Разбор задач для подготовки к экзамену по алгебре для группы БПИ209
4 модуль
Автор: vk.com/avorus

1098 Найти жорданову форму следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

Решим характеристическое уравнение $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & 3 \\ -2 & -6-\lambda & 13 \\ -1 & -4 & 8-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(-6-\lambda)(8-\lambda)+39+24+3(-6-\lambda)-6(8-\lambda)+52(1-\lambda) = -(\lambda-1)^3$$

Корень $\lambda = 1$, алгебраическая кратность равна $\alpha = 3$ (входит во третьей степени в уравнение)
Геометрическая кратность $\beta = 3 - Rg(A - \lambda E) = 3 - 2 = 1$ (вектор получился $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}^T$)

Тогда ЖНФ

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1102 Найти жорданову форму следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ 6 & -3 & 2 \\ 8 & -6 & 5 \end{pmatrix}$$

Решим характеристическое уравнение $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$

$$|A-\lambda E| = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 & 0 \\ 6 & -3-\lambda & 2 \\ 8 & -6 & 5-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda)(5-\lambda)-16+0-0+6(5-\lambda)+12(3-\lambda) = -\lambda^3+5\lambda^2-9\lambda+5 =$$
$$= -(\lambda-1)(\lambda-(2-i))(\lambda-(2+i))$$

Корень $\lambda = 1$, алгебраическая кратность равна $\alpha_1 = 1$, геометрическая кратность равна $\beta_1 = 1$ (так как геометрическая кратность не превышает алгебраическую кратность и не меньше 1)
Корень $\lambda = 2 - i$, алгебраическая кратность равна $\alpha_{2-i} = 1$, геометрическая кратность равна $\beta_{2-i} = 1$ (аналогично)
Корень $\lambda = 2 + i$, алгебраическая кратность равна $\alpha_{2+i} = 1$, геометрическая кратность равна $\beta_{2+i} = 1$ (аналогично)

Тогда ЖНФ

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2-i & 0 \\ 0 & 0 & 2+i \end{pmatrix}$$

Примечание. У вас могла получиться другая ЖНФ, где значения идут в другом порядке. ЖНФ единственна с точностью до перестановки клеток.

1134 Найти минимальный многочлен следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Определение. Минимальным многочленом линейного оператора A называется многочлен $\mu(\lambda) \neq 0$ такой, что $\mu(A) = 0$, старший коэффициент 1 и степень минимальна.
Примечание. Минимальный многочлен похож на характеристическое уравнение, но степень у корней будет равна длине максимальной жордановой цепочки.

Есть три способа нахождения минимального многочлена. Первый способ: составить характеистическую матрицу $(A - \lambda E)$, привести её к диагональному виду и последний инвариантный множитель и будет минимальным многочленом. Но мы рассмотрим второй и третий способ, причем решение через поиск ЖНФ будем использовать для проверки, а в основном воспользуемся формулой:

$$\mu_A(\lambda) = \frac{(-1)^n \chi_A(\lambda)}{d_{n-1}(\lambda)}, \text{ где } d_{n-1}(\lambda) - \text{ НОД миноров хар. матрицы порядка } n-1$$

Составим характеристическую матрицу

$$\begin{pmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{pmatrix}$$

Найдём её миноры порядка 2 (α_{ij} - определитель матрицы, полученный вычеркиванием i строки и j столбца)
$\alpha_{11} = (2-\lambda)(1-\lambda)$
$\alpha_{12} = 0$
$\alpha_{13} = -(2-\lambda)$
$\alpha_{21} = 1 - \lambda + 1 = 2 - \lambda$
$\alpha_{22} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 1 = (2-\lambda)^2$
$\alpha_{23} = 3 - \lambda - 1 = 2 - \lambda$
$\alpha_{31} = 2 - \lambda$
$\alpha_{32} = 0$
$\alpha_{33} = (3-\lambda)(2-\lambda)$

