Разбор задач домашнего задания по алгебре на 05.03 для группы БПИ209
3 модуль
Автор: vk.com/yourkumir

25.1 б) Разделить многочлен $f(x) = x^3 - 3x^2 - x - 1$ с остатком на многочлен $g(x) = 3x^2 - 2x + 1$

$$
\begin{array}{r|l}
x^3 - 3x^2 - x - 1 & 3x^2 - 2x + 1 \\
\cline{2-2}
- \quad x^3 - \frac{2}{3}x^2 + \frac{1}{3}x & \frac{1}{3}x - \frac{7}{9} \\
\cline{1-1}
-\frac{7}{3}x^2 - \frac{4}{3}x - 1 & \\
- \quad -\frac{7}{3}x^2 + \frac{14}{9}x - \frac{7}{9} & \\
\cline{1-1}
\frac{26}{9}x - \frac{2}{9} &
\end{array}
$$

25.2 б), ж) Найти наибольший общий делитель многочленов:

б) $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ и $x^5 + x^2 - x + 1$
Поделим $x^6 + 2x^4 - 4x^3 - 3x^2 + 8x - 5$ на $x^5 + x^2 - x + 1$: частное x, остаток $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 7x - 5$
Поделим $x^5 + x^2 - x + 1$ на $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 7x - 5$: частное $0.5x + 1.25$, остаток $7.25x^3 - 7.25x + 7.25$
Поделим $2x^4 - 5x^3 - 2x^2 + 7x - 5$ на $7.25x^3 - 7.25x + 7.25$: частное $\frac{8}{29}x - \frac{20}{29}$, остаток 0
Последний ненулевой остаток $7.25x^3 - 7.25x + 7.25$ и является НОДом, но НОД определен с точностью до умножения на константу, поэтому умножим НОД на $\frac{4}{29}$ и получим $x^3 - x + 1$

ж) $x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ и $3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$
Поделим $x^5 - 2x^4 + x^3 + 7x^2 - 12x + 10$ на $3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$: частное $\frac{1}{3}x$, остаток $-\frac{2}{3}x^3 + \frac{19}{3}x^2 - \frac{34}{3}x + 10$
Поделим $3x^4 - 6x^3 + 5x^2 + 2x - 2$ на $-\frac{2}{3}x^3 + \frac{19}{3}x^2 - \frac{34}{3}x + 10$: частное $-\frac{9}{2}x - \frac{135}{4}$, остаток $\frac{671}{4}x^2 - \frac{671}{2}x + \frac{671}{2}$
Поделим $-\frac{2}{3}x^3 + \frac{19}{3}x^2 - \frac{34}{3}x + 10$ на $\frac{671}{4}x^2 - \frac{671}{2}x + \frac{671}{2}$: частное $\frac{8}{2013}x + \frac{20}{671}$, остаток 0
Последний ненулевой остаток $\frac{671}{4}x^2 - \frac{671}{2}x + \frac{671}{2}$ и является НОДом, но НОД определен с точностью до умножения на константу, поэтому умножим НОД на $\frac{4}{671}$ и получим $x^2 - 2x + 2$

25.3 б) Найти наибольший общий делитель многочленов $f(x) = 3x^3 - 2x^2 + x + 2$ и $g(x) = x^2 - x + 1$ и его линейное выражение через $f(x)$ и $g(x)$.

выражение	представление через $f(x)$ и $g(x)$
$3x^3 - 2x^2 + x + 2$	f
$x^2 - x + 1$	g
$3x^3 - 2x^2 + x + 2 - 3x(x^2 - x + 1) = x^2 - 2x + 2$	$f - 3x * g$
$x^2 - x + 1 - (x^2 - 2x + 2) = x - 1$	$g - (f - 3x * g) = -f + (3x + 1)g$
$x^2 - 2x + 2 - x(x - 1) = -x + 2$	$f - 3x * g - x(-f + (3x + 1)g) = (x + 1)f - x(3x + 4)g$
$x - 1 + (-x + 2) = 1$	$-f + (3x + 1)g + (x + 1)f - x(3x + 4)g = xf + (-3x^2 - x + 1)g$

НОД$(f, g) = 1 = xf + (-3x^2 - x + 1)g$

25.7 б), г) Найти наибольший общий делитель и его выражение через f и g над полем $\mathbb{F}_2$:

