Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 60

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

23 de agosto de 2021

1. Calcular $F^a_{\mu\nu}$.

El tensor de curvatura $\mathscr{F}_{\mu\nu}$ se define como

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = \partial_\mu \mathscr{A}_\nu - \partial_\nu \mathscr{A}_\mu + \mathscr{A}_\mu \mathscr{A}_\nu - \mathscr{A}_\nu \mathscr{A}_\mu \tag{1}$$

Usando que la matriz $\mathscr{A}_\mu$ tiene la forma

$$\mathscr{A}_\mu = -ig A^a_\mu T_a \tag{2}$$

Podemos reescribir el tensor de curvatura como

$$\begin{aligned}
\mathscr{F}_{\mu\nu} &= \partial_\mu(-ig A^a_\nu T_a) - \partial_\nu(-ig A^a_\mu T_a) + (-ig A^a_\mu T_a)(-ig A^b_\nu T_b) - (-ig A^a_\nu T_a)(-ig A^b_\mu T_b) \\
&= -ig\partial_\mu A^a_\nu T_a + ig\partial_\nu A^a_\mu T_a - g^2 A^a_\mu A^b_\nu T_a T_b + g^2 A^a_\nu A^b_\mu T_a T_b \\
&= -ig\left(\partial_\mu A^a_\nu T_a - \partial_\nu A^a_\mu T_a - ig A^a_\mu A^b_\nu [T_a, T_b]\right) \\
&= -ig\left(\partial_\mu A^a_\nu T_a - \partial_\nu A^a_\mu T_a - ig A^a_\mu A^b_\nu (if_{abc}T_c)\right) \\
&= -ig\left(\partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{bca} A^b_\mu A^c_\nu\right) T_a
\end{aligned}$$

Por lo que obtenemos la forma deseada

$$\mathscr{F}_{\mu\nu} = -ig F^a_{\mu\nu} T_a \tag{3}$$

Con $F^a_{\mu\nu}$ dada por la expresión

$$\boxed{F^a_{\mu\nu} = \partial_\mu A^a_\nu - \partial_\nu A^a_\mu + g f_{bca} A^b_\mu A^c_\nu} \tag{4}$$