Calculamos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi \, e^{-\lambda \phi^4}$$ (prescindimos del factor 4! para facilitar los cálculos.)

Como $e^{-\lambda\phi^4}$ es par:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi \, e^{-\lambda\phi^4} = 2\int_0^{\infty} d\phi \, e^{-\lambda\phi^4}$$

Hacemos el cambio de variable:

$$y = \sqrt{\lambda}\,\phi^2 \qquad \phi = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/4}\sqrt{y} \qquad dy = 2\lambda^{1/4}\sqrt{y}\,d\phi$$

Sustituyendo:

$$2\int_0^{\infty} \frac{dy}{2\lambda^{1/4}\sqrt{y}}\, e^{-y^2} = \frac{1}{\lambda^{1/4}}\int_0^{\infty} \frac{e^{-y^2}}{\sqrt{y}}\,dy$$

(se mantienen los límites de integración)

Hacemos otro cambio de variable:

$$y^2 = t \qquad y = \sqrt{t} \qquad dy = \frac{dt}{2\sqrt{t}}$$

Sustituyendo:

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/4}\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{t^{1/4}}\,\frac{dt}{2t^{1/2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/4}\int_0^{\infty} t^{-3/4}e^{-t}\,dt$$

(se mantienen los límites de integración)

La integral es la función gamma de Euler con $z = 1/4$.

$$\int_0^\infty t^{-3/4} e^{-t} dt = \Gamma(\tfrac{1}{4})$$

$\Gamma(\frac{1}{4}) = 3.625609\ldots$ es un número trascendente como $\pi, \sqrt{\pi}, \ldots$

Entonces:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, e^{-\lambda\phi^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{1/4} \Gamma(\tfrac{1}{4})$$

Vamos a calcular ahora, siguiendo los mismos pasos:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \phi^2 e^{-\lambda\phi^4} = 2\int_0^\infty d\phi\, \phi^2 e^{-\lambda\phi^4} \quad (\phi^2 \text{ es par})$$

Hacemos 1er cambio de variable:

$$2\int_0^\infty \frac{y}{\sqrt{\lambda}} e^{-y^2} \frac{dy}{2\lambda^{1/4}\sqrt{y}} = \left(\frac{1}{\lambda}\right)^{3/4} \int_0^\infty \sqrt{y}\, e^{-y^2} dy$$

Hacemos 2º cambio de variable:

$$\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{3/4} \int_0^\infty t^{1/4} e^{-t} \frac{dt}{2t^{1/2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{3/4} \int_0^\infty t^{-1/4} e^{-t} dt$$

La integral es la función gamma de Euler con $z = \frac{3}{4}$.

$$\int_0^\infty t^{-\frac{1}{4}} e^{-t} dt = \Gamma(\tfrac{3}{4})$$

Luego:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \phi^2 e^{-\lambda\phi^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{3/4} \Gamma\left(3/4\right)$$

Repitiendo estos mismos pasos podemos calcular:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \phi^4 e^{-\lambda\phi^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{5/4} \Gamma\left(5/4\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \phi^6 e^{-\lambda\phi^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{7/4} \Gamma\left(7/4\right)$$

Vemos que hay una recurrencia, por lo que podemos expresar:

$$\int_{-\infty}^{\infty} d\phi\, \phi^{2n} e^{-\lambda\phi^4} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\lambda}\right)^{\frac{2n+1}{4}} \Gamma\left(\frac{2n+1}{4}\right) \qquad n = 0, 1, 2, \dots$$

Por las propiedades de $\Gamma(z)$ podemos expresar todas las integrales en función de $\Gamma(1/4)$:

Para $\Gamma(3/4)$ existe la fórmula complemento de Euler:

$$\Gamma(x)\,\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\pi x}$$

con x, $1-x$ no negativo y distinto de cero

$$\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\pi}{\operatorname{sen}\frac{\pi}{4}} \qquad \Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}\,\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

Para $z = \frac{5}{4}, \frac{9}{4}, \frac{13}{4}, \frac{17}{4}, \ldots$

$$\Gamma\left(n+\frac{1}{4}\right) = \frac{1\cdot 5\cdot 9 \cdot \ldots (4n-3)}{4^n}\,\Gamma\left(\frac{1}{4}\right), \quad n \text{ entero positivo}$$

Para $z = \frac{7}{4}, \frac{11}{4}, \frac{15}{4}, \frac{19}{4}, \ldots$

$$\Gamma(1+z) = z\,\Gamma(z)$$

$$\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = \Gamma\left(1+\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{4}\,\frac{\sqrt{2}\,\pi}{\Gamma(1/4)}$$

$$\Gamma\left(\frac{11}{4}\right) = \Gamma\left(1+\frac{7}{4}\right) = \frac{7}{4}\Gamma\left(\frac{7}{4}\right) = \frac{7\cdot 3}{4\cdot 4}\,\frac{\sqrt{2}\,\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

$$\Gamma\left(\frac{15}{4}\right) = \Gamma\left(1+\frac{11}{4}\right) = \frac{11}{4}\Gamma\left(\frac{11}{4}\right) = \frac{11\cdot 7\cdot 3}{4\cdot 4\cdot 4}\,\frac{\sqrt{2}\,\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}$$

Entonces:

$$\Gamma\left(n+\frac{3}{4}\right) = \Gamma\left(\frac{4n+3}{4}\right) = \frac{3\cdot 7\cdot 11\cdot \ldots (4n-1)}{4^n}\cdot\frac{\sqrt{2}\,\pi}{\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)}, \quad n \text{ entero positivo}$$

Todas las integrales se pueden expresar en función de $\Gamma\left(\frac{1}{4}\right)$.