

1. Подгруппа G симметрической группы S_n порождена степенями подстановки $\sigma = (1\ 2\ 3\ 4\ 5\ 6\ 7)(8\ 9\ 10\ 11\ 12\ 13\ 14\ 15)$.
Найти

(a) все элементы $g \in G$ такие, что $g^7 = id$;

(b) элементы g порядка 7,

и в каждом случае подсчитать их количество.

Определение. Пусть q - наименьшее натуральное число, для которого $a^q = e$ (e - нейтральный элемент). Тогда a - элемент конечного порядка q , $ord(a) = q$. Если такого конечного q не существует, то говорят, что a бесконечного порядка.

Утверждение (56.11). Если элемент a имеет порядок n , то порядок элемента x^k равен $\frac{n}{\text{НОД}(n, k)}$

Замечание. Порядок перестановки - это НОК длин её циклов. Например, $ord(\sigma) = \text{НОК}(7, 8) = 56$

(a) Пусть $g = \sigma^k$, тогда $g^7 = \sigma^{7k} = id \Rightarrow ord(g^7) = ord(\sigma^{7k}) = ord(id) = 1 \Rightarrow \frac{ord(\sigma)}{\text{НОД}(ord(\sigma), 7k)} = 1$

$56 = \text{НОД}(56, 7k) \Rightarrow 7k$ делится на 56, то есть k делится на 8, тогда возможные значения элемента g : $\{g^8, g^{16}, g^{24}, g^{32}, g^{40}, g^{48}, g^{56} = id\}$, всего таких значений 7.

(b) Пусть $g = \sigma^k$, тогда $ord(g) = ord(\sigma^k) = 7 \Rightarrow \frac{ord(\sigma)}{\text{НОД}(ord(\sigma), k)} = 7$

$8 = \text{НОД}(56, k)$, то есть k делится на 8, но не делится на 7, тогда возможные значения элемента g : $\{g^8, g^{16}, g^{24}, g^{32}, g^{40}, g^{48}\}$, всего таких значений 6.

2. Рассмотрим поле $f = \mathbb{F}_5[x]/\langle x^3 + 3x^2 + 2x + 3 \rangle$. Через \bar{f} будем обозначать смежный класс

$$f + \langle x^3 + 3x^2 + 2x + 3 \rangle \in F$$

Представить в виде \bar{f} , где $deg \bar{f} < 3$ выражение

$$\frac{2x^4 + 4x^2 + 3}{2x^3 + 2x^2} + (4x^6 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 2)(3x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x + 2) - \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{4x + 1}$$

$$1) \frac{2x^4 + 4x^2 + 3}{2x^3 + 2x^2} = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 + x + 1$$

Мы хотим найти обратный к $2x^3 + 2x^2$

| выражение | \bar{f} | \bar{g} | |
|-----------------------|---------------|-----------------|------------------------|
| $x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ | 1 | 0 | (1) |
| $2x^3 + 2x^2$ | 0 | 1 | (2) |
| $2x^2 + 2x + 3$ | 1 | 2 | (3)=(1)+2(2) |
| $2x$ | $4x$ | $1 + 3x$ | (4)=(2)-x(3)=(2)+4x(3) |
| $2x + 3$ | $1 + x^2$ | $2 + 4x + 2x^2$ | (5)=(3)-x(4)=(3)+4x(4) |
| 3 | $1 + x + x^2$ | $1 + x + 2x^2$ | (6)=(5)-(4)=(5)+4(4) |

