ = H$$

Así la demostración queda resuelta.

Ejercicio 76.2

Apartado a) Demostrar $U_I(t,t') = e^{itH_0} e^{-i(t-t')H} e^{-it'H_0}$

Partimos del operador evolución en la imagen de Dirac $U_I(t) = e^{itH_0} e^{-itH}$. Este operador se aplica a estados en $t=0$. Queremos definir un operador evolución que se pueda aplicar a instantes de tiempo t' distintos de cero.

$$U_I(t,t') = U_I(t)U_I^{\dagger}(t') = e^{itH_0} e^{-itH} e^{it'H} e^{-it'H_0}$$

Como $[H, H] = 0$

$$U_I(t,t') = e^{itH_0} e^{-i(t-t')H} e^{-it'H_0}$$

Apartado b) Comprobar que $U(t,t')$ es solución de la ecuación $i\partial_t |\Psi_I(t)\rangle = H_I' |\Psi_I(t)\rangle$

Tomamos:

$$|\Psi_I(t)\rangle = U_I(t,t')|\Psi_I(t')\rangle$$

sustituimos en la ecuación:

$$i\partial_t\left[U_I(t,t')|\Psi_I(t')\rangle\right] = H_I' U(t,t')|\Psi_I(t')\rangle$$

$$\left[i\partial_t U_I(t,t')\right]|\Psi_I(t')\rangle = H_I' U(t,t')|\Psi_I(t')\rangle$$

Luego:

$$i\partial_t U_I(t,t') = H_I' U(t,t')$$

Vamos a comprobar que $U_I(t,t') = e^{itH_0} e^{-i(t-t')H} e^{-it'H_0}$ satisface esta ecuación.

Consideramos el primer miembro:

$$i\partial_t\left[e^{itH_0} e^{-i(t-t')H} e^{-it'H_0}\right] = -e^{itH_0} H_0 e^{-i(t-t')H} e^{-it'H_0} + e^{itH_0} e^{-i(t-t')H} H e^{-it'H_0}$$

Consideramos el segundo miembro:

$$H_I' U_I(t,t') = H_I' e^{itH_0} e^{-i(t-t')H} e^{-it'H_0}$$

Como $\quad H_I' = e^{itH_0} H' e^{-itH_0} \quad$ y $\quad H' = H - H_0$

$$H_I' U_I(t,t') = e^{itH_0}(H - H_0)e^{-itH_0} e^{itH_0} e^{-i(t-t')H} e^{-it'H_0}$$

$$H_I' U_I(t,t') = e^{itH_0} H e^{-i(t-t')H} e^{-it'H_0} - e^{itH_0} H_0 e^{-i(t-t')H} e^{-it'H_0}$$

Como $[H,H]=0$, $\quad H e^{-i(t-t')H} = e^{-i(t-t')H} H$

Así podemos comprobar que ambos miembros de la ecuación son idénticos.

Apartado c) Comprobar que el conjunto de operadores $U_I(t,t')$ tiene estructura de grupo, con la operación producto.

Primero vamos a ver que es una ley de composición interna. Sea $t_3 > t_2 > t_1$. Vamos a comprobar que si $U_I(t_3,t_2)$ y $U_I(t_2,t_1) \in G$ (grupo), entonces

$U_I(t_3,t_1) = U_I(t_3,t_2) \cdot U_I(t_2,t_1)$ también $\in G$.

$$U_I(t_3,t_2) = e^{it_3H_0} e^{-i(t_3-t_2)H} e^{-it_2H_0}$$

$$U_I(t_2,t_1) = e^{it_2H_0} e^{-i(t_2-t_1)H} e^{-it_1H_0}$$

$$U_I(t_3,t_2)\cdot U_I(t_2,t_1) = e^{it_3H_0} e^{-i(t_3-t_2)H} e^{-it_2H_0} \cdot e^{it_2H_0} e^{-i(t_2-t_1)H} e^{-it_1H_0}$$

$$= e^{it_3H_0} e^{-i(t_3-t_1)H} e^{-it_1H_0} = U_I(t_3,t_1) \in G$$

Es ley de composición interna.

Ahora vamos a comprobar la propiedad asociativa.

$$U_I(t_3,t_2)\cdot\left[U_I(t_2,t_1)\cdot U_I(t_1,t_0)\right]=\left[U_I(t_3,t_2)\cdot U_I(t_2,t_1)\right]U_I(t_1,t_0)$$

El primer miembro da:

$$U_I(t_3,t_2)\cdot\left[e^{it_2H_0}e^{-i(t_2-t_1)H}e^{-it_1H_0}e^{it_1H_0}e^{-i(t_1-t_0)}e^{-it_0H_0}\right]=$$

$$e^{it_3H_0}e^{-i(t_3-t_2)H}e^{-it_2H_0}e^{it_2H_0}e^{-i(t_2-t_0)}e^{-it_0H_0}=e^{it_3H_0}e^{-i(t_3-t_0)H}e^{-it_0H_0}$$

Comprobamos que el segundo miembro da lo mismo:

$$\left[e^{it_3H_0}e^{-i(t_3-t_2)H}e^{-it_2H_0}e^{it_2H_0}e^{-i(t_2-t_1)H}e^{-it_1H_0}\right]U(t_1,t_0)=$$

$$e^{it_3H_0}e^{-i(t_3-t_1)H}e^{-it_1H_0}\cdot e^{it_1H_0}e^{-i(t_1-t_0)H}e^{-it_0H_0}=e^{it_3H_0}e^{-i(t_3-t_0)H}e^{-it_0H_0}$$

Entonces cumple la propiedad asociativa.

También tiene elemento neutro:

$$U(t,t)=e^{itH_0}e^{-i(t-t)H}e^{-itH_0}=I$$

Por último, cada elemento tiene su simétrico:

$$U(t_2,t_1)=e^{it_2H_0}e^{-i(t_2-t_1)H}e^{-it_1H_0}$$

$$U(t_1,t_2)=e^{it_1H_0}e^{-i(t_1-t_2)H}e^{-it_2H_0}$$ → simétrico

$$U(t_2,t_1)\cdot U(t_1,t_2)=e^{it_2H_0}e^{-i(t_2-t_1)H}e^{-it_1H_0}e^{it_1H_0}e^{-i(t_1-t_2)H}e^{-it_2H_0}=I$$