Разбор задач домашнего задания по алгебре на 12.03 для группы БПИ209
3 модуль
Автор: vk.com/yourkumir

Определение. Пусть V - произвольное множество, на котором корректно
$(\forall x, y \in V \ \ \forall \alpha \in \mathbb{F} \ \ \exists x + y \in V \ \ \alpha x \in V)$ заданы 2 операции: сложение и умножение на число.
Множество V называется линейным (векторным) пространством, если $\forall x, y, z \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{F}$ выполнены следующие 8 аксиом:
1) $(x + y) + z = x + (y + z)$ ассоциативность сложения
2) $0 \in V \ \forall x \in V \ \ 0 + x = x + 0 = x$ нейтральный элемент по сложению
3) $\forall x \in V \ \exists(-x) \ \ x + (-x) = (-x) + x = 0$ обратный элемент по сложению
4) $x + y = y + x$ коммутативность сложения
5) $\forall x \in V \ \ 1 \cdot x = x$ нейтральный элемент из поля не трогает x
6) $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$ ассоциативность умножения на число
7) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ дистрибутивность 1
8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ дистрибутивность 2

Определение. Базисом векторного пространства назвается набор линейно независимых векторов (элементов векторного пространства) $b_1, ..., b_n$, что любой вектор представляется в виде их линейной комбинации $x = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n$.
$\alpha_1, ..., \alpha_n$ - координаты вектора x в базисе $b_1, ..., b_n$

Размерность векторного пространства - максимальное количество линейно независимых векторов. Если в векторном пространстве есть базис из n векторов, то размерность пространства $dim = n$.

Подмножество векторного пространства называется векторным подпространством, если оно само является векторным пространством относительно тех же операций.

Матрицей перехода от базиса A к базису B называется квадратная матрица $T_{A \to B}$, где i столбец в матрице перехода - это столбец координат b_i в A
$b = aT_{A \to B}$

1301 Доказать, что все квадратные матрицы порядка n с вещественными элементами или (элементами из любого другого поля P) образуют векторное пространство над полем вещественных чисел (соответственно над полем P), если за операции взять сложение матриц и умножение матрицы на число. Найти базис и размерность этого пространства.

Докажем, что это векторное пространство по определению. $(M_n(\mathbb{R}), +)$ - абелева группа, то есть выполнены пункты 1-4. Пункты 5-8 для сложения матриц и умножения матрицы на число тоже верны.

Пусть e_{ij} - это матрица размером $n * n$, в которой на пересечении i строки и j столбца стоит единица, а все остальные элементы нули. Тогда базис исходного векторного пространства $e_{11}, e_{12}, ...e_{n(n-1)}, e_{nn}$, так как данные матрицы линейно независимы и любая матрица A может быть представлена как их линейная комбинация $A = \sum i = 1^n \sum j = 1^n a_{ij} e_{ij}$. Размерность такого пространства $dim = n^2$.

1298 Доказать, что все n-мерные векторы, у которых координаты с четными номерами равны нулю, образуют векторное подпространство. Найти базис и размерность этого пространства.

Для того, чтобы доказать, что подмножество H является подпространством в векторном пространстве V достаточно проверить, что $\forall x_1, x_2 \in H \quad x_1 + x_2 \in H$, $\forall x \in H\ \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \alpha x \in H$
Для нашего подмножества это выполняется, потому что операции мы выполняем покоординатно и $0+0=0$, $\alpha 0 = 0$

Алгоритм поиска базиса: $\{x \in \mathbb{F}^n \mid Ax = \overline{0}\}$ - векторное подпространство $\mathbb{F}^n$, базис - ФСР $Ax = 0$, размерность - $n - rgA$
В нашем случае

$$\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_4 = 0 \\ ... \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccccccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & . & . & . & 0 & & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & . & . & . & 0 & & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . & . & . & & . \end{array}\right) \Leftrightarrow \text{ФСР: } (1\ \ 0\ \ 0\ \ ...\ \ 0\ \ 0)^T, (0\ \ 0\ \ 1\ \ ...\ \ 0\ \ 0)^T, ...$$

Базис: $e_1, e_3, ..., e_{[\frac{n+1}{2}]}$
Размерность: $dim = [\frac{n+1}{2}]$

1300 Доказать, что все n-мерные векторы вида $(\alpha, \beta, \alpha, \beta, \alpha, \beta, ...)$ образуют векторное подпространство. Найти базис и размерность этого пространства.

