Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 69

Autor del curso: Javier García

Ejercicios resueltos por Miguel A. Montañez

15 de junio de 2021

Ejercicio 69.1. A partir de $S=\int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2}\left(\nabla_\mu f \nabla^\mu f - w^2 f^2\right)$, donde ∇_μ son derivadas covariantes, obtener la ecuación de Klein-Gordon.

Partimos de la acción $S=\int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2}\left(\nabla_\mu f \nabla^\mu f - w^2 f^2\right)$ definida con derivadas covariantes y aplicamos $\frac{\delta S}{\delta f}=0$.

Llamamos $A=\nabla_\alpha f \nabla^\alpha f - w^2 f^2$, donde hemos sustituido el índice mudo μ por α. Entonces:

$$\frac{\delta S}{\delta f}=\int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2}\left(\frac{\partial A}{\partial f}-\nabla_\mu \frac{\partial A}{\partial(\nabla_\mu f)}\right)$$

, donde sustituimos ∂_μ por ∇_μ

Ahora:

$$\frac{\partial A}{\partial f}=-2w^2 f$$

$$\frac{\partial A}{\partial(\nabla_\mu f)}=\frac{\partial(\nabla_\alpha f)}{\partial(\nabla_\mu f)}\cdot\nabla^\alpha f+\nabla_\alpha f\cdot\frac{\partial(\nabla^\alpha f)}{\partial(\nabla_\mu f)}=$$

$$=\frac{\partial(\nabla_\alpha f)}{\partial(\nabla_\mu f)}\cdot\nabla^\alpha f+\nabla_\alpha f\,\frac{\partial(g^{\alpha\beta}\nabla_\beta f)}{\partial(\nabla_\mu f)}=\frac{\partial(\nabla_\alpha f)}{\partial(\nabla_\mu f)}\cdot\nabla^\alpha f+\nabla_\alpha f\, g^{\alpha\beta}\frac{\partial(\nabla_\beta f)}{\partial(\nabla_\mu f)}$$

Por el principio de equivalencia, en una región lo suficientemente pequeña alrededor de un punto arbitrario x del espacio-tiempo se cumple:

$$\frac{\partial(\nabla_\alpha f)}{\partial(\nabla_\mu f)} = \frac{\partial(\partial_\alpha f)}{\partial(\partial_\mu f)} = \delta^\mu_\alpha \quad \rightarrow \text{ principio de equivalencia}$$

Luego:

$$\frac{\partial A}{\partial(\nabla_\mu f)} = \delta^\mu_\alpha \nabla^\alpha f + \nabla_\alpha f \, g^{\alpha\beta} \delta^\mu_\beta = 2 \nabla^\mu f$$

Sustituyendo:

$$\frac{\delta S}{\delta f} = \int d^4x \frac{\sqrt{-g}}{2} \left(-2w^2 f - \nabla_\mu 2 \nabla^\mu f \right) = 0$$

Si esto es válido siempre, entonces debe cumplirse:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu f + w^2 f = 0$$

que es lo que queríamos demostrar.

Ejercicio 67.2. A partir de la ecuación de Klein-Gordon $\nabla_\mu \nabla^\mu f + w^2 f = 0$, demostrar la ecuación $\nabla_\mu (f^* \nabla^\mu f - f \nabla^\mu f^*) = 0$.

Partimos de la ecuación de Klein-Gordon y su conjugada:

$$\nabla_\mu \nabla^\mu f + w^2 f = 0 \qquad\qquad \nabla_\mu \nabla^\mu f^* + w^2 f^* = 0$$

multiplicamos la primera por f^* y la segunda por f:

$$f^* \nabla_\mu \nabla^\mu f + w^2 f^* f = 0 \qquad\qquad f \nabla_\mu \nabla^\mu f^* + w^2 f f^* = 0$$

Si restamos:

$$f^* \nabla_\mu \nabla^\mu f - f \nabla_\mu \nabla^\mu f^* = 0$$

Ahora hacemos lo siguiente:

$$\nabla_\mu (f^* \nabla^\mu f) = (\nabla_\mu f^*)(\nabla^\mu f) + f^* \nabla_\mu \nabla^\mu f$$

$$\nabla_\mu (f \nabla^\mu f^*) = (\nabla_\mu f)(\nabla^\mu f^*) + f \nabla_\mu \nabla^\mu f^*$$

Despejamos:

$$f^* \nabla_\mu \nabla^\mu f = \nabla_\mu (f^* \nabla^\mu f) - (\nabla_\mu f^*)(\nabla^\mu f)$$

$$f \nabla_\mu \nabla^\mu f^* = \nabla_\mu (f \nabla^\mu f^*) - (\nabla_\mu f)(\nabla^\mu f^*)$$

Hacemos la diferencia:

$$f^* \nabla_\mu \nabla^\mu f - f \nabla_\mu \nabla^\mu f^* = 0$$

$$0 = \nabla_\mu (f^* \nabla^\mu f) - \nabla_\mu (f \nabla^\mu f^*) - (\nabla_\mu f^*)(\nabla^\mu f) + (\nabla_\mu f)(\nabla^\mu f^*)$$

subo y bajo

Entonces:

$$0 = \nabla_\mu (f^* \nabla^\mu f - f \nabla^\mu f^*)$$ → ecuación de continuidad

$$J^\mu = f^* \nabla^\mu f - f \nabla^\mu f$$ → cuadrivector corriente que buscamos.