НОД, как можно заметить, $d_{n-1}(\lambda) = (2-\lambda)$

Найдём и характеристический многочлен
$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 1 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = \{\text{разложу по второй строке}\} = (2-\lambda)((3-\lambda)(1-\lambda)+1) = (2-\lambda)(2-\lambda)^2 = -(\lambda-2)^3$
Осталось только посчитать по формуле

$$\mu_A(\lambda) = \frac{(-1)^3(-(\lambda-2)^3)}{(2-\lambda)} = (\lambda-2)^2$$

Теперь посмотрим на ЖНФ, в данном примере она выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

Примечание. Первая клетка размером 2 на 2 с собственным значением 2 и вторая клетка размером 1 на 1 с собственным значением 1. Максимальная длина жордановой цепочки для собственного значения 2 равна 2, тогда степень 3 у данного собственного значения в характеристическом многочлене заменим на 2 и получим $-(\lambda-2)^2$, но помним про то, что старший коэффициент должен быть равен 1, а тогда минимальный многочлен равен $\mu_A(\lambda) = (\lambda-2)^2$

1135 Найти минимальный многочлен следующей матрицы:

$$\begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -5 & 7 & -5 \\ -6 & 6 & -4 \end{pmatrix}$$

Составим характеристическую матрицу

$$\begin{pmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ -5 & 7-\lambda & -5 \\ -6 & 6 & -4-\lambda \end{pmatrix}$$

Найдём её миноры порядка 2 (α_{ij} - определитель матрицы, полученный вычеркиванием i строки и j столбца)
$\alpha_{11} = (7-\lambda)(-4-\lambda) + 30 = 2 - 3\lambda + \lambda^2 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)$
$\alpha_{12} = -5(-4-\lambda) - 30 = 5\lambda - 10 = 5(\lambda - 2)$
$\alpha_{13} = -30 + 6(7-\lambda) = 12 - 6\lambda = -6(\lambda - 2)$
$\alpha_{21} = -2(-4-\lambda) - 12 = 8 + 2\lambda - 12 = 2(\lambda - 2)$
$\alpha_{22} = (4-\lambda)(-4-\lambda) + 12 = \lambda^2 - 4 = (\lambda + 2)(\lambda - 2)$
$\alpha_{23} = 6(4-\lambda) - 12 = 12 - 6\lambda = -6(\lambda - 2)$
$\alpha_{31} = 10 - 2(7-\lambda) = 10 - 14 + 2\lambda = 2(\lambda - 2)$
$\alpha_{32} = -5(4-\lambda) + 10 = 5\lambda - 10 = 5(\lambda - 2)$
$\alpha_{33} = (4-\lambda)(7-\lambda) - 10 = (\lambda - 2)(\lambda - 9)$

НОД, как можно заметить, $d_{n-1}(\lambda) = (\lambda - 2)$

Найдём и характеристический многочлен
$\begin{vmatrix} 4-\lambda & -2 & 2 \\ -5 & 7-\lambda & -5 \\ -6 & 6 & -4-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 16\lambda + 12 = -(\lambda - 3)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = -(\lambda - 3)(\lambda - 2)^2$

Осталось только посчитать по формуле

$$\mu_A(\lambda) = \frac{(-1)^3(-(\lambda-3)(\lambda-2)^2)}{(\lambda-2)} = (\lambda - 2)(\lambda - 3)$$

Теперь посмотрим на ЖНФ, в данном примере она выглядит следующим образом:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Примечание. Первая клетка размером 1 на 1 с собственным значением 2, вторая клетка размером 1 на 1 с собственным значением 2, третья клетка размером 1 на 1 с собственным значением 3. Максимальная длина жордановой цепочки для собственного значения 2 и 3 равна 1, тогда степень 2 у собственного значения 2 в характеристическом многочлене заменим на 1 и получим $-(\lambda - 3)(\lambda - 2)$, но помним про то, что старший коэффициент должен быть равен 1, а тогда минимальный многочлен равен $\mu_A(\lambda) = (\lambda - 3)(\lambda - 2)$

