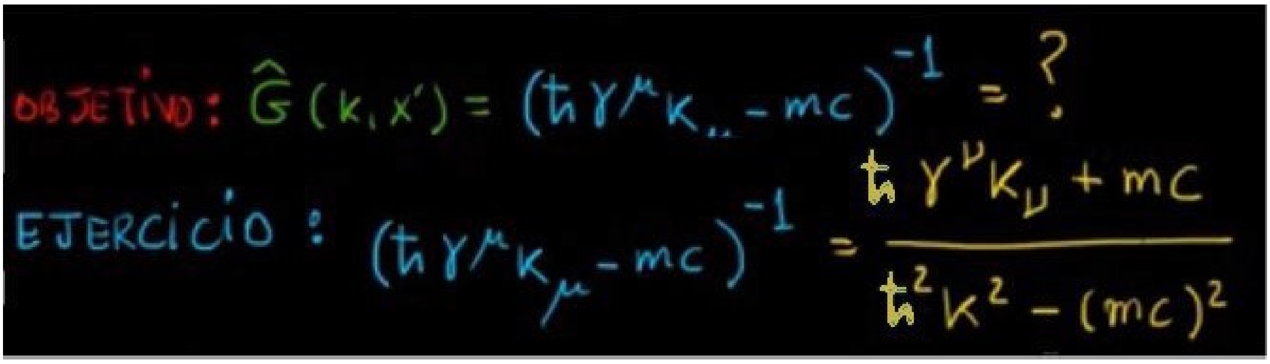
Ejercicios Teoría Cuántica de Campos
Capítulo 46

Autor del curso: Javier García
Ejercicio resuelto por: Antonio Gros
8 de diciembre de 2020



Partimos de las matrices de Dirac

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \\ 0 & i & 0 & 0 \\ -i & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad \gamma^1 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Obtenemos
$\gamma^0 k_0 + \gamma^1 k_1 + \gamma^2 k_2 + \gamma^3 k_3 =$

$$\begin{pmatrix} k_0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -k_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & k_1 \\ 0 & 0 & k_1 & 0 \\ 0 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -ik_2 \\ 0 & 0 & ik_2 & 0 \\ 0 & ik_2 & 0 & 0 \\ -ik_2 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & k_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -k_3 \\ -k_3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & k_3 & 0 & 0 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} k_0 & 0 & k_3 & k_1 - ik_2 \\ 0 & k_0 & k_1 + ik_2 & -k_3 \\ -k_3 & ik_2 - k_1 & -k_0 & 0 \\ -k_1 - ik_2 & k_3 & 0 & -k_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_0 & 0 & k_3 & k_1 - ik_2 \\ 0 & k_0 & k_1 + ik_2 & -k_3 \\ -k_3 & -(k_1 - ik_2) & -k_0 & 0 \\ -(k_1 + ik_2) & k_3 & 0 & -k_0 \end{pmatrix}$$

y ahora restamos mc

$$\begin{pmatrix} k_0 & 0 & k_3 & k_1 - ik_2 \\ 0 & k_0 & k_1 + ik_2 & -k_3 \\ -k_3 & -(k_1 - ik_2) & -k_0 & 0 \\ -(k_1 + ik_2) & k_3 & 0 & -k_0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} mc & 0 & 0 & 0 \\ 0 & mc & 0 & 0 \\ 0 & 0 & mc & 0 \\ 0 & 0 & 0 & mc \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} k_0 - mc & 0 & k_3 & k_1 - ik_2 \\ 0 & k_0 - mc & k_1 + ik_2 & -k_3 \\ -k_3 & -(k_1 - ik_2) & -k_0 - mc & 0 \\ -(k_1 + ik_2) & k_3 & 0 & -k_0 - mc \end{pmatrix}$$

Hacemos la matriz inversa

$$\begin{pmatrix} k_0-mc & 0 & k_3 & k_1-ik_2 \\ 0 & k_0-mc & k_1+ik_2 & -k_3 \\ -k_3 & -(k_1-ik_2) & -k_0-mc & 0 \\ -(k_1+ik_2) & k_3 & 0 & -k_0-mc \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{matrix} -\frac{k_0+cm}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ 0 \\ \frac{k_3}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ -\frac{k_1^2+k_2^2}{-c^2m^2k_1+ic^2m^2k_2+k_0^2k_1-ik_0^2k_2-k_1^3+ik_1^2k_2-k_1k_2^2-k_1k_3^2+ik_2^3+ik_2} \end{matrix} \right.$$

