$$\text{cosa} = -6\phi_1^2 - 6\phi_2^2 - 6\phi_3^2 - \sqrt{2}\phi_1\phi_2 - \sqrt{2}\phi_2\phi_3$$

a) Encontrar la matriz A tal que

$$[\phi_1\ \phi_2\ \phi_3]\begin{bmatrix} & & \\ & A & \\ & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} = \text{cosa}$$

como "cosa" no es un vector, entonces A debe ser una matriz 3x3 así:

$$A = \begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}$$

luego

$$[A]\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} a\phi_1 + b\phi_2 + c\phi_3\\ d\phi_1 + e\phi_2 + f\phi_3\\ g\phi_1 + h\phi_2 + i\phi_3\end{bmatrix}$$

y

$$[\phi_1\ \phi_2\ \phi_3][A]\begin{bmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix} =$$

$$[\phi_1\ \phi_2\ \phi_3]\begin{bmatrix} a\phi_1 + b\phi_2 + c\phi_3\\ d\phi_1 + e\phi_2 + f\phi_3\\ g\phi_1 + h\phi_2 + i\phi_3\end{bmatrix}$$

$$= \phi_1(a\phi_1 + b\phi_2 + c\phi_3) + \phi_2(d\phi_1 + e\phi_2 + f\phi_3) + \phi_3(g\phi_1 + h\phi_2 + i\phi_3)$$

$$= a\phi_1^2 + b\phi_1\phi_2 + c\phi_1\phi_3 + d\phi_1\phi_2 + e\phi_2^2 + f\phi_2\phi_3 + g\phi_1\phi_3 + h\phi_2\phi_3 + i\phi_3^2$$

$$= a\phi_1^2 + e\phi_2^2 + i\phi_3^2 + (b+d)\phi_1\phi_2 + (c+g)\phi_1\phi_3 + (f+h)\phi_2\phi_3$$

y el enunciado requiere que esto último sea igual a

$$-6\phi_1^2 - 6\phi_2^2 - 6\phi_3^2 - \sqrt{2}\phi_1\phi_2 - \sqrt{2}\phi_2\phi_3$$

así que ya podemos deducir que:

$a = -6$
$e = -6$
$i = -6$
$b + d = -\sqrt{2}$
$c + g = 0$
$f + h = -\sqrt{2}$

estas ecuaciones son insuficientes para determinar de forma única nuestra matriz, pero a efectos de asegurar que la matriz sea diagonalizable impondremos la restricción adicional de que sea simetrica;

en términos de sus elementos

i) $b = d$
ii) $c = g$
iii) $f = h$

que añadidas a las 3 últimas ecuaciones

iv) $b + d = -\sqrt{2}$
v) $c + g = 0$
vi) $f + h = -\sqrt{2}$

forman un sistema de ecuaciones completo que procedemos a resolver así

de i en iv

$b + b = \sqrt{2}$
$\Rightarrow 2b = \sqrt{2}$
$\Rightarrow b = \sqrt{2}/2$
$d = \sqrt{2}/2$ de i)

de ii y v

$c + c = 0$
$\Rightarrow 2c = 0$
$\Rightarrow c = 0$
$g = 0$ de ii

de iii y vi

$f + f = -\sqrt{2}$
$\Rightarrow 2f = -\sqrt{2}$
$f = -\sqrt{2}/2 = h$

luego

$$A = \begin{bmatrix} -6 & \sqrt{2}/2 & 0\\ \sqrt{2}/2 & -6 & -\sqrt{2}/2\\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -6\end{bmatrix}$$

b) diagonalizar A

debemos hallar los valores λ y los vectores v tal que

$$[A][v] = \lambda[v]$$

$$\Rightarrow [A][v] - \lambda[v] = 0$$

$$\Rightarrow [A][v] - \lambda[I][v] = 0$$

con $[I] = \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$

$$\Rightarrow ([A] - \lambda[I])[v] = [0]$$

sistema de ecuaciones en donde el det de la matriz $[A] - \lambda[I]$ debe ser igual a cero para que sea un sistema indeterminado

osea

$$\det([A] - \lambda[I]) = 0$$

para nuestro caso

$$\det\left(\begin{bmatrix} -6-\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -6-\lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -6-\lambda\end{bmatrix}\right) = 0$$

