Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 78

Autor del curso: Javier García

Ejercicios resueltos por Miguel A. Montañez

31 de enero de 2022

Ejercicio 78.1

Expresar el término a orden 3 $O(\lambda^3)$ del denominador de $\langle\phi^2\rangle$ en la teoría $\lambda\phi^4$ como diagramas de Feynman

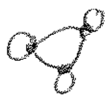
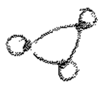
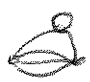
Partimos de la expresión:

$$\langle\phi^2\rangle = \frac{\langle\phi^2\rangle_0 + \left(-\frac{\lambda}{4!}\right)\langle\phi^{2+4}\rangle_0 + \frac{1}{2!}\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^2\langle\phi^{2+8}\rangle_0 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^3\langle\phi^{2+12}\rangle_0 + \cdots}{1 + \left(-\frac{\lambda}{4!}\right)\langle\phi^4\rangle_0 + \frac{1}{2!}\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^2\langle\phi^8\rangle_0 + \frac{1}{3!}\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^3\langle\phi^{12}\rangle_0 + \cdots}$$

Queremos expresar el término $\frac{1}{3!}\left(-\frac{\lambda}{4!}\right)^3\langle\phi^{12}\rangle_0$ con diagramas de Feynman.

Aplicando el teorema de Wick y con los cálculos del programa de Matlab tenemos para $\langle\phi^{12}\rangle_0$:

24	$\overline{35}$	$\overline{35}$	$\overline{33}$	$\overline{45}$	$\overline{45}$	$\overline{44}$	OOOO
27	$\overline{33}$	$\overline{33}$	$\overline{44}$	$\overline{44}$	$\overline{55}$	$\overline{55}$	888
36	$\overline{33}$	$\overline{33}$	$\overline{45}$	$\overline{45}$	$\overline{44}$	$\overline{55}$	8 OOO
36	$\overline{34}$	$\overline{34}$	$\overline{33}$	$\overline{44}$	$\overline{55}$	$\overline{55}$	8 OOO
36	$\overline{35}$	$\overline{35}$	$\overline{33}$	$\overline{44}$	$\overline{44}$	$\overline{55}$	8 OOO
48	$\overline{34}$	$\overline{35}$	$\overline{33}$	$\overline{45}$	$\overline{44}$	$\overline{55}$	

48	35	33	35	45	45	44	oooo
48	35	34	33	45	44	55	
48	35	35	33	45	44	45	oooo
72	33	33	45	44	45	55	8 ooo
72	33	33	45	45	45	45	8 
72	33	35	35	45	45	44	oooo
72	34	33	34	44	55	55	8 ooo
72	34	34	34	34	55	55	8 
72	35	33	35	44	44	55	8 ooo
72	35	35	33	44	45	45	oooo
72	35	35	35	35	44	44	8 
96	34	33	35	45	44	55	
96	34	35	33	44	45	55	
96	34	35	33	45	45	45	
96	34	35	35	35	45	44	
96	35	33	34	45	44	55	
96	35	33	35	45	44	45	oooo
96	35	34	33	44	45	55	
96	35	34	33	45	45	45	
96	35	34	35	35	45	44	
96	35	35	34	35	45	44	
96	35	35	35	34	45	44	

Moja 2

108 $\overline{33}$ $\overline{33}$ $\overline{44}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ $\overline{55}$ 8 ooo

108 $\overline{33}$ $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{44}$ $\overline{55}$ $\overline{55}$ 8 ooo

108 $\overline{33}$ $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{44}$ $\overline{44}$ $\overline{55}$ 8 ooo

144 $\overline{33}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{45}$ $\overline{44}$ $\overline{55}$ 

144 $\overline{33}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{45}$ $\overline{44}$ $\overline{55}$ 

144 $\overline{33}$ $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{45}$ $\overline{44}$ $\overline{45}$ oooo

144 $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{33}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ $\overline{55}$ oooo

144 $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{44}$ $\overline{55}$ oooo

144 $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{44}$ $\overline{55}$ oooo

