Разбор задач для подготовки к экзамену по алгебре для группы БПИ209

2 модуль

Автор: vk.com/yourkumir

За представленный исходный разбор спасибо: vk.com/id556098027

Задачи по теории систем линейных уравнений

1. Проверьте совместность системы линейных уравнений. Найдите все её решения (ответ запишите в векторном виде, выделив частное решение), найдите ФСР соответствующей однородной системы.

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right)$$

Приведём матрицу к каноническому виду:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$RgA = Rg(A|b) = 2 \Rightarrow$ система совместна (по теореме Кронкера-Капелли)

Выпишем приведённую систему:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_3 + 4x_4 - 21x_5 = 1 \\ x_2 + x_4 - 6x_5 = -1 \end{cases}$$

Выделим зависимые переменные:

$$\begin{cases} x_1 = -2x_3 - 4x_4 + 21x_5 - 1 \\ x_2 = -x_4 + 6x_5 + 1 \end{cases}$$

Выпишем ответ в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \cdot \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \cdot \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \; x_3, x_4, x_5 \in \mathbb{R}$$

ФСР: $(-2\ 0\ 1\ 0\ 0)^T$, $(-4\ -1\ 0\ 1\ 0)^T$, $(21\ 6\ 0\ 0\ 1)^T$

Частное решение: $(-1\ 1\ 0\ 0\ 0)^T$

2. Можно ли заданную матрицу A представить в виде $A = LU$, где L — нижнетреугольная (то есть над диагональю нули) матрица с единицами на главной диагонали, а U — верхнетреугольная (то есть под диагональю нули) матрица? Если такое разложение возможно, то предъявите его, если нет, то объясните почему.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix}$$

Приведём матрицу A к ступенчатому виду:

$$U = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$A = LU \Rightarrow L = AU^{-1}$

$$L = AU^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

P.S. LU-разложение существует только в том случае, когда матрица A обратима, а все ведущие (угловые) главные миноры матрицы A невырождены.

708. Пользуясь методом исключения неизвестных, исследовать совместность и найти общее решение системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} 10x_1 + 23x_2 + 17x_3 + 44x_4 = 25 \\ 15x_1 + 35x_2 + 26x_3 + 69x_4 = 40 \\ 25x_1 + 57x_2 + 42x_3 + 108x_4 = 65 \\ 30x_1 + 69x_2 + 51x_3 + 133x_4 = 95 \end{cases}$$

Запишем расширенную матрицу системы $(A|b)$:

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 10 & 23 & 17 & 44 & 25 \\ 15 & 35 & 26 & 69 & 40 \\ 25 & 57 & 42 & 108 & 65 \\ 30 & 69 & 51 & 133 & 95 \end{array}\right)$$

Приведём матрицу к ступенчатому виду с помощью метода Гаусса (метода исключения неизвестных):

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 5 & 11 & 8 & 20 & 15 \\ 0 & 1 & 1 & 4 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 15 \end{array}\right)$$

Из последний строки следует, что система не имеет решений, то есть несовместна.

742. Определить, какие из строк матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix}$$

образуют фундаментальную систему решений для системы уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 5x_2 + 3x_3 + 2x_4 + x_5 = 0 \\ 5x_1 - 8x_2 + 5x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 0 \\ x_1 - 7x_2 + 4x_3 + 2x_4 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 + 2x_4 + 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Определение. Пусть дана СЛАУ $Sx = 0$, тогда любые
1) $n - RgS$
2) линейно независимых
3) решений однородных СЛАУ
называются фундаментальной системой решений (ФСР) однородной СЛАУ $Sx = 0$.

Найдём количество векторов в ФСР:

$$RgS = Rg\begin{pmatrix} 2 & -5 & 3 & 2 & 1 \\ 5 & -8 & 5 & 4 & 3 \\ 1 & -7 & 4 & 2 & 0 \\ 4 & -1 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 2,$$

тогда нам нужно найти $n - RgS = 4 - 2 = 2$ строк матрицы A, которые являются линейно независимыми решениями СЛАУ.

Проверим строки на линейную независимость:

$$RgA = Rg\begin{pmatrix} 6 & 2 & 3 & -2 & -7 \\ 5 & 3 & 7 & -6 & -4 \\ 8 & 0 & -5 & 6 & 13 \\ 4 & -2 & -7 & -5 & -7 \end{pmatrix} = 4,$$

то есть все стоки матрицы являются линейно независимыми, тогда нам нужно найти 2 строки, которые являются решениями СЛАУ.

Первая строка является решением СЛАУ:
$2*6 - 5*2 + 3*3 + 2*(-2) - 7 = 0$
$5*6 - 8*2 + 5*3 + 4*(-2) + 3*(-7) = 0$
$6 - 7*2 + 4*3 + 2*(-2) = 0$
$4*6 - 2 + 3 + 2*(-2) + 3*(-7) = 0$
Вторая строка является решением СЛАУ:
$2*5 - 5*3 + 3*7 + 2*(-6) - 4 = 0$
$5*5 - 8*3 + 5*7 + 4*(-6) + 3*(-4) = 0$
$5 - 7*3 + 4*7 + 2*(-6) = 0$
$4*5 - 3 + 7 + 2*(-6) + 3*(-4) = 0$
Третья строка не является решением СЛАУ:
$2*8 + 3*(-5) + 2*6 + 13 = 26 \neq 0$
Четвёртая строка не является решением СЛАУ:
$2*4 - 5*(-2) + 3*(-7) + 2*(-5) - 7 = -20 \neq 0$

Таким образом, первая и вторая строки матрицы A образуют ФСР данной СЛАУ.
P.S. В Проскурякове неверный ответ.

