Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 66
Autor del curso: Javier García
Ejercicios resueltos por Miguel A. Montañez

7 de mayo de 2021

Ejercicio 66.1. Demostrar los siguientes corchetes de Poisson: $\{\phi(t,\vec{x}),\phi(t,\vec{y})\}=0$ y $\{\pi(t,\vec{x}),\pi(t,\vec{y})\}=0$.

Tomamos el primer corchete y aplicamos la definición de corchete de Poisson para funcionales:

$$\{\phi(t,\vec{x}),\phi(t,\vec{y})\}=\int d^3z\left(\frac{\delta\phi(t,\vec{x})}{\delta\phi(t,\vec{z})}\frac{\delta\phi(t,\vec{y})}{\delta\pi(t,\vec{z})}-\frac{\delta\phi(t,\vec{x})}{\delta\pi(t,\vec{z})}\frac{\delta\phi(t,\vec{y})}{\delta\phi(t,\vec{z})}\right)$$

Como ϕ y π son variables funcionales diferentes que no tienen dependencia:

$$\frac{\delta\phi(t,\vec{x})}{\delta\pi(t,\vec{z})}=\frac{\delta\phi(t,\vec{y})}{\delta\pi(t,\vec{z})}=0$$, y con esto concluye la demostración.

Respecto a las otras derivadas funcionales se puede demostrar:

$$\frac{\delta\phi(t,\vec{x})}{\delta\phi(t,\vec{z})}=\delta^3(\vec{x}-\vec{z}) \quad \text{y} \quad \frac{\delta\phi(t,\vec{y})}{\delta\phi(t,\vec{z})}=\delta^3(\vec{y}-\vec{z})$$

Si aplicamos la definición de derivada funcional a la funcional $F[\phi(t,\vec{x})]=\phi(t,\vec{y})$:

$$\frac{\delta F[\phi(t,\vec{x})]}{\delta\phi(t,\vec{x})}=\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{\varepsilon}\Big(\phi(t,\vec{y})+\varepsilon u(t,\vec{y})-\phi(t,\vec{y})\Big)=u(t,\vec{y})$$

donde $u(t,\vec{y})$ es una función test. Ahora:

$$\frac{\delta F[\phi(t,\vec{x})]}{\delta\phi(t,\vec{x})}=u(t,\vec{y})=\int d^3x\,\delta^3(\vec{y}-\vec{x})\,u(t,\vec{x})$$

de modo que:

$$\frac{\delta F[\phi(t,\vec{x})]}{\delta \phi(t,\vec{x})_u} = \frac{\delta \phi(t,\vec{y})}{\delta \phi(t,\vec{x})_u} = \delta^3(\vec{y}-\vec{x})_u$$

Para el segundo corchete hacemos algo similar:

$$\{\pi(t,\vec{x}),\pi(t,\vec{y})\} = \int d^3z \left(\frac{\delta \pi(t,\vec{x})}{\delta \phi(t,\vec{z})} \frac{\delta \pi(t,\vec{y})}{\delta \pi(t,\vec{z})} - \frac{\delta \pi(t,\vec{x})}{\delta \pi(t,\vec{z})} \frac{\delta \pi(t,\vec{y})}{\delta \phi(t,\vec{z})} \right)$$

Por la misma razón que antes:

$$\frac{\delta \pi(t,\vec{x})}{\delta \phi(t,\vec{z})} = \frac{\delta \pi(t,\vec{y})}{\delta \phi(t,\vec{z})} = 0$$, así queda concluida la demostración.

De igual forma que antes se demuestra:

$$\frac{\delta \pi(t,\vec{x})}{\delta \pi(t,\vec{z})} = \delta^3(\vec{x}-\vec{z}) \qquad \frac{\delta \pi(t,\vec{y})}{\delta \pi(t,\vec{z})} = \delta^3(\vec{y}-\vec{z})$$

<u>Ejercicio 66.2. Calcula el conmutador $[\phi(t_1,\vec{x}_1),\phi(t_2,\vec{x}_2)]$</u>

Tomamos el campo $\phi(t,\vec{x})$ en los puntos 1 y 2:

$$\phi(t_1,\vec{x}_1) = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left(a(\vec{k})\, e^{-ikx_1} + a^+(\vec{k})\, e^{ikx_1} \right)$$

$$\phi(t_2,\vec{x}_2) = \int \frac{d^3q}{(2\pi)^3} \frac{1}{\sqrt{2\omega_q}} \left(a(\vec{q})\, e^{-iqx_2} + a^+(\vec{q})\, e^{iqx_2} \right)$$

En el punto 2 hemos cambiado la notación k por q.

