Ejercicio 1

Encontrar la ec. de Schwinger-Dyson para la acción:

$$S[\phi] = \frac{M^2}{2}\phi^2 + \frac{\lambda}{24}\phi^4 \quad \text{(con interacciones)}$$

$$S'[\phi] = m^2\phi + \frac{\lambda}{6}\phi^3$$

La incógnita de la ec. de Schwinger-Dyson es

$$Z[J] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi] + J\phi}\, d\phi$$

Cada vez que la derive, "sacaré" un ϕ. Como $S'[\phi]$ tiene ϕ elevado a 3, tendré que derivar 3 veces (es decir, me quedaré en función de la derivada tercera)

$$Z'[J] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi] + J\phi} \cdot \phi\, d\phi$$

$$Z''[J] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi] + J\phi}\, \phi^2\, d\phi$$

$$Z'[J] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi] + J\phi}\, \phi^3\, d\phi$$

Ahora calculo lo que me va a quedar la siguiente integral en términos de $Z[J]$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi] + J\phi} \cdot S'[\phi]$$

→

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi]+J\phi} \cdot S'[\phi] = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi]+J\phi} \cdot \left(m^2\phi + \frac{\lambda}{6}\phi^3\right) d\phi$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi]+J\phi} m^2\phi + \int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi]+J\phi} \cdot \frac{\lambda}{6}\phi^3$$

$$= m^2 \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi]+J\phi} \phi}_{Z'} + \frac{\lambda}{6} \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi]+J\phi} \phi^3}_{Z'''}$$

$$\boxed{= m^2 Z'[J] + \frac{\lambda}{6} Z'''[J]}$$

Ahora ponemos en función de $Z[J]$ la integral de la izquierda de la igualdad.

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi]+J\phi} \left(-S'[\phi] + J\right)$$

Si tuviera lo que está en verde, la integral sería inmediata porque sería de la forma $\int e^{f} \cdot f'$

$$-\int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi]+J\phi} \cdot (-S'[\phi]) - e^{-S[\phi]+J\phi} J + e^{-S[\phi]+J\phi} J$$

Se lo añado y se lo quito para que quede igual.

$$= -\int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi]+J\phi} \left(-S'[\phi] + J\right) - e^{-S[\phi]+J\phi} \cdot J$$

$$= -\underbrace{\left[e^{-S[\phi]+J\phi}\right]_{-\infty}^{\infty}}_{=0} + \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-S[\phi]+J\phi}}_{=Z[J]} \cdot J = \boxed{Z[J] \cdot J}$$

$$\boxed{J\, Z[J] = m^2 Z'[J] + \frac{\lambda}{6} Z'''[J]}$$

c.q.d.

Ejercicio 2

Calcular $\langle \phi^2 \rangle$ a orden dos.

$$\langle \phi^2 \rangle \simeq \frac{1}{m^2} - \frac{1}{2m^6}\lambda + \bigcirc \, \lambda^2$$

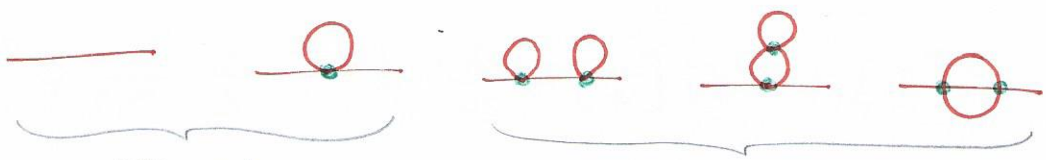
a) Con Diagramas de Feynmann
b) Cálculo directo.

a) Diagramas de Feynmann

 Propagador: $\frac{1}{m^2}$ — Elevado al nº de líneas que "llegan a un vértice".

 Vértice, punto de interacción: $(-\lambda)$

 Factor de simetría: $\frac{1}{2}$ — los extremo libres no se pueden mover

$\langle \phi^2 \rangle =$ 

1er orden — 2º orden

 $\frac{1}{m^2}$

 $\left(\frac{1}{m^2}\right)^3 (-\lambda) \cdot \frac{1}{2} = -\frac{\lambda}{2m^6}$

 $\left(\frac{1}{m^2}\right)^5 (-\lambda)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{4m^{10}}$

 $\left(\frac{1}{m^2}\right)^5 (-\lambda)^2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{\lambda}{4m^{10}}$

 $\left(\frac{1}{m^2}\right)^5 (-\lambda)^2 \cdot \frac{1}{6}$ → Posibilidades de ir de un extremo a otro y volver yendo siempre por caminos distintos. En cada camino completo (ida y vuelta) nunca pasados dos veces por el mismo de los del medio.

$$\boxed{\langle \phi^2 \rangle \simeq \frac{1}{m^2} - \frac{\lambda}{2m^6} + \frac{2\lambda^2}{3m^{10}}}$$

b) Cálculo directo.

$$\boxed{\langle \phi^2 \rangle = \frac{Z''[0]}{Z[0]}}$$

los pasos que he seguido Javier:

$$Z[J] = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, e^{-\frac{m^2}{2}\phi^2 + J\phi}}_{\text{Esto es } Z_0[J]} \cdot \underbrace{e^{-\frac{\lambda}{4!}\phi^4}}_{\text{lo desarrollamos como un polinomio de Taylor de orden dos}}$$