Задачи по аналитической геометрии

1. В ортонормированном базисе даны векторы $a\{1,4,1\}, b\{2,1,3\}, c\{-2,0,3\}$. Найти вектор y такой, что $y \perp a, (y,c)=2, (y,b)=9$.

   Поговорим о скалярном произведении. Скалярное произведение векторов - это функция, обладающая следующими свойствами:
   1) $(a,b)=(b,a)$
   2) $(\beta a,b)=\beta(a,b)$
   3) $(a+b,c)=(a,c)+(b,c)$
   4) $(a,a)>0$, если $a \neq 0$; $(a,a)=0$ тогда и только тогда, когда $a=0$
   Скалярное произведение используется в аналитической геометрии для вычисления углов (на $\mathbb{V}_3$ $(a,b) = |a||b|cos(\widehat{a,b})$) и для проверки ортогональности ($(a,b)=0$ эквивалентно тому, что a и b ортогональны).
   В ОНБ $(a,b)=x_a x_b + y_a y_b + z_a z_b$ и $(a,a)=|a|^2$

   Условие $y \perp a$ эквивалентно условию $(y,a)=0$. Пусть искомый вектор имеет координаты $\{y_1,y_2,y_3\}$. Запишем систему, которую требуется решить:

$$\begin{cases} (y,a)=0 \\ (y,b)=9 \\ (y,c)=2 \end{cases}$$

   В ортонормированном базисе скалярное произведение векторов равно сумме произведений их соответствующих координат.

$$\begin{cases} y_1+4y_2+y_3=0 \\ 2y_1+y_2+3y_3=9 \\ -2y_1+3y_3=2 \end{cases}$$

   Решим её любым удобным способом и получим:

$$y_1=2;\ y_2=-1;\ y_3=2$$

   То есть $y=\{2,-1,2\}$.

2. Найти площадь параллелограмма, построенного на векторах $a=p+3q, b=p-2q$, если $|p|=2, |q|=3, \widehat{(p,q)}=\frac{\pi}{3}$.

   Теперь поговорим о векторном произведении. Векторное произведение векторов a и b - это вектор c такой, что:
   1) $|c|=|a||b|sin(\widehat{a,b})$
   2) $c \perp a$, $c \perp b$
   3) тройка a,b,c - правая.
   Некоторые свойства векторного произведения: $[a,b]=-[b,a]$, $[\beta a,b]=\beta[a,b]$, $[(a+b),c]=[a,c]+[b,c]$, $[a,a]=0$
   Векторное произведение в аналитической геометрии используется для проверки коллинеарности векторов (векторы a и b коллинеарны тогда и только тогда, когда $[a,b]=0$), для вычисления площадей плоских многоугольников (если a,b не коллинеарны ($[a,b]\neq 0$), то $|[a,b]|$ равно площади параллелограмма, построенного на a,b) и для построения ортогонального вектора к двум данным (из пункта 2 определения).

$$\begin{gathered}[a,b]=[p+3q,p-2q]= \\ =[p,p]+[p,-2q]+[3q,p]+[3q,-2q]=[p,p]-2\,[p,q]+3\,[q,p]-6\,[q,q]= \\ =-2\,[p,q]+3\,[q,p]=2\,[q,p]+3\,[q,p]= \\ =5\,[q,p]\end{gathered}$$

   Тогда:

$$S=|[a,b]|=|5\,[q,p]|=\left|5\cdot|p|\cdot|q|\cdot\sin\widehat{(p,q)}\right|=3\sqrt{3}\cdot 5=15\sqrt{3}$$

3. Даны вершины треугольника $A(-5,3), B(7,8), C(-2,-1)$. Составить уравнения следующих прямых: медианы, биссектрисы и высоты треугольника, проведенных из вершины A. Система координат прямоугольная декартова.

На рисунке представлен треугольник с искомыми прямыми. Розовым цветом отмечена биссектриса, оранжевым – высота, а голубым – медиана.

