EJERCICIOS QFT Cápitulo 3
por Hugo Labella

Definiciones y resultados anteriores (Cápitulo 3):

1. $< f(x) >\equiv \frac{\int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-a/2\, x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-a/2\, x^2} dx}$
2. $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b\, x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}}$
3. $< f(x) >= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\, e^{-a/2\, x^2} dx$
4. $\int_{-\infty}^{\infty} x^2\, e^{-b\, x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{b^{3/2}}$
5. $\int_a^b g'(x)\, e^{g(x)} dx = \left[e^{g(x)}\right]_a^b$

Ejercicios:

a) $< x >= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-a/2\, x^2} dx = -\frac{1}{a}\sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} (-a)x\, e^{-a/2\, x^2} dx =$

$-\sqrt{\frac{1}{2\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} - ax\, e^{-a/2\, x^2} dx =- \sqrt{\frac{1}{2\pi a}} \left[e^{-a/2\, x^2}\right]_{-\infty}^{\infty} =- \sqrt{\frac{1}{2\pi a}}(e^{-(\infty)^2} - e^{-(-\infty)^2}) =$

$-\sqrt{\frac{1}{2\pi a}}(0-0) = 0$

- Primero usamos el resultado 3 sustituyendo f(x) por x para tener directamente el denominador simplificado.
- Después multiplicamos y dividimos por (-a).
- Multiplicamos 1/a por a^½ en el factor antes de la integral y queda a^(-½).
- Usamos el resultado 5.
- Resolvemos los corchetes viendo que al estar x al cuadrado, el signo menos (-) del infinito se anula.
- En el limite queda 0-0 que es 0.

b) $< x^2 >= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-a/2\, x^2} dx = \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \frac{2^{3/2}\sqrt{\pi}}{a^{3/2}} = \frac{1}{a}$

- Primero usamos el resultado 3 sustituyendo f(x) por x^2 para tener directamente el denominador simplificado.
- El numerador es exactamente el resultado 4, cambiando b por a/2 ya que en este caso esta es la constante en lugar de b.
- Simplificando queda 1/a.

c)Previo:

$$- \frac{d^n}{db^n} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-b\, x^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{b}} \right)$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-b/2\, x^2} dx =- \sqrt{\pi} b^{-1/2-n} (-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})(n-\tfrac{5}{2})...$$

EJERCICIO

$$< x^{2n} >= \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-a/2\, x^2} dx$$

$$=- \sqrt{\frac{a}{2\pi}} \sqrt{\pi} (\tfrac{a}{2})^{-(1/2+n)} (-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})(n-\tfrac{5}{2})... = \frac{2^n}{a^n} (\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{1}{2})(n-\tfrac{3}{2})(n-\tfrac{5}{2})... =$$

$$= \frac{1}{a^n} (2n-1)(2n-3)(2n-5)...$$

- Primero hacemos un desarrollo previo. Al igual que en la manera en que el resultado 4 fue desarrollado en el video, derivamos con respecto a b toda la expresión, pero en este caso será la derivada n-ésima. También multiplicamos por -1 para que la expresión final coincida con la del ejercicio.
- En el primer miembro, la derivada puede entrar en la integral como se explica en el video. Al resolverla, queda x^(2n) por el exponencial.
- Al desarrollar el segundo miembro, realizamos el cambio de exponente como se haría normalmente pero restando n.
- Al poner el factor propio de cada derivada he encontrado tanteando el productorio mostrado. De forma analítica no ha conseguido llegar a él.
- Una vez desarrollado esto, empezamos como los anteriores ejercicios, con el resultado 3.

- Sustituimos nuestro desarrollo por la integral pero sustituyendo b por a/2.
- Una vez simplificado multiplicamos el 2^n del numerador por el resto de factores, dejando un 2 para cada factor ya que el nº de factores es igual a n. Tras esto el problema queda resuelto.