б) $f(x) = x^5 + x^3 + x + 1$, $g(x) = x^4 + 1$

выражение	представление через $f(x)$ и $g(x)$
$x^5 + x^3 + x + 1$	f
$x^4 + 1$	g
$x^5 + x^3 + x + 1 - x(x^4 + 1) = x^3 + 1$	$f - x * g = f + xg$
$x^4 + 1 - x(x^3 + 1) = 1 - x = x + 1$	$g - x(f + xg) = -xf + (1 - x^2)g = xf + (x^2 + 1)g$
$x^3 + 1 - x^2(x + 1) = 1 - x^2 = x^2 + 1$	$f + xg - x^2(xf + (x^2 + 1)g) = (x^3 + 1)f + (x^4 + x^2 + x)g$
$x^2 + 1 - x(x - 1) = x + 1$	$(x^3 + 1)f + (x^4 + x^2 + x)g - x(xf + (x^2 + 1)g) = ...$
$x + 1 - (x + 1) = 0$	...

НОД$(f, g) = x + 1 = xf + (x^2 + 1)g$

г) $f(x) = x^5 + x^3 + x$, $g(x) = x^4 + x + 1$

выражение	представление через $f(x)$ и $g(x)$
$x^5 + x^3 + x$	f
$x^4 + x + 1$	g
$x^5 + x^3 + x - x(x^4 + x + 1) = x^3 - x^2$	$f - x * g = f + xg$
$x^4 + x + 1 - x(x^3 - x^2) = x^3 + x + 1$	$g - x(f + xg) = -xf + (1 - x^2)g = xf + (x^2 + 1)g$
$x^3 - x^2 - (x^3 + x + 1) = x^2 + x + 1$	$f + xg - (xf + (x^2 + 1)g) = (x + 1)f + (x^2 + x + 1)g$
$x^3 + x + 1 - x(x^2 + x + 1) = x^2 + 1$	$xf + (x^2 + 1)g - x((x + 1)f + (x^2 + x + 1)g) = x^2 f + (x^3 + x + 1)g$
$x^2 + x + 1 - (x^2 + 1) = x$	$(x + 1)f + (x^2 + x + 1)g - (x^2 f + (x^3 + x + 1)g) = (x^2 + x + 1)f + (x^3 + x^2)g$
$x^2 + 1 - x(x) = 1$	$x^2 f + (x^3 + x + 1)g - x((x^2 + x + 1)f + (x^3 + x^2)g) = (x^3 + x)f + (x^4 + x + 1)g$

НОД$(f, g) = 1 = (x^3 + x)f + (x^4 + x + 1)g$

66.19 Решить систему уравнений $x + 2z = 1$, $y + 2z = 2$, $2x + z = 1$:

а) в поле $\mathbb{Z}_3$
Пусть $x = 0$, тогда приходим к противоречию:
1) $0 + 2z = 1 \Rightarrow z = 2$
2) $0 + z = 1 \Rightarrow z = 1$
Пусть $x = 1$, тогда приходим к противоречию:
1) $1 + 2z = 1 \Rightarrow z = 0$
2) $2 + z = 1 \Rightarrow z = 2$
Пусть $x = 2$, тогда приходим к противоречию:
1) $2 + 2z = 1 \Rightarrow z = 1$
2) $4 + z = 1 \Rightarrow z = 0$
Таким образом, решений нет.

б) в поле $\mathbb{Z}_5$
Пусть $x = 0$, тогда приходим к противоречию:
1) $0 + 2z = 1 \Rightarrow z = 3$
2) $0 + z = 1 \Rightarrow z = 1$
Пусть $x = 1$, тогда приходим к противоречию:
1) $1 + 2z = 1 \Rightarrow z = 0$
2) $2 + z = 1 \Rightarrow z = 4$
Пусть $x = 2$, тогда находим решение:
1) $2 + 2z = 1 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow y + 4 = 2 \Rightarrow y = 3$
2) $4 + z = 1 \Rightarrow z = 2 \Rightarrow y + 4 = 2 \Rightarrow y = 3$
Пусть $x = 3$, тогда приходим к противоречию:
1) $3 + 2z = 1 \Rightarrow z = 4$
2) $6 + z = 1 \Rightarrow z = 0$
Пусть $x = 4$, тогда приходим к противоречию:
1) $4 + 2z = 1 \Rightarrow z = 1$
2) $8 + z = 1 \Rightarrow z = 3$
Таким образом, решение ровно одно: $(2, 2, 3)$.

66.21 Найти такой многочлен $f(x)$ степени не выше 3 с коэффициентами из $\mathbb{Z}_5$, что $f(0) = 3$, $f(1) = 3$, $f(2) = 0$, $f(4) = 4$.