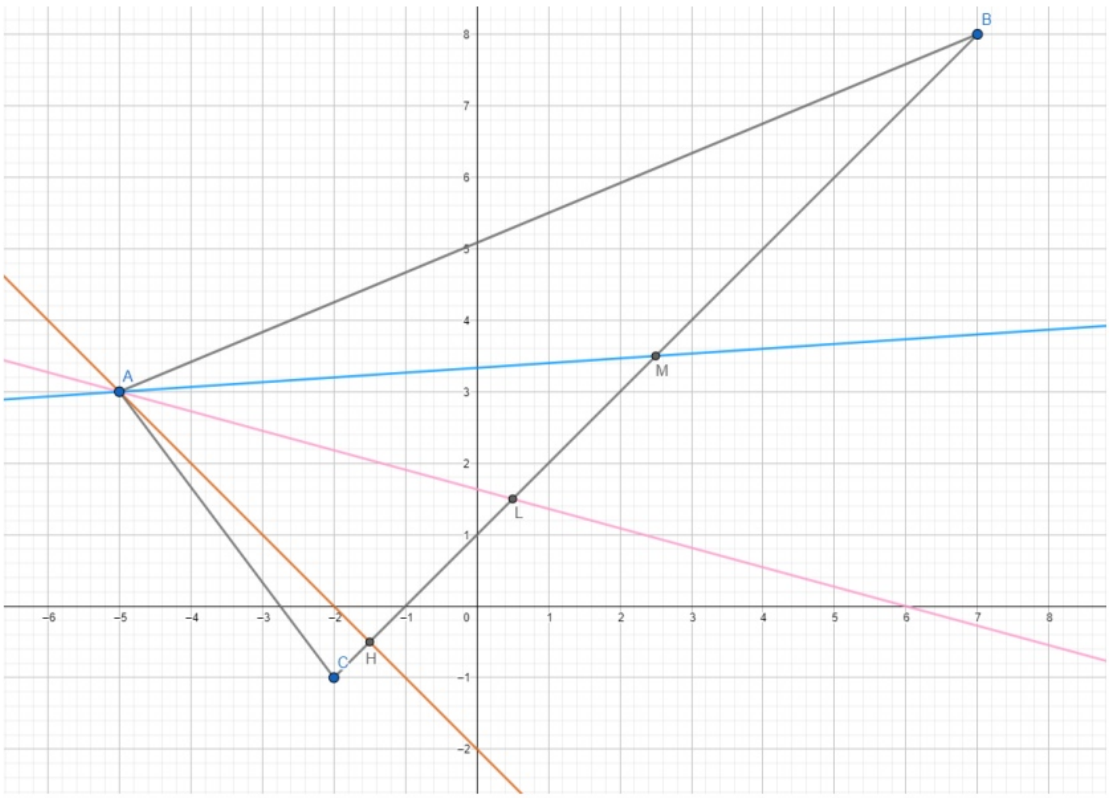

Рис. 1: Треугольник ABC, его медиана AM, высота AH и биссектриса AL

Найдём уравнения сторон AC, AB и BC:

$$\mathbf{AB} = \{7-(-5), 8-3\} = \{12, 5\}$$

Тогда каноническое уравнение прямой (повторите все виды уравнений для прямых и плоскости, как по ним определить точку и направляющий вектор для прямой и вектор нормали для плоскости!) AB по точке A и направляющему вектору $\mathbf{AB}$:

$$\frac{x-(-5)}{12} = \frac{y-3}{5}$$

Или запишем как (умножив обе части уравнения на 60):

$$5x + 25 = 12y - 36$$

$$5x - 12y + 61 = 0$$

Аналогично для сторон AC и BC:

$$\mathbf{AC} = \{-2-(-5), -1-3\} = \{3, -4\}, \ \frac{x-(-5)}{3} = \frac{y-3}{-4}, \ 4x + 3y + 11 = 0$$

$$\mathbf{BC} = \{-2-7, -1-8)\} = \{-9, -9\}, \ \frac{x-7}{-9} = \frac{y-8}{-9}, \ x - y + 1 = 0$$

Найдем биссектрису.
Точки биссектрисы угла треугольника равноудалены от сторон этого угла, тогда используем формулу для расстояния от точки до прямой и приравняем данные расстояния:

$$\frac{A_1x + B_1y + C_1}{\sqrt{A_1^2 + B_1^2}} = \frac{A_2x + B_2y + C_2}{\sqrt{A_2^2 + B_2^2}}$$

Подставим известные значения:

$$\frac{5x - 12y + 61}{\sqrt{5^2 + 12^2}} = \frac{4x + 3y + 11}{\sqrt{4^2 + 3^2}}$$
$$\frac{5x - 12y + 61}{13} = \frac{4x + 3y + 11}{5}$$
$$25x - 60y + 305 = 52x + 39y + 143$$
$$27x + 99y - 162 = 0$$

Тогда получаем, что уравнение биссектрисы имеет вид:

$$3x + 11y - 18 = 0$$

Теперь найдём высоту. Пусть точка H имеет координаты (x_H, y_H). Тогда:

$$\mathbf{AH} = \{x_H - (-5), y_H - 3\} = \{x_H + 5, y_H - 3\}$$

Так как высота перпендикулярна стороне BC, то скалярное произведение векторов $\mathbf{AH}$ и $\mathbf{BC}$ равно нулю. Тогда:

$$(\mathbf{AH}, \mathbf{BC}) = -9 \cdot (x_H + 5) - 9 \cdot (y_H - 3) = 0$$

Все точки, которые лежат на нашей высоте, будут удовлетворять уравнению выше $(M = (x_0, y_0) \in L \Rightarrow (AM, BC) = 0)$.
Тогда, если упростить выражение, получаем уравнение искомой прямой:

$$x + y + 2 = 0$$

Наконец, найдём уравнение медианы. Медиана проходит через середину стороны BC – найдём её:

$$x_M = \frac{7 + (-2)}{2} = \frac{5}{2}$$

$$y_M = \frac{8 - (-1)}{2} = \frac{7}{2}$$

Найдём уравнение прямой, проходящей через две заданные точки – A и M:

$$\frac{x - x_A}{x_M - x_A} = \frac{y - y_A}{y_M - y_A}$$

$$\frac{x - (-5)}{\frac{5}{2} - (-5)} = \frac{y - 3}{\dfrac{7}{2} - 3}$$

$$\frac{2x + 10}{15} = \frac{2y - 6}{1}$$

Тогда получаем уравнение, домножив обе стороны уравнения на 15:

$$x - 15y + 50 = 0$$

4. Даны точки $E(2,1,0), F(0,2,1), G(1,2,0), H(1,0,-2)$. Найти:
   (а) объем пирамиды $EFGH$;
   (б) длину высоты, проведенной из вершины H.

