Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 77

Autor del curso: Javier García

Ejercicios resueltos por Miguel A. Montañez

24 de enero de 2022

## Ejercicio 77.1

Obtener una expresión iterada para $U_I(t,t')$

El operador $U_I(t,t')$ es solución de la ecuación:

$$i\partial_t U_I(t,t') = H_I'(t) U_I(t,t')$$

$$\partial_t U_I(t,t') = -i H_I'(t) U_I(t,t')$$

Integramos:

$$\int_{t'}^{t} \partial_{t_1} U_I(t_1,t') dt_1 = -i \int_{t'}^{t} H_I'(t_1) U_I(t_1,t')$$

$$U_I(t,t') - 1 = -i \int_{t'}^{t} H_I'(t_1) U_I(t_1,t') dt_1 \qquad U_I(t',t') = 1$$

$$U_I(t,t') = 1 - i \int_{t'}^{t} H_I'(t_1) U_I(t_1,t') dt_1$$

Para $U_I(t_1,t')$ podemos utilizar una expresión similar:

$$U_I(t_1,t') = 1 - i \int_{t'}^{t_1} H_I'(t_2) U_I(t_2,t') dt_2$$

Sustituyendo:

$$U_I(t,t') = 1 - i \int_{t'}^{t} H_I'(t_1) dt_1 + (-i)^2 \int_{t'}^{t} H_I'(t_1) dt_1 \int_{t'}^{t_1} H_I'(t_2) U_I(t_2,t') dt_2$$

Para $U_I(t_2, t')$:

$$U_I(t_2, t') = 1 - i\int_{t'}^{t_2} H'_I(t_3)\, U_I(t_3, t')\, dt_3$$

Sustituyendo:

$$U_I(t,t') = 1 - i\int_{t'}^{t} H'_I(t_1)\,dt_1 + (-i)^2\int_{t'}^{t} H'_I(t_1)\,dt_1 \int_{t'}^{t_1} H'_I(t_2)\,dt_2 +$$

$$(-i)^3\int_{t'}^{t} H'_I(t_1)\,dt_1 \int_{t'}^{t_1} H'_I(t_2)\,dt_2 \int_{t'}^{t_2} H'_I(t_3)\, U_I(t_3, t')\,dt_3$$

Si seguimos iterando obtenemos:

$$U_I(t,t') = 1 - i\int_{t'}^{t} H'_I(t_1)\,dt_1 + (-i)^2\int_{t'}^{t} H'_I(t_1)\,dt_1 \int_{t'}^{t_1} H'_I(t_2)\,dt_2 +$$

$$(-i)^3\int_{t'}^{t} H'_I(t_1)\,dt_1 \int_{t'}^{t_1} H'_I(t_2)\,dt_2 \int_{t'}^{t_2} H'_I(t_3, t')\,dt_3 + \cdots\cdots$$

Esta es la expresión que queríamos obtener.

Ejercicio 77.2

Comprobar la expresión $|\Omega\rangle = \lim_{t\to\infty(1-i\epsilon)} \dfrac{e^{-iHt}|0\rangle}{\langle\Omega|0\rangle e^{-iE_0 t}}$

con $H = \begin{pmatrix} 100 & 1 \\ 1 & 200 \end{pmatrix}$, $|\Omega\rangle$ y $|\Phi\rangle$ autovectores de $H$, y

$E_0$ y $E_1$ sus autovalores respectivos.

Llamamos $a = 0.99995001 4$ $\quad b = 9'9985003 9\cdot 10^{-3}$

$E_0 = 99'990001 0 \quad , E_1 = 200'009999$

Tomamos como tiempo infinito un tiempo muy grande:

$$t = 100(1 - i\,0.01) \qquad \epsilon = 0.01$$

Los autovectores son: $|\Omega\rangle = \begin{pmatrix} -a \\ b \end{pmatrix}$ y $|B\rangle = \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}$

La matriz M formada por los autovectores en columnas diagonalizan H:

$$H = M D M^T \qquad D = \begin{pmatrix} E_0 & 0 \\ 0 & E_1 \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$e^{-iHt} = e^{-iMDM^Tt} = M e^{-iDt} M^T = M \begin{pmatrix} e^{-iE_0t} & 0 \\ 0 & e^{-iE_1t} \end{pmatrix} M^T$$

Calculamos:

$$|\Omega\rangle = \lim_{t\to 100-i} \frac{e^{-iHt}|0\rangle}{\langle\Omega|0\rangle e^{-iE_0t}} = \lim_{t\to 100-i} \frac{M \begin{pmatrix} e^{-iE_0t} & 0 \\ 0 & e^{-iE_1t} \end{pmatrix} M^T|0\rangle}{-a\, e^{-iE_0t}} \ ; \ \langle\Omega|0\rangle = -a$$

$$|\Omega\rangle = \lim_{t\to 100-i} \frac{M \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i(E_1-E_0)t} \end{pmatrix} M^T|0\rangle}{-a}$$

Calculamos el numerador:

$$\begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & e^{-i(E_1-E_0)t} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -a & b \\ b & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 e^{-i(E_1-E_0)t} & -ab + ab\, e^{-i(E_1-E_0)t} \\ -ab + ab\, e^{-i(E_1-E_0)t} & b^2 + a^2 e^{-i(E_1-E_0)t} \end{pmatrix}$$

Entonces:

$$|\Omega\rangle = \lim_{t\to 100-i} \begin{pmatrix} -a - \frac{b^2}{a} e^{-i(E_1-E_0)t} & b - b\, e^{-i(E_1-E_0)t} \\ b - b\, e^{-i(E_1-E_0)t} & \frac{b^2}{-a} - a\, e^{-i(E_1-E_0)t} \end{pmatrix} |0\rangle$$

Para un tiempo muy grande, como $t \to 100-i$, el factor exponencial se hace muy pequeño:

$$e^{-i(E_1-E_0)(100-i)} = e^{-i(E_1-E_0)100} \cdot e^{-(E_1-E_0)}$$

$\downarrow$

término acotado

$E_1 - E_0$ positivo y muy grande, así $e^{-(E_1-E_0)}$ se hace despreciable, y más cuanto más pase el tiempo.

Luego:

$$|\Omega\rangle = \begin{pmatrix} -a & b \\ b & \frac{b^2}{-a} \end{pmatrix} |0\rangle = \begin{pmatrix} -0'999950014 & 9'99850039 \cdot 10^{-3} \\ 9'99850039 \cdot 10^{-3} & -9'99750074 \cdot 10^{-5} \end{pmatrix} |0\rangle$$

$$|\Omega\rangle = \begin{pmatrix} -0'999950014 \\ 9'99850039 \cdot 10^{-3} \end{pmatrix}$$

Es lo que queríamos demostrar.