Разбор задачи 58.39(б)

12.02.21, группа БПИ209

Задача 58.39(б). Доказать, что в группе $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ для каждого натурального n имеется в точности одна подгруппа порядка n.

Решение. 1) Заметим, что для несократимой дроби $\frac{a}{b}$ (где $a \neq 0$, $b > 0$) выполнено: $\mathrm{ord}(\frac{a}{b} + \mathbb{Z}) = b$. Поэтому все элементы порядка b группы $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ содержатся в подгруппе $\{\mathbb{Z}, \frac{1}{b} + \mathbb{Z}, \frac{2}{b} + \mathbb{Z}, \ldots, \frac{b-1}{b} + \mathbb{Z}\} = \langle \frac{1}{b} + \mathbb{Z} \rangle_b$. Отсюда следует, что для каждого натурального b в группе $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ имеется в точности одна *циклическая* подгруппа порядка b.

2) Рассмотрим произвольную подгруппу $H \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ порядка n. По следствию из теоремы Лагранжа, порядок любого элемента $h \in H$ является делителем n: $\mathrm{ord}(h) \,|\, n$. Тогда (выбирая подходящего представителя смежного класса) можно считать, что $h = \frac{x}{y} + \mathbb{Z}$, где $\frac{x}{y}$ — правильная несократимая дробь, знаменатель y которой делит n (либо $x = 0$). Но таких дробей ровно n (каждая получена путем сокращения в точности одной из дробей $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n-1}{n}$) — столько же, сколько элементов в H. Значит,

$$H = \left\{\mathbb{Z}, \frac{1}{n} + \mathbb{Z}, \frac{2}{n} + \mathbb{Z}, \ldots, \frac{n-1}{n} + \mathbb{Z}\right\} = \left\langle \frac{1}{n} + \mathbb{Z} \right\rangle_n$$

Альтернативный (арифметический) способ

2′) Согласно пункту 1, достаточно доказать, что любая конечная подгруппа в $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ является циклической.

Предположим, что это не так, тогда рассмотрим нециклическую подгруппу $H \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ и элемент $\frac{a}{b} + \mathbb{Z} = h \in H$ такой, что дробь $\frac{a}{b}$ несократима (и $a \neq 0$), а ее знаменатель $b > 1$ максимален. В силу пункта 1, $\langle \frac{a}{b} + \mathbb{Z} \rangle_b = \langle \frac{1}{b} + \mathbb{Z} \rangle_b$, поэтому можно считать, что $h = \frac{1}{b} + \mathbb{Z}$.

Поскольку H нециклическая, найдется элемент $\frac{c}{d} + \mathbb{Z} = h' \in H$, где дробь $\frac{c}{d}$ несократима ($c \neq 0$) и ее знаменатель d не делит b. Аналогично рассуждениям выше можно считать, что $h' = \frac{1}{d} + \mathbb{Z}$, где $d \nmid b$. Следовательно, d делится на бóльшую степень некоторого простого числа p, чем b, т. е. для некоторого натурального α выполнено: $p^\alpha \mid d$ и $p^\alpha \nmid b$. Пусть $d = p^\alpha \cdot m$. Тогда $\frac{1}{p^\alpha} = \frac{m}{d}$, откуда $\frac{1}{p^\alpha} + \mathbb{Z} = mh' \in H$. Вспоминая, что $h \in H$, получаем:

$$H \ni h + h' = \left(\frac{1}{b} + \mathbb{Z}\right) + \left(\frac{1}{p^\alpha} + \mathbb{Z}\right) = \left(\frac{1}{b} + \frac{1}{p^\alpha}\right) + \mathbb{Z} = \frac{p^\alpha + b}{bp^\alpha} + \mathbb{Z}.$$

Однако ясно, что дробь $\dfrac{p^\alpha + b}{bp^\alpha}$ не может быть сократима на простое число q, не равное p (в противном случае $q \mid b$, но тогда числитель не делится на q), поэтому ее можно сократить только на p^β, где $\beta < \alpha$ (поскольку числитель не делится на p^α). Следовательно, после сокращения знаменатель будет превосходить b — это противоречит изначальному предположению! Значит, нециклической конечной подгруппы $H \subset \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ не существует.

Замечание. В альтернативном способе были важны ухищрения с p^α, поскольку может случиться так, что дробь $\frac{1}{b} + \frac{1}{d} = \frac{b+d}{bd}$ может "сильно" сократиться. Например, $1/70 + 1/30 = 1/21$.