Построение жорданова базиса

Общий метод построения жорданова базиса линейного оператора можно найти в задаче 1529 задачника под редакцией И.В. Проскурякова. Проиллюстрируем этот метод для нахождения жорданова базиса матрицы размера 3×3.

Для произвольной 3×3 матрицы (над алгебраически замкнутым полем) возможны 4 вида жордановой формы:

$$\begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 1 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a & 1 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \end{pmatrix},$$

где в последнем варианте $a \neq b$ (а в первом случае числа a, b, c могут не быть различными). В первом случае матрица диагонализируема, то есть жорданов базис состоит из 3 линейно независимых собственных векторов (которые находятся без труда, если известны собственные значения). Рассмотрим остальные случаи.

В задачах опускаются некоторые вычисления. Предполагается, что вы выполните их самостоятельно.

1. (№1098) Найдем жорданов базис для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 3 \\ -2 & -6 & 13 \\ -1 & -4 & 8 \end{pmatrix}.$$

Выпишем характеристический многочлен: $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)^3$. Следовательно, матрица A имеет собственное значение $\lambda = 1$ алгебраической кратности 3.

Введем матрицу $B = A - \lambda E = A - E = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}$. Ясно, что $\operatorname{Rg} B = 2$ (ранг меньше 3, но больше 1).

Отсюда жорданова форма для B имеет вид $J_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислим последовательность матриц:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & -3 & 3 \\ -2 & -7 & 13 \\ -1 & -4 & 7 \end{pmatrix}, \ B^2 = \begin{pmatrix} 3 & 9 & -18 \\ 1 & 3 & -6 \\ 1 & 3 & -6 \end{pmatrix}, \ B^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

При этом $\operatorname{Rg} B = 2 > \operatorname{Rg} B^2 = 1 > \operatorname{Rg} B^3 = 0$ (на этом моменте началась стабилизация — $\operatorname{Rg} B^4, \operatorname{Rg} B^5, \ldots$ равны 0). Значит, $\dim \operatorname{Ker} B = 3 - 2 = 1$ (геом. кратность с.з. $\lambda = 1$), $\dim \operatorname{Ker} B^2 = 3 - 1 = 2$, $\dim \operatorname{Ker} B^3 = 3$, то есть $\operatorname{Ker} B^3 = \mathbb{R}^3$.

Согласно найденной ЖНФ (см. J_B), жорданов базис для B состоит из некомпланарных векторов $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ таких, что $Bv_1 = 0, Bv_2 = v_1, Bv_3 = v_2$. Для их построения достаточно выбрать $v_3 \in \operatorname{Ker} B^3 \setminus \operatorname{Ker} B^2 = \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker} B^2$.

ФСР для ОСЛУ с матрицей $B^2 \sim (1, 3, -6)$ состоит из векторов $(-3, 1, 0)^T, (6, 0, 1)^T$, то есть $\operatorname{Ker} B^2 = \langle (-3,1,0)^T, (6,0,1)^T \rangle$. В этом подпространстве не лежит, например, вектор $e_1 = (1, 0, 0)^T$. Рассмотрим его в качестве v_3 (присоединенный вектор):

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \ v_2 = Bv_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \ v_1 = Bv_2 = B^2 v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Итак, жорданов базис для B состоит из векторов v_1, v_2, v_3, матрица перехода $C = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. Имеем: $C^{-1}BC = J_B$.

Остается заметить, что этот же базис является жордановым базисом для A: $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = J_A$.

2. (№1090) Найдем жорданов базис для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -4 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Выпишем характеристический многочлен: $\chi_A(\lambda) = (2-\lambda)^3$. Следовательно, матрица A имеет собственное значение $\lambda = 2$ алгебраической кратности 3.

Введем матрицу $B = A - \lambda E = A - 2E = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Ясно, что $\operatorname{Rg} B = 1$.

Отсюда жорданова форма для B имеет вид $J_B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Вычислим последовательность матриц:

$$B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \ B^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = O.$$

При этом $\operatorname{Rg} B = 1 > \operatorname{Rg} B^2 = 0$ (на этом моменте началась стабилизация — $\operatorname{Rg} B^3, \operatorname{Rg} B^4, \ldots$ равны 0).
Значит, $\dim \operatorname{Ker} B = 3 - 1 = 2$ (геом. кратность с.з. $\lambda = 2$), $\dim \operatorname{Ker} B^2 = 3$, то есть $\operatorname{Ker} B^2 = \mathbb{R}^3$.