Искомый многочлен имеет вид: $ax^3 + bx^2 + cx + d = 0$, где коэффициенты лежат в нашем поле.
$f(0) = d = 3$
$f(1) = a + b + c + d = 3$
$f(2) = 3a + 4b + 2c + d = 0$
$f(4) = 4a + b + 4c + d = 4$

$$\begin{cases} d = 3 \\ a + b + c + d = 3 \\ 3a + 4b + 2c + d = 0 \\ 4a + b + 4c + d = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 3 \\ a + b + c = 0 \\ 3a + 4b + 2c = 2 \\ 4a + b + 4c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 3 \\ a + b + c = 0 \\ 4a + 3c = 2 \\ 2b = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 3 \\ a + c = 2 \\ 4a + 3c = 2 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 3 \\ a + c = 2 \\ 4c = 4 \\ b = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} d = 3 \\ a = 1 \\ c = 1 \\ b = 3 \end{cases}$$

Таким образом, получили следующий многочлен: $x^3 + 3x^2 + x + 3 = 0$

68.5 б), в), г) Разложить на неприводимые множители:

б) $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1$ в $F_5[x]$
Найдём корни перебором:
$f(0) = 1$
$f(1) = 1 + 2 + 4 + 1 = 8 = 3$
$f(2) = 8 + 8 + 8 + 1 = 3 + 3 + 3 + 1 = 10 = 0$
$f(3) = 27 + 18 + 12 + 1 = 2 + 3 + 2 + 1 = 8 = 3$
$f(4) = 64 + 32 + 16 + 1 = 4 + 2 + 1 + 1 = 8 = 3$
Таким образом, $f(x) = x^3 + 2x^2 + 4x + 1 = (x + 3)(x^2 + 4x + 2)$

в) $f(x) = x^4 + x^3 + x + 2$ в $F_3[x]$
Найдём корни перебором:
$f(0) = 2$
$f(1) = 1 + 1 + 1 + 2 = 5 = 2$
$f(2) = 16 + 8 + 2 + 2 = 1 + 2 + 2 + 2 = 7 = 1$
Мы рассмотрели лишь множители вида $(x + a)$, однако возможна ситуация, что
$f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$

$$\begin{cases} a + c = 1 \\ ac + b + d = 0 \\ ad + bc = 1 \\ bd = 2 \end{cases}$$

Заметим, что $b, d \neq 0$, иначе приходим к противоречию $bd = 0 = 2$
Пусть $b = 1$, тогда $d = 2$:

$$\begin{cases} b = 1 \\ d = 2 \\ a + c = 1 \\ ac = 0 \\ 2a + c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ d = 2 \\ a + c = 1 \\ ac = 0 \\ 2c = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ d = 2 \\ c = 1 \\ a = 0 \end{cases}$$

Таким образом, $f(x) = x^4 + x^3 + x + 2 = (x^2 + 1)(x^2 + x + 2)$.

г) $f(x) = x^4 + 3x^3 + 2x^2 + x + 4$ в $F_5[x]$
Найдём корни перебором:
$f(0) = 4$
$f(1) = 1 + 3 + 2 + 1 + 4 = 11 = 1$
$f(2) = 16 + 24 + 8 + 2 + 4 = 1 + 4 + 3 + 2 + 4 = 14 = 4$
$f(3) = 81 + 81 + 18 + 3 + 4 = 1 + 1 + 3 + 3 + 4 = 2$
$f(4) = 256 + 192 + 32 + 4 + 4 = 1 + 2 + 2 + 4 + 4 = 13 = 3$
Мы рассмотрели лишь множители вида $(x + a)$, однако возможна ситуация, что
$f(x) = (x^2 + ax + b)(x^2 + cx + d) = x^4 + (a + c)x^3 + (ac + b + d)x^2 + (ad + bc)x + bd$

$$\begin{cases} a + c = 3 \\ ac + b + d = 2 \\ ad + bc = 1 \\ bd = 4 \end{cases}$$

Заметим, что $b, d \neq 0$, иначе приходим к противоречию $bd = 0 = 4$
Пусть $b = 1$, тогда $d = 4$:

$$\begin{cases} b = 1 \\ d = 4 \\ a + c = 3 \\ ac = 2 \\ 4a + c = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ d = 4 \\ a + c = 3 \\ ac = 2 \\ 2c = 4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} b = 1 \\ d = 2 \\ c = 2 \\ a = 1 \end{cases}$$

Таким образом, $f(x) = x^4 + x^3 + x + 2 = (x^2 + x + 1)(x^2 + 2x + 4)$.