$$\begin{aligned} (x^2 + x + 1)(x^3 + 3x^2 + 2x + 3) + (2x^2 + x + 1)(2x^3 + 2x^2) &= 3 \Rightarrow \frac{2x^4 + 4x^2 + 3}{2x^3 + 2x^2} = \frac{(2x^4 + 4x^2 + 3)(2x^2 + x + 1)}{(2x^3 + 2x^2)(2x^2 + x + 1)} = \\ \frac{(2x^4 + 4x^2 + 3)(2x^2 + x + 1)}{2(2x^4 + 4x^2 + 3)(2x^2 + x + 1)} &= \frac{2(2x^4 + 4x^2 + 3)(2x^2 + x + 1)}{2(2x^4 + 4x^2 + 3)(2x^2 + x + 1)} = \\ &= \frac{3}{6} = \frac{1}{2} \\ &= 2(2x^4 + 4x^2 + 3)(2x^2 + x + 1) = (2x^4 + 4x^2 + 3)(4x^2 + 2x + 2) = 8x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 16x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 12x^2 + 6x + 6 = \\ &= 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 + x + 1 \end{aligned}$$

$$2) \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{4x + 1} = -(x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2)$$

Мы хотим найти обратный к $4x + 1$

| выражение | f | g | |
|-----------------------|-----|----------------|--------------------------------|
| $x^3 + 3x^2 + 2x + 3$ | 1 | 0 | (1) |
| $4x + 1$ | 0 | 1 | (2) |
| $4x^2 + 2x + 3$ | 1 | x^2 | (3)=(1)+ x^2 (2) |
| $x + 3$ | 1 | $x^2 + 4x$ | (4)=(3)- x (2)=(3)+4 x (2) |
| 4 | 1 | $x^2 + 4x + 1$ | (5)=(2)+(4) |

$$(x^3 + 3x^2 + 2x + 3) + (x^2 + 4x + 1)(4x + 1) = 4 \Rightarrow \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{4x + 1} = \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)(x^2 + 4x + 1)}{(4x + 1)(x^2 + 4x + 1)} =$$

$$\frac{(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)(x^2 + 4x + 1)}{4} = \frac{(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)(x^2 + 4x + 1)}{-1} = -(x^3 + 3x^2 + 3x + 2)(x^2 + 4x + 1) =$$

$$-(x^5 + 4x^4 + x^3 + 3x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x^3 + 2x^2 + 3x + 2x^2 + 3x + 2) = -(x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2)$$

$$3) (4x^6 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 2)(3x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x + 2) = \{\text{возьмем остатки при делении на порождающий многочлен}\} =$$

$$(3x^2 + 4x + 4)(3x + 2) = 9x^3 + 6x^2 + 12x^2 + 8x + 12x + 8 = 4x^3 + 3x^2 + 3$$

4) Соберем все вместе:

$$(3x^6 + 4x^5 + 3x^3 + x + 1) + (4x^3 + 3x^2 + 3) + (x^5 + 2x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 2) = 3x^6 + 2x^4 + 3x^3 + 2x + 1 =$$

$$= 2x^2 + 2x + 2 \pmod{x^3 + 3x^2 + 2x + 3}$$

3. Пусть $f(x) = x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 7x$, $g(x) = x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x$ — многочлены над полем \mathbb{Z}_{11} . Найти НОД(f, g) и многочлены $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x) + v(x)g(x) = \text{НОД}(f, g)$$

Мы это делали в прошлом пункте

| выражение | f | g | |
|--------------------------|-------------|-----------------|-----------------------|
| $x^4 + 3x^3 + 6x^2 + 7x$ | 1 | 0 | (1) |
| $x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x$ | 0 | 1 | (2) |
| $2x^3 + x^2 + 7x$ | 10 | 1 | (3)=(2)-(1)=(2)+10(1) |
| $10x^3 + 9x^2 + 3x$ | $6x$ | $1 + 5x$ | (4)=(2)+5 x (3) |
| $8x^2 + 2x$ | $10 + x$ | $3 + 10x$ | (5)=(3)+2(4) |
| $x^2 + 3x$ | $10 + 7x^2$ | $1 + 4x + 4x^2$ | (6)=(4)+7 x (5) |
| 0 | ... | ... | (7)=(5)+3(6) |

НОД(f, x) = $x^2 + 3x$. Так как НОД многочленов единственен с точностью до константы, то НОД(f, x) = $x^2 + 3x = 8(x^2 + 3x) = 8x^2 + 2x$, тогда $u(x) = 10 + x$, $v(x) = 3 + 10x$

$$(10 + x)f(x) + (3 + 10x)g(x) = 8x^2 + 2x$$

У вас мог получиться и другой ответ, например $(5 + 6x)f(x) + (7 + 5x)g(x) = 4x^2 + x$ (умножили все части равенства на 6).

4. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_3 \times S_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Определение. Пусть q - наименьшее натуральное число, для которого $a^q = e$ (e - нейтральный элемент). Тогда a - элемент конечного порядка q , $ord(a) = q$. Если такого конечного q не существует, то говорят, что a бесконечного порядка.

Совет. Повторить обозначения таких специальных групп, знать элементы и порядок группы.

\mathbb{Z}_4 - группа вычетов по модулю 4 (всего 4 элемента)

$$ord(0) = 1$$

$$ord(1) = 4$$

$$ord(2) = 2$$

$$ord(3) = 4$$

S_3 - группа перестановок длины 3 (всего $3! = 6$ элементов), порядок - НОК длин всех циклов

$$ord \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \quad id = (1)(2)(3)$$

$$ord \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \quad (1)(23)$$

$$ord \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \quad (12)(3)$$

$$ord \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad (123)$$

$$ord \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \quad (132)$$

$$ord \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad (13)(2)$$

D_3 - группа Диедра - группа симметрий правильного 3-угольника (всего $2 * 3 = 6$ элементов, 3 вращений и 3 симметрий)

$$ord \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \quad id - \text{тождественное преобразование, поворот на } 0 \text{ градусов}$$

$$ord \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \quad (1)(23) - \text{симметрия относительно } 1-1'$$

$$ord \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \quad (12)(3) - \text{симметрия относительно } 3-3'$$

$$ord \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad (123) - \text{поворот на } 60 \text{ градусов}$$

$$ord \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \quad (132) - \text{поворот на } 240 \text{ градусов}$$

$$ord \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad (13)(2) - \text{симметрия относительно } 2-2'$$

Порядок элемента произведения групп - НОК порядков элементов групп, то есть если мы ищем элемент порядка 2 в произведении групп, то нам подходят такие тройки элементов групп порядки которых

$$(1, 1, 2) - \text{таких элементов } 1 * 1 * 3 = 3$$

$$(1, 2, 1) - \text{таких элементов } 1 * 3 * 1 = 3$$

$$(2, 1, 1) - \text{таких элементов } 1 * 1 * 1 = 1$$

$$(1, 2, 2) - \text{таких элементов } 1 * 3 * 3 = 9$$

$$(2, 1, 2) - \text{таких элементов } 1 * 1 * 3 = 3$$

$$(2, 2, 1) - \text{таких элементов } 1 * 3 * 1 = 3$$

$$(2, 2, 2) - \text{таких элементов } 1 * 3 * 3 = 9$$

Всего элементов 31

5. Докажите, что любая подгруппа циклической группы, порожденной элементом a , порождена элементом a^d для d – натурального делителя n . Опишите все подгруппы в \mathbb{Z}_{220}

Пусть $G = \langle a \rangle$ – циклическая группа с порождающим элементом a , тогда рассмотрим подгруппу $H \subset G$. Пусть a^d минимальная степень a , такая что $a^d \in H$, тогда рассмотрим элемент $a^k \in H$ и допустим, что k не делится на d , то есть $\text{НОД}(d, k) = n = ud + vk \leq d$. $(a^d)^u * (a^k)^v = a^n \in H$, но $n < d$, пришли к противоречию. Для любого $a^l \in H$ l делится на d , H – циклическая подгруппа, a^d – порождающий элемент.

