Ejercicio Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 63
Autor del curso: Javier García
Ejercicio resuelto por Miguel A. Montañez
12 abril de 2021

Ejercicio 63. Demostrar que el campo magnético es invariante a una transformación gauge.

El campo magnético se expresa:

$$\vec{B} = \vec{\nabla} \times \vec{A} = (\partial_y A_z - \partial_z A_y,\ \partial_z A_x - \partial_x A_z,\ \partial_x A_y - \partial_y A_x)$$

Vamos a demostrar que es invariante a la transformación gauge:

$$A'_\mu = A_\mu - \partial_\mu f \qquad f = \frac{1}{g}\theta$$

$$B_x = \partial_y A_z - \partial_z A_y = \partial_2 A^3 - \partial_3 A^2 = \partial_3 A_2 - \partial_2 A_3$$

$$B_y = \partial_z A_x - \partial_x A_z = \partial_3 A^1 - \partial_1 A^3 = \partial_1 A_3 - \partial_3 A_1$$

$$B_z = \partial_x A_y - \partial_y A_x = \partial_1 A^2 - \partial_2 A^1 = \partial_2 A_1 - \partial_1 A_2$$

Si realizamos una transformación gauge:

$$B'_x = \partial_3 A'_2 - \partial_2 A'_3 \quad B'_y = \partial_1 A'_3 - \partial_3 A'_1 \quad B'_z = \partial_2 A'_1 - \partial_1 A'_2$$

Sustituyendo A'_1, A'_2 y A'_3:

$$B'_x = \partial_3(A_2 - \partial_2 f) - \partial_2(A_3 - \partial_3 f) = \partial_3 A_2 - \partial_3\partial_2 f - \partial_2 A_3 + \partial_2\partial_3 f = B_x$$

$$B'_y = \partial_1(A_3 - \partial_3 f) - \partial_3(A_1 - \partial_1 f) = \partial_1 A_3 - \partial_1\partial_3 f - \partial_3 A_1 + \partial_3\partial_1 f = B_y$$

$$B'_z = \partial_2(A_1 - \partial_1 f) - \partial_1(A_2 - \partial_2 f) = \partial_2 A_1 - \partial_2\partial_1 f - \partial_1 A_2 + \partial_1\partial_2 f = B_z$$

(suponemos que las derivadas parciales se "comportan bien".)

Queda demostrado que $\vec{B}' = \vec{B}$ en una transformación gauge.