Germán Velandia

Ejercicio de Diagonalización

$$cosa = -6\phi_1^2 - 6\phi_2^2 - 6\phi_3^2 - \sqrt{2}\,\phi_1\phi_2 - \sqrt{2}\,\phi_2\phi_3$$

a) Encontrar matriz A que cumpla:

$$\begin{pmatrix}\phi_1 & \phi_2 & \phi_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix} = cosa$$

b) Diagonaliza A es decir encontrar matriz M, valores propios y vectores propios tales que

$$\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}M\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\psi_1\\ \psi_2\\ \psi_3\end{pmatrix}$$

c) Mostrar que $cosa = -5\psi_1^2 - 6\psi_2^2 - 7\psi_3^2$

Desarrollo

A debe ser una matriz 3×3 simétrica y diagonalizable por tanto es de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & b & c \\ b & a_2 & d \\ c & d & a_3 \end{pmatrix}$$

por consiguiente se cumple que:

$$\begin{pmatrix}\phi_1 & \phi_2 & \phi_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_1 & b & c \\ b & a_2 & d \\ c & d & a_3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix}\phi_1\\ \phi_2\\ \phi_3\end{pmatrix} = cosa$$

German Velandia

Realizando el correspondiente desarrollo matemático encontramos la matriz A:

$$A = \begin{bmatrix} -6 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -6 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -6 \end{bmatrix}$$

$a_1 = a_2 = a_3 = -6$

$b = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

$c = 0$

$d = -\frac{\sqrt{2}}{2}$

Procedemos a hallar los valores y vectores propios:
Los valores y vectores propios deben satisfacer que:

$A\vec{\psi}_1 = \lambda_1 \vec{\psi}_1$ Valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$

$A\vec{\psi}_2 = \lambda_2 \vec{\psi}_2$ vectores propios $\vec{\psi}_1, \vec{\psi}_2, \vec{\psi}_3$

$A\vec{\psi}_3 = \lambda_3 \vec{\psi}_3$

Consideramos $\psi = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ de tal manera que:

$$A\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -6 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -6 & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{pmatrix} \longrightarrow$$

Gorman Velandia

$$\begin{bmatrix} -6x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x - 6y - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}y - 6z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} -6x - \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x - 6y - \frac{\sqrt{2}}{2}z \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}y - 6z \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \lambda x \\ \lambda y \\ \lambda z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$-(6+\lambda)x - \frac{\sqrt{2}}{2}y = 0$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}x - (6+\lambda)y - \frac{\sqrt{2}}{2}z = 0$$
$$-\frac{\sqrt{2}}{2}y - (6+\lambda)z = 0$$

como este es un sistema compatible indeterminado $\Rightarrow$ el determinante de la matriz debe ser $= 0$

Por tanto

$$\begin{bmatrix} -(6+\lambda)x & -\frac{\sqrt{2}}{2}y & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x & -(6+\lambda)y & -\frac{\sqrt{2}}{2}z \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}y & -(6+\lambda)z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\det \begin{bmatrix} -(6+\lambda) & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -(6+\lambda) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -(6+\lambda) \end{bmatrix} = 0 \rightarrow$$

German Velandia

$$\det\begin{bmatrix} -(6+\lambda) & -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & -(6+\lambda) & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2} & -(6+\lambda) \end{bmatrix} = -(6+\lambda)^3 - (6+\lambda) = 0$$

Resolviendo encontramos:

$$\left.\begin{aligned} \lambda_1 &= -5 \\ \lambda_2 &= -6 \\ \lambda_3 &= -7 \end{aligned}\right\} \text{valores propios}$$

Para encontrar los vectores propios, reemplazamos los valores propios en el sistema de ecuaciones compatible indeterminado:

Para $\lambda_1 = -5$ $\quad \vec{\Psi}_1 = \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$ el modulo es

$$|\Psi_1| = \sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}$$

$|\vec{\Psi}_1| = \sqrt{2} \rightarrow$ El vector propio es:

$$\vec{\Psi}_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

German Velandia

Para $\lambda_2 = -6$

$$\psi_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{su modulo } |\vec{\psi}_2| = \sqrt{2}$$

El vector propio es:
$$\vec{\psi}_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Para $\lambda_3 = -7$

$$\psi_3 = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}$$
su modulo es:
$$|\vec{\psi}_3| = \sqrt{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 + (1)^2 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \sqrt{2}$$

El vector propio es:

$$\vec{\psi}_3 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/\sqrt{2} \\ 1/2 \end{pmatrix}$$

Como es un sistema compatible indeterminado escogimos los valores de los elementos de los vectores propios de tal manera que el determinante de la matriz $M = \begin{pmatrix} \boxed{\psi_1} & \boxed{\psi_2} & \boxed{\psi_3} \end{pmatrix}$, sea > 0 y preferimente $= \underline{1}$

German Velandia

$$M = \begin{bmatrix} -1/2 & -1/\sqrt{2} & 1/2 \\ 1/\sqrt{2} & 0 & 1/\sqrt{2} \\ -1/2 & 1/\sqrt{2} & 1/2 \end{bmatrix} \rightarrow \det M = 1 > 0$$

Verificamos ahora la ortogonalidad de los vectores propios:

$\vec{\psi}_1 \cdot \vec{\psi}_2 = 0$, $\vec{\psi}_1 \cdot \vec{\psi}_2 = 0$, $\vec{\psi}_2 \cdot \vec{\psi}_3 = 0$

se verifico ortogonalidad y se demuestra que:

$\vec{\psi}_1 \perp \vec{\psi}_2 \perp \vec{\psi}_3$

Diagonalización de la matriz A:

La matiz A es una matriz ortogonalmente diagonalizable y simetrica $\Rightarrow$ se cumple que:

$$D = M^T A M$$

Realizado el procedimiento matematico se encuentra que

$$D = \begin{bmatrix} -5 & 0 & 0 \\ 0 & -6 & 0 \\ 0 & 0 & -7 \end{bmatrix}$$

Matriz diagonal donde en su diagonal principal estan los valores propios hallados.

German Velandia

Ahora verificamos que

$$\cos a = -5\psi_1^2 - 6\psi_2^2 - 7\psi_3^2$$

$$(\phi) = (M)(\psi) \longrightarrow$$

$$\begin{pmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{pmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \psi_1 \\ \psi_2 \\ \psi_3 \end{bmatrix}$$; tenemos que

$$\left.\begin{aligned} \phi_1 &= -\tfrac{1}{2}\psi_1 - \tfrac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 + \tfrac{1}{2}\psi_3 \\ \phi_2 &= \tfrac{1}{\sqrt{2}}\psi_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\psi_3 \\ \phi_3 &= -\tfrac{1}{2}\psi_1 + \tfrac{1}{\sqrt{2}}\psi_2 + \tfrac{1}{2}\psi_3 \end{aligned}\right\}$$

Estos valores de ϕ_1, ϕ_2 y ϕ_3 los remplazamos en cosa:

$$\cos a = -6\phi_1^2 - 6\phi_2^2 - 6\phi_3^2 - \sqrt{2}\,\phi_1\phi_2 - \sqrt{2}\,\phi_2\phi_3$$

Realizando la carpintería algebraica correspondiente encontramos que:

$$\cos a = -5\psi_1^2 - 6\psi_2^2 - 7\psi_3^2$$

— o —