144 $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{44}$ $\overline{55}$ oooo

144 $\overline{35}$ $\overline{33}$ $\overline{35}$ $\overline{44}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ oooo

144 $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{44}$ $\overline{55}$ oooo

144 $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{44}$ $\overline{55}$ oooo

144 $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{44}$ $\overline{55}$ oooo

192 $\overline{34}$ $\overline{33}$ $\overline{35}$ $\overline{44}$ $\overline{45}$ $\overline{55}$ 

192 $\overline{34}$ $\overline{33}$ $\overline{35}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ 

192 $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{44}$ $\overline{45}$ 

192 $\overline{35}$ $\overline{33}$ $\overline{34}$ $\overline{44}$ $\overline{45}$ $\overline{55}$ 

192 $\overline{35}$ $\overline{33}$ $\overline{34}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ 

192 $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{44}$ $\overline{45}$ 

192 $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{44}$ $\overline{45}$ 

192 $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{44}$ $\overline{45}$ 

216 $\overline{33}$ $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{44}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ oooo

288 $\overline{33}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{44}$ $\overline{45}$ $\overline{55}$ 

288 $\overline{33}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ 

288 $\overline{33}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{44}$ $\overline{45}$ $\overline{55}$ 

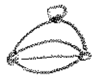
288 $\overline{33}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ 

288 $\overline{34}$ $\overline{33}$ $\overline{34}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ $\overline{55}$ OOOO

288 $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{45}$ $\overline{55}$ 

288 $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{45}$ $\overline{55}$ 

288 $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ 

288 $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{45}$ $\overline{55}$ 

288 $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ 

288 $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ 

288 $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{45}$ $\overline{55}$ 

288 $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ 

288 $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ 

288 $\overline{35}$ $\overline{35}$ $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ 

432 $\overline{33}$ $\overline{34}$ $\overline{34}$ $\overline{45}$ $\overline{45}$ $\overline{55}$ OOOO

Podemos comprobar que:

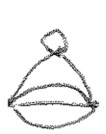
OOOO se repite 2592 veces

888 se repite 3072 veces

8 OOO se repite 648 veces

 se repite 1728 veces

 se repite 216 veces

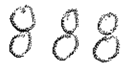
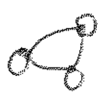
 se repite 3456 veces

 se repite 1728 veces

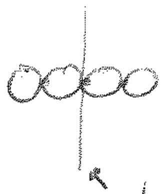
Si llamamos N al número de veces que se repite un diagrama, el coeficiente que acompaña a $(-\lambda)^3$ es:

$$N \cdot \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{4!}\right)^3$$

El factor de simetría es el denominador de este número.

	coeficiente	factor de simetría
	$\frac{1}{32}$	32
	$\frac{1}{3072}$	3072
	$\frac{1}{128}$	128
	$\frac{1}{48}$	48
	$\frac{1}{384}$	384
	$\frac{1}{24}$	24
	$\frac{1}{48}$	48

Como comprobación vamos a calcular los factores de simetría teniendo en cuenta las simetrías de los diagramas:



eje de simetría

$2^4 \cdot 2 = 32$

$2^4 \rightarrow$ cada círculo gira 180°

$2 \rightarrow$ eje de simetría

$8^3 \cdot 3! = 3072$

Cada lóbulo 8, y al permutar 3!

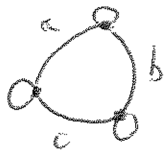
eje de simetría

$8 \cdot 2^3 \cdot 2 = 128$

8 - lóbulo de la izquierda

2^3 - rotación de cada círculo

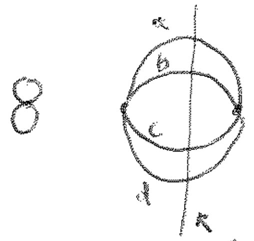
2 - eje de simetría



$2^3 \cdot 3! = 48$

2^3 - rotación de los círculos

3! - permutación de a, b y c.



