Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 76

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

15 de mayo de 2022

1. Demostrar la relación $\phi(t,\vec{x}) = e^{itH}\phi(0,\vec{x})e^{-itH}$

Usando la definición 66.2

$$\phi(t,\vec{x}) = \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\right)\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \tag{1}$$

Y, por lo tanto se sigue que

$$\phi(0,\vec{x}) = \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(a(\vec{k})e^{i\vec{k}\vec{x}} + a^\dagger(\vec{k})e^{-i\vec{k}\vec{x}}\right)\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \tag{2}$$

Y haciendo la evolución temporal de éste operador obtenemos

$$e^{itH}\phi(0,\vec{x})e^{-itH} = \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\left(e^{itH}a(\vec{k})e^{-itH}e^{i\vec{k}\vec{x}} + e^{itH}a^\dagger(\vec{k})e^{-itH}e^{-i\vec{k}\vec{x}}\right)\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \tag{3}$$

Por lo que necesitamos calcular la evolución temporal de los operadores a y $a^\dagger$. Usando la definición de Hamiltoniano dado en la fórmula 68.2

$$H = \int \omega_k a^\dagger(\vec{k})a(\vec{k})\frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \tag{4}$$

Notemos que sumar o restar una constante al anterior Hamiltoniano es irrelevante, pues si consideramos el Hamiltoniano $H + E_0$, entonces, dado un operador $\hat{A}$ arbitrario tenemos

$$e^{it(H+E_0)}\hat{A}e^{-it(H+E_0)} = e^{itH}e^{itE_0}\hat{A}e^{-itH}e^{-itE_0} = e^{itH}\hat{A}e^{-itH}e^{itE_0}e^{-itE_0} = e^{itH}\hat{A}e^{-itH}$$

Por lo tanto tenemos que calcular el operador $e^{itH}a(\vec{k})e^{-itH}$, usando la fórmula 76.1 podemos reescribir este operador cómo

$$e^{itH}a(\vec{k})e^{-itH} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(it)^n}{n!}C_n, \qquad C_0 = a(\vec{k}), \quad C_n = [H, C_{n-1}] \tag{5}$$

Por lo que necesitamos calcular los operadores C_n;

$$C_0 = a(\vec{k})$$

$$\begin{aligned} C_1 = [H, C_0] = \left[H, a(\vec{k})\right] &= \int \omega_q \left[a^\dagger(\vec{q})a(\vec{q}), a(\vec{k})\right]\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} = \int \omega_q \left[a^\dagger(\vec{q}), a(\vec{k})\right]a(\vec{q})\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} \\ &= -\int \omega_q (2\pi)^3\delta^{(3)}(\vec{k}-\vec{q})a(\vec{q})\frac{\mathrm{d}^3q}{(2\pi)^3} = -\omega_k a(\vec{k}) \end{aligned}$$

Por lo que vemos que C_1 es proporcional a C_0, por lo que siguiendo la recursión podemos llegar a la expresión $C_n = (-\omega_k)^n a(\vec{k})$. En efecto, supongamos que dicha fórmula es correcta para $n-1$, entonces

$$C_n = [H, C_{n-1}] = \left[H, \omega_k^{n-1}a(\vec{k})\right] = (-\omega_k)^{n-1}\left[H, a(\vec{k})\right] = (-\omega_k)^n a(\vec{k})$$

Por lo que podemos reescribir la ecuación (5) como

$$e^{itH}a(\vec{k})e^{-itH} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(it)^n}{n!}C_n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-it\omega_k)^n}{n!}a(\vec{k}) = e^{-i\omega_k t}a(\vec{k}) \tag{6}$$

Por otra parte, calculando el operador adjunto del anterior obtenemos

$$\left(e^{itH}a(\vec{k})e^{-itH}\right)^\dagger = e^{itH}a^\dagger(\vec{k})e^{-itH} = \left(e^{-i\omega_k t}a(\vec{k})\right)^\dagger = e^{i\omega_k t}a^\dagger(\vec{k}) \tag{7}$$

Sustituyendo ambas expresiones en la ecuación (3), nos queda finalmente

$$\begin{aligned} e^{itH}\phi(0,\vec{x})e^{-itH} &= \int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a(\vec{k})e^{-i\omega_k t}e^{i\vec{k}\vec{x}} + a^\dagger(\vec{k})e^{i\omega_k t}e^{-i\vec{k}\vec{x}}\right) \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} \\ &\int \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a(\vec{k})e^{-ikx} + a^\dagger(\vec{k})e^{ikx}\right) \frac{\mathrm{d}^3k}{(2\pi)^3} = \phi(t,\vec{x}) \end{aligned}$$

Que es precisamente la ecuación que queríamos demostrar, por lo que efectivamente el campo ϕ es un operador en la representación de Heisenberg.

2. Demostrar que $|\psi(t)\rangle_I = e^{itH_{0,S}}e^{-i(t-t')H_S}e^{-it'H_{0,S}}\,|\psi(t')\rangle_I$

La evolución temporal de los estados en la representación de interacción viene dada por la fórmula 76.4;

$$|\psi(t)\rangle = e^{itH_0}e^{-itH_S}\,|\psi(0)\rangle \tag{8}$$

Esto lo podemos escribir de forma completamente equivalente como

$$|\psi(0)\rangle = e^{itH_S}e^{-itH_0}\,|\psi(t)\rangle$$

Ambas expresiones son correctas para cualquier valor de t, pero notemos que el estado $|\psi(0)\rangle$ es independiente de cual sea el valor de t, por lo que podemos encontrar la relación entre $|\psi(t)\rangle$ y $|\psi(t')\rangle$ juntando ambas expresiones:

$$|\psi(t)\rangle = e^{itH_0}e^{-itH_S}\,|\psi(0)\rangle = e^{itH_0}e^{-itH_S}e^{it'H_S}e^{-it'H_0}\,|\psi(t')\rangle \tag{9}$$

Usando la fórmula de Baker-Campbell-Hausdorff (57.1), debido a que $[H_S, H_S] = 0$ podemos escribir

$$e^{-itH_S}e^{it'H_S} = e^{-iH_S(t-t')}$$

Por lo que llegamos al resultado final;

$$|\psi(t)\rangle = e^{itH_0}e^{-itH_S}\,|\psi(0)\rangle = e^{itH_0}e^{-i(t-t')H_S}e^{-it'H_0}\,|\psi(t')\rangle \tag{10}$$