1370 Найти ортогональную проекцию y и ортогональную составляющую z вектора $x = (4, -1, -3, 4))$ на линейное подпространство L, натянутое на векторы $a_1 = (1, 1, 1, 1)$, $a_2 = (1, 2, 2, -1)$, $a_3 = (1, 0, 0, 3)$

Определение. Пусть H - подпространство в V. Множество $H^{\perp} = \{x \in V \mid (x, y) = 0 \ \forall y \in H\}$ называется ортогональным дополнением H.
Утверждение. $H^{\perp}$ является линейным подпространством в V и $V = H \oplus H^{\perp}$ (прямая сумма групп, надеюсь, вы про неё помните).
Определение. $x = y + z$, где $y \in H$ - ортогональная проекция x на H, а $z \in H^{\perp}$ - ортогональная составляющая x относительно H.

Для начала найдём базис $L^{\perp}$, для этого выпишем векторы по столбцам и найдём ФСР

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $b_1 = (0, -1, 1, 0)$; $b_2 = (-3, 2, 0, 1)$ - базис $L^{\perp}$
Тогда $z = \alpha b_1 + \beta b_2$, а $x = y + z = y + \alpha b_1 + \beta b_2$

По свойствам скалярного произведения ($(y, b_1) = 0$ и $(y, b_2) = 0$ по определению ортогонального дополнения)

$$\begin{cases} (x, b_1) = (y + \alpha b_1 + \beta b_2, b_1) = (y, b_1) + \alpha(b_1, b_1) + \beta(b_2, b_1) = \alpha(b_1, b_1) + \beta(b_2, b_1) \\ (x, b_2) = (y + \alpha b_1 + \beta b_2, b_2) = (y, b_2) + \alpha(b_1, b_2) + \beta(b_2, b_2) = \alpha(b_1, b_2) + \beta(b_2, b_2) \end{cases}$$

Нам известны x, b_1, b_2, а значит, мы можем найти все скалярные произведения и получить α и β

$$\begin{cases} -2 = 2\alpha - 2\beta \\ -10 = -2\alpha + 14\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = -2 \\ \beta = -1 \end{cases}$$

$$z = -2b_1 - b_2 = (3, 0, -2, -1)$$

$$y = x - z = (1, -1, -1, 5)$$

1374 а) Найти расстояние от точки, заданной вектором $x = (4, 2, -5, 1)$, до линейного многообразия, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} 2x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 9 \\ 2x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 12 \end{cases}$$

Определение. Расстоянием от точки M, заданной вектором x до линейного многообразия (множество решений неоднородной СЛАУ) L называется $\rho(M, L) = min||x - u||$, где $u \in L$
Утверждение. Расстояние $\rho(M, L) = \rho(M, x_0 + L_0) = \rho(M - x_0, L_0)$ равно длине ортогональной составляющей вектора $x - x_0$.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 2 & 9 \\ 2 & -4 & 2 & 3 & 12 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 2 & -2 & 1 & 2 & 9 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & -1 & 0.5 & 1 & 4.5 \\ 0 & 1 & -0.5 & -0.5 & -1.5 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0.5 & 3 \\ 0 & 1 & -0.5 & -0.5 & -1.5 \end{array}\right)$$

Частное решение $x_0 = (3, -1.5, 0, 0)$

$b_1 = (2, 0, 0, 1) \in L^{\perp}$, $b_2 = (0, 2, -1, -1) \in L^{\perp}$

$z = \alpha b_1 + \beta b_2$, $x - x_0 = y + z = y + \alpha b_1 + \beta b_2$

$$\begin{cases} (x - x_0, b_1) = (y + \alpha b_1 + \beta b_2, b_1) = \alpha(b_1, b_1) + \beta(b_2, b_1) \\ (x - x_0, b_2) = (y + \alpha b_1 + \beta b_2, b_2) = \alpha(b_1, b_2) + \beta(b_2, b_2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3 = 5\alpha - \beta \\ 11 = -\alpha + 6\beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 2 \end{cases}$$

$$z = b_1 + 2b_2 = (2, 4, -2, -1), \quad \rho(M, L) = ||z|| = \sqrt{(z, z)} = 5$$

