Ejercicio:

Resolver: $$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{-1}{2} e^{-|x-x'|} (x')^2 \, dx'$$

y comprobar que cumple $f''(x) - f(x) = x^2$

$$f(x) = \frac{-1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x-x'|} (x')^2 \, dx'$$

$$= \frac{-1}{2} \left(\underbrace{\int_{-\infty}^{x} e^{x'-x} (x')^2 \, dx'}_{I_1} + \underbrace{\int_{x}^{\infty} e^{x-x'} (x')^2 \, dx'}_{I_2} \right)$$

$$= \frac{-1}{2} \left(I_1 + I_2 \right)$$

* $$\boxed{I_1} = \int_{-\infty}^{x} e^{x'-x} (x')^2 \, dx' = \left\{ \begin{array}{ll} u = (x')^2 & du = 2x' dx' \\ dv = e^{x'-x} dx' & v = e^{x'-x} \end{array} \right\}$$

$$= (x')^2 \cdot e^{x'-x} - \int 2x' e^{x'-x} \, dx' = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x' & du = 2 \\ dv = e^{x'-x} & v = e^{x'-x} \end{array} \right\}$$

$$= (x')^2 e^{x'-x} - \left(2x' e^{x'-x} - 2 e^{x'-x} \right)$$

$$= \left[e^{x'-x} \left((x')^2 - 2x' + 2 \right) \right]_{x'=-\infty}^{x'=x}$$

$$= \boxed{x^2 - 2x + 2}$$

$$\boxed{I_2} = \int_x^{\infty} e^{x-x'} (x')^2 \, dx' = \left\{ \begin{array}{ll} u = (x')^2 & du = 2x' \\ dv = e^{x-x'} dx' & v = -e^{x-x'} \end{array} \right\}$$

$$= -(x')^2 e^{x-x'} + \int 2 e^{x-x'} \cdot x' \, dx' = \left\{ \begin{array}{ll} u = 2x' & du = 2 \\ dv = e^{x-x'} & v = -e^{x-x'} \end{array} \right\}$$

$$= -(x')^2 e^{x-x'} + \left(-2x' e^{x-x'} - 2 \int -e^{x-x'} dx' \right)$$

$$= -(x')^2 e^{x-x'} - 2x' e^{x-x'} - 2 e^{x-x'}$$

$$= e^{x-x'} \left(-(x')^2 - 2x' - 2 \right) \Big]_{x'=x}^{x'=\infty}$$

$$= -\left(-x^2 - 2x - 2 \right) = \boxed{x^2 + 2x + 2}$$

Entonces, como $f(x) = \frac{-1}{2} (I_1 + I_2)$:

$$\boxed{f(x) = \frac{-1}{2} \left(x^2 - \cancel{2x} + 2 + x^2 + \cancel{2x} + 2 \right) = -x^2 - 2}$$

Comprobamos que cumple: $\boxed{f''(x) - f(x) = x^2}$

$$\left. \begin{array}{l} f'(x) = -2x \\ f''(x) = -2 \end{array} \right\} \qquad \underbrace{-2}_{f''(x)} - \underbrace{\left(-x^2 - 2 \right)}_{f(x)} = \boxed{x^2}$$

→ Para resolver las integrales hemos aplicado que $\int u \cdot dv = uv - \int v \cdot du$. No he escrito los límites de integración para que quedara más limpio.

→ Al evaluar las integrales entre los límites: $e^{\infty} \cdot (x^{\infty} \ldots)$ → $0 \cdot \infty$ ← "pesa" más la exp