# Разбор задач домашнего задания по алгебре на 26.02 для группы БПИ209
3 модуль
Автор: vk.com/yourkumir

Для начала приведем определение кольца. Кольцом называется непустое множество $K$, на котором задано две операции (сложение $+$ и умножение $\cdot$) со следующими свойствами:
1) $(K, +)$ - абелева группа
2) $(K, \cdot)$ - полугруппа
3) $\forall a, b, c \in K\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c,\ c \cdot (a + b) = c \cdot a + c \cdot b$

**63.1 д), е), ж), к)** Какие из следующих числовых множеств образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения:

д) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели делят фиксированное число $n \in \mathbb{N}$

$$X_n = \{\frac{p}{q} \mid p \in \mathbb{Z},\ q \in \mathbb{Z},\ \text{НОД}(p, q) = 1,\ q/n,\ n \in \mathbb{N}\}$$

Данное множество **не является кольцом** относительно обычных операций сложения и умножения, так как не замкнуто относительно умножения: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4} \in X_4$, но $\frac{1}{2} * \frac{1}{4} = \frac{1}{8} \notin X_4$
Примечание. Однако группа $(X_n, +)$ действительно абелева.

е) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели не делятся на фиксированное простое число $p$

$$X_p = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ \text{НОД}(a, b) = 1,\ p\ not/b,\ p \in \mathbb{N},\ p - \text{простое}\}$$

1.0) Проверим замкнутость сложения: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd} = \frac{\text{НОД}(b, d)(ad' + b'c)}{bd} = \frac{ad' + b'c}{\text{НОК}(b, d)}$
Пусть $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in X_p \Rightarrow p\ not/b, p\ not/d \Rightarrow p\ not/\text{НОК}(b, d) \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in X_p$
1.1) Обычная операция сложения ассоциативна.
1.2) Есть нейтральный элемент $\exists e = 0\ \forall \frac{a}{b} \in X_p: \quad \frac{a}{b} + e = e + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$
1.3) И для каждого элемента есть обратный по сложению $\forall \frac{a}{b} \in X_p\ \exists (-\frac{a}{b}) \in X_p: \quad \frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = -\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = e$
1.4) Обычная операция сложения коммутативна.
Таким образом, $(X_p, +)$ - абелева группа.

2.0) Проверим замкнутость умножения: $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a}{bd}$
Пусть $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in X_p \Rightarrow p\ not/b, p\ not/d \Rightarrow p\ not/bd \Rightarrow \frac{a}{b} * \frac{c}{d} \in X_p$
2.1) Обычное умножение ассоциативно.

3) Для обычного сложения и умножения выполнена дистрибутивность.

По определению $X_p$ - **кольцо**.

ж) множество рациональных чисел, в несократимой записи которых знаменатели являются степенями фиксированного простого числа $p$

$$X_p = \{\frac{a}{b} \mid a \in \mathbb{Z},\ b \in \mathbb{Z},\ \text{НОД}(a,b) = 1, \exists k\ b = p^k,\ p - \text{простое}\}$$

1.0) Проверим замкнутость сложения: $\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd} = \frac{\text{НОД}(b,d)(ad'+b'c)}{bd} = \frac{ad'+b'c}{\text{НОК}(b,d)}$

Пусть $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in X_p \Rightarrow b = p^{k_1}, d = p^{k_2} \Rightarrow \text{НОК}(b,d) = p^{max(k_1,k_2)} \Rightarrow \frac{a}{b} + \frac{c}{d} \in X_p$

1.1) Обычная операция сложения ассоциативна.

1.2) Есть нейтральный элемент $\exists e = 0\ \forall \frac{a}{b} \in X_p: \quad \frac{a}{b} + e = e + \frac{a}{b} = \frac{a}{b}$

1.3) И для каждого элемента есть обратный по сложению $\forall \frac{a}{b} \in X_p\ \exists (-\frac{a}{b}) \in X_p: \quad \frac{a}{b} + (-\frac{a}{b}) = -\frac{a}{b} + \frac{a}{b} = e$

1.4) Обычная операция сложения коммутативна.

Таким образом, $(X_p, +)$ - абелева группа.

2.0) Проверим замкнутость умножения: $\frac{a}{b} * \frac{c}{d} = \frac{a}{bd}$

Пусть $\frac{a}{b}, \frac{c}{d} \in X_p \Rightarrow b = p^{k_1}, d = p^{k_2} \Rightarrow bd = p^{k_1+k_2} \Rightarrow \frac{a}{b} * \frac{c}{d} \in X_p$

2.1) Обычное умножение ассоциативно.

3) Для обычного сложения и умножения выполнена дистрибутивность.

По определению $X_p$ - **кольцо**.