   На рисунке представлена пирамида $EFGH$ и высота HB, проведённая к плоскости EGF.

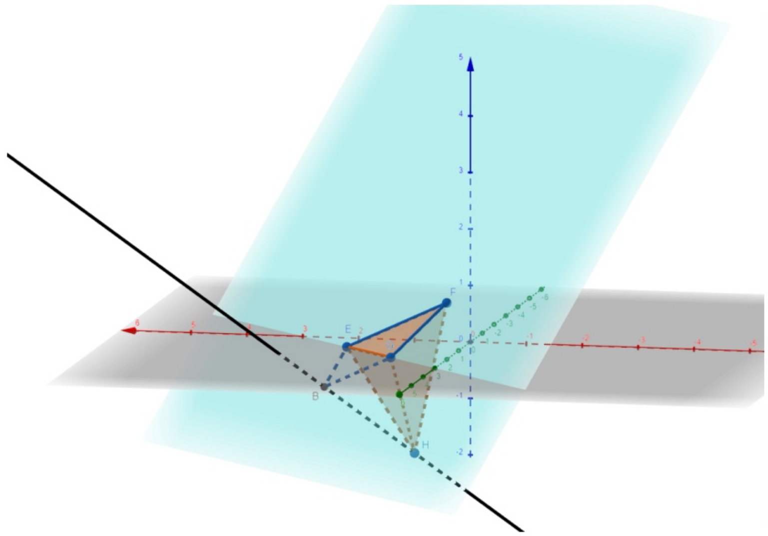

Рис. 2: Пирамида $EFGH$

Пришло время поговорить о смешанном произведении. Смешанное произведение векторов a, b, c - это число $\langle a, b, c\rangle = ([a, b], c)$. В аналитической геометрии смешанное произведение используют для проверки компланарности векторов (векторы компланарны тогда и только тогда, когда $\langle a, b, c\rangle = 0$) и для вычисления объёмов ($\langle a, b, c\rangle$ - объём параллелепипеда, построенного на некомпланарных векторах a, b, c).
Объём трёхугольной пирамиды (тетраэдра), построенной на трёх векторах, можно найти как $\frac{1}{6}$ их смешанного произведения. Найдём координаты векторов, на которых построена наша пирамида:

$$\mathbf{EF} = \{0-2, 2-1, 1-0\} = \{-2, 1, 1\}$$

$$\mathbf{EG} = \{1-2, 2-1, 0-0\} = \{-1, 1, 0\}$$

$$\mathbf{EH} = \{1-2, 0-1, -2-0\} = \{-1, -1, -2\}$$

Тогда объём может быть найден как:

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 4 = \frac{2}{3}$$

Теперь найдём длину высоты HB. Известно, что объём пирамиды может быть найден по формуле $V = \dfrac{S \cdot h}{3}$, где h – длина высоты, проведённой из вершины к основанию с площадью S. Тогда $h = \dfrac{3 \cdot V}{S}$.
Найдём площадь основания EFG как половину векторного произведения векторов EF и EG, так как нам нужен не параллелепипед, а его половина:

$$\frac{1}{2} \cdot |[\mathbf{EF}, \mathbf{EG}]| = \frac{1}{2} \cdot \left\| \begin{matrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| = \frac{1}{2} \cdot |-\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}| = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Тогда:

$$h = \frac{3 \cdot V}{S} = \frac{3 \cdot \frac{2}{3}}{\frac{\sqrt{3}}{2}} = \frac{4}{\sqrt{3}}$$

5. Проверить, что прямые $a: 2x = y+1 = z+2, b: x-1 = -1-y = z$ лежат в одной плоскости. Составить уравнение той плоскости. Найти расстояние от точки $A(1,4,-2)$ до этой плоскости.

   Найдём соответствующие точки и направляющие векторы прямых:

$$a:\ 2x = y+1 = z+2:\ \frac{2x}{2} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}:\ \frac{x}{1} = \frac{y+1}{2} = \frac{z+2}{2}$$

$$b:\ \frac{x-1}{1} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{1}$$

   Тогда:

$$\mathbf{s_a} = \{1,2,2\},\ M_a = (0,-1,-2)\mathbf{s_b} = \{1,-1,1\}, M_b = (1,-1,0)$$

$$\mathbf{M_1M_2} = \{1,0,2\}$$

   Обсудим взаимное расположение прямых. Они могут быть параллельны или совпадать ($s_a = \lambda s_2$), могут лежать в одной плоскости ($\langle s_a, s_b, M_1M_2\rangle = 0$) и пересекаться в ней ($s_a \neq \lambda s_2$) и могут скрещиваться ($\langle s_a, s_b, M_1M_2\rangle \neq 0$).

$$\langle \mathbf{M_1M_2}, \mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}\rangle = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

   Тогда прямые не лежат в одной плоскости.