Entonces:

$$Z[J] \simeq Z_0[J] - \frac{\lambda}{24} \underbrace{\boxed{\phi^4}}_{= Z_0^{iv}[J]} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2} \underbrace{\boxed{\phi^8}}_{= Z_0^{viii}[J]}$$

Evaluando en cero, reordenando y conociendo el valor de $\frac{Z_0^p[0]}{Z_0[0]} = \langle \phi^p \rangle_0 =$ lo sabemos para cada p par.

obtenemos:

$$\boxed{Z[0] \simeq Z_0[0] \left(1 - \frac{\lambda}{24} \underbrace{\frac{3}{m^4}}_{= \frac{Z_0^{iv}[0]}{Z_0[0]} = \langle \phi^4 \rangle_0} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2} \cdot \underbrace{\frac{7 \cdot 5 \cdot 3}{m^8}}_{= \frac{Z_0^{viii}[0]}{Z_0[0]} = \langle \phi^8 \rangle_0} \right)}$$

Ya tenemos el denominador

El numerador:

$$Z''[J] = Z_0''[J] - \frac{\lambda}{24} Z_0^{VI}[J] + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2} Z^{X}[J]$$

Volviendo a hacer los cálculos de igual forma que hicimos para $Z[0]$:

$$\boxed{Z''[0] \simeq Z_0[0]\left(\langle\phi^2\rangle_0 - \frac{\lambda}{24}\langle\phi^6\rangle_0 + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\langle\phi^{10}\rangle_0 \right)}$$

$$\langle\phi^2\rangle_0 = \frac{1}{m^2} = \frac{Z_0''[0]}{Z_0[0]} \qquad \langle\phi^6\rangle_0 = \frac{5\cdot 3}{m^6} = \frac{Z_0^{VI}[0]}{Z_0[0]} \qquad \langle\phi^{10}\rangle_0 = \frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{m^{10}} = \frac{Z_0^{X}[0]}{Z_0[0]}$$

Tenemos el numerador

Entonces la función de λ que tenemos que expresar como un polinomio de Taylor:

$$\boxed{\langle\phi^2\rangle \simeq \frac{\frac{1}{m^2} - \frac{\lambda}{24}\cdot\frac{5\cdot 3}{m^6} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\cdot\frac{9\cdot 7\cdot 5\cdot 3}{m^{10}}}{1 - \frac{\lambda}{24}\frac{3}{m^4} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\cdot\frac{7\cdot 5\cdot 3}{m^8}}} \equiv P(\lambda)$$

$$\boxed{\langle\phi^2\rangle \simeq P(0) + P'(0)\cdot\lambda + \frac{1}{2}P''(0)\cdot\lambda^2}$$

Con $P(0) = \frac{1}{m^2}$

$$P'(0) = \frac{-1}{2m^6}$$

Nos falta calcular $P''(0)$ y tendremos el polinomio de Taylor que buscábamos.

$$P'(\lambda) = \frac{\left(\frac{-15}{24m^6} + \frac{\lambda}{24^2}\cdot\frac{945}{m^{10}}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{24}\frac{3}{m^4} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\cdot\frac{105}{m^8}\right) - \left(\frac{-3}{24m^4} + \frac{\lambda}{24^2}\cdot\frac{105}{m^8}\right)\left(\frac{1}{m^2} - \frac{\lambda}{24}\cdot\frac{15}{m^6} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24}\cdot\frac{945}{m^{10}}\right)}{\left(1 - \frac{\lambda}{24}\cdot\frac{3}{m^4} + \frac{1}{2}\frac{\lambda^2}{24^2}\cdot\frac{105}{m^8}\right)^2} =$$

$=$ Simplificado queda $= -192\,\dfrac{m^2\left(384m^8 - 1120m^4\lambda + 35\lambda^2\right)}{\left(384m^8 - 48m^4\lambda + 35\lambda^2\right)^2}$

$$P''(\lambda) = \frac{-192m^2\left(-1120m^4 + 70\lambda\right)\left(384m^8 - 48m^4\lambda + 35\lambda^2\right)^{\cancel{2}} - 2\cancel{\left(384m^8 - 48m^4\lambda + 35\lambda^2\right)}\left(-48m^4 + 70\lambda\right)\left(-192m^2\left(384m^8 - 1120m^4\lambda + 35\lambda^2\right)\right)}{\left(384m^8 - 48m^4\lambda + 35\lambda^2\right)^{\cancel{4}\,3}}$$

$$P''(0) = \frac{-192\left(-1120m^4\right)\left(\cancel{384m^8}\right) - 2\left(-48m^4\right)\left(-192m^2\right)\left(\cancel{384m^8}\right)}{\left(384m^8\right)^{\cancel{3}\,2}}$$

$$= \frac{(-192)(-1120)m^6 - 2(-48)(-192)m^6}{384^2 m^{16}} = \frac{(215040 - 18432)m^6}{384^2 m^{16}}$$

$$= \boxed{\frac{4}{3m^{10}}} = P''(0)$$

Finalmente:

$$\boxed{\langle \phi^2 \rangle \simeq \frac{1}{m^2} - \frac{\lambda}{2m^6} + \frac{2}{3m^{10}}\lambda^2}$$

Que es lo que habíamos obtenido con los Diagramas de Feynmann.

:)