$$
\begin{array}{ccc}
(-6-\lambda) & \sqrt{2}/2 & 0 \\
\frac{\sqrt{2}}{2} & (-6-\lambda) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\
0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & (-6-\lambda) \\
(-6-\lambda) & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\
\frac{\sqrt{2}}{2} & -6-\lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2}
\end{array}
$$

la determinante es

$(-6-\lambda)^3 - (-6-\lambda)\frac{2}{4} - (-6-\lambda)\frac{2}{4}$

igualando a cero

$(-6-\lambda)^3 - (-6-\lambda) = 0$

factorizando $(-6-\lambda)$

$(-6-\lambda) \cdot \left[(-6-\lambda)^2 - 1\right] = 0$

de esto

$(-6-\lambda) = 0 \quad v$

$(-6-\lambda)^2 - 1 = 0$

$\Rightarrow \lambda = -6$ de la primera

y de la 2da

$36 + 12\lambda + \lambda^2 - 1 = 0$

$\lambda^2 + 12\lambda + 35 = 0$

numeros que sumados dan 12 y multiplicados 35

7 y 5

factorizando

$(\lambda+7)(\lambda+5) = 0$

$\Rightarrow \lambda = -7 \quad o$

$\lambda = -5$

los valores de los v serán:

$\left\{[A] - \lambda[I]\right\}[V] = [0]$

$\Rightarrow$ suponiendo $[v] = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$

$$
\begin{bmatrix} -6-\lambda & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -6-\lambda & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\sqrt{2}/2 & -6-\lambda \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}
$$

de donde se obtienen 3 eq.

$(-6-\lambda)v_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_2 = 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}v_1 + (-6-\lambda)v_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}v_3 = 0$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}v_2 + (-6-\lambda)v_3 = 0$

que con los valores de λ hallados se reducen a:

$\lambda = -6$

$0v_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_2 = 0 \quad (i)$

$\frac{\sqrt{2}}{2}v_1 + 0v_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}v_3 = 0 \, (ii)$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}v_2 + 0v_3 = 0 \, (iii)$

$v_2 = 0$ de i y iii

$v_1 = v_3$ de ii

$\lambda = -5$

$\Rightarrow -6-\lambda = -6+5$

$\Rightarrow -6-\lambda = -1$

$\Rightarrow -v_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_2 = 0 \quad (1ra)$

$\frac{\sqrt{2}}{2}v_1 - v_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}v_3 = 0 \quad (2da)$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}v_2 - v_3 = 0 \quad (3ra)$

de donde tenemos de la 1ra.

(4ta) $\boxed{v_2 = \frac{2}{\sqrt{2}} v_1}$ de la 1ra.

de la 3ra y 4ta

$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}v_1\right) - v_3 = 0$

$\Rightarrow -v_1 - v_3 = 0$

$\Rightarrow \boxed{v_3 = -v_1}$ (5ta)

reemplazando

4ta y 5ta en 2da

$\frac{\sqrt{2}}{2}v_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}v_1 - \frac{\sqrt{2}}{2}(-v_1) = 0$

$\frac{\sqrt{2}}{2}v_1 - \frac{2}{\sqrt{2}}v_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_1 = 0$

$\sqrt{2}v_1 - \sqrt{2}v_1 = 0$

$0 = 0$

por lo que no se puede determinar v_1.

para $\lambda = -7$

$\Rightarrow -6-\lambda = -6-(-7)$

$\Rightarrow -6-\lambda = 1$

$\Rightarrow -6-\lambda = 1$

reemplazando este valor en las ecuaciones

$v_1 + \frac{\sqrt{2}}{2}v_2 = 0 \quad (1ra)$

$\frac{\sqrt{2}}{2}v_1 + v_2 - \frac{\sqrt{2}}{2}v_3 = 0 \, (2da)$

$-\frac{\sqrt{2}}{2}v_2 + v_3 = 0 \quad (3ra)$

de 1ra.

