| RODOLFO GUIDOBONO | CURSO TEORÍA CUÁNTICA DE CAMPOS J. GARCÍA - EJERCICIO CAP. 28 | HOJA Nº 1 FECHA 20/12/19 |
|---|---|---|

Dado el operador escalera $a$ tal que $a\,\varphi(x) = c$

siendo $a = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial}{\partial x}\right)$

probar que $c = 0$ para que $\varphi(x)$ sea de cuadrado integrable $\varphi(x) \in L^2(\mathbb{R})$

$$a\psi = \sqrt{\frac{m\omega}{2\hbar}}\left(x\psi + \frac{\hbar}{m\omega}\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = c$$

$$\frac{\hbar}{m\omega}\psi' + x\psi = c\sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}} \longrightarrow \psi' + \frac{m\omega}{\hbar}x\,\psi = c\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}$$

$\psi' + c_1 x\psi = c_2$ donde $c_1 = \frac{m\omega}{\hbar}$ y $c_2 = c\sqrt{\frac{2m\omega}{\hbar}}$

ECUACIÓN HOMOGÉNEA $\psi' + c_1 x\psi = 0 \Rightarrow \psi_p = e^{-\frac{c_1 x^2}{2}}$

SOLUCIÓN GENERAL $\psi(x) = K(x)\,\psi_p(x)$

$$\psi' + c_1 x\psi = c_2$$

$$K'(x)\,\psi_p(x) + K(x)\,\psi_p'(x) + c_1 x\,K(x)\,\psi_p(x) = c_2$$

$$K'(x)\,\psi_p(x) + K(x)\underbrace{\left(\psi_p'(x) + c_1 x\,\psi_p(x)\right)}_{=0} = c_2$$

$$K'(x)\,\psi_p(x) = c_2 \longrightarrow K'(x) = c_2\, e^{+\frac{c_1 x^2}{2}}$$

$$K(x) = c_2\sqrt{\frac{\pi}{2c_1}}\,\mathrm{erfi}\left(\sqrt{\frac{c_1}{2}}\,x\right) + D$$ erfi es la función error imaginaria

$$\psi(x) = e^{-c_1x^2/2}\left[c_2\sqrt{\frac{\pi}{2c_1}}\,\mathrm{erfi}\left(\sqrt{\frac{c_1}{2}}\,x\right) + D\right]$$ D es una constante

Debemos probar que $\int_{-\infty}^{\infty}|\psi(x)|^2\,dx < \infty$

$$\psi(x)^2 = e^{-c_1x^2}\left[c_2\sqrt{\frac{\pi}{2c_1}}\,\mathrm{erfi}\left(\sqrt{\frac{c_1}{2}}\,x\right) + D\right]^2$$

El segundo término es una función $\alpha\,\mathrm{erfi}^2(kx) + \beta\,\mathrm{erfi}(kx) + D^2$

NOTA

pero la integral del tipo $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} \operatorname{erf}(x)\, dx$ no converge

esto implica que $C_2$ y por lo tanto $C$ deben ser igual a cero

quedando

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(x)^2 dx = \int_{-\infty}^{\infty} D^2 e^{-C_1 x^2} dx$$ es una integral gaussiana

$$\psi_{(x)} = D e^{-\frac{C_1}{2} x^2}$$