$$\langle x^{2n}\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2}dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}dx} \Rightarrow \langle x^{2n}\rangle = \sqrt{\frac{a}{2\pi}}\ \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2}dx}_{f(n)}$$

$$\boxed{f(0) = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}}$$

$$\frac{d(f(0))}{da} = \frac{d\left(\sqrt{\frac{2\pi}{a}}\right)}{da} \Rightarrow \frac{d}{da}\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}dx\right) = \frac{d}{da}\left(\sqrt{2\pi}\, a^{-1/2}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-x^2}{2} e^{-\frac{a}{2}x^2}dx = \frac{-1}{2}\sqrt{2\pi}\, a^{-3/2} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2}dx = \boxed{\frac{\sqrt{2\pi}}{a^{3/2}} = f(1)}$$

$$\frac{d}{da}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2}dx\right) = \frac{d}{da}\left(\sqrt{2\pi}\, a^{-3/2}\right) \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-x^2}{2} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2}dx = \frac{-3}{2}\sqrt{2\pi}\, a^{-5/2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{a}{2}x^2}dx = \boxed{\frac{3\sqrt{2\pi}}{a^{5/2}} = f(2)}$$

Podemos ver un patron en las soluciones, en concreto:

$$\hat{f}(n) = \sqrt{2\pi}\prod_{i=1}^{n}(2i-1)\cdot a^{-\frac{(2n+1)}{2}}$$

Para probar que esto es cierto usaremos inducción sobre n.

Como caso base podemos usar cualquiera de los ya calculados (comprobar que esto es cierto). Ahora calcularemos el paso de inducción:

Dem: Suponiendo $f(n) = \sqrt{2\pi}\prod_{i=1}^{n}(2i-1)\cdot a^{-\frac{(2n+1)}{2}}$ debemos probar que:

$$f(n+1) = \sqrt{2\pi}\prod_{i=1}^{n+1}(2i-1)\cdot a^{-\frac{(2(n+1)+1)}{2}}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2}dx = \sqrt{2\pi}\prod_{i=1}^{n}(2i-1)\, a^{-\frac{(2n+1)}{2}} \Rightarrow \frac{d}{da}\left(\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2}dx\right) = \frac{d}{da}\left(\frac{\sqrt{2\pi}\prod_{i=1}^{n}(2i-1)}{a^{\frac{2n+1}{2}}}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n}\left(\frac{\cancel{-}x^2}{\cancel{2}}\right) e^{-\frac{a}{2}x^2}dx = \sqrt{2\pi}\prod_{i=1}^{n}(2i-1)\left(\frac{\cancel{-}(2n+1)}{\cancel{2}}\right) a^{-\frac{2n+3}{2}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2(n+1)} e^{-\frac{a}{2}x^2}dx}_{f(n+1)} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{\frac{2n+3}{2}}}\ \underbrace{\prod_{i=1}^{n}(2i-1)\cdot(2n+1)}_{\prod_{i=1}^{n+1}(2i-1)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow f(n+1) = \frac{\sqrt{2\pi}\prod_{i=1}^{n+1}(2i-1)}{a^{\frac{2(n+1)+1}{2}}}$$

c.q.d.

Sabiendo que $f(n) = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{\frac{2n+1}{2}}} \prod_{i=1}^{n} (2i-1)$ podemos calcular $\langle x^{2n} \rangle$

$$\langle x^{2n} \rangle = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \cdot f(n) = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \sqrt{\frac{2\pi}{a^{2n+1}}} \prod_{i=1}^{n} (2i-1) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x^{2n} \rangle = a^{-n} \prod_{i=1}^{n} (2i-1)}$$

Además, si aplicamos la fórmula del producto de una progresión aritmética:

$$\prod_{i=1}^{n} a_i = d^n \frac{\Gamma\left(\frac{a_1}{d} + n\right)}{\Gamma\left(\frac{a_1}{d}\right)} \quad \text{donde} \begin{cases} a_i = 2i - 1 \\ a_1 = 1 \\ d = 2 \\ \Gamma \text{ es la función Gamma} \end{cases}$$

Por tanto, nuestra fórmula queda:

$$\langle x^{2n} \rangle = \frac{2^n}{a^n} \frac{\Gamma\left(\frac{1}{2} + n\right)}{\Gamma(1/2)} = \left(\frac{2}{a}\right)^n \frac{\Gamma(n + 1/2)}{\sqrt{\pi}}$$