Sebastián C. Higuera Mesa

Solución ejercicio propuesto capítulo 14

Calcularemos primero la siguiente integral

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} -\frac{1}{2} e^{-|x-x'|} (x')^2 \, dx'$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} (x')^2 e^{-|x-x'|} \, dx'$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \left\{ \underbrace{\int_{-\infty}^{x} (x')^2 e^{(x'-x)} \, dx'}_{x<x'} + \underbrace{\int_{x}^{\infty} (x')^2 e^{(x-x')} \, dx'}_{x>x'} \right\}$$

$$= -\frac{1}{2} \left\{ \int_{-\infty}^{x} (x')^2 e^{(x'-x)} \, dx' + \int_{x}^{\infty} (x')^2 e^{(x-x')} \, dx' \right\}$$

$$\begin{array}{cc} (x')^2 & e^{(x'-x)} \\ 2x' & e^{(x'-x)} \\ 2 & e^{(x'-x)} \\ 0 & e^{(x'-x)} \end{array} \qquad \begin{array}{cc} (x')^2 & e^{(x-x')} \\ 2x' & -e^{(x-x')} \\ 2 & e^{(x-x')} \\ 0 & -e^{(x-x')} \end{array}$$

$$= -\frac{1}{2} \left[(x')^2 e^{(x'-x)} - 2x' e^{(x'-x)} + 2 e^{(x'-x)} \right]_{-\infty}^{x} - \frac{1}{2} \left[-(x')^2 e^{(x-x')} - 2x' e^{(x-x')} - 2 e^{(x-x')} \right]_{x}^{\infty}$$

$$f(x) = -\frac{1}{2} \left[x^2 - 2x + 2 \right] + \frac{1}{2} \left[-x^2 - 2x - 2 \right]$$

$$= -\frac{x^2}{2} + \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}} - \frac{x^2}{2} - \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}} - \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}$$

$$= -\frac{2x^2}{2} - 2$$

$$\boxed{f(x) = -x^2 - 2}$$

Ahora para comprobar que $f(x) = -x^2 - 2$ es solución de la ecuación diferencial podemos calcular:

$$f'(x) = -2x$$

$$f''(x) = -2$$

entonces

$$f''(x) - f(x) = g(x)$$

$$-2 - (-x^2 - 2) = g(x)$$

$$-\cancel{2} + x^2 + \cancel{2} = g(x)$$

$$\boxed{x^2 = g(x)}$$

Por lo que podemos concluir que $f(x)$ es solución de la ecuación diferencial.