Разбор задач домашнего задания по алгебре на 12.02 для группы БПИ209
3 модуль
Автор: vk.com/yourkumir

58.33 б), в), г), е) Пусть
$B = \{X \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{C}) \mid detX \in \mathbb{R}\}$
$C = \{X \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{C}) \mid |detX| = 1\}$
$D = \{X \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{R}) \mid detX > 0\}$
Доказать, что:
б) $\dfrac{\mathbb{G}l_n(\mathbb{C})}{\mathbb{S}l_n(\mathbb{C})} \approx \mathbb{C}^*$, в) $\dfrac{\mathbb{G}l_n(\mathbb{R})}{D} \approx \mathbb{Z}_2$, г) $\dfrac{\mathbb{G}l_n(\mathbb{C})}{B} \approx \mathbb{U}$, е) $\dfrac{\mathbb{G}l_n(\mathbb{C})}{C} \approx \mathbb{R}_+$

Воспользуемся теоремой о гомоморфизме, а именно предложим такой гомомоморфизм:

б) $\dfrac{\mathbb{G}l_n(\mathbb{C})}{\mathbb{S}l_n(\mathbb{C})} \approx \mathbb{C}^*$
Пусть $f : \mathbb{G}l_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}^*$ $f(X) = det(X)$, тогда:
1) f - это действительно гомоморфизм $f(XY) = det(XY) = det(X)det(Y) = f(X)f(Y)$
2) $Imf = \mathbb{C}^*$, так мы всё отображаем в образ и $\forall c \in \mathbb{C}^*$ $\exists X \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{C})$, $X = c * E$, где E - единичная матрица
3) $kerf = \mathbb{S}l_n(\mathbb{C})$ по определению и структуре группы $\mathbb{S}l_n(\mathbb{C})$
$\Rightarrow$ по теореме о гомоморфизме $\dfrac{\mathbb{G}l_n(\mathbb{C})}{\mathbb{S}l_n(\mathbb{C})} \approx \mathbb{C}^*$

в) $\dfrac{\mathbb{G}l_n(\mathbb{R})}{D} \approx \mathbb{Z}_2$
Пусть $f : \mathbb{G}l_n(\mathbb{R}) \to \mathbb{Z}_2$ $f(X) = \overline{sgn}(det(X))$ (0 для положительных и 1 для неположительных), тогда:
1) f - это действительно гомоморфизм $f(XY) = \overline{sgn}(det(XY)) = \overline{sgn}(det(X)det(Y)) = \overline{sgn}(det(X)) + \overline{sgn}(det(Y)) = f(X) + f(Y)$ (если непонятно, как мы так раскрыли функцию $\overline{sgn}$ для произведения, то просто посмотрите 4 случая для разных комбинаций знаков матриц)
2) $Imf = \mathbb{Z}_2$, так мы всё отображаем в образ и $\forall z \in \mathbb{Z}_2$ $\exists X \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{R})$, $X = E$, если $z = 0$ и $X = (-1) * E$, иначе
3) $kerf = D = \{X \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{R}) \mid detX > 0\}$ по определению и по построению гомоморфизма
$\Rightarrow$ по теореме о гомоморфизме $\dfrac{\mathbb{G}l_n(\mathbb{R})}{D} \approx \mathbb{Z}_2$

г) $\dfrac{\mathbb{G}l_n(\mathbb{C})}{B} \approx \mathbb{U}$
Пусть $f : \mathbb{G}l_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{U}$ $f(X) = \dfrac{det(X)}{|det(X)|}$, тогда:
1) f - это действительно гомоморфизм
$f(XY) = \dfrac{det(XY)}{|det(XY)|} = \dfrac{det(X)det(Y)}{|det(X)||det(Y)|} = \dfrac{det(X)}{|det(X)|}\dfrac{det(Y)}{|det(Y)|} = f(X)f(Y)$
2) $Imf = \mathbb{U}$ (комплексные числа с модулем 1), так мы всё отображаем в образ и $\forall c \in \mathbb{U}$ $\exists X \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{C})$, $X = c * E$, где E - единичная матрица
3) $kerf = B = \{X \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{C}) \mid detX \in \mathbb{R}\}$ по определению и по построению гомоморфизма
$\Rightarrow$ по теореме о гомоморфизме $\dfrac{\mathbb{G}l_n(\mathbb{C})}{B} \approx \mathbb{U}$

е) $\dfrac{\mathbb{G}l_n(\mathbb{C})}{C} \approx \mathbb{R}_+$
Пусть $f : \mathbb{G}l_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{R}_+$ $f(X) = |det(X)|$, тогда:
1) f - это действительно гомоморфизм $f(XY) = |det(XY)| = |det(X)det(Y)| = |det(X)||det(Y)| = f(X)f(Y)$
2) $Imf = \mathbb{R}_+$ (положительные действительные числа с операцией умножения), так мы всё отображаем в образ и $\forall r \in \mathbb{R}_+$ $\exists X \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{C})$, $X = r * E$, где E - единичная матрица
3) $kerf = C = \{X \in \mathbb{G}l_n(\mathbb{C}) \mid |detX| = 1\}$ по определению и по построению гомоморфизма
$\Rightarrow$ по теореме о гомоморфизме $\dfrac{\mathbb{G}l_n(\mathbb{C})}{C} \approx \mathbb{R}_+$

60.4 Доказать, что прямая сумма циклических групп $Z_m \oplus Z_n$ является циклической группой тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель m и n равен 1.