6. Найти угол между прямой

$$\begin{cases} 2x+2y+3z+5=0 \\ x-2y+z+7=0 \end{cases}$$

   и плоскостью $3x+y-4z-15=0$, а также координаты точки их пересечения.

   Найдём точку пересечения (её координаты должны удовлетворять уравнениям прямой и плоскости):

$$\begin{cases} 2x+2y+3z+5=0 \\ x-2y+z+7=0 \\ 3x+y-4z-15=0 \end{cases}$$

   Тогда точка пересечения нашей прямой и плоскости: $\left(\frac{8}{49}, \frac{99}{49}, \frac{-153}{49}\right)$

   Пусть у нас есть прямая с направляющим вектором $\mathbf{s} = \{l,m,n\}$ и плоскость, заданная уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$, то синус угла между ними может быть найден по формуле:

$$\sin\varphi = \frac{|Al+Bm+Cn|}{\sqrt{A^2+B^2+C^2}\sqrt{l^2+m^2+n^2}}$$

   Из системы уравнений, задающей прямую, найдём векторы нормали к плоскостям, которые прямую образуют:

$$\begin{cases} 2x+2y+3z+5=0 \Rightarrow \mathbf{n_1} = \{2,2,3\} \\ x-2y+z+7=0 \Rightarrow \mathbf{n_2} = \{1,-2,1\} \end{cases}$$

   Тогда направляющий вектор прямой – $\mathbf{s} = [\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}] = \{8,1,-6\}$

   По формуле:

$$\sin\varphi = \frac{|3*8+1*1-4*(-6)|}{\sqrt{3^2+1^2+(-4)^2}\sqrt{8^2+1^2+(-6)^2}} = \frac{49}{\sqrt{26}\sqrt{101}} = \frac{49\sqrt{2626}}{2626}$$

7. Найти точку M', симметричную точке $M(-1, 2, 0)$ относительно прямой $\frac{x+1/2}{1} = \frac{y+7/2}{-1/3} = \frac{z-2}{2}$.

   Примечание: Где-то в вычислениях допущена ошибка

   Пусть π - плоскость, которая перпендикулярна данной прямой и которая проходит через точку M. Тогда её вектор нормали $n = \{1, -\frac{1}{3}, 2\}$. Составим уравнение этой плоскости:

$$1 \cdot (x - (-1)) - \frac{1}{3} \cdot (y - 2) + 2 \cdot (z + 0) = 0$$

   Найдём точку пересечения прямой и плоскости. Назовём её $M_1(x_1, x_2, x_3)$. Запишем уравнение нашей прямой в параметрическом виде:

$$L = \begin{cases} x = 1 \cdot t - \frac{1}{2} \\ y = -\frac{1}{3} \cdot t - \frac{7}{2} \\ z = 2 \cdot t + 2 \end{cases}$$

   Подставим эти значения в уравнение плоскости и найдём t:

$$\begin{gathered} \left(t - \frac{1}{2} + 1\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot t - \frac{7}{2} - 2\right) + 2 \cdot (2 \cdot t + 2) = \\ = \left(t + \frac{1}{2}\right) - \frac{1}{3} \cdot \left(-\frac{1}{3} \cdot t - \frac{11}{2}\right) + 2 \cdot (2 \cdot t + 2) = \\ = \frac{46}{9} \cdot t + \frac{38}{6} = 0 \\ t = -\frac{57}{46} \end{gathered}$$

   Теперь мы можем подставить это значение:

$$L = \begin{cases} x = -\frac{57}{46} - \frac{1}{2} = -\frac{40}{23} \\ y = \frac{1}{3} \cdot \frac{57}{46} - \frac{7}{2} = -\frac{213}{69} \\ z = -2 \cdot \frac{57}{46} + 2 = -\frac{34}{23} \end{cases}$$

   Так мы получили координаты точки M_1 – центра отрезка MM'. Тогда координаты точки M':

$$\begin{gathered} x = -2 \cdot \frac{40}{23} + 1 \\ y = -2 \cdot \frac{213}{69} - 2 \\ z = -2 \cdot \frac{34}{23} \end{gathered}$$

8. Найти точку M', симметричную точке $M(3, 3, 3)$ относительно плоскости $8x + 6y + 8z - 25 = 0$.
   Аналогично предыдущей задаче.

9. Даны точки $P(1,2,0), Q(1,0,2), R(2,1,0), S(0,-2,1)$. Найти:
(а) объем пирамиды $PQRS$;
(б) угол между плоскостями (PQS) и (QRS).

На рисунке представлена пирамида $PQRS$.