Делители 220 : 1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220, тогда порождающие элементы циклических подгрупп циклической группы \mathbb{Z}_{220} : $a, a^2, a^4, a^5, a^{10}, a^{11}, a^{20}, a^{22}, a^{44}, a^{55}, a^{110}, a^{220}$

6. Найти базис и размерность линейного подпространства L в R^4 , заданного системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

Определение. Базисом векторного пространства называется набор линейно независимых (из равенства линейной комбинации нулю следует, что коэффициенты равны нулю) векторов (элементов векторного пространства) b_1, \dots, b_n , что любой вектор представляется в виде их линейной комбинации $x = \alpha_1 b_1 + \dots + \alpha_n b_n$.

$\alpha_1, \dots, \alpha_n$ – координаты вектора x в базисе b_1, \dots, b_n

Определение. Размерность векторного пространства – максимальное количество линейно независимых векторов. Если в векторном пространстве есть базис из n векторов, то размерность пространства $\dim = n$.

Алгоритм решения. Если пространство задано системой линейных уравнений (а в 1308, 1298 мы самостоятельно составляли СЛУ, которые описывали наше множество), то его базис – ФСР (всего ФСР $m - \text{rg} A$).

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР (базис): $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Количество ФСР (размерность): $\dim = 3$

7. Найти размерность и базис (выбрав его из множества исходных векторов) линейной оболочки векторов $a_1 = (1, -1, 2, 1)^T$, $a_2 = (1, 2, 1, -1)^T$, $a_3 = (0, 3, -1, -2)^T$, $a_4 = (3, 3, 4, -1)^T$, $a_5 = (1, -4, 3, 3)^T$ в \mathbb{R}^4 , выразить небазисные векторы через базисные.

Определение. Множество $L(a_1, \dots, a_m) = \{\lambda_1 a_1 + \dots + \lambda_k a_k \mid \forall \lambda_i \in F\}$ называется линейной оболочкой векторов a_1, \dots, a_m

$L(a_1, \dots, a_m)$ является линейным подпространством.

Алгоритм решения. Выписываем векторы по строкам и элементарными преобразованиями (кроме перестановки строк, так как i -ая строка закреплена за a_i) приводим матрицу к ступенчатому виду. Строки с ведущими элементами соответствуют базисным векторам.

Чтобы выразить небазисные вектора через базисные, необходимо восстановить преобразования, которые мы применяли к векторам.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 3 & 3 & 4 & -1 \\ 1 & -4 & 3 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 6 & -2 & -4 \\ 0 & -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Базис: a_1, a_2

Выразим небазисные векторы через базисные: $a_3 = a_2 - a_1$

$$a_4 - 3a_1 = 2(a_2 - a_1) \Rightarrow a_4 = 2a_2 + a_1$$

$$a_5 - a_1 = -(a_2 - a_1) \Rightarrow a_5 = 2a_1 - a_2$$

Примечание. У вас мог получиться один из этих базисов: $\{a_1, a_2\}$, $\{a_1, a_3\}$, $\{a_1, a_4\}$, $\{a_1, a_5\}$

8. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку векторов $a_1 = (1, 1, 2, 1, 2)^T$, $a_2 = (0, -1, -2, 1, -1)^T$, $a_3 = (3, 1, 2, 5, 4)^T$ в \mathbb{R}^5

1. В прошлой задаче (7) изложен алгоритм, как найти базис линейной оболочки векторов.

Выписываем векторы по строкам и элементарными преобразованиями (кроме перестановки строк, так как i -ая строка закреплена за a_i) приводим матрицу к ступенчатому виду. Строки с ведущими элементами соответствуют базисным векторам.

2. У нас есть линейное подпространство и его базис, надо составить систему линейных уравнений, которая будет задавать данное линейное подпространство.

Выписываем базисные векторы по строкам, находим ФСР. Векторы ФСР - векторы коэффициентов системы линейных уравнений.

3*. И хоть в это задаче это не понадобится, но напомним, что делать, если есть линейное подпространство и система линейных уравнений, которая его задает, а надо найти базис данного линейного подпространства (из задачи (6)).

