Разбор задач домашнего задания по алгебре на 16.04 для группы БПИ209
3 модуль
Автор: vk.com/yourkumir

Определение Пусть V_1, V_2 - линейные пространства. Тогда ϕ называется линейным отображением, если $\phi:\ V_1 \to V_2$ и
1) $\forall x \in V_1\ \forall \alpha \in F\ \phi(\alpha x) = \alpha\phi(x)$
2) $\forall x_1, x_2 \in V_1\ \phi(x_1 + x_2) = \phi(x_1) + \phi(x_2)$
Примечание Пусть ϕ - линейное отображение из V_1 с базисом ϵ_1 в V_2 с базисом ϵ_2. Тогда столбцы матрицы линейного отображения - это коэффициенты разложения образов базиса $\epsilon_1 = (e_1, ..., e_n)$, то есть $\phi(e_1), ..., \phi(e_n)$ по базису ϵ_2.
Утверждение Пусть $T\epsilon_1 \to \epsilon_1^{'}$ - матрица перехода из базиса ϵ_1 к базису $\epsilon_1^{'}$, $T\epsilon_2 \to \epsilon_2^{'}$ - матрица перехода из базиса ϵ_2 к базису $\epsilon_2^{'}$. Тогда матрица линейного отображения в новых базисах $A_{\epsilon_1^{'}\epsilon_2^{'}} = T\epsilon_2 \to {\epsilon_2^{'}}^{-1} A_{\epsilon_1^{\epsilon}2} T\epsilon_1 \to \epsilon_1^{'}$

1435 Доказать, что поворот трехмерного пространства на угол $\dfrac{2\pi}{3}$ вокруг прямой, заданной в прямоугольной системе координат уравнениями $x_1 = x_2 = x_3$, является линейным преобразованием, и найти матрицу этого преобразования в базисе из единичных векторов e_1, e_2, e_3 осей координат.

Для начала представьте себе единичные векторы осей координат i, j, k (в задаче они обозначены e_1, e_2, e_3). Прямая, заданная уравнением $x_1 = x_2 = x_3$ будет проходить «по центру», равноудаленно от осей координат. Если посмотреть на эту систему из трех векторов и прямой, где прямая будет «центральным стержнем», то при повороте пространства вокруг прямой на угол $\dfrac{2\pi}{3}$ единичные векторы перейдут друг в друга по или против часовой стрелке, то есть
1) $e_1 = i \to e_2 = j$
$e_2 = j \to e_3 = k$
$e_3 = k \to e_1 = i$
Это линейное отображение по опредлению. Матрица линейного отображения:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

2) $e_1 = i \to e_3 = k$
$e_3 = k \to e_2 = j$
$e_2 = j \to e_1 = i$
Это линейное отображение по опредлению. Матрица линейного отображения:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

1442 Выяснить, является ли линейным преобразование $\phi(x) = (x_1, x_2 + 1, x_3 + 2)$, которое задает координаты вектора $\phi(x)$ как функцию координат вектора x. В случае линейности найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором заданы координаты векторов x и $\phi(x)$.

Мы хотим узнать, верно ли, что $\phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$ (см. определение)?
$\phi(x + y) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2 + 1, x_3 + y_3 + 2) \neq (x_1 + y_1, x_2 + 1 + y_2 + 1, x_3 + 2 + y_3 + 2) = \phi(x) + \phi(y) \Rightarrow$
не является линейным преобразованием.

1444 Выяснить, является ли линейным преобразование $\phi(x) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2)$, которое задает координаты вектора $\phi(x)$ как функцию координат вектора x. В случае линейности найти матрицу этого преобразования в том же базисе, в котором заданы координаты векторов x и $\phi(x)$.

1) $\phi(\alpha x = (\alpha x_1, \alpha x_2, \alpha x_3)) = (\alpha x_1 - \alpha x_2 + \alpha x_3, \alpha x_3, \alpha x_2) = (\alpha(x_1 - x_2 + x_3), \alpha x_3, \alpha x_2) = \phi(\alpha x)$
2) $\phi(x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3)) = (x_1 + y_1 - x_2 - y_2 + x_3 + y_3, x_3 + y_3, x_2 + y_2) = (x_1 - x_2 + x_3, x_3, x_2) + (y_1 - y_2 + y_3, y_3, y_2) = \phi(x) + \phi(y) \Rightarrow$
является линейным преобразованием по определению.

Построим матрицу:
1) $\phi(e_1 = (1, 0, 0)) = (1 - 0 + 0, 0, 0) = (1, 0, 0)$
2) $\phi(e_2 = (0, 1, 0)) = (0 - 1 + 0, 0, 1) = (-1, 0, 1) \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$
2) $\phi(e_3 = (0, 0, 1)) = (0 - 0 + 1, 1, 0) = (1, 1, 0)$

Определение Пусть V - линейное пространство. Тогда ϕ называется линейным оператором, если $\phi: \ V \to V$
1) $\forall x \in V \ \forall \alpha \in F \ \phi(\alpha x) = \alpha \phi(x)$
2) $\forall x, y \in V \ \phi(x + y) = \phi(x) + \phi(y)$
Примечание Иными словами, это линейное отображение при $V_1 = V_2 = V$
Утверждение Матрица линейного опрератора в том же базисе, что и $x, \phi(x)$: $\phi(x) = \Phi x$

1446 Доказать, что существует единственное линейное преобразование трехмерного пространства, переводящее векторы $a_1 = (2, 0, 3)$, $a_2 = (4, 1, 5)$, $a_3 = (3, 1, 2)$ соответственно в $b_1 = (1, 2, -1)$, $b_2 = (4, 5, -2)$, $b_3 = (1, -1, 1)$, и найти матрицу этого рпеобразования в том же базисе, в котором даны координаты всех векторов.