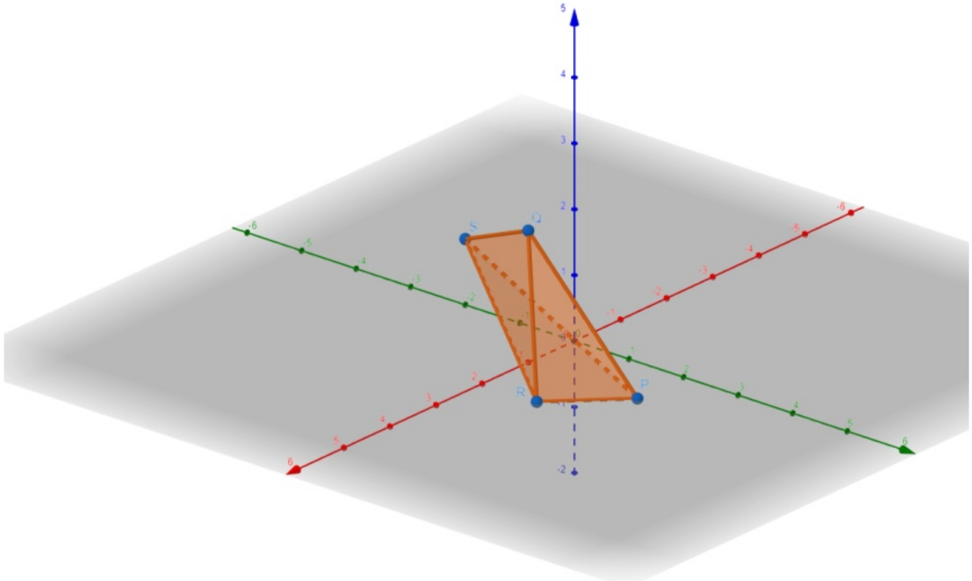

Рис. 3: Пирамида $PQRS$

Пункт а) делается аналогично номеру 4.

$$\mathbf{PQ} = \{0,-2,2\}$$

$$\mathbf{PR} = \{1,-1,0\}$$

$$\mathbf{PS} = \{-1,-4,1\}$$

$$V = \frac{1}{6} \cdot \begin{vmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & -4 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{6} \cdot 8 = \frac{4}{3}$$

Для того, чтобы найти угол между плоскостями, нам нужно найти координаты нормалей к ним. Это можно сделать так:

$$\mathbf{n_1} = [\mathbf{PQ}, \mathbf{PS}] = \{2,2,2\}$$

$$\mathbf{n_2} = [\mathbf{QR}, \mathbf{QS}] = \{-5,3,-1\}$$

Тогда угол φ между плоскостями можно будет найти по формуле:

$$\cos\varphi = \frac{|\,(\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2})\,|}{|\mathbf{n_1}| \cdot |\mathbf{n_2}|} = \frac{|-10+6-2|}{2\sqrt{3}\sqrt{35}} = \sqrt{\frac{3}{35}}$$

10. Исследовать взаимное расположение прямых $\frac{x+5}{3} = \frac{y+5}{2} = \frac{z-1}{-2}$ и $x = 6t + 9, y = -2t, z = -t + 2$. Вычислить расстояние между ними.

$$\mathbf{s_1} = \{3, 2, 2\},\ M_1(-5, -5, 1)$$

$$\mathbf{s_2} = \{6, -2, -1\},\ M_2(9, 0, 2)$$

1 способ.
Вычислим $[\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}]$:

$$\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & 2 & 2 \\ 6 & -2 & -1 \end{vmatrix} = 2\mathbf{i} + 15\mathbf{j} - 18\mathbf{k}$$

Возьмём точку, принадлежащую одной их прямых. Например, второй прямой – $B(9, 0, 2)$. Тогда уравнение плоскости, проходящей через вторую прямую, параллельно первой через взятую точку, имеет вид:

$$2(x-9) + 15y - 18(z-2) = 2x + 15y - 18z + 18 = 0$$

Первой прямой принадлежит, например, точка $A(-5, -5, 1)$. Расстояние от неё до найденной плоскости можно найти как:

$$\rho = \frac{|2 \cdot (-5) + 15 \cdot (-5) + (-18) \cdot 1 + 18|}{\sqrt{4 + 255 + 324}} = \frac{85}{\sqrt{553}}$$

Это и есть искомое расстояние между прямыми.

2 способ. Воспользуемся формулой:

$$\rho = \frac{|\langle \mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}, \mathbf{M_1M_2}, \rangle|}{|[\mathbf{s_1}, \mathbf{s_2}]|} = \frac{85}{\sqrt{2^2 + 15^2 + 18^2}} = \frac{85}{\sqrt{553}}$$

25.62a Доказать тождество $[a, [b, c]] = b(a, c) - c(a, b)$
На рисунке приведено авторское решение.

Пример 25.6. Доказать, что для любых векторов $\mathbf{a}$, $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$ пространства выполнено тождество

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}).$$

Решение. Выберем правый ортонормированный базис $\mathbf{e}_1$, $\mathbf{e}_2$, $\mathbf{e}_3$, взяв в качестве вектора $\mathbf{e}_1$ вектор единичной длины, коллинеарный вектору $\mathbf{b}$, в качестве вектора $\mathbf{e}_2$ – вектор, компланарный $\mathbf{b}$ и $\mathbf{c}$, и $\mathbf{e}_3 = [\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2]$. В этом базисе векторы $\mathbf{b}$, $\mathbf{c}$, $\mathbf{a}$ имеют координаты:

$$\mathbf{b} = \{b, 0, 0\},\ \mathbf{c} = \{c_1, c_2, 0\},\ \mathbf{a} = \{a_1, a_2, a_3\}.$$