к) множество вещественных чисел вида $x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4},$ где $x, y, z \in \mathbb{Q}$

$$P = \{x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} \mid x, y, z \in \mathbb{Q}\}$$

1.0) Проверим замкнутость сложения:

Пусть $p_1 = (x_1 + y_1\sqrt[3]{2} + z_1\sqrt[3]{4}), p_2 = (x_2 + y_2\sqrt[3]{2} + z_2\sqrt[3]{4}) \in P \Rightarrow p_1 + p_2 = (x_1 + x_2) + (y_1 + y_2)\sqrt[3]{2} + (z_1 + z_2)\sqrt[3]{4} \Rightarrow p_1 + p_2 \in P$

1.1) Обычная операция сложения ассоциативна.

1.2) Есть нейтральный элемент $\exists e = 0\ \forall p = x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} \in P: \quad p + e = e + p = p$

1.3) И для каждого элемента есть обратный по сложению $\forall p = x + y\sqrt[3]{2} + z\sqrt[3]{4} \in P\ \exists -p = (-x) + (-y)\sqrt[3]{2} + (-z)\sqrt[3]{4}) \in P: \quad p + (-p) = -p + p = e$

1.4) Обычная операция сложения коммутативна.

Таким образом, $(P, +)$ - абелева группа.

2.0) Проверим замкнутость умножения:

$(x_1 + y_1\sqrt[3]{2} + z_1\sqrt[3]{4}) * (x_2 + y_2\sqrt[3]{2} + z_2\sqrt[3]{4}) = x_1x_2 + x_1y_2\sqrt[3]{2} + x_1z_2\sqrt[3]{4} + y_1x_2 + y_1y_2\sqrt[3]{4} + 2y_1z_2 + z_1x_2\sqrt[3]{4} + 2z_1y_2 + 2z_1z_2\sqrt[3]{2} = (x_1x_2 + y_1x_2 + 2y_1z_2 + 2z_1y_2) + (x_1y_2 + 2z_1z_2)\sqrt[3]{2} + (x_1z_2 + y_1y_2 + z_1x_2)\sqrt[3]{4}$

Пусть $p_1 = (x_1 + y_1\sqrt[3]{2} + z_1\sqrt[3]{4}), p_2 = (x_2 + y_2\sqrt[3]{2} + z_2\sqrt[3]{4}) \in P \Rightarrow p_1 * p_2 = (x_1x_2 + y_1x_2 + 2y_1z_2 + 2z_1y_2) + (x_1y_2 + 2z_1z_2)\sqrt[3]{2} + (x_1z_2 + y_1y_2 + z_1x_2)\sqrt[3]{4} \Rightarrow p_1 * p_2 \in P$

2.1) Обычное умножение ассоциативно.

3) Для обычного сложения и умножения выполнена дистрибутивность.

По определению $P$ - **кольцо**.

**63.2 а), г)** Какие из указанных множеств матриц образуют кольцо относительно матричного сложения и умножения:

а) множество вещественных симметрических матриц порядка $n$

$$X = \{A \in M_n(\mathbb{R}) \mid A = A^T\}$$

Данное множество **не является кольцом** относительно обычных операций сложения и умножения, так как не замкнуто относительно умножения: $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a' \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} c & d \\ d & c' \end{pmatrix} \in X$, но $\begin{pmatrix} a & b \\ b & a' \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} c & d \\ d & c' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ac+bd & ad+bc' \\ bc+a'd & bd+a'c' \end{pmatrix} \notin X$
Примечание. Однако группа $(X_n, +)$ действительно абелева.

г) множество матриц порядка n ! 2, у которых две последние строки нулевые

$$X = \{A \in M_n \mid n \geq 2, \text{ две последние строки нулевые}\}$$

1.0) Операция матричного сложения замкнута по определению матричного сложения
1.1) Операция матричного сложения ассоциативна.
1.2) Есть нейтральный элемент $\exists O = 0\ \forall A \in X: \quad A + O = O + A = A$
1.3) И для каждого элемента есть обратный по сложению $\forall A \in X\ \exists -A \ \in X: \quad A + (-A) = -A + A = O$
1.4) Операция матричного сложения коммутативна.
Таким образом, $(X, +)$ - абелева группа.

2.0) Проверим замкнутость умножения:
Пусть $n = 3$ $\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} d & e & f \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ad & ae & af \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$
И это будет верно для всех $n \geq 2$
2.1) Операция матричного умножение ассоциативна.

3) Для матричного сложения и умножения выполнена дистрибутивность.

По определению $X$ - **кольцо**.