$B = \Phi A \Rightarrow B^T = A^T \Phi^T \Rightarrow (A^T)^{-1} B^T = \Phi^T$

$(A^T \mid B^T) \to (E | (A^T)^{-1} B^T)$:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 5 & -2 \\ 3 & 1 & 2 & 1 & -1 & 1 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 0 & 3 & 1 & 2 & -1 \\ 4 & 1 & 5 & 4 & 5 & -2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & -3 & 2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & -3 & 9 & 4 & 17 & -10 \\ 0 & -2 & 5 & 1 & 8 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & -1 & 0 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -9 & 5 \\ 0 & 2 & -5 & -1 & -8 & 5 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & 1 & -4 & -3 & -9 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 5 & 10 & -5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -2 & -4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 11/3 & 13/3 & -5/3 \\ 0 & 0 & 1 & 5/3 & 10/3 & -5/3 \end{array}\right)$$

$$\Phi^T = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & -12 & 6 \\ 11 & 13 & -5 \\ 5 & 10 & -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \Phi = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -6 & 11 & 5 \\ -12 & 13 & 10 \\ 6 & -5 & -5 \end{pmatrix}$$

1449 а) Показать, что умножение квадратных матриц второго порядка слева на данную матрицу $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ является линейным преобразованием пространства всех матриц второго порядка, и найти матрицу этого преобразования в базисе, состоящим из матриц $e_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $e_3 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $e_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Свойства умножения матриц удовлетворяют пунктам 1 и 2 определения, следовательно, данное преобразование является линейным по определению. Матрица линейного оператора:

1) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

2) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & d \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

3) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & c \end{pmatrix}$

4) $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ b & d \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a & b \\ 0 & 0 & c & d \end{pmatrix}$

1450 Показать, что дифференцирование является линейным преобразованием пространства всех многочленов степени $\leq n$ от одного неизвестного с вещественными коэффициентами.

Найти матрицу этого преобразования в базисе а) $1, x, x^2, ..., x^n$; б) $1, x-c, \dfrac{(x-c)^2}{2!}, ..., \dfrac{(x-c)^n}{n!}$

Формулы дифференцирования соответствуют пунктам 1 и 2 определения, следовательно, данное преобразование является линейным по определению. Матрица линейного оператора (продифференцируйте каждый базисный многочлен и запишите в столбец коэффициенты результата дифференцирования в этом же базисе):

$$a)\begin{pmatrix} & & (1)' & (x)' & (x^2)' & (x^3)' & ... & (x^n)' \\ 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ x & | & 0 & 0 & 2 & 0 & ... & 0 \\ x^2 & | & 0 & 0 & 0 & 3 & ... & 0 \\ ... & | & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ x^{n-1} & | & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & n \\ x^n & | & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

$$б)\begin{pmatrix} & & (1)' & (x-c)' & (\frac{(x-c)^2}{2!})' & (\frac{(x-c)^3}{3!})' & ... & (\frac{(x-c)^n}{n!})' \\ 1 & | & 0 & 1 & 0 & 0 & ... & 0 \\ x-c & | & 0 & 0 & 1 & 0 & ... & 0 \\ \frac{(x-c)^2}{2!} & | & 0 & 0 & 0 & 1 & ... & 0 \\ ... & | & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ \frac{(x-c)^{n-1}}{(n-1)!} & | & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 1 \\ \frac{(x-c)^n}{n!} & | & 0 & 0 & 0 & 0 & ... & 0 \end{pmatrix}$$

1458 Преобразование ϕ в базисе $a_1 = (-3, 7)$, $a_2 = (1, -2)$ имеет матрицу $A_\phi = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix}$, а преобразование ψ в базисе $b_1 = (6, -7)$, $b_2 = (-5, 6)$ имеет матрицу $B_\psi = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}$
Найти матрицу преобразования $\phi\psi$ в том базисе, в котором даны все координаты векторов.

Перейдем к естественному базису $e_1 = (1, 0)$, $e_2 = (0, 1)$
a) $e_1 = (1, 0) = 2a_1 + 7a_2$, $e_2 = (0, 1) = a_1 + 3a_2 \Rightarrow C_{a\to e} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$
$E_\phi = C_{a\to e}^{-1} A_\phi C_{a\to e} = \begin{pmatrix} -3 & 1 \\ 7 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
b) $e_1 = (1, 0) = 6b_1 + 7b_2$, $e_2 = (0, 1) = 5b_1 + 6b_2 \Rightarrow C_{b\to e} = \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix}$
$E_\psi = C_{b\to e}^{-1} B_\psi C_{b\to e} = \begin{pmatrix} 6 & -5 \\ -7 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 \\ 7 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{pmatrix}$
Матрица композиции преобразований равна произведению матриц этих преобразований (если все они в одном базисе)
$E_{\phi\psi} = E_\phi E_\psi = \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -143 & -122 \\ 177 & 151 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 109 & 93 \\ 34 & 29 \end{pmatrix}$