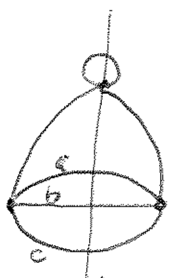
eje de simetría

$8 \cdot 4! \cdot 2 = 384$

8 - lóbulo izquierdo

4! - permutación a, b, c y d

2 - eje de simetría



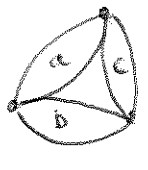
eje de simetría

$3! \cdot 2 \cdot 2 = 24$

3! - permutación a, b y c

$2 \rightarrow$ rotación del círculo

$2 \rightarrow$ eje de simetría



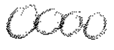
$2^3 \cdot 3! = 48$

2^3 - cada  rota 180°

3! - permutación de los mismos.

Comprobamos que coinciden.

En el "modelo de juguete", cada brazo vale $\frac{1}{m^2}$, entonces

 $= \frac{1}{32} \frac{(-\lambda)^3}{m^{12}}$

 $= \frac{1}{3072} \frac{(-\lambda)^3}{m^{12}}$

 $= \frac{1}{128} \frac{(-\lambda)^3}{m^{12}}$

 $= \frac{1}{48} \frac{(-\lambda)^3}{m^{12}}$

 $= \frac{1}{384} \frac{(-\lambda)^3}{m^{12}}$

 $= \frac{1}{24} \frac{(-\lambda)^3}{m^{12}}$

 $= \frac{1}{48} \frac{(-\lambda)^3}{m^{12}}$

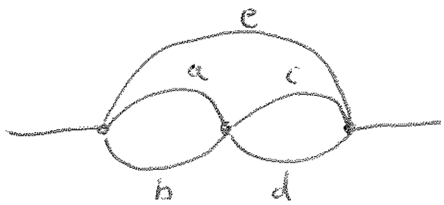
Así:

$\langle \phi^{12} \rangle_0 =$ 

Ejercicio 78.2

Calcular el factor de simetría de la figura:

Esta figura la podemos dibujar también:



Consideramos a, b, c y d el orden de recorrido de los tramos: primero a, segundo b, tercero c y cuarto d. El e lo consideramos "comodín".

Las posibles permutaciones de los brazos a, b, c y d son:

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & d \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} b & c \\ a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & d \\ c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b & c \\ d & a \end{pmatrix}$$

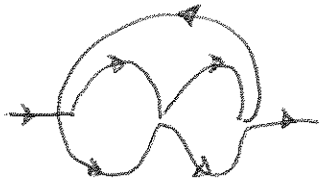
$$\begin{pmatrix} c & b \\ a & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & a \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c & b \\ d & a \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} d & b \\ a & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & c \\ a & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$$

Nos salen $4! = 24$ posibles formas. Vamos a ver que 8 de estas formas son imposibles, lo cual nos dará un factor de simetría 16.

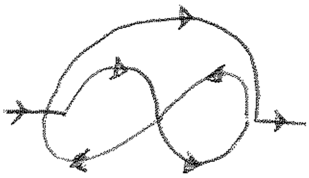
$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$  posible

$\begin{pmatrix} a & d \\ b & c \end{pmatrix}$  posible

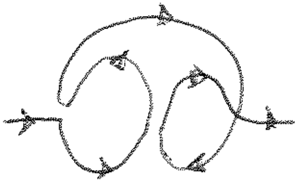
$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$  posible

$\begin{pmatrix} a & d \\ c & b \end{pmatrix}$  posible

$\begin{pmatrix} a & b \\ d & c \end{pmatrix}$  posible

$\begin{pmatrix} a & c \\ d & b \end{pmatrix}$  posible

$\begin{pmatrix} b & c \\ a & d \end{pmatrix}$  posible

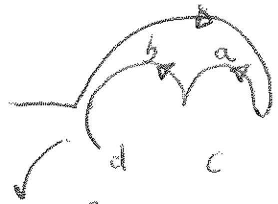
$\begin{pmatrix} b & d \\ a & c \end{pmatrix}$  posible

