Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 86

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

20 de febrero de 2023

1. Calcular los ceros de la función $f(x) = E_a + E_b - \sqrt{x^2 + m_c^2} - \sqrt{x^2 + m_d^2}$.

Queremos resolver la ecuación

$$E_a + E_b - \sqrt{x^2 + m_c^2} - \sqrt{x^2 + m_d^2} = 0 \Longrightarrow \sqrt{x^2 + m_c^2} + \sqrt{x^2 + m_d^2} = E_a + E_b$$

Elevando al cuadrado esta ecuación obtenemos

$$x^2 + m_c^2 + x^2 + m_d^2 + 2\sqrt{(x^2 + m_c^2)(x^2 + m_d^2)} = (E_a + E_b)^2$$

$$2\sqrt{(x^2 + m_c^2)(x^2 + m_d^2)} = (E_a + E_b)^2 - m_c^2 - m_d^2 - 2x^2$$

Elevando de nuevo al cuadrado para eliminar la raíz;

$$4(x^2 + m_c^2)(x^2 + m_d^2) = ((E_a + E_b)^2 - m_c^2 - m_d^2 - 2x^2)^2$$

$$\cancel{4x^4} + \cancel{4x^2(m_c^2 + m_d^2)} + 4m_c^2 m_d^2 = ((E_a + E_b)^2 - m_c^2 - m_d^2)^2 + \cancel{4x^4} - 4x^2((E_a + E_b)^2 \cancel{- m_c^2 - m_d^2})$$

$$4x^2(E_a + E_b)^2 = ((E_a + E_b)^2 - m_c^2 - m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2$$

$$x = \frac{\sqrt{((E_a + E_b)^2 - m_c^2 - m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2}}{2(E_a + E_b)}$$

Que coincide con la expresión de Javier; para verlo vamos a expresar primero el resultado de forma más simétrica

$$\begin{aligned}
x^2 &= \frac{((E_a + E_b)^2 - m_c^2 - m_d^2)^2 - 4m_c^2 m_d^2}{4(E_a + E_b)^2} \\
&= \frac{(E_a + E_b)^4 + m_c^4 + m_d^4 - 2(E_a + E_b)^2 m_c^2 - 2(E_a + E_b)^2 m_d^2 - 2m_c^2 m_d^2}{4(E_a + E_b)^2} \\
&= \frac{(m_d^2 - (E_a + E_b)^2 - m_c^2)^2 - 4m_c^2 (E_a + E_b)^2}{4(E_a + E_b)^2}
\end{aligned}$$

Ahora, simplificando un poco obtenemos el resultado deseado;

$$\begin{aligned}
x^2 &= \frac{(m_d^2 - (E_a + E_b)^2 - m_c^2)^2 - 4m_c^2 (E_a + E_b)^2}{4(E_a + E_b)^2} \\
&= \frac{(E_a + E_b)^2}{4} \left[\frac{(m_d^2 - (E_a + E_b)^2 - m_c^2)^2 - 4m_c^2 (E_a + E_b)^2}{(E_a + E_b)^4} \right] \\
&= \frac{(E_a + E_b)^2}{4} \left[\left(\frac{m_d^2 - (E_a + E_b)^2 - m_c^2}{(E_a + E_b)^2} \right)^2 - \left(\frac{2m_c}{E_a + E_b} \right)^2 \right] \\
&= \frac{(E_a + E_b)^2}{4} \left[\left(\frac{m_d^2 - m_c^2}{(E_a + E_b)^2} - 1 \right)^2 - \left(\frac{2m_c}{E_a + E_b} \right)^2 \right]
\end{aligned}$$

Finalmente, derivando $f(x)$, obtenemos el resultado;

$$f'(x) = -\frac{x}{\sqrt{x^2 + m_c^2}} - \frac{x}{\sqrt{x^2 + m_d^2}} = -\left(\frac{x}{E_c} + \frac{x}{E_d} \right) = -\frac{x(E_c + E_d)}{E_c E_d}$$

2. Calcular la dimensionalidad de σ

Según la ecuación

$$\sigma = \frac{\lambda^2}{16\pi(E_a + E_b)^2}$$

La dimensión de σ debe ser

$$[\sigma] = \frac{[\lambda]^2}{[E]^2}$$

Para el cálculo de $[\lambda]$ podemos usar que el Lagrangiano de interacción es $\mathcal{L} = \lambda\phi^4$, por lo que

$$[\lambda] = \frac{[\mathcal{L}]}{[\phi]^4}$$

En unidades naturales, la acción es adimensional, $[S] = 1$, y la posición y el tiempo tienen las mismas unidades, inverso de energía; $[L] = [T] = [E]^{-1}$, como la acción es la integral del Lagrangiano, obtenemos

$$S = \int \mathcal{L}\, \mathrm{d}^4x \Longrightarrow [\mathcal{L}] = \frac{[S]}{[x]^4} = \frac{1}{[E]^{-4}} = [E]^4$$

Entonces, usando el Lagrangiano de Klein-Gordon;

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2}\phi\left(\Box + m^2\right)\phi \Longrightarrow [\phi]^2 = \frac{[\mathcal{L}]}{[\Box + m^2]} = \frac{[E]^4}{[E]^2} = [E]^2 \Longrightarrow [\phi] = [E]$$

En conclusión, λ es una cantidad adimensional, por lo que

$$[\sigma] = [E]^{-2} = [L]^2$$