1542 Линейное преобразование φ евклидова пространства в базисе из векторов $f_1 = (1,2,1)$, $f_2 = (1,1,2)$, $f_3 = (1,1,0)$ задано матрицей

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & -1 \\ 2 & 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Найти матрицу сопряженного преобразования φ^* в том же базисе, считая, что координаты векторов базиса даны в некотором ортонормированном базисе.

Определение. Линейный оператор $\varphi^* : \epsilon \to \epsilon$ называется сопряженным к линейному оператору $\varphi : \epsilon \to \epsilon$, если $\forall x, y \in \epsilon$ $(A_\varphi x, y) = (x, A^*_\varphi y)$
Теорема. Для любого линейного оператора существует (и единственный) сопряженный оператор, причем его матрица вычисляется по формуле $(A^*_\varphi)_b = G^{-1}(A_\varphi)^T_b G$, G - матрица Грама базиса b.
Примечание. Матрица Грама базиса b $G[i,j] = (b_i, b_j)$, то есть скалярное произведение векторов.

Найдём матрицу Грама и обратную к ней (посмотрите первый модуль пеерд экзаменом, если забыли, как найти обратную матрицу)

$$G(f_1, f_2, f_3) = \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix}, \quad G^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0.75 & 0.75 \\ -2 & 0.75 & 2.75 \end{pmatrix}$$

Тогда по формуле

$$A^*_\varphi = G^{-1} A^T_\varphi G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -2 \\ -1 & 0.75 & 0.75 \\ -2 & 0.75 & 2.75 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 1 & 5 & 7 \\ 3 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 5 & 3 \\ 5 & 6 & 2 \\ 3 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -36 & -37 & -15 \\ 30 & 30 & 14 \\ 26 & 27 & 9 \end{pmatrix}$$

1558 Пусть G - матрица Грама некоторого базиса и A - матрица линейного преобразования φ. Найти матрицу A^* сопряженного преобразования φ^* в том же базисе

$$G = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 2 & -3 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \end{pmatrix}$$

По формуле

$$A^* = G^{-1} A^T G = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & -3 & 2 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -4 & 4 \\ 0 & -8 & 7 \\ -7 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$

1571 Для ортогонального преобразования φ, заданного в ортонормированном базисе матрицей A, найти ортонормированный базис, в котором матрица B этого преобразования имеет канонический вид. Найти канонический вид. (Искомый базис определен неоднозначно.)

$$A = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

Найдём собственные значения

$$\begin{vmatrix} \frac{2}{3}-\lambda & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ \frac{2}{3} & -\frac{1}{3}-\lambda & \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & \frac{2}{3}-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3+\lambda^2+\lambda-1 = -(\lambda-1)(\lambda^2-1) = -(\lambda-1)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = -1$

Канонический вид

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Примечание. Канонический вид - это блочно-диагональный вид матрицы, блоки могут быть двух видов: 1 на 1 со значением 1 или -1, 2 на 2 следующего вида

$$\begin{pmatrix} cos\varphi_i & -sin\varphi_i \\ sin\varphi_i & cos\varphi_i \end{pmatrix}$$

Если бы собственные значения были $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{1}{2}-i\frac{\sqrt{3}}{2}$, то канонический вид ($\varphi = \frac{\pi}{3}$):

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2} \\ 0 & \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

1586 Найти ортонормированный базис собственных векторов и матрицу B в этом базисе для линейного преобразования, заданного в некотором ортонормированном базисе матрицей A (искомый базис определен не однозначно).