Для того, чтобы доказать, что подмножество H является подпространством в векторном пространстве V достаточно проверить, что $\forall x_1, x_2 \in H \quad x_1 + x_2 \in H$, $\forall x \in H\ \forall \alpha \in \mathbb{F} \quad \alpha x \in H$
Для нашего подмножества это выполняется, потому что операции мы выполняем покоординатно

Базис: $v_1 = (1, 0, 1, 0, 1, 0, ...)$, $v_2 = (0, 1, 0, 1, 0, 1, ...)$, так как v_1, v_2 линейно независимы, $\forall v = \alpha v_1 + \beta v_2$
Размерность: $dim = 2$

1302 Доказать, что все многочлены степени $\leq n$ от одного неизвестного с вещественными коэффициентами (или с коэффициентами из любого поля P) образуют векторное пространство, если за операции взять обычное сложение многочленов и умножение многочлена на число. Найти базис и размерность этого пространства.

Можно проверить все пункты определения и убедиться в том, что обычные операции над многочленами действительно им удовлетворяют, то есть исходное множество является векторным пространством.

Базис: $1, x, x^2, x^3, ..., x^n$, из основной теоремы алгебры такие функции линейно независимы, $\forall p = \sum i = 0^n a_i x^i$
Размерность: $dim = n + 1$

1282 Найти координаты многочлена $f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n$ в базисе

1) $1, x, x^2, x^3, ..., x^n$
Координаты: $(a_0, a_1, a_2, ..., a_n)$

2) $1, x - \alpha, (x-\alpha)^2, (x-\alpha)^3, ..., (x-\alpha)^n$
Нас просят доказать, что это базис, поэтому рассмотрим $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i (x-\alpha)^i = 0$
$\lambda_n = 0$, так как $(x-\alpha)^n = x^n + ...$, и нет больше слагаемых, содержащих x^n с другими λ_i, и общая сумма должна быть равна 0.
Тогда сумма $\sum\limits_{i=0}^{n} \lambda_i (x-\alpha)^i = \sum\limits_{i=0}^{n-1} \lambda_i (x-\alpha)^i = 0$ и применяем маневр со страшим коэффициентом дальше и получим $\forall i\ \lambda_i = 0 \Rightarrow$ данные векторы линейно независимы.
$\forall f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + ... + a_n x^n\ f(x) = f(\alpha) + f'(\alpha)(x-\alpha) + ... + \dfrac{f^{(n)}(x-\alpha)^n}{n!} \Rightarrow$ это базис.
Координаты: $(f(\alpha), f'(\alpha), ..., \dfrac{f^{(n)}}{n!})$

1279 Векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ и x заданы своими координатами в некотором базисе. Показать, что векторы $e_1, e_2, ..., e_n$ сами задают базис и найти координаты вектора x в этом базисе.
$e_1 = (1, 2, -1, -2)$
$e_2 = (2, 3, 0, -1)$
$e_3 = (1, 2, 1, 4)$
$e_4 = (1, 3, -1, 0)$
$x = (7, 14, -1, 2)$

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 + x_4 = 7 \\ 2x_1 + 3x_2 + 2x_3 + 3x_4 = 14 \\ -x_1 + 0x_2 + x_3 - x_4 = -1 \\ -2x_1 - x_2 + 4x_3 + 0x_4 = 2 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 7 \\ 2 & 3 & 2 & 3 & | & 14 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & | & -1 \\ -2 & -1 & 4 & 0 & | & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & | & 6 \\ 0 & 3 & 6 & 2 & | & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & | & 6 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & | & 16 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 3 & | & 7 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 6 & 5 & | & 16 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & | & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & | & 4 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow x = (0, 2, 1, 2)$$

1310 Найти размерность и базис линейных подпространств, натянутых на следующие системы векторов:
$a_1 = (1, 0, 0, -1)$
$a_2 = (2, 1, 1, 0)$
$a_3 = (1, 1, 1, 1)$
$a_4 = (1, 2, 3, 4)$
$a_5 = (0, 1, 2, 3)$

1 способ. По строкам

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

$rgA = 3$, базис $(1, 0, 0, -1), (0, 1, 1, 2), (0, 1, 2, 3)$

2 способ. По столбцам (сохраняем порядок, нельзя менять строки и столбцы!)

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 5 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Смотрим на ведущие элементы и вспоминаем номера векторов, в нашем случае базис a_1, a_2, a_4

1280 Доказать, что каждая из двух систем векторов является базисом и найти связь координат одного и того же вектора в двух базисах
$e_1 = (1, 2, 1)$, $e_2 = (2, 3, 3)$, $e_3 = (3, 7, 1)$, $e_1^{'} = (3, 1, 4)$, $e_2^{'} = (5, 2, 1)$, $e_3^{'} = (1, 1, -6)$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & | & 3 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 7 & | & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & | & 4 & 1 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & | & -27 & -71 & -41 \\ 0 & 1 & 0 & | & 9 & 20 & 9 \\ 0 & 0 & 1 & | & 4 & 12 & 8 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -27x_1' - 71x_2' - 41x_3' \\ x_2 = 9x_1' + 20x_2' + 9x_3' \\ x_3 = 4x_1' + 12x_2' + 8x_3' \end{cases}$$