Если пространство задано системой линейных уравнений, то его базис - ФСР (всего ФСР $m - \text{rg} A$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 3 & 1 & 2 & 5 & 4 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & -4 & 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Базис: a_1, a_2 (может быть и a_1, a_3), размерность $\dim = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{ФСР: } \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{СЛАУ: } \begin{cases} -2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$$

9. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств L_1, L_2 в \mathbb{R}^4 , $L_1 = \langle a_1, a_2, a_3 \rangle$, $L_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$, где $a_1 = (1, 0, -3, -2)^T$, $a_2 = (7, 1, 9, 14)^T$, $a_3 = (-4, 1, 2, -9)^T$, $b_1 = (10, 1, 0, 8)^T$, $b_2 = (-3, 0, 1, -3)^T$

Алгоритм нахождения базиса (и размерности) суммы линейных подпространств.

- 1) составить матрицу, выписав все векторы по столбцам
- 2) привести матрицу к ступенчатому виду методом Гаусса по строкам
- 3) ведущие элементы соответствуют векторам (если вы не меняли столбцы местами), которые являются базисными для суммы
- 4) размерность суммы - количество базисных векторов, то есть количество ведущих переменных

Алгоритм нахождения базиса (и размерности) пересечения линейных подпространств.

- 1) составить матрицу для L_1 , выписав все векторы L_1 по строкам
- 2) привести матрицу к каноническому виду методом Гаусса по строкам
- 3) найти ФСР
- 4) составить матрицу для L_2 , выписав все векторы L_2 по строкам
- 5) привести матрицу к каноническому виду методом Гаусса по строкам
- 6) найти ФСР
- 7) составить матрицу для пересечения L_1 и L_2 , выписав ФСР для L_1 (пункт 3) и для L_2 (пункт 6) по строкам
- 8) привести матрицу к каноническому виду методом Гаусса по строкам
- 9) найти ФСР

Теорема. Пусть L_1, L_2 - подпространства одного векторного пространства, тогда

$$\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 \cup L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$$

$$L_1: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 9 & 14 \\ -4 & 1 & 2 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 1 & -10 & -17 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 0 & -40 & -45 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11/8 \\ 0 & 1 & 0 & -46/8 \\ 0 & 0 & 1 & 9/8 \end{pmatrix}$$

$$\text{ФСР: } \begin{pmatrix} 11 \\ -46 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$$

$$\dim L_1 = 3$$

$$L_2: \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 10 & -6 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 10/3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\text{ФСР: } \begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim L_2 = 2$$

$$L_1 \cup L_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 9 & 14 \\ -4 & 1 & 2 & -9 \\ 10 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 1 & -10 & -17 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 0 & -8 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 0 & -40 & -45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базис суммы: a_1, a_2, a_3

$$\dim(L_1 \cup L_2) = 3$$

$$L_1 \cap L_2: \begin{pmatrix} 11 & -46 & 9 & -8 \\ 1 & -10 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -10 & 3 & 0 \\ 0 & 64 & -24 & -8 \\ 0 & -8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -10 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6/8 & -10/8 \\ 0 & 1 & -3/8 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{ФСР: } \begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$$

Базис пересечения: $(6, 3, -8, 0), (10, 1, 0, -8)$

$$\dim(L_1 \cap L_2) = 2$$

Проверим формулу $\dim L_1 + \dim L_2 = \dim(L_1 \cup L_2) + \dim(L_1 \cap L_2)$ $3 + 2 = 3 + 2$ - верно

10. Вычислить матрицу перехода $C_{e \rightarrow e'}$ от базиса $e_1 = (-2, 1, -1)^T, e_2 = (1, -1, 3)^T, e_3 = (1, 2, -1)^T$ к базису $e'_1 = (-1, 2, 3)^T, e'_2 = (2, 1, 2)^T, e'_3 = (0, 2, 1)^T$, в линейном пространстве \mathbb{R}^3 и определить координаты вектора $x = -e'_1 + 3e'_2 - e'_3$ в базисе e_1, e_2, e_3