Ahora hacemos el conmutador $[\phi(t_1,\vec{x}_1),\phi(t_2,\vec{x}_2)]$

Por las propiedades de los conmutadores:

$$[\phi(1),\phi(2)]=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_q}}\left[a_k e^{-ikx_1}+a_k^+ e^{ikx_1},\, a_q e^{-iqx_2}+a_q^+ e^{iqx_2}\right]$$

Nos centramos en $\left[a_k e^{-ikx_1}+a_k^+ e^{ikx_1},\, a_q e^{-iqx_2}+a_q^+ e^{iqx_2}\right]=$

$$[a_k,a_q]e^{-ikx_1}e^{-iqx_2}+[a_k,a_q^+]e^{-ikx_1}e^{iqx_2}+[a_k^+,a_q]e^{ikx_1}e^{-iqx_2}+$$
$$[a_k^+,a_q^+]e^{ikx_1}e^{iqx_2}$$

Como $[a_k,a_q]=[a_k^+,a_q^+]=0$, nos queda:

$$[a_k,a_q^+]e^{-ikx_1}e^{iqx_2}-[a_q,a_k^+]e^{ikx_1}e^{-iqx_2}$$

Por otra parte:

$$[a_k,a_q^+]=(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{q}) \qquad [a_q,a_k^+]=(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{q})$$

Con lo que nos queda:

$$(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{q})e^{-ikx_1}e^{iqx_2}-(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{q})e^{ikx_1}e^{-iqx_2}$$

Sustituyendo en el conmutador:

$$[\phi(1),\phi(2)]=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_k}}\int \frac{d^3q}{(2\pi)^3}\frac{1}{\sqrt{2\omega_q}}\left[(2\pi)^3\delta^3(\vec{k}-\vec{q})\left(e^{-ikx_1}e^{iqx_2}-e^{ikx_1}e^{-iqx_2}\right)\right]$$

Si integramos las variables d^3q, entonces:

$\vec{k}=\vec{q}$ y $k^0=q^0$; $k^0=\sqrt{|\vec{k}|+w^2}$ y $q^0=\sqrt{|\vec{q}|+w^2}$

$$[\phi(t_1,\vec{x}_1),\phi(t_2,\vec{x}_2)]=\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{(2\omega_k)}\left(e^{-ik(x_1-x_2)}-e^{ik(x_1-x_2)}\right)$$

El 1 y 2 de las exponenciales no son subíndices, solo indican posición 1 y posición 2.

Vamos a demostrar que si fijamos el mismo instante de tiempo $t_2 = t_1$, el conmutador es cero.

$$[\phi(t_1,\vec{x}_1),\phi(t_1,\vec{x}_2)] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left(e^{-i[k_0\underbrace{(x_1^0-x_1^0)}_{0}-\vec{k}\Delta\vec{x}]} - e^{i[k_0\underbrace{(x_1^0-x_1^0)}_{0}-\vec{k}\Delta\vec{x}]}\right)$$

$$[\phi(t_1,\vec{x}_1),\phi(t_1,\vec{x}_2)] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k}\left(e^{i\vec{k}\Delta\vec{x}} - e^{-i\vec{k}\Delta\vec{x}}\right)$$

Separamos en dos integrales:

$$[\phi(1),\phi(2)] = \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k} e^{i\vec{k}\Delta\vec{x}} - \int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k} e^{-i\vec{k}\Delta\vec{x}}$$

Ahora demostraremos que ambas integrales son iguales. Tomamos la primera, y sustituimos $\vec{k} = -\vec{p}$. También sustituimos $d^3k = d^3p$, ya que:

$d^3k = |\det J|\, d^3p$ y $|\det J| = 1$, luego:

$$\int \frac{d^3k}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k} e^{i\vec{k}\Delta\vec{x}} = \int \frac{d^3p}{(2\pi)^3}\frac{1}{2\omega_k} e^{-i\vec{p}\Delta\vec{x}}$$

Como p es índice mudo, lo renombro como k, así:

$$[\phi(t_1,\vec{x}_1),\phi(t_1,\vec{x}_2)] = 0$$

Ejercicio 66.3. Demostrar que $\frac{d^3k}{2\omega_k}$ es un invariante Lorentz, y que $\int \frac{d^3k}{2\omega_k} = \int d^4k\, \delta(\omega^2 - |\vec{k}|^2 - m^2)\,\theta(\omega)$.

Consideremos el espacio definido por k^μ, y sea $d^4k = dk^0dk^1dk^2dk^3$ un elemento diferencial de volumen de dicho espacio (volumen tetradimensional). Hacemos $k^0 = \omega$ y $d^3k = dk^1dk^2dk^3$, así $d^4k = d\omega\, d^3k$.

Este elemento diferencial de volumen es un invariante Lorentz. Definimos una transformación Lorentz Λ, así $K' = \Lambda K$. El elemento diferencial de volumen se transforma de la siguiente forma:

$$d^4k' = \left|\frac{\partial k'}{\partial k}\right| d^4k = \left|\frac{\partial(\Lambda k)}{\partial k}\right| d^4k = |\Lambda|\, d^4k = d^4k$$

Al pertenecer Λ al grupo $SO(3,1)$, $|\Lambda| = 1$.