$\begin{pmatrix} b & a \\ c & d \end{pmatrix}$  posible

$\begin{pmatrix} b & d \\ c & a \end{pmatrix}$

posible

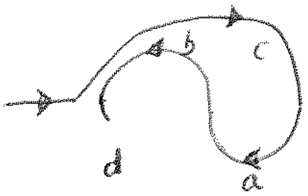
$\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix}$



no puedo pasar a c

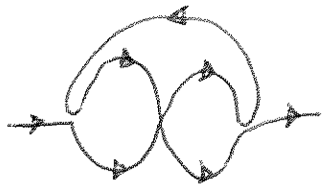
no posible

$\begin{pmatrix} b & c \\ d & a \end{pmatrix}$



no posible

$\begin{pmatrix} c & b \\ a & d \end{pmatrix}$

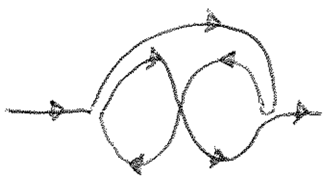


posible

$\begin{pmatrix} c & d \\ a & b \end{pmatrix}$

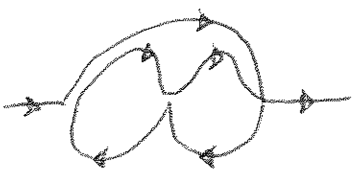
posible

$\begin{pmatrix} c & a \\ b & d \end{pmatrix}$



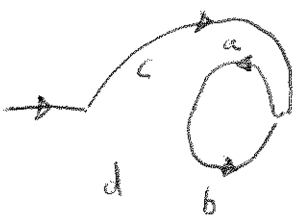
posible

$\begin{pmatrix} c & d \\ b & a \end{pmatrix}$



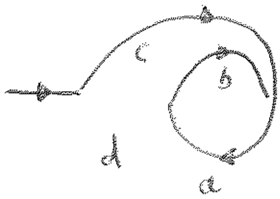
posible

$\begin{pmatrix} c & a \\ d & b \end{pmatrix}$



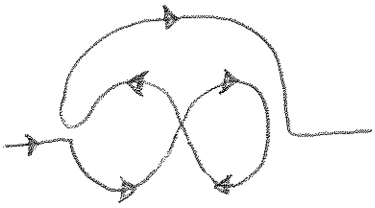
no posible

$\begin{pmatrix} c & b \\ d & a \end{pmatrix}$



no posible

$\begin{pmatrix} d & b \\ a & c \end{pmatrix}$

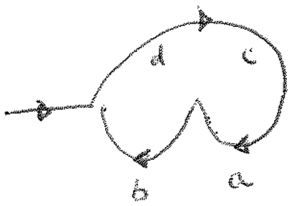


posible

$\begin{pmatrix} d & c \\ a & b \end{pmatrix}$

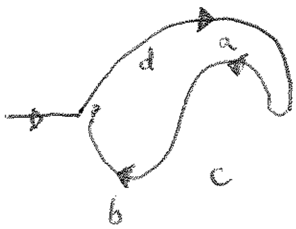
posible

$\begin{pmatrix} d & c \\ b & a \end{pmatrix}$



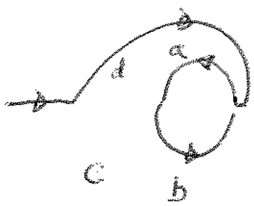
no posible

$\begin{pmatrix} d & a \\ b & c \end{pmatrix}$



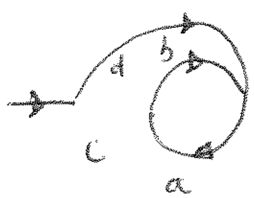
no posible

$\begin{pmatrix} d & a \\ c & b \end{pmatrix}$



no posible

$\begin{pmatrix} d & b \\ c & a \end{pmatrix}$



no posible

De las 24 posibilidades 8 son imposibles, por lo que el factor de simetría es 16. Si no tuviese patas, las podríamos recorrer en sentido inverso y serían 32, que no es el caso.