Определение. Пусть V - n -мерное линейное пространство и в нем есть два базиса: $A = \{a_1, \dots, a_n\}, B = \{b_1, \dots, b_n\}$

Разложим векторы базиса B по векторам базиса A

$$\begin{cases} b_1 = t_{11}a_1 + t_{21}a_2 + \dots + t_{n1}a_n \\ \dots b_n = t_{1n}a_1 + t_{2n}a_2 + \dots + t_{nn}a_n \end{cases}$$

Тогда матрицей перехода от базиса A к базису B называется квадратная матрица

$$T_{A \rightarrow B} = \begin{pmatrix} t_{11} & \dots & t_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ t_{n1} & \dots & t_{nn} \end{pmatrix}, \text{ } i\text{-тый столбец в матрице перехода - это столбец координат } b_i \text{ в } A$$

$$B = A * T_{A \rightarrow B}$$

Пусть вектор $x \in V$ и $x^a = (x_1^a, \dots, x_n^a)^T$ - векторы-столбцы координат x в A и B соответственно. Тогда $x^a = T_{A \rightarrow B} * x^b$

$$e' = e * T_{e \rightarrow e'} \Rightarrow T_{e \rightarrow e'} = e^{-1} * e'$$

$$e^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$T_{e \rightarrow e'} = e^{-1} * e' = \frac{1}{11} \begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ то есть } e'_1 = 2e_1 + 2e_2 + e_3, e'_2 = e_2 + e_3,$$

$$e'_3 = e_1 + e_2 + e_3$$

$$x = -e'_1 + 3e'_2 - e'_3 \Rightarrow x^{e'} = (-1, 3, -1)^T$$

$$x^e = T_{e \rightarrow e'} * x^{e'} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11. Доказать, что пространство является прямой суммой подпространств $L_1 = \langle a_1, a_2 \rangle$, а $L_2 = \langle b_1, b_2 \rangle$ и разложить вектор $x = (0, -2, 2, 0)^T$ на сумму проекций на эти подпространства, где $a_1 = (1, 1, 1, 0)^T$, $a_2 = (1, 1, 0, 1)^T$, $b_1 = (1, 0, 1, 1)^T$, $b_2 = (1, 1, -1, -1)^T$

Определение. Множество $L_1 + L_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_i \in L_i\}$ называется суммой подпространств. Сумма подпространств сама является подпространством.

Определение. Сумма $L_1 + L_2$ линейных подпространств L_1 и L_2 называется прямой, если $L_1 \cap L_2 = \{0\}$.

Обозначение $L_1 \oplus L_2$.

$$\dim(L_1 \oplus L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$$

Сумма L_1 и L_2 является прямой тогда и только тогда, когда $\forall x \in L_1 + L_2$ его представление $x = x_1 + x_2$ ($x_i \in L_i$) единственно.

x_1 называется проекцией x на L_1 вдоль L_2 , x_2 называется проекцией x на L_2 вдоль L_1 .

- 1) Будем доказывать, используя утверждение $\dim(L_1 \oplus L_2) = \dim L_1 + \dim L_2$, то есть докажем, что $\dim(L_1 \cap L_2) = 0$

$$L_1 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\dim L_1 = 2$$

$$L_2 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\dim L_2 = 2$$

$$L_1 \cup L_2 : \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\dim(L_1 \cup L_2) = 4$$

$$4 = 2 + 2 \Rightarrow \dim(L_1 \cup L_2) = \dim L_1 + \dim L_2 \Rightarrow \dim(L_1 \cap L_2) = 0$$

- 2) Алгоритм решения. Строим расширенную матрицу, где выписываем все векторы a_1, a_2, b_1, b_2, x по столбцам, приводим её основную часть к каноническому виду и в последнем столбце будет разложение.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & | & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & | & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -1 & | & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & | & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & | & 4 \end{pmatrix} \rightarrow$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & | & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & | & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow x = -2a_2 + 2b_1$, где $x_1 = -2a_2$ - проекция x на L_1 , $x_2 = 2b_1$ - проекция x на L_2

Проверка. $-2a_2 + 2b_1 = (-2, -2, 0, -2)^T + (2, 0, 2, 2)^T = (0, -2, 2, 0)^T = x$ - верно.

