Problema 2:

Dada la siguiente expresión:

$$\langle f(x)\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-\frac{a}{2}x^2}\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}\,dx}$$

Calcular:

$a)\langle x\rangle$

$b)\langle x^2\rangle$

$c)\langle x^{2n}\rangle$

*) Resultado preliminar, integral gaussiana :

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

a)

Para simplificar la escritura, realizaré el siguiente cambio de variables:

$$b = \frac{a}{2}$$

Este primer caso lo afrontaremos resolviendo la integral indefinida siguiente, útil para casos posteriores:

$$\int xe^{-bx^2}dx \xrightarrow{x=\frac{y}{\sqrt{b}}} \frac{1}{b}\int ye^{-y^2}dy = \frac{-1}{2b}\int -2ye^{-y^2}dy = \frac{-1}{2b}e^{-y^2} + C \xrightarrow{y=x\sqrt{b}} \frac{-1}{2b}e^{-bx^2} + C$$

Aplicando límites de integración:

$$\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-bx^2}dx = \frac{-1}{2b}\left|e^{-bx^2}\right|_{-\infty}^{\infty} = 0 \text{ (Por ser el resultado una función Par)}$$

Sustituyendo toda esta información en $\langle x\rangle$:

$$\langle x\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{a}{2}x^2}\,dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}\,dx} = \frac{0}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}} = 0$$

b) En este caso, trataremos de reducir el nuevo problema a uno ya conocido mediante la integración por partes:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-bx^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x \cdot \left(xe^{-bx^2}\right) dx = \frac{-1}{2b} \left|xe^{-bx^2}\right|_{-\infty}^{\infty} + \frac{1}{2b} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2}\, dx = 0 + \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

Devolviendo la ecuación a las variables originales:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-bx^2} dx = \frac{1}{2b}\sqrt{\frac{\pi}{b}} = \frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

Y sustituyendo en el problema propuesto:

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}\, dx} = \frac{\frac{1}{a}\sqrt{\frac{2\pi}{a}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}} = \frac{1}{a}$$

c) Una vez más, haremos uso de la integración por partes para encontrar una fórmula general en el caso de x^{2n} :

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-bx^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-1} \cdot \left(xe^{-bx^2}\right) dx$$

$$= \frac{-1}{2b} \left|x^{2n-1} e^{-bx^2}\right|_{-\infty}^{\infty} + \frac{2n-1}{2b} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-2} e^{-bx^2} dx$$

Todos los términos de la forma $\frac{-1}{2b}\left|x^m e^{-bx^2}\right|_{-\infty}^{\infty}$ serán iguales a 0 por comparación de infinitos, continuando la secuencia como sigue:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-bx^2} dx = \frac{2n-1}{2b} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-2} e^{-bx^2} dx = \frac{2n-1}{2b} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-3} \cdot \left(x e^{-bx^2}\right) dx$$

$$= \frac{-(2n-1)}{(2b)^2} \left| x^{2n-3} e^{-bx^2} \right|_{-\infty}^{\infty} + \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2b)^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-4} e^{-bx^2} dx$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)}{(2b)^2} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-5} \cdot \left(x e^{-bx^2}\right) dx$$

$$= -\frac{(2n-1)(2n-3)}{(2b)^3} \left| x^{2n-5} e^{-bx^2} \right|_{-\infty}^{\infty}$$

$$+ \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)}{(2b)^3} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n-6} e^{-bx^2} dx = \cdots$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5 \cdot 3}{(2b)^{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-bx^2} dx$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5 \cdot 3}{(2b)^{n-1}} \frac{1}{2b} \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

$$= \frac{(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5 \cdot 3 \cdot 1}{(2b)^{n}} \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

Quedando así la siguiente expresión general:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-bx^2} dx = \frac{\prod_{m=1}^{m=n}(2n-2m+1)}{(2b)^n} \sqrt{\frac{\pi}{b}}$$

Particularizando en nuestro problema, y resolviendo el caso propuesto:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \frac{\prod_{m=1}^{m=n}(2n-2m+1)}{a^n} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$$

$$\langle x^{2n} \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}\, dx} = \frac{\frac{\prod_{m=1}^{m=n}(2n-2m+1)}{a^n} \sqrt{\frac{2\pi}{a}}}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}} = \frac{\prod_{m=1}^{m=n}(2n-2m+1)}{a^n}$$