Необходимость. Пусть $G = Z_m \oplus Z_n$, тогда $|G| = mn$, $ord(g) =$НОК(m,n) (по 60.8).
G - циклическая $\Leftrightarrow |G| = ord(g)$, то есть $mn =$НОК$(m,n) \Rightarrow$ НОД$(m,n) = \dfrac{mn}{\text{НОК}(m,n)} = 1$
Достаточность. Пусть $G = Z_m \oplus Z_n$, тогда $|G| = mn$, $ord(g) =$НОК(m,n) (по 60.8), но нам дано, что НОД$(m,n) = 1 \Rightarrow$ НОК$(m,n) = \dfrac{mn}{\text{НОД}(m,n)} = mn$, то есть $|G| = ord(g) \Leftrightarrow G$ - циклическая.

60.5 Разложить в прямую сумму группы: а) Z_6, б) Z_{12}, в) Z_{60}

Подсказка: раскладывайте n в произведение степеней простых.

а) $Z_6 = Z_2 \oplus Z_3$
б) $Z_{12} = Z_3 \oplus Z_4$
в) $Z_{60} = Z_3 \oplus Z_4 \oplus Z_5$

60.6 Доказать, что мультипликативная группа комплексных чисел является прямым произведением группы положительных вещественных чисел и группы всех комплексных чисел, по модулю равных 1.

Если вы ничего не поняли, когда прочитали задачу, то это нормально. Перепишем условие с помощью обозначений: $(\mathbb{R}^+, \cdot) \times (\mathbb{U}, \cdot) = (\mathbb{C}, \cdot)$, где $\mathbb{U} = \{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\}$
Осталось только вспомнить про тригонометрическую форму комлексного числа:
$a + ib = \rho(\cos\phi + i\sin\phi)$, где $\rho = \sqrt{a^2+b^2}$, $\phi = \{\arctan\dfrac{b}{a} + 2\pi k, k \in \mathbb{Z}\}$
Тогда любое комплексное число ($z \in \mathbb{C}$) мы можем представить парой $(\rho, \dfrac{c}{|c|})$,
где $\rho \in \mathbb{R}^+$ и $c \in \mathbb{U}$ ($\phi = arg(z) = arg(c)$), и любая такая пара представляет комплексное число.
Иначе говоря, перебирая все пары расстояний и все аргументы, мы получим множество комплексных чисел.

60.42 б) Изоморфны ли группы $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$?

$\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36} = (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3) \oplus (\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9$
$\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18} = (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4) \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_9) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9$
$\Rightarrow \mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_{12} \oplus \mathbb{Z}_{18}$ изоморфны.

60.45 а) Сколько элементов: порядка 2, 4 и 6 в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_3$?

Есть прекрасное утверждение 60.8 о том, что
1) прямой порядок произведения конечных групп равен произведению порядков сомножителей
2) порядок элемента прямого произведения конечных групп равен НОК порядков компонент.

$ord(0,0,0) =$ НОК$(1,1,1) = 1$ $\quad ord(1,0,0) =$ НОК$(2,1,1) = 2$
$ord(0,0,1) =$ НОК$(1,1,3) = 3$ $\quad ord(1,0,1) =$ НОК$(2,1,3) = 6$
$ord(0,0,2) =$ НОК$(1,1,3) = 3$ $\quad ord(1,0,2) =$ НОК$(2,1,3) = 6$
$ord(0,1,0) =$ НОК$(1,4,1) = 4$ $\quad ord(1,1,0) =$ НОК$(2,4,1) = 4$
$ord(0,1,1) =$ НОК$(1,4,3) = 12$ $\quad ord(1,1,1) =$ НОК$(2,4,3) = 12$
$ord(0,1,2) =$ НОК$(1,4,3) = 12$ $\quad ord(1,1,2) =$ НОК$(2,4,3) = 12$
$ord(0,2,0) =$ НОК$(1,2,1) = 2$ $\quad ord(1,2,0) =$ НОК$(2,2,1) = 2$
$ord(0,2,1) =$ НОК$(1,2,3) = 6$ $\quad ord(1,2,1) =$ НОК$(2,2,3) = 6$
$ord(0,2,2) =$ НОК$(1,2,3) = 6$ $\quad ord(1,2,2) =$ НОК$(2,2,3) = 6$
$ord(0,3,0) =$ НОК$(1,4,1) = 4$ $\quad ord(1,3,0) =$ НОК$(2,4,1) = 4$
$ord(0,3,1) =$ НОК$(1,4,3) = 12$ $\quad ord(1,3,1) =$ НОК$(2,4,3) = 12$
$ord(0,3,2) =$ НОК$(1,4,3) = 12$ $\quad ord(1,3,2) =$ НОК$(2,4,3) = 12$

57.39 а), б) Найти группу автоморфизмов: а) группы $\mathbb{Z}_5$; б) группы $\mathbb{Z}_6$.

Подсказка: образующими элементами (степенями k: $a \to ak$) будут элементы, взаимнопростые с n, а их количество соотвественно $\varphi(n)$ - функция Эйлера.

а) $\varphi(5) = 4$, покажем эти автоморфизмы перестановками:

$$k = 1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \end{pmatrix}, k = 2 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 2 & 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}, k = 3 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 3 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}, k = 4 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

б) $\varphi(6) = 2$, покажем эти автоморфизмы (тождественный и обратный) перестановками:

$$k = 1 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{pmatrix}, k = 5 : \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 5 & 4 & 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$