Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 67.
Autor del curso: Javier García
Ejercicios resueltos por Miguel A. Montañez
11 de mayo de 2021

Ejercicio 67.1. Obtener chy y shy del siguiente sistema de ecuaciones:

$$x\,shy + t\,chy = 0$$
$$t\,shy + x\,chy = x'$$

Este sistema lo podemos expresar matricialmente:

$$\begin{pmatrix} x & t \\ t & x \end{pmatrix}\begin{pmatrix} shy \\ chy \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x' \end{pmatrix}$$

Como nos encontramos fuera del cono:

$$\begin{vmatrix} x & t \\ t & x \end{vmatrix} = x^2 - t^2 \neq 0$$

Podemos resolver por Kramer:

$$shy = \frac{\begin{vmatrix} 0 & t \\ x' & x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & t \\ t & x \end{vmatrix}} = \frac{-x't}{x^2-t^2} = \frac{x't}{t^2-x^2}$$

$$chy = \frac{\begin{vmatrix} x & 0 \\ t & x' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} x & t \\ t & x \end{vmatrix}} = \frac{x'x}{x^2-t^2} = \frac{-x'x}{t^2-x^2}$$

$$thy = \frac{shy}{chy} = -\frac{t}{x}$$

Ejercicio 67.2 - Demostrar para una transformación de Lorentz, dentro del cono, que existe un $y = \frac{1}{2} \ln \frac{t^2 - x^2}{(t+x)^2}$ que permita que dos eventos se encuentren en la misma posición en tiempos distintos.

Partimos del sistema de ecuaciones:

$$t \operatorname{ch} y + x \operatorname{sh} y = t'$$
$$x \operatorname{ch} y + t \operatorname{sh} y = 0$$

Expresado matricialmente queda:

$$\begin{pmatrix} t & x \\ x & t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \operatorname{ch} y \\ \operatorname{sh} y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t' \\ 0 \end{pmatrix}$$

Como nos encontramos dentro del cono:

$$\begin{vmatrix} t & x \\ x & t \end{vmatrix} = t^2 - x^2 \neq 0$$

Resolvemos por Kramer:

$$\operatorname{ch} y = \frac{\begin{vmatrix} t' & x \\ 0 & t \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & x \\ x & t \end{vmatrix}} = \frac{t't}{t^2 - x^2} \qquad \operatorname{th} y = -\frac{x}{t}$$

$$\operatorname{sh} y = \frac{\begin{vmatrix} t & t' \\ x & 0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} t & x \\ x & t \end{vmatrix}} = \frac{-x t'}{t^2 - x^2}$$

Como:

$$y = \operatorname{arcth}\left(-\frac{x}{t}\right) = \frac{1}{2} \ln \frac{1 - \frac{x}{t}}{1 + \frac{x}{t}} = \frac{1}{2} \ln \frac{t - x}{t + x}$$

$$y = \frac{1}{2} \ln \frac{(t-x)(t+x)}{(t+x)^2} = \frac{1}{2} \ln \frac{t^2-x^2}{(t+x)^2}$$

Como dentro del cono $t^2-x^2>0$ y $(t+x)^2>0$, y existe.

Para sistemas 1+3 la demostración se puede hacer de la siguiente forma.

Consideremos dos eventos del espacio-tiempo de Minkowsky, y calculamos Δs^2 respecto de un sistema de referencias de modo que $\Delta s^2<0$ (space-like).

$$\Delta s^2 = \Delta x_\mu \Delta x^\mu = (\Delta x^0)^2 - (\Delta x^1)^2 - (\Delta x^2)^2 - (\Delta x^3)^2$$

Supongamos otro sistema de referencias relacionado con el anterior mediante una transformación de Lorentz Λ.

Entonces $\Delta x^{\rho'} = \Lambda^{\rho'}{}_\mu \Delta x^\mu$, y si calculamos

$$\Delta s'^2 = \Delta x_{\rho'} \Delta x^{\rho'} = \Lambda_{\rho'}{}^\mu \Delta x_\mu \Lambda^{\rho'}{}_\nu \Delta x^\nu = \Lambda_{\rho'}{}^\mu \Lambda^{\rho'}{}_\nu \Delta x_\mu \Delta x^\nu$$

$$\Delta s'^2 = \delta^\mu{}_\nu \Delta x_\mu \Delta x^\nu = \Delta x_\mu \Delta x^\mu = \Delta s^2 < 0$$

Luego si Δx^μ es un cuadrivector space-like, también lo será en el sistema $\Delta x^{\rho'}$.

Como las transformaciones de Lorentz forman un grupo de Lie, dos cuadrivectores space-like siempre se encuentran relacionados por alguna transformación Λ.

Si tomamos un sistema de referencia donde $\Delta x^{0'}=0$, el cuadrivector será space-like:

$$\Delta s'^2 = \underbrace{(\Delta x'^0)^2}_{0} - (\Delta x^{1'})^2 - (\Delta x^{2'})^2 - (\Delta x^{3'})^2 < 0$$

Entonces existirá una transformación Λ donde $\Delta x^{0'} = 0$.

En el caso que el cuadrivector Δx^{μ} sea time-like en un determinado sistema de referencias, por la misma razón que antes también será time-like en otro sistema relacionado por una transformación de Lorentz.

Si elegimos un sistema de referencias donde $\Delta x^{1'} = \Delta x^{2'} = \Delta x^{3'} = 0$, el cuadrivector $\Delta x^{\rho'}$ será time-like:

$$\Delta s'^2 = (\Delta x^{0'})^2 > 0$$

Entonces debe existir una transformación Λ donde $\Delta x^{1'} = \Delta x^{2'} = \Delta x^{3'} = 0$ y $\Delta x^{0'} \neq 0$.

Ejercicio 67.3. Demostrar que para dos operadores hermíticos A y B, $[A, B]^{\dagger} = -[A, B]$.

$$[A, B]^{\dagger} = (AB - BA)^{\dagger} = (AB)^{\dagger} - (BA)^{\dagger} = B^{\dagger}A^{\dagger} - A^{\dagger}B^{\dagger} =$$

$$BA - AB = -(AB - BA) = -[A, B]$$