Ejercicio

Calcular la Parte Principal de

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2+1)}\, dx$$

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2+1)}\, dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} f(z)\, dz + \int_{\varepsilon}^{\infty} f(z)\, dz\right]$$

Con $f(z) = \dfrac{\operatorname{sen} z}{z(z^2+1)}$. He cambiado $x \to z$ porque la función tiene polos en el plano imaginario. Además cambiamos la función por otra equivalente que sea más fácilmente integrable. Para ello aplicamos que:

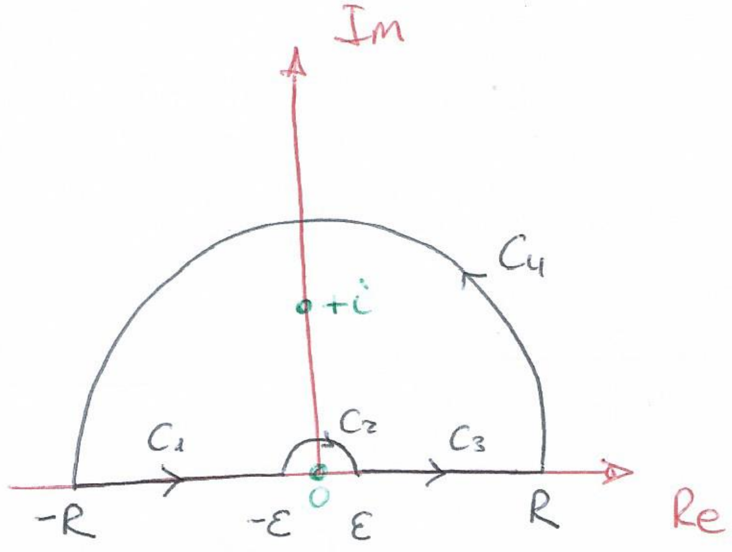
$$e^{iz} = \cos z + i \operatorname{sen} z$$

Quedando:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\operatorname{sen} x}{x(x^2+1)}\, dx = -i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\, dz \cancel{- i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos z}{z(z^2+1)}\, dz}$$

0 porque es $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{par}}{\text{impar}} = 0$

Elegimos el contorno dejando fuera el polo del eje real



$C_1 \to (-R, -\varepsilon)$
$C_3 \to (\varepsilon, R)$ } → Eje real

Entonces la integral la podemos reescribir:

$$\cancel{-i}\oint \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz = \cancel{-i}\left(\int_{C_1} + \int_{C_2} + \int_{C_3} + \int_{C_4}\right)$$

(1) $$\oint \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz = \int_{-R}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz + \int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz + \int_{\varepsilon}^{R} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz + \int_{C_4} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz$$

La parte principal de esta integral se calcula como:

$$\oint \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin x}{x(x^2+1)}\,dx = \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\int_{-\infty}^{-\varepsilon} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz + \int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0}\left[\underbrace{\oint \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz}_{A} - \underbrace{\int_{C_2} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz}_{B} - \underbrace{\int_{C_4} \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz}_{C}\right]$$

Despejando de (1) lo de dentro del límite y haciendo $R \to \infty$

A → Con Cauchy

B, C → Parametrizando e integrando

* Calculamos (A)

$$\boxed{\oint \frac{e^{iz}}{z(z^2+1)}\,dz} = \frac{2\pi i}{0!}\cdot\frac{e^{i\cdot i}}{i(i+i)} = 2\pi i\,\frac{e^{-1}}{-2} = \boxed{-\frac{i\pi}{e}}$$

$$\oint \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}}\,dz = \frac{2\pi i}{n!}\,f^{(n)}(z_0)$$

con $\left\{\begin{array}{l} f(z) = \dfrac{e^{iz}}{z(z+i)} \\ z_0 = i \\ n = 0 \end{array}\right.$

* Calculamos (B) con la siguiente parametrización:

$$z = \varepsilon e^{i\theta} = \varepsilon(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$dz = i\varepsilon e^{i\theta} = i\varepsilon(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$$

$$\int_\pi^0 \frac{e^{i\varepsilon(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}}{\varepsilon e^{i\theta}(\varepsilon^2 e^{2i\theta}+1)}\, i\varepsilon(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$$

$$= \int_\pi^0 \frac{e^{i\varepsilon(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)}}{\varepsilon^{\cancel{3}\,2}\, e^{\cancel{3}\,2i\theta} + \cancel{\varepsilon e^{i\theta}}}\, i\cancel{\varepsilon}\cancel{e^{i\theta}}\,d\theta$$

$$\underset{\varepsilon\to 0}{=} \int_\pi^0 \frac{e^0}{1}\, i\,d\theta = \left[i\theta\right]_\pi^0 = \boxed{-i\pi}$$

* Calculamos (C) con la misma parametrización.

$$z = Re^{i\theta} = R(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)$$

$$dz = iRe^{i\theta} = iR(\cos\theta + i\,\mathrm{sen}\,\theta)\,d\theta$$

$$\int_0^{\pi} \frac{e^{iR(\cos\theta + i\,\text{sen}\,\theta)}}{R^3 e^{3i\theta} + Re^{i\theta}}\, iRe^{i\theta}\, d\theta \xrightarrow[R\to\infty]{} \boxed{0}$$

Sustituimos los resultados:

$$P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\,dx = \left[\frac{-i\pi}{e} - (-i\pi) - 0\right] = i\pi(1-e^{-1})$$

Estamos sólo en el eje real x.

Ya hicimos $\lim_{\varepsilon\to 0}$

Como $e^{ix} = \cos x + i\,\text{sen}\,x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^{ix}}{x(x^2+1)}\,dx = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\cos x}{x(x^2+1)}}_{=0} + i\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\,x}{x(x^2+1)}\,dx$$

$=0$ porque $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{par}}{\text{impar}}$

Entonces, dividiendo entre la constante i, a ambos lados, tenemos

$$\boxed{P\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\text{sen}\,x}{x(x^2+1)}\,dx = \pi(1-e^{-1})}$$