Ejercicio

Definición $\langle \blacksquare \rangle \equiv \dfrac{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, \blacksquare\, e^{-\frac{a}{2}x^2}}{\int_{-\infty}^{\infty} dx\, e^{-\frac{a}{2}x^2}}$

a) $\langle x \rangle$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x\, e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{a}{2}\, 2x\right) e^{-\frac{a}{2}x^2} \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) dx = \left(-\frac{1}{a}\right)\left[\int_{-\infty}^{0} e^{v}\, v' dv + \int_{0}^{-\infty} e^{v}\, v' dv\right]$$

$$v = -\frac{a}{2}x^2 \qquad dv = -a\, x\, dx$$

Cuando $x \to \infty \quad v \to -\infty$
$\wedge \quad x \to -\infty \quad v \to -\infty$
$x = 0 \quad v = 0$

$$-\frac{2}{a}\left[e^{v}\right]_{-\infty}^{0} = -\frac{2}{a}\left[1-0\right] = -\frac{2}{a} \quad ; \quad -\frac{2}{a}\left[e^{v}\right]_{0}^{-\infty} = -\frac{2}{a}\left[0-1\right] = \frac{2}{a}$$

Y como sabemos q' $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-bx^2} dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}}$

Si hacemos q' $b = \frac{a}{2}$ $\quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a}}$

Así: $\boxed{\langle x \rangle = \dfrac{-\frac{2}{a} + \frac{2}{a}}{\sqrt{\frac{2\pi}{a}}} = 0}$

b) $\langle x^2 \rangle$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = -2\int_{-\infty}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}x^2\right) e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = -2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d}{da}\left(e^{-\frac{a}{2}x^2}\right) dx$$

$$= -2\frac{d}{da}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = -2\frac{d}{da}\left(\sqrt{2\pi}\, a^{-1/2}\right) = -2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\sqrt{2\pi}\, a^{-3/2}$$

$$\Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-\frac{a}{2}x^2} dx = \sqrt{\frac{2\pi}{a^3}}$$

Así $\boxed{\langle x^2 \rangle = \dfrac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{a^3}} \cdot \dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{2\pi}} = \dfrac{1}{\sqrt{a^2}} = \dfrac{1}{a}}$

c) $\langle x^{2n} \rangle$

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} \underset{\wedge}{=} \frac{-1}{a}\left[x^{2n-1} e^{-\frac{a}{2}x^2} \right]_{-\infty}^{\infty} - \left(\frac{-1}{a}\right) \int_{-\infty}^{\infty} (2n-1)\, x^{2(n-1)} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx$$

Integración por partes $\int u\,dv = uv - \int v\,du$

haciendo $dv = -a\,x\,e^{-\frac{a}{2}x^2} dx \Rightarrow v = e^{-\frac{a}{2}x^2}$

y $u = x^{2n-1} \Rightarrow du = (2n-1)\, x^{2(n-1)} dx$

* Analicemos x^{2n-1} es una función "impar" : $f(x) = -f(-x)$

$e^{-\frac{a}{2}x^2}$ es una función "par" : $f(x) = f(-x)$

Su producto es por lo tanto "impar"

Así que $\lim_{A\to\infty} \left[f(x) \right]_{-A}^{A} = \lim_{A\to\infty} f(A) - f(-A) = \lim_{A\to\infty} 2 f(A)$

Pero como una función exponencial tiende a cero más rápidamente que una potencia $\lim_{A\to\infty} * \Big|_{-A}^{A} = 0$

Queda $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} = \frac{1}{a}(2n-1) \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(n-1)} e^{-\frac{a x^2}{2}} dx \; *} \quad (1)$$

Si en * hacemos un cambio de variable $k = n-1$

Entonces $$* = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2k} e^{-\frac{a x^2}{2}} dx \underset{\text{por } (1)}{=} \frac{1}{a}(2k-1) \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(k-1)} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx$$

$2(n-1) - 1 = (2n-3)$

Quedando $$\boxed{\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^2 (2n-1)(2n-3) \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(k-1)} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx \; *}$$

Volviendo a hacer un cambio de variable $l = k-1$ en *

$$* = \int_{-\infty}^{\infty} x^{2l} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx \underset{\text{por } (1)}{=} \frac{1}{a}(2l-1) \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(l-1)} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx$$

y como $(2l-1) = 2(k-1) - 1 = 2[(n-1)-1] - 1 = 2n-5$

Queda $\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} = \left(\frac{1}{a}\right)^3 (2n-1)(2n-3)(2n-5) \int_{-\infty}^{\infty} x^{2(l-1)} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx$

Este procedimiento se puede repetir hasta que el término exponente de x dentro de la integral sea nulo. Es decir se debe repetir "n veces". ya que $x^{2(l-1)} = x^{2n-6}$ que es 1 orden menor que el último término $(2n-5)$.

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\frac{a}{2}x^2} = \frac{1}{a^n} \prod_{i=0}^{n-1} [2(n-i)-1] \int_{-\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2} dx$$

Finalmente $\boxed{\langle x^{2n} \rangle = \frac{1}{a^n} \prod_{i=0}^{n-1} [2(n-i)-1]}$