Тогда

$$[\mathbf{b}, \mathbf{c}] = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_1 & \mathbf{e}_2 & \mathbf{e}_3 \\ b & 0 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = \{0, 0, bc_2\},$$

$$[\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]] = \{a_2bc_2, -a_1bc_2, 0\},$$

$$\mathbf{b}(\mathbf{a}, \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a}, \mathbf{b}) = \{(a_1c_1 + a_2c_2)b, 0, 0\} - \{c_1a_1b, c_2a_1b, 0\} = \\ = \{a_2c_2b, -c_2a_1b, 0\} = [\mathbf{a}, [\mathbf{b}, \mathbf{c}]]. \quad \blacksquare$$

25.65 Найти необходимое и достаточное условие для того, чтобы уравнение $[a, x] = b$, $(a \neq 0)$ имело решение. Найти общее решение этого уравнения.

По определению векторного произведения мы требуем от вектора b, чтобы она был перпендикулярен вектору a, то есть $(a, b) = 0$. Это и есть необходимое и достаточное условие для решения данного уравнения.

Частное решение нашего уравнения будет вектор x, который перпендикулярен векторам a и b, то есть будет их векторным произведением, но необходимо его "откорректировать" по длине, чтобы длина b была равна $|b| = |a||x| \sin \frac{\pi}{2} = |a||x| \Rightarrow |x| = \dfrac{|b|}{|a|}$ (мы можем делить на $|a|$, так как $(a \neq 0)$). Тогда частное решение: $x = -\dfrac{[a, b]}{|a|^2}$ (берём векторное произведение со знаком, так как a, x, b должны быть правой тройкой по определению).

Проверим модуль $|x| = \dfrac{|[a, b]|}{|a|^2} = \dfrac{|a||b| \sin \frac{\pi}{2}}{|a|^2} = \dfrac{|a||b|}{|a|^2} = \dfrac{|b|}{|a|}$

Мы рассмотрели частное решение, когда угол между векторами a и x равен $\frac{\pi}{2}$, тогда для получения общего решения сделаем этот угол произвольным с помощью параметра t:

$$x = -\frac{[a, b]}{|a|^2} + ta$$

Это и будет являться общим решением для нашего уравнения.

25.67 Рассматривается система уравнений $[a_1, x] = b_1$ и $[a_2, x] = b_2$, в которой a_1, a_2, b_1, b_2 - заданные векторы, причем a_1 и a_2 не коллинеарны.
Показать, что условия $(a_1, b_1) = 0$, $(a_2, b_2) = 0$, $(a_1, b_1) + (a_2, b_2) = 0$ необходимы для разрешимости данной системы.
При выполнении указанных условий и условия $(a_1, b_2) \neq 0$ найти общее решение системы.

Для получения ответа $x = \dfrac{[b_1, b_2]}{(a_1, b_2)}$ необходимо повторить рассуждения, аналогичные рассуждениям в задаче 25.65

27.42 Составить уравнение плоскости, проходящей через линию пересечения плоскостей $x + 2y + 3z - 4 = 0$, $3x + z - 5 = 0$ и отсекающей на осях Oy, Oz ненулевые отрезки равной длины. Система координат прямоугольная.

Для начала найдём прямую, которая является пересечением плоскостей.
Её направляющий вектор $\mathbf{s} = [\mathbf{n_1}, \mathbf{n_2}] = \{2, 8, -6\}$
Одна из точек, которая принадлежит нашей прямой $M = (1, -\frac{3}{2}, 2)$
Если наша плоскость отрезает на осях Oy и Oz отрезки равной длины, то точки $Y = (0, t, 0)$ и $Z = (0, 0, t)$, где $t \in \mathbb{R}$, лежат в нашей плоскости. Найдём этот параметр t, воспользовавшись тем, что вектора s, ZM, YZ лежат в одной плоскости, то есть их смешанное произведение равно 0:

$$\begin{vmatrix} 2 & 8 & -6 \\ 1 & -\frac{3}{2} & 2-t \\ 0 & -t & t \end{vmatrix} = -3t + 6t - 8t + 4t - 2t^2 = -2t^2 - t = -t(2t+1) = 0$$

Тогда, так как $t \neq 0$ по условию, $t = -\frac{1}{2}$ и $Y = (0, -\frac{1}{2}, 0)$, $Z = (0, 0, -\frac{1}{2})$
Осталось найти вектор нормали к плоскости $n = \{A, B, C\}$ с помощью скалярного произведения, так как он перпендикулярен всем векторам, лежащим в плоскости:

$$\begin{cases} 2A + 8B - 6C = 0 \\ A - \frac{3}{2}B + \frac{5}{2} = 0 \\ -\frac{1}{2}B - \frac{1}{2}C = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = -B \\ B = C \end{cases}$$

Положим $A = 1, B = -1, C = -1$, тогда уравнение нашей плоскости по нормали и точке:

$$1(x - 0) - 1(y - 0) - 1(z - (-\frac{1}{2})) = 0x - y - z - \frac{1}{2} = 02x - 2y - 2z - 1 = 0$$

P.S. Осталось проверить случай, когда наши отрезки находятся не в положительной части осей, то есть точки $Y = (0, -t, 0)$, $Z = (0, 0, t)$

29.97 Составить уравнение плоскости, параллельной плоскости $2x + y - 4z + 5 = 0$ и отстоящей от точки $M = (1, 2, 0)$ на расстоянии, равном $\sqrt{21}$.

