Ejercicio 2

Germán Velandia

Por definición tenemos que

$$\langle \square \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} \square \, e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}$$

$\langle \square \rangle \equiv$ valor medio de $\square$

Encontrar:

a) $\langle x \rangle$

b) $\langle x^2 \rangle$

c) $\langle x^{2m} \rangle$

Desarrollo:

a) $$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x \, e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}$$

La integral $\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{a}{2}x^2} dx$ tiene un argumento de simetría impar y sabemos que dado el caso la integral es igual a 0.

$\rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = 0$ en general $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n+1} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = 0$

$n: 1, 2, 3, \ldots$

Por tanto

$$\langle x \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx} = \frac{0}{\sqrt{2\pi}/\sqrt{a}} = 0$$

$$\boxed{\langle x \rangle = \frac{0}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}} = 0}$$

Ver tambien video en you tube 16 — Integrales gaussianas por Javier Garcia.

---

b)

$$\langle x^2 \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}$$

Sabemos que: $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{3/2}}$

y $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{1/2}}$

por tanto $\langle x^2 \rangle = \frac{\frac{\sqrt{2\pi}}{a^{3/2}}}{\frac{\sqrt{2\pi}}{a^{1/2}}} = \frac{a^{1/2}}{a^{3/2}} = \frac{1}{a}$

$$\Rightarrow \boxed{\langle x^2 \rangle = \frac{1}{a}} \quad a>0$$

c)

$$\langle x^{2n} \rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx} \qquad n: 1, 2, 3, \ldots$$

Sabemos que

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{1/2}} \qquad \text{para } n=0$$

para $n=1$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{3/2}} = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{(2n+1)/2}}$$

para $n=2$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx \Rightarrow$$ Siguiendo como referencia el video 3 de Teoría Cuántica de Campos $\rightarrow$

Efectuamos la derivación respecto de a dos veces a la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \frac{\sqrt{2\pi}}{a^{1/2}} \qquad \text{veamos:}$$

$$\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}\,dx = \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{a^{1/2}}\right)$$

puesto que $e^{-a/2\,x^2}$ converge rapidamente es posible introducir la derivada al integrando, así:

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-\frac{a}{2}x^2}\right)dx = \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\left(\frac{\sqrt{2\pi}}{a^{1/2}}\right) \longrightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\partial}{\partial a}\left(-\frac{x^2}{2}e^{-\frac{a}{2}x^2}\right)dx = \frac{\partial}{\partial a}\left(\sqrt{2\pi}\left(-\frac{1}{2}a^{-3/2}\right)\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\frac{\partial}{\partial a}\left(e^{-\frac{a}{2}x^2}\right)dx = \sqrt{2\pi}\,\frac{\partial}{\partial a}\left(a^{-3/2}\right)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty}x^2\left(-\frac{x^2}{2}e^{-\frac{a}{2}x^2}\right)dx = \sqrt{2\pi}\left(-\frac{3}{2}a^{-5/2}\right)$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty}x^4 e^{-\frac{a}{2}x^2}\,dx = 3\sqrt{2\pi}\,a^{-5/2}} \qquad n=2$$

Podemos reescribir por comodidad la anterior ⑤

ecuación así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2.2} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = 1.3\sqrt{2\pi}\, a^{-(2.2+1)/2}$$

con $n=2$ sería $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = (2n-1)(2n-3)\sqrt{2\pi}\, a^{-(2n+1)/2}$

si reemplazamos $n=2$ obtenemos la ecuación inicial.

Para $n=3$ realizamos tres derivadas:

$$\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\left(\sqrt{2\pi}\, a^{-1/2}\right) \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{-\infty} \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\left(-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx\right) = \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\left(\sqrt{2\pi}\left(-\frac{1}{2}a^{-3/2}\right)\right) \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\left(x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2}\right) dx = \frac{\partial}{\partial a}\frac{\partial}{\partial a}\left(\sqrt{2\pi}\, a^{-3/2}\right) \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a}\left(x^2\left(-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{a}{2}x^2}\right)\right) dx = \frac{\partial}{\partial a}\left(\sqrt{2\pi}\left(-\frac{3}{2}a^{-5/2}\right)\right) \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial a}\left(x^4 e^{-\frac{a}{2}x^2}\right) dx = \frac{\partial}{\partial a}\left(\sqrt{2\pi}\, 3\, a^{-5/2}\right) \rightarrow$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^4 \left(-\frac{x^2}{2} e^{-\frac{a}{2}x^2}\right) dx = \sqrt{2\pi}\, 3 \left(-\frac{5}{2} a^{-7/2}\right) \rightarrow$$

$$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = 15\sqrt{2\pi}\, a^{-7/2}} \qquad n = 3$$

Si observamos este resultado se corresponde con la expresión

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = (2n-1)(2n-3)(2n-5)\sqrt{2\pi}\, a^{-(2n+1)/2}$$

para $n = 3$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^6 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = 5 \cdot 3 \cdot 1 \sqrt{2\pi}\, a^{-7/2} = 15\sqrt{2\pi}\, a^{-7/2}$$

por tanto podemos generalizar para cualquier n así:

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \left[(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\right]\sqrt{2\pi}\, a^{-(2n+1)/2}$$

por tanto:

$$\langle x^{2n}\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx}{\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx} =$$

$$= \frac{\cancel{\sqrt{2\pi}}\left[(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\right] a^{-(2n+1)/2}}{\cancel{\sqrt{2\pi}}\, a^{-1/2}} =$$

$$= (2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1\; a^{-(2n+1-1)/2} = \frac{1}{a^n}(2n-1)(2n-3)\cdots 3\cdot 1$$

para $n = 1, 2, 3, \ldots$

$\Rightarrow$

$$\boxed{\langle x^{2n}\rangle = \frac{1}{a^n}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1}$$