RODOLFO GUIDOBONO	CURSO TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS J. GARCÍA - EJERCICIO CAP. 31	HOJA N° 1 FECHA 27/12/18

Buscar el operador $\hat{S}_{(b)}$ tal que transforme al operador $\hat{x}$

$$S_{(b)} \hat{x} S_{(b)}^{\dagger} = e^{b} \hat{x} \quad \text{donde } b \in \mathbb{C} \quad b = r e^{i\theta}$$

$S_{(b)} = e^{bA}$ como S es unitario $S^{\dagger} S = I$

$$(e^{bA})^{\dagger} (e^{bA}) = e^{b^* A^{\dagger}} e^{bA} = I \Rightarrow b^* A^{\dagger} + bA = 0 \quad (1)$$

$$S_{(b)} = e^{bA} \approx I + bA$$

$$S_{(b)} x S_{(b)}^{\dagger} = (I + bA) x (I + b^* A^{\dagger}) = (x + bAx)(I + b^* A^{\dagger})$$

$$= x + b^* x A^{\dagger} + bAx + bb^* A x A^{\dagger}$$

si usamos un b muy pequeño tal que $\|b\|^2 = bb^* << 1$

$$= x + x \underbrace{b^* A^{\dagger}}_{= -bA \text{ (por (1))}} + bAx = x - bxA + bAx \quad (2)$$

$$e^{b} x \approx (1 + b) x = x + bx \quad (3)$$

$(2) = (3) \quad x - bxA + bAx = x + bx$

$$x + b[A, x] = x + bx \Rightarrow [A, x] = x$$

si $b \in \mathbb{R} \Rightarrow A = \dfrac{px + xp}{-2i\hbar} = \dfrac{1}{2}(a^2 - a^{\dagger 2})$

pero si $b \in \mathbb{C}$ A no cumple (1) $e^{-i\theta} A^{\dagger} + e^{i\theta} A = 0$

Probablemente A sea una función polinómica de $p^n, x^m, (px)^t$

intenté seguir este camino, sin éxito.

Asumo que A, de todos modos, terminará siendo una función de los operadores a^2 y $a^{\dagger 2}$ similar a la obtenida para el caso de $b \in \mathbb{R}$

$$A = \frac{1}{2}(\alpha a^2 - \beta a^{\dagger 2}) \quad \alpha, \beta \in \mathbb{C}$$

$$A^{\dagger} = \frac{1}{2}(\alpha^* a^{\dagger 2} - \beta^* a^2)$$

NOTA

por (1) $e^{-i\theta}A^{+} + e^{i\theta}A = 0$

$$e^{-i\theta}\left[\frac{1}{2}\left(\alpha^{*}a^{+2} - \beta^{*}a^{2}\right)\right] + e^{i\theta}\left[\frac{1}{2}\left(\alpha a^{2} - \beta a^{+2}\right)\right] = 0$$

reordenando

$$a^{2}\left(\alpha e^{i\theta} - \beta^{*}e^{-i\theta}\right) + a^{+2}\left(\alpha^{*}e^{-i\theta} - \beta e^{i\theta}\right) = 0$$

entonces $\alpha e^{i\theta} - \beta^{*}e^{-i\theta} = 0$

$$\alpha^{*}e^{-i\theta} - \beta e^{i\theta} = 0 \xrightarrow[\text{trasponiendo}]{} \alpha e^{+i\theta} - \beta^{*}e^{-i\theta} = 0$$

$$\alpha = \beta^{*}e^{-2i\theta} \Rightarrow A = \frac{1}{2}\left(\beta^{*}e^{-2i\theta}a^{2} - \beta a^{+2}\right)$$

$$S = e^{re^{i\theta}\frac{1}{2}\left(\beta^{*}e^{-2i\theta}a^{2} - \beta a^{+2}\right)}$$

esta función debería ser aplicable para el caso de $b \in \mathbb{R} \Rightarrow b = r$

$S(b) = e^{b\,1/2\left(\beta^{*}a^{2} - \beta a^{+2}\right)}$ comparando con lo explicado en el curso, se llega a que $\beta = 1$

$$\boxed{S_{(b)} = e^{b/2\left(e^{-2i\theta}a^{2} - a^{+2}\right)}} \qquad b = re^{i\theta}$$