12. В базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ билинейная форма $B(x, y)$ имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу билинейной формы $B(x, y)$ в базисе $e'_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e'_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Определение. Пусть V - линейное пространство над \mathbb{R} , тогда функцию $b : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ называют билинейной формой на линейном пространстве V , если $\forall x, y, z \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняется

$$1) b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta b(y, z)$$

$$2) b(x, \alpha y + \beta z) = \alpha b(x, y) + \beta b(x, z)$$

Определение. Матрица B размера $n \times n$ с элементами $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ называется матрицей билинейной формы в базисе e_1, \dots, e_n . Тогда $b(x, y) = x^T B y$

Пусть U - матрица перехода от базиса e к базису e' , B_e - матрица билинейной формы в базисе e , $B_{e'}$ - матрица билинейной формы в базисе e' , тогда $B_{e'} = U_{e \rightarrow e'}^T B_e U_{e \rightarrow e'}$

В задаче (10) вычисляли матрицу перехода, напомним только формулу

$$e' = e * T_{e \rightarrow e'} \Rightarrow T_{e \rightarrow e'} = e^{-1} * e'$$

$$e^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} - \text{обратите внимание, что матрицы базисов выписываем по столбцам}$$

$$T_{e \rightarrow e'} = e^{-1} * e' = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -10 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0.6 \\ -1 & -0.4 \end{pmatrix}$$

$$B_{e'} = U_{e \rightarrow e'}^T B_e U_{e \rightarrow e'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0.6 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0.6 \\ -1 & -0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0.6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0.6 \\ -1 & -0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1.4 \\ 2.2 & 0.76 \end{pmatrix}$$

13. Исследовать квадратичную форму на положительную или отрицательную определенность в зависимости от параметра: $k = (\alpha - 1)x_1^2 + (2\alpha - 2)x_1x_2 - 2\alpha x_1x_3 + 2\alpha x_2^2 - 2\alpha x_2x_3 + (\alpha - 2)x_3^2$

Определение. Квадратичную форму $Q(x)$ называют положительно определенной, если $\forall x \neq 0 Q(x) > 0$

Определение. Квадратичную форму $Q(x)$ называют отрицательно определенной, если $\forall x \neq 0 Q(x) < 0$

Определение. Квадратичную форму $Q(x)$ называют знакопеременной, если $\exists x \neq y Q(x) < 0 < Q(y)$

Критерий Сильвестра. Квадратная форма положительно определена тогда и только тогда, когда последовательность главных угловых миноров положительна, то есть $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, \dots$

Теорема. Квадратная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки последовательности главных угловых миноров чередуются, начиная с отрицательного, то есть $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, \dots$

Матрица квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha - 1 & -\alpha \\ \alpha - 1 & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

$$\Delta_1 = \alpha - 1$$

$$\Delta_2 = (\alpha - 1)2\alpha - (\alpha - 1)^2 = \alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$$

$$\Delta_3 = (\alpha - 1)(2\alpha)(\alpha - 2) + (-\alpha)(-\alpha)(\alpha - 1) + (-\alpha)(-\alpha)(\alpha - 1) - (-\alpha)(2\alpha)(-\alpha) - (\alpha - 1)(\alpha - 1)(\alpha - 2) - (-\alpha)(-\alpha)(\alpha - 1) = -3\alpha^2 - \alpha + 2 = -3(\alpha + 1)(\alpha - \frac{2}{3})$$

Критические точки: $-1, \frac{2}{3}, 1$. Квадратичная форма отрицательно определена на $(-\infty; -1)$