$$A = \begin{pmatrix} 17 & -8 & 4 \\ -8 & 17 & -4 \\ 4 & -4 & 11 \end{pmatrix}$$

Эта задача на процесс ортогонализации Грама-Шмидта, но для начала найдём собственные значения и векторы.

$$\begin{vmatrix} 17-\lambda & -8 & 4 \\ -8 & 17-\lambda & -4 \\ 4 & -4 & 11-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 45\lambda^2 - 567\lambda + 2187 = -(\lambda - 27)(\lambda^2 - 18\lambda + 81) = -(\lambda - 27)(\lambda - 9)^2$$

1. $\lambda = 9$

$$(A - 9E) = \begin{pmatrix} 8 & -8 & 4 \\ -8 & 8 & -4 \\ 4 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0.5 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $v_1 = (1, 1, 0)^T$, $v_2 = (-1, 0, 2)^T$
Начнём процесс ортогонализации.
$v_2' = v_2 + \alpha v_1$
$0 = (v_2', v_1) = (v_2 + \alpha v_1, v_1) = (v_2, v_1) + \alpha(v_1, v_1) = -1 + 2\alpha \Rightarrow \alpha = \dfrac{1}{2}$
$v_2' = v_2 + \dfrac{1}{2} v_1 = (-\dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 2)^T$
v_1, v_2' - ортогональные собственные векторы для собственного значения 9.
Нормируем их: $\overline{v_1} = \dfrac{v_1}{||v_1||} = \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}, \dfrac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)^T$, $\overline{v_2} = \dfrac{v_2'}{||v_2'||} = \left(-\dfrac{1}{3\sqrt{2}}, \dfrac{1}{3\sqrt{2}}, \dfrac{4}{3\sqrt{2}}\right)^T$

1. $\lambda = 27$

$$(A - 27E) = \begin{pmatrix} -10 & -8 & 4 \\ -8 & -10 & -4 \\ 4 & -4 & -16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 5 & 4 & -2 \\ 4 & 5 & 2 \\ 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & -4 \\ 0 & 9 & 18 \\ 0 & 9 & 18 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $v_3 = (2, -2, 1)^T$

Нормируем вектор: $\overline{v_3} = \dfrac{v_3}{||v_3||} = \left(\dfrac{2}{3}, -\dfrac{2}{3}, \dfrac{1}{3}\right)^T$

$$B = C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 9 & 0 & 0 \\ 0 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 27 \end{pmatrix}, \text{ где } C = (\overline{v_1}, \overline{v_2}, \overline{v_3})$$

1598 Следующую матрицу представить в виде произведения симметрической матрицы с положительными характеристическими числами на ортогональную матрицу.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

Речь идёт о полярном разложении. Оно получается из сигнулярного разложения

$$A = V\Sigma U^T = V\Sigma(V^TV)U^T = (V\Sigma V^T)(VU^T) = SO$$

Для начала найдём сингулярное разложение.
1. A^TA приводим к диагональному виду в ОНБ

$$A^TA = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$\sigma_1 = \sqrt{8}$, $\sigma_2 = \sqrt{2}$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

2. Найдём матрицу U
$e_1 = (1,0)^T$, $e_2 = (0,1)^T$ - ОНБ базис, тогда

$$U = (e_1, e_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Найдём матрицу V
$f_1 = \dfrac{1}{\sigma_1}Ae_1 = \dfrac{1}{\sqrt{8}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$
$f_2 = \dfrac{1}{\sigma_2}Ae_2 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$V = (f_1, f_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

4. Получили SVD разложение

$$A = V\Sigma U^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Найдём матрицы полярного разложения

$$S = V\Sigma V^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

$$O = VU^T = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

Получили полярное разложение

$$A = SO = \begin{pmatrix} \frac{3}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{3}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$$

1600 Следующую матрицу представить в виде произведения симметрической матрицы с положительными характеристическими числами на ортогональную матрицу.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -2 & 2 \\ 4 & 4 & -1 \\ -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$$

Задача, аналогичная предыдущей, только побольше размеры.