Ejercicio Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 61

Autor del curso: Javier García

Ejercicio resuelto por Miguel A. Montañez

10 de abril de 2021

Ejercicio 61. Demostrar que $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ en $U(1)$

Partimos del tensor de curvatura $\mathcal{F}_{\mu\nu} = [D_\mu, D_\nu]$ y lo aplicamos a un vector cualquiera Ψ del espacio interno:

$$\mathcal{F}_{\mu\nu}\Psi = [D_\mu, D_\nu]\Psi = D_\mu D_\nu \Psi - D_\nu D_\mu \Psi$$

En $U(1)$ $D_\mu = \partial_\mu - igA_\mu I$ y $\mathcal{F}_{\mu\nu} = -igF_{\mu\nu}I$, donde g es la constante de acoplamiento e I la matriz identidad. (Ésta última la obviamos ya que $I\Psi = \Psi$) Entonces:

$$-igF_{\mu\nu}\Psi = (\partial_\mu - igA_\mu)(\partial_\nu - igA_\nu)\Psi - (\partial_\nu - igA_\nu)(\partial_\mu - igA_\mu)\Psi$$

Primero hacemos:

$$(\partial_\mu - igA_\mu)(\partial_\nu - igA_\nu)\Psi = \partial_\mu\partial_\nu\Psi - ig(\partial_\mu A_\nu)\Psi - igA_\nu\partial_\mu\Psi - igA_\mu\partial_\nu\Psi - g^2 A_\mu A_\nu \Psi$$

Luego hacemos:

$$(\partial_\nu - igA_\nu)(\partial_\mu - igA_\mu)\Psi = \partial_\nu\partial_\mu\Psi - ig(\partial_\nu A_\mu)\Psi - igA_\mu\partial_\nu\Psi - igA_\nu\partial_\mu\Psi - g^2 A_\nu A_\mu \Psi$$

Como suponemos que $\partial_\mu\partial_\nu\Psi = \partial_\nu\partial_\mu\Psi$, y A_μ y A_ν son números, al restar nos queda:

$$-igF_{\mu\nu}\Psi = -ig(\partial_\mu A_\nu)\Psi + ig(\partial_\nu A_\mu)\Psi = -ig(\partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu)\Psi$$

De aquí se deduce que:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$$