**63.3 а), б), д)** Какие из следующих множеств функций образуют кольцо относительно обычных операций сложения и умножения функций:

а) множество функций вещественного переменного, непрерывных на отрезке $[a, b]$

$$F_{[a,b]} = \{f \in F(\mathbb{R}) \mid f - \text{ непрерывна на } [a, b]\}$$

1.0) Обычная операция сложения функций $(f + g)(x) = f(x) + g(x)$ замкнута, то есть сумма непрерывных на отрезке функций является функцией, непрерывной на том же отрезке.
1.1) Операция сложения функций ассоциативна.
1.2) Есть нейтральный элемент $\exists O(x) = 0\ \forall f(x) \in F_{[a,b]}: \quad (f + O)(x) = (O + f)(x) = f(x)$
1.3) И для каждого элемента есть обратный по сложению $\forall f(x) \in F_{[a,b]}\ \exists - f(x) = (-1) * f(x) \ \in F_{[a,b]}:$ $(f + (-f))(x) = (-f + f)(x) = O(x)$
1.4) Операция сложения функций коммутативна.
Таким образом, $(F_{[a,b]}, +)$ - абелева группа.

2.0) Обычная операция умножения функций $(f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x)$ замкнута, то есть произведение непрерывных на отрезке функций является функцией, непрерывной на том же отрезке.
2.1) Операция сложения функций ассоциативна.

3) Для сложения и умножения функций выполнена дистрибутивность:
$((f + g) \cdot \tau)(x) = (f + g)(x) \cdot \tau(x) = (f(x) + g(x)) \cdot \tau(x) = f(x) \cdot \tau(x) + g(x) \cdot \tau(x)$
$(f \cdot (g + \tau))(x) = f(x) \cdot (g + \tau)(x) = f(x) \cdot (g(x) + \tau(x)) = f(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot \tau(x)$

По определению $F_{[a,b]}$ - **кольцо**.

д) множество функций вещественного переменного, обращающихся в 0 на некотором подмножестве $D \subseteq \mathbb{R}$

$$F_D = \{f \in F(\mathbb{R}) \mid \forall x \in D \ (D \subseteq \mathbb{R} \ f(x) = 0\}$$

Аналогично предыдущему пункту, только замкнутость операцией обосновывается тем фактом, что
$f(x), g(x) \in F_D \Rightarrow \forall x \in D \ (f+g)(x) = f(x) + g(x) = 0, \ (f \cdot g)(x) = f(x) \cdot g(x) = 0 \Rightarrow f+g, \ f \cdot g \ \in F_D$
По определению $F_D$ - **кольцо**.

**63.4** Во множестве многочленов от переменной $t$ рассматривается операция умножения, заданная правилом $(f \circ g)(t) = f(g(t))$. Является ли это множество кольцом относительно заданного умножения и обычного сложения?

Нет, не является. Не выполняется дистибутивность умножения относительно сложения $(b+c) = ab + ac$ (самый последний пункт определения):
$a(b+c) = (f \circ (g + \tau))(t) = f((g+\tau)(t)) = f(g(t) + \tau(t))$
$ab + ac = (f \circ g)(t) + (f \circ \tau)(t) = f(g(t)) + f(\tau(t))$
Но в нашем случае получилось неверное равенство $f(g(t) + \tau(t)) \neq f(g(t)) + f(\tau(t))$, приведём пример:
$f(x) = x^2, g(x) = 2x, \tau(x) = 3x, t = 1 \Rightarrow$
$f(g(t) + \tau(t)) = f(2+3) = f(5) = 25 \neq 13 = 4 + 9 = f(2) + f(3) = f(g(t)) + f(\tau(t))$

**64.1 а)** Найти все идеалы кольца $\mathbb{Z}$

1) Докажем, что $k\mathbb{Z}$ идеал кольца по определению
$k\mathbb{Z} \subset \mathbb{Z}$, то есть $(k\mathbb{Z}, +)$ - подгруппа $(\mathbb{Z}, +)$
$\forall a \in k\mathbb{Z}$ и $\forall b \in \mathbb{Z}$ $ab$ и $ba \in k\mathbb{Z}$
$\Rightarrow k\mathbb{Z}$ - идеал, причем главный.

2) Докажем, что нет других идеалов в кольце
Пусть $I$ - произвольный идеал, тогда возьмём наименьшее $d \in \mathbb{N}$:
если весь идеал делится на $d$, то идеал $I$ имеет вид $k\mathbb{Z}$,
если $\exists b \in I$, которое не делится на $d$, то поделим $b$ на $d$ с остатком $b = qd + r$, так как $b, d \in I \Rightarrow b, qd \in I \Rightarrow$ $r = b - qd \in I$, но $r < d$, то есть мы пришли к противоречию.

Таким образом, мы нашли все идеалы данного кольца ($\langle k \rangle$)