Ahora queremos hacer desaparecer $d\omega$ de d^4k y lo que quede que siga siendo invariante Lorentz. Lo más razonable es multiplicar d^4k por la δ de Dirac con un argumento que dependa de ω y que sea invariante Lorentz.

Sabemos que $k_\mu k^\mu = m^2$ es un invariante Lorentz, por lo que podríamos utilizar $\delta(k_\mu k^\mu)$, pero como lo que quede tiene que ser solución de la ecuación de Klein-Gordon, nos interesa que aparezca $\omega_k = \sqrt{|\vec{k}|^2 + m^2}$, por ello tomamos $\delta(k_\mu k^\mu - m^2)$.

$$\delta(k_\mu k^\mu - m^2) = \delta(\omega^2 - |\vec{k}|^2 - m^2) = \delta(\omega^2 - \omega_k^2)$$

Entonces tenemos:

$$d^4k\, \delta(\omega^2 - \omega_k^2) = d\omega\, d^3k\, \delta(\omega^2 - \omega_k^2) \rightarrow \text{invariante Lorentz}$$

Por las propiedades de las δ podemos expresar:

$$d^4k\, \delta(\omega^2 - \omega_k^2) = d\omega\, d^3k \left(\frac{\delta(\omega - \omega_k)}{|2\omega_k|} + \frac{\delta(\omega + \omega_k)}{|2\omega_k|} \right)$$

Aquí nos topamos con un problema, ya que el segundo sumando admite como posibilidad que $\omega = -\omega_k$

y esta posibilidad fue descartada en las soluciones de la ecuación de Klein-Gordon porque corresponden a energías negativas.

Por ello debemos multiplicar por la función $\Theta(\omega)$, función de Heaviside, para garantizar que $\omega_k > 0$.

Así pues:

$$d^4K\, \delta(\omega^2 - \omega_k^2)\, \Theta(\omega)$$

Para que esto sea invariante Lorentz, $\Theta(\omega)$ también debe serlo. En el capítulo 31 del curso de mecánica teórica Roger Balsach hizo una demostración, al respecto.

Básicamente consiste en demostrar que si un observador inercial mide una $\omega > 0$, otro observador inercial moviéndose respecto al primero mediría también $\omega' > 0$.

Consideremos la componente cero de la transformación $K' = \Lambda K$:

$K^{0'} = \Lambda^0{}_\mu K^\mu = \Lambda^0{}_0 K^0 + \vec{\Lambda}\vec{K} = \gamma\omega - \gamma\vec{\beta}\vec{K}$, donde

$\Lambda^0{}_0 = \gamma$, $\vec{\Lambda} = (\Lambda^0{}_1, \Lambda^0{}_2, \Lambda^0{}_3) = -\gamma\vec{\beta}$ con $\vec{\beta} = \frac{\vec{V}}{c}$.

Entonces: $|\vec{\beta}| < 1$, y como $K_\mu K^\mu = \omega^2 > 0$ (vector "cuasi-tiempo" "time-like")

$\omega^2 - |\vec{K}|^2 > 0 \Rightarrow \frac{|\vec{K}|}{|\omega|} < 1$, y $\gamma > 1$

Entonces:

$\omega' = \gamma\omega - \gamma\vec{\beta}\cdot\vec{K}$; $\omega' \geq \gamma\omega - \gamma|\vec{\beta}||\vec{K}|$; $\omega' \geq \gamma\omega\left(1 - |\vec{\beta}|\frac{|\vec{K}|}{\omega}\right)$

si $\omega > 0 \Rightarrow \left(1 - |\vec{\beta}|\frac{|\vec{K}|}{\omega}\right) > 0 \Rightarrow \omega' > 0$

si $\omega < 0 \Rightarrow \left(1 - |\vec{\beta}|\frac{|\vec{K}|}{-\omega}\right) = \left(1 + |\vec{\beta}|\frac{|\vec{K}|}{|\omega|}\right) > 0 \Rightarrow \omega' < 0$

luego $\theta(\omega)$ es un invariante Lorentz, así como también lo será:

$$d^4k\, \delta(\omega^2 - \omega_k^2)\, \theta(\omega) = d\omega\, d^3k\, \delta(\omega^2 - \omega_k^2)\, \theta(\omega)$$

Si integramos:

$$\int d^4k\, \delta(\omega^2 - \omega_k^2)\, \theta(\omega) = \int_{\to 0,1,2,3} d\omega\, d^3k \left(\frac{\delta(\omega - \omega_k)}{|2\omega_k|} + \frac{\delta(\omega + \omega_k)}{|2\omega_k|} \right) \theta(\omega)$$

$$= \int_{\to 1,2,3} \frac{d^3k}{2\omega_k} \qquad \omega_k \text{ solo valore positivos.}$$