$\frac{\sqrt{2}}{2}v_2 = -v_1$

$\boxed{v_2 = \frac{-2}{\sqrt{2}} v_1}$ (4ta)

de

de. reemplazar (4ta) en (5ta)

$$-\frac{\sqrt{2}}{2}\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}v_1\right)+v_3=0$$

$$v_1+v_3=0$$

$$\boxed{v_3=-v_1} \quad 5ta.$$

finalmente reemplazando 4ta y 5ta en 2da.

$$\frac{\sqrt{2}}{2}v_1+\left(-\frac{2}{\sqrt{2}}v_1\right)-\frac{\sqrt{2}}{2}(-v_1)=0$$

$$\frac{\sqrt{2}}{2}v_1-\sqrt{2}v_1+\frac{\sqrt{2}}{2}v_1=0$$

$$\sqrt{2}v_1-\sqrt{2}v_1=0.$$

por lo que no se puede determina v_1

los vectores son e_i para $i=1,2,3$

$$e_1=\begin{bmatrix} v_1\\ 0\\ v_1\end{bmatrix} \quad e_3=\begin{bmatrix} t_1\\ -\sqrt{2}t_1\\ -t_1\end{bmatrix}$$

$$e_2=\begin{bmatrix} w_1\\ \sqrt{2}w_1\\ -w_1\end{bmatrix}$$

escogiendo v_1, w_1 y t_1 para que e_1, e_2 y e_3 sean normales.

tenemos

$$|e_1|^2=2v_1^2=1$$

$$\Rightarrow v_1=1/\sqrt{2}$$

para e_2

$$|e_2|^2=w_1^2(1+2+1)=1$$

$$\Rightarrow w_1^2=\frac{1}{4}$$

$$w_1=\pm\frac{1}{2}$$

para e_3

$$|e_3|^2=t_1^2(1+2+1)=1$$

$$\Rightarrow t_1^2=\frac{1}{4}$$

$$\Rightarrow t_1=\pm\frac{1}{2}$$

$$M=\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -1/2 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

comprobemos que

$$M^TAM=D$$

Primero

$$M^TA=$$

$$\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix} -6 & \frac{\sqrt{2}}{2} & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -6 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -6\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \frac{-6}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2}-\frac{1}{2} & \frac{-6}{\sqrt{2}}\\ -3+\frac{1}{2} & \frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{6}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4} & -\frac{1}{2}+3\\ -3-1/2 & \frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{6}{\sqrt{2}}+\frac{\sqrt{2}}{4} & \frac{1}{2}+3\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -3\sqrt{2} & 0 & -3\sqrt{2}\\ -5/2 & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 5/2\\ -7/2 & \frac{7}{\sqrt{2}} & \frac{7}{2}\end{bmatrix}$$

finalmente.

$$(M^TA)M$$

$$\begin{bmatrix} -3\sqrt{2} & 0 & -3\sqrt{2}\\ -5/2 & -\frac{5}{\sqrt{2}} & 5/2\\ -7/2 & 7/\sqrt{2} & 7/2\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} & \frac{1}{2}\\ 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{2} & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -3-3 & \frac{-3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{2} & -\frac{3}{\sqrt{2}}+\frac{3}{\sqrt{2}}\\ -\frac{5}{2\sqrt{2}}+\frac{5}{2\sqrt{2}} & -\frac{5}{4}-\frac{5}{2}-\frac{5}{4} & -\frac{5}{4}+\frac{5}{2}-\frac{5}{4}\\ -\frac{7}{2\sqrt{2}}+\frac{7}{2\sqrt{2}} & -\frac{7}{4}+\frac{7}{2}-\frac{7}{4} & -\frac{7}{4}-\frac{7}{2}-\frac{7}{4}\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -7\end{bmatrix}$$

Finalmente supuesto

$$\begin{bmatrix} \phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix} M \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{bmatrix} \quad (i)$$

y sabiendo que

$$[\phi_1\,\phi_2\,\phi_3]=\begin{bmatrix} \phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{bmatrix}^T$$

$$\Rightarrow [\phi_i]^T=\{[M][\psi_i]\}^T$$

$$[\phi_i]^T=[\psi_i]^T[M]^T \quad (ii)$$

Ahora partiendo de

$$[\phi_i]^T[A][\phi_i]$$

que es la "condición" y remplazando los valores de i y ii en esta última tenemos

$$([\psi_i]^T[M]^T)[A][M][\psi_i]$$

$$=[\psi_i]^T\{[M]^T[A][M]\}[\psi_i]$$

$$=[\psi_i]^T[D][\psi_i]$$

$$=[\psi_1\;\psi_2\;\psi_3]\begin{bmatrix} -6 & 0 & 0\\ 0 & -5 & 0\\ 0 & 0 & -7\end{bmatrix}\begin{bmatrix} \psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{bmatrix}$$

$$=-6\psi_1^2-5\psi_2^2-7\psi_3^2$$

que es lo que se busco