RODOLFO GUIDOBONO | CURSO TEORÍA CUÁNTICA de CAMPOS J. GARCÍA - EJERCICIO CAP. 34 | HOJA Nº 1 | FECHA 27/1/20

Demostrar que $\langle y_1^2 \rangle = e^{-2r} \operatorname{sen}^2\alpha \langle x^2 \rangle + e^{2r} \cos^2\alpha \langle y^2 \rangle$

$$\langle y_1^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx_1\, dy_1\, W_b(x_1, y_1)\, y_1^2$$

donde la función de Wigner $W_0(x,y) = \frac{1}{\pi\hbar} \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}(x^2+y^2)\right)$ $y = \frac{p}{m\omega}$

Hacemos cambio de coordenadas $(x_1, y_1) \rightarrow (x, y)$ tal que $\vec{X}_1 = R(\alpha)\, H(-r)\, \vec{X}$

donde $R(\alpha)$ es la matriz de rotación y $H(-r)$ la matriz de homotecia.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-r} x \cos\alpha - e^{r} y \operatorname{sen}\alpha \\ e^{-r} x \operatorname{sen}\alpha + e^{r} y \cos\alpha \end{pmatrix}$$

con esta transformación se cumple que $\det J = 1$ y $W_{b(x_1,y_1)} \longrightarrow W_0(x,y)$

entonces

$$\langle y_1^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, W_0(x,y)\, y_1^2$$

$$y_1 = e^{-r} x \operatorname{sen}\alpha + e^{r} y \cos\alpha$$

$$y_1^2 = e^{-2r} x^2 \operatorname{sen}^2\alpha + e^{2r} y^2 \cos^2\alpha + 2 x . y \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha$$

$$\langle y_1^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, W_0(x,y) \left[e^{-2r} x^2 \operatorname{sen}^2\alpha + e^{2r} y^2 \cos^2\alpha + 2xy \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \right]$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, W_0(x,y)\, 2xy \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha =$$

$$= 2 \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, \frac{1}{\pi\hbar} \exp\left(-\frac{m\omega}{\hbar}(x^2+y^2)\right) x . y$$

$$= \frac{2}{\pi\hbar} \operatorname{sen}\alpha \cos\alpha \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dx . x\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}x^2}}_{=0} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} dy\, y\, e^{-\frac{m\omega}{\hbar}y^2}}_{=0} = 0$$

$$\langle y_1^2 \rangle = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} dx\, dy\, W_0(x,y) \left[e^{-2r} x^2 \operatorname{sen}^2\alpha + e^{2r} y^2 \cos^2\alpha \right]$$

NOTA

HOJA Nº 2

FECHA -

$$\langle y_1^2\rangle = \iint_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\; x^2\, W_0(x,y)\, e^{-2r}\,\mathrm{sen}^2\alpha + \iint_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\; y^2\, W_0(x,y)\, e^{2r}\cos^2\alpha$$

$$= e^{-2r}\,\mathrm{sen}^2\alpha \underbrace{\iint_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\; W_0(x,y)\, x^2}_{=\langle x^2\rangle} + e^{2r}\cos^2\alpha \underbrace{\iint_{-\infty}^{\infty} dx\,dy\; W_0(x,y)\, y^2}_{=\langle y^2\rangle}$$

$$\boxed{\langle y_1^2\rangle = e^{-2r}\,\mathrm{sen}^2\alpha\,\langle x^2\rangle + e^{2r}\cos^2\alpha\,\langle y^2\rangle}$$

Q.E.D.

NOTA