Dados las dificultades de mi editor (SWP 5)para presentar el resultado por la anchura del texto producido presentaré la matriz inversa mediante sus columnas

$$1^a \quad \begin{pmatrix} -\frac{k_0+cm}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ 0 \\ \frac{k_3}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ -\frac{k_1^2+k_2^2}{-c^2m^2k_1+ic^2m^2k_2+k_0^2k_1-ik_0^2k_2-k_1^3+ik_1^2k_2-k_1k_2^2-k_1k_3^2+ik_2^3+ik_2k_3^2} \end{pmatrix}$$

$$2^a \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -\frac{k_0+cm}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ \frac{k_1-ik_2}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ \frac{k_1k_3-ik_2k_3}{-c^2m^2k_1+ic^2m^2k_2+k_0^2k_1-ik_0^2k_2-k_1^3+ik_1^2k_2-k_1k_2^2-k_1k_3^2+ik_2^3+ik_2k_3^2} \end{pmatrix}$$

$$3^a \quad \begin{pmatrix} -\frac{k_3}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ -\frac{k_1+ik_2}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ \frac{k_0-cm}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$4^a \quad \begin{pmatrix} -\frac{k_1-ik_2}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ \frac{k_3}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ 0 \\ -\frac{k_0k_1-ik_0k_2-cmk_1+icmk_2}{-c^2m^2k_1+ic^2m^2k_2+k_0^2k_1-ik_0^2k_2-k_1^3+ik_1^2k_2-k_1k_2^2-k_1k_3^2+ik_2^3+ik_2k_3^2} \end{pmatrix}$$

En los numeradores y denominadores de los elementos de las 4^a filas se pueden sacar factores comunes k_1 e $-ik_2$ quedando como factor común k_1-ik_2

$$\begin{pmatrix} -\frac{k_0+cm}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & 0 & -\frac{k_3}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & -\frac{k_1-ik_2}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ 0 & -\frac{k_0+cm}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & -\frac{k_1+ik_2}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & \frac{k_3}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ \frac{k_3}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & \frac{k_1-ik_2}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & \frac{k_0-cm}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & 0 \\ -\frac{(k_1+ik_2)(k_1-ik_2)}{(k_1-ik_2)(-c^2m^2+k_0^2-k_1^2-k_2^2-k_3^2)} & \frac{(k_1-ik_2)k_3}{(k_1-ik_2)(-c^2m^2+k_0^2-k_1^2-k_2^2-k_3^2)} & 0 & -\frac{(k_1-ik_2)(k_0-cm)}{(k_1-ik_2)(-c^2m^2+k_0^2-k_1^2-k_2^2-k_3^2)} \end{pmatrix}$$

$=$

$$\begin{pmatrix} -\frac{k_0+cm}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & 0 & -\frac{k_3}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & -\frac{k_1-ik_2}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ 0 & -\frac{k_0+cm}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & -\frac{k_1+ik_2}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & \frac{k_3}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} \\ \frac{k_3}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & \frac{k_1-ik_2}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & \frac{k_0-cm}{c^2m^2-k_0^2+k_1^2+k_2^2+k_3^2} & 0 \\ -\frac{(k_1+ik_2)}{(-c^2m^2+k_0^2-k_1^2-k_2^2-k_3^2)} & \frac{k_3}{(-c^2m^2+k_0^2-k_1^2-k_2^2-k_3^2)} & 0 & -\frac{(k_0-cm)}{(-c^2m^2+k_0^2-k_1^2-k_2^2-k_3^2)} \end{pmatrix}$$

Que podemos poner como

$$\frac{1}{(k_0^2-k_1^2-k_2^2-k_3^2-m^2c^2)} \begin{pmatrix} k_0+mc & 0 & k_3 & k_1-ik_2 \\ 0 & k_0+mc & k_1+ik_2 & -k_3 \\ -k_3 & -(k_1-ik_2) & -k_0+mc & 0 \\ -(k_1+ik_2) & k_3 & 0 & -k_0+mc \end{pmatrix}$$

que corresponde a $\quad \frac{1}{(-m^2c^2+k_0^2-k_1^2-k_2^2-k_3^2)}(\gamma^0k_0+\gamma^1k_1+\gamma^2k_2+\gamma^3k_3+mc)$

pues $(\gamma^0 k_0 + \gamma^1 k_1 + \gamma^2 k_2 + \gamma^3 k_3 + mc)$ y $(\gamma^0 k_0 + \gamma^1 k_1 + \gamma^2 k_2 + \gamma^3 k_3 - mc)$ solo difieren en ese mc sumado o restado en los elementos de la diagonal principal

Tenemos pues finalmente el resultado deseado

$$(\gamma^\mu k_\mu - mc)^{-1} = \frac{\gamma^\mu k_\mu + mc}{k^2 - m^2c^2}$$

y añadiendo el factor $\hbar$ que acompañaría a cada k_μ

$$(\hbar\gamma^\mu k_\mu - mc)^{-1} = \frac{\hbar\gamma^\mu k_\mu + mc}{\hbar^2 k^2 - m^2c^2}$$