Teoría Cuantica de Campos- Ejercicio 2

Fórmulas del video 3

$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-ax^2}dx = \sqrt{\frac{\pi}{a}} = \sqrt{\pi}a^{-1/2}$; $\int_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2a^{3/2}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-3/2}$

a)

$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{a}{2}x^2}dx = \int_{-\infty}^{0} xe^{-\frac{a}{2}x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-\frac{a}{2}x^2}dx = -\int_{0}^{-\infty} xe^{-\frac{a}{2}x^2}dx + \int_{0}^{+\infty} xe^{-\frac{a}{2}x^2}dx$

con el cambio de variable $y = -x$; $dy = -dx$

$\int_{0}^{-\infty} xe^{-\frac{a}{2}x^2}dx = \int_{0}^{\infty} -ye^{-\frac{a}{2}y^2}(-dy) = \int_{0}^{\infty} ye^{-\frac{a}{2}y^2}dy$

Por tanto

$\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{a}{2}x^2}dx = -\int_{0}^{\infty} ye^{-\frac{a}{2}y^2}dy + \int_{0}^{+\infty} xe^{-\frac{a}{2}x^2}dx = 0$ (ambas integrales son iguales)

por consiguiente

$\langle x\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} xe^{-\frac{a}{2}x^2}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}dx} = \frac{0}{\sqrt{\frac{\pi}{a/2}}} = 0$

Otra forma de encontrar el resultado es tener en cuenta que x es una función impar por lo que para cada valor x habra un valor -x así que la media es necesariamente 0. Lo mismo ocurrirá para todas las potencias impares de x.Y lo mismo se puede aplicar a las integrales de una funcion impar con limites simetricos respecto al origen (generalizable al punto respecto al que se produce la reflexion especular de la función).

b)

$\langle x^2\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-\frac{a}{2}x^2}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}dx} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2}(\frac{a}{2})^{-3/2}}{\sqrt{\pi}(\frac{a}{2})^{-1/2}} = \frac{1}{2}(\frac{a}{2})^{-1} = \frac{1}{2}\frac{2}{a} = \frac{1}{a}$

c)Vamos a obtener las sucesivas integrales gaussianas con x elevada a exponentes pares, ya que las integrales con exponentes impares son siempre cero por ser la funcion subintegral impar

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}a^{-3/2}$

derivando respecto a a

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^2(-x^2)e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}(-3/2)a^{-5/2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}3/2a^{-5/2} = \frac{\sqrt{\pi}}{2^2}3a^{-5/2}$

Volviendo a derivar

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^4(-x^2)e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^2}3(-5/2)a^{-7/2}$

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^6e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^3}3\cdot 5a^{-7/2}$

continuando el proceso se podria obtener una expresion general para exponentes pares 2n

$\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}e^{-ax^2}dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n}1\cdot 3\cdot 5\cdots(2n-5)(2n-3)(2n-1)a^{-(2n+1)/2}$

De acuerdo con lo anterior y teniendo en cuenta que en las exponenciales aparece $a/2$ en lugar de a

$\langle x^{2n}\rangle = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} x^{2n}e^{-\frac{a}{2}x^2}dx}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{a}{2}x^2}dx} = \frac{\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}1\cdot3\cdot5\cdots(2n-5)(2n-3)(2n-1)(\frac{a}{2})^{-(2n+1)/2}}{\sqrt{\pi}(\frac{a}{2})^{-1/2}} =$

$= \frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1(\frac{a}{2})^{-(2n)/2} =$

$= \frac{1}{2^n}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1\frac{2^n}{a^n}$

$\langle x^{2n}\rangle = \frac{1}{a^n}(2n-1)(2n-3)(2n-5)\cdots 5\cdot 3\cdot 1$

y nos ponemos muy contentos