Так как наша плоскость параллельна плоскости $2x + y - 4z + 5 = 0$, то их векторы нормали коллинеарны $n = \{2, 1, -4\}$
Воспользуемся формулой расстояния между точкой и плоскостью:

$$\rho = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} = \frac{|2 * 1 + 1 * 2 - 4 * 0 + D|}{\sqrt{4 + 1 + 16}} = \frac{|4 + D|}{\sqrt{21}} = \sqrt{21}|4 + D| = 21 \Rightarrow D = 17, D = -25$$

Тогда уравнение нашей плоскости:

$$2x + y - 4z + 17 = 0 \text{ или } 2x + y - 4z - 25 = 0$$

31.8 Написать уравнение прямой, лежащей в плоскости Oyz, параллельной оси Oy и отсекающей на оси Oz отрезок, равный 3.

1) Точки нашей прямой должны удовлетворять уравнению плоскости $Oyz: \ x = 0$
2) Наша прямая паралелльна оси $Oy: \ x = 0, y = k, z = 0$, где $k \in \mathbb{R}$, тогда направляющий вектор нашей прямой коллинеарен направляющему вектору оси Oy $\{0, k, 0\}$, то есть направляющий вектор нашей прямой $\{0, t, 0\}$, где $t \in \mathbb{R}$
3) Если наша прямая отсекает на Oz отрезок, равный 3, тогда она проходит через точку $(0, 0, 3)$ или $(0, 0, -3)$

Тогда параметрическое уравнение нашей прямой:

$$L = \begin{cases} x = 0 \\ y = t, t \in \mathbb{R} \ (y \text{ можно опустить}) \\ z = 3 \end{cases}$$

или

$$L = \begin{cases} x = 0 \\ y = t, t \in \mathbb{R} \ (y \text{ можно опустить}) \\ z = -3 \end{cases}$$

§33. Векторные уравнения прямой и плоскости

Векторное уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, с направляющим вектором $\mathbf{a}$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}t,\ t \in \mathbb{R}, \quad \text{или}\\ &[\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}] = 0, \quad \text{или}\\ &[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}, \quad \text{где } (\mathbf{M}, \mathbf{a}) = 0.\end{aligned} \tag{33.1}$$

Заметим, что если $(\mathbf{M}, \mathbf{a}) \neq 0$, условию $[\mathbf{r}, \mathbf{a}] = \mathbf{M}$ не удовлетворяет ни одна точка пространства.

Геометрические свойства прямой, заданной третьим уравнением (33.1), рассматриваются в примере 33.1.

Векторное уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$, с направляющим векторами $\mathbf{a}_1$ и $\mathbf{a}_2$ имеет вид

$$\begin{aligned}&\mathbf{r} = \mathbf{r}_0 + \mathbf{a}_1u + \mathbf{a}_2v,\ u, v \in \mathbb{R}, \quad \text{или}\\ &(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = 0, \quad \text{или}\\ &(\mathbf{r}, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2) = p.\end{aligned}$$

Векторное уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(\mathbf{r}_0)$ и перпендикулярной вектору $\mathbf{n}$, имеет вид

$$\begin{aligned}&(\mathbf{r} - \mathbf{r}_0, \mathbf{n}) = 0, \quad \text{или}\\ &(\mathbf{r}, \mathbf{n}) = D.\end{aligned}$$

В конце мы рассмотрим некоторую "векторную" аналитическую геометрию, где точки теперь выражены своими радиус-веторами, а прямые и плоскости записываются в векторных уравнениях.

33.4 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(r_1)$ и прямую $r = r_0 + at$, эту точку не содержащую.

$r = r_1 + (r_1 - r_0)u + av$

33.5 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_1(r_1)$ и перпендикулярной к прямой $r = r_0 + at$.

$(r - r_1, a) = 0$

33.6 Составить уравнение плоскости, проходящей через точку $M_0(r_0)$ и перпендикулярной к прямой пересечения двух плоскостей $(r, n_1) = D_1$ и $(r, n_2) = D_2$

$r = r_0 + n_1u + n_2v$

33.7 Найти точку пересечения прямой $r = r_0 + at$ с плоскостью $(r, n) = D$

$r = r_0 + \dfrac{D - (r_0, n)}{(a, n)}a$

D - ? $D = (r_0, n)$, где r_0 - точка, принадлежащая плоскости.

33.8 Найти точку пересечения прямой $r = r_0 + at$ с плоскостью $r = r_1 + bu + cv$

$r = r_0 + \dfrac{(r_1 - r_0, b, c)}{(a, b, c)}a$

33.10 Составить уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(r_0)$ и пересекающей две скрещивающиеся прямые $r = r_1 + a_1t$ и $r = r_2 + a_2t$

$(r - r_0, r_1 - r_0, a_1) = 0$

$(r - r_0, r_2 - r_0, a_2) = 0$

33.12 Найти ортогональную проекцию точки $M_0(r_0)$ на прямую $r = r_1 + at$

Формула ортогональной проекции вектора a на направление вектора b: $\dfrac{(a, b)}{(b, b)}b$

$r = r_1 + \dfrac{(r_0 - r_1)}{(a, a)}a$