Согласно найденной ЖНФ (см. J_B), жорданов базис для B состоит из некомпланарных векторов $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ таких, что $Bv_1 = 0, Bv_2 = v_1, Bv_3 = 0$. Для их построения достаточно выбрать $v_2 \in \operatorname{Ker} B^2 \setminus \operatorname{Ker} B = \mathbb{R}^3 \setminus \operatorname{Ker} B$, а затем дополнить $v_1 = Bv_2$ до базиса $\operatorname{Ker} B$.

ФСР для ОСЛУ с матрицей $B \sim (-2, 1, 0)$ состоит из векторов $(1,2,0)^T, (0,0,1)^T$, то есть $\operatorname{Ker} B = \langle (1,2,0)^T, (0,0,1)^T \rangle$. В этом подпространстве не лежит, например, вектор $e_1 = (1,0,0)^T$. Рассмотрим его в качестве v_2 (присоединенный вектор):

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_1 = Bv_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Дополним v_1 ($\in \operatorname{Ker} B$) до базиса $\operatorname{Ker} B$ (любым неколлинеарным ему из $(1,2,0)^T, (0,0,1)^T$), например, вектором $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Итак, жорданов базис для B состоит из векторов v_1, v_2, v_3, матрица перехода $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 \\ -4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Имеем: $C^{-1}BC = J_B$.

Остается заметить, что этот же базис является жордановым базисом для A: $C^{-1}AC = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} = J_A$.

3. (№1096) Найдем жорданов базис для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}.$$

Выпишем характеристический многочлен: $\chi_A(\lambda) = (1-\lambda)\lambda^2$ (можно также не выписывать характеристический многочлен, поскольку с.з. 0 и 1 можно угадать: сумма первой и третьей строк равна удвоенной второй и сумма элементов в каждой строке равна 1 соответственно). Следовательно, матрица A имеет собственное значение $\lambda_0 = 0$ алгебраической кратности 2 и собственное значение $\lambda_1 = 1$ кратности 1 (алгебраической и геометрической). Жорданов базис, тем самым, состоит из 2 частей: двух векторов для с.з. 0 и одного вектора (собственного) для с.з. 1.

Введем матрицу $B_0 = A - \lambda_0 E = A$. Ясно, что $\operatorname{Rg} B_0 = 2$ (ранг меньше 3, но больше 1).

Отсюда жорданова форма для A имеет вид $J_A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Вычислим последовательность матриц:

$$B_0 = \begin{pmatrix} 4 & -5 & 2 \\ 5 & -7 & 3 \\ 6 & -9 & 4 \end{pmatrix}, \; B_0^2 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix}, \; B_0^3 = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \\ 3 & -3 & 1 \end{pmatrix} = B_0^2.$$

При этом $\operatorname{Rg} B_0 = 2 > \operatorname{Rg} B_0^2 = 1 = \operatorname{Rg} B^3$ (на этом моменте началась стабилизация — $\operatorname{Rg} B^4, \operatorname{Rg} B^5, \ldots$ равны 1).
Значит, $\dim \operatorname{Ker} B_0 = 3 - 2 = 1$ (геом. кратность с.з. $\lambda_0 = 0$), $\dim \operatorname{Ker} B_0^2 = 3 - 1 = 2 = \dim \operatorname{Ker} B_0^3$.

Согласно найденной ЖНФ (см. J_A), жорданов базис для B_0 состоит из неколлинеарных векторов $v_1, v_2, v_3 \in \mathbb{R}^3$ таких, что $B_0 v_1 = 0, B_0 v_2 = v_1, Av_3 = v_3$. Для построения v_1, v_2 достаточно выбрать $v_2 \in \operatorname{Ker} B_0^2 \setminus \operatorname{Ker} B_0$.

ФСР для ОСЛУ с матрицей $B_0^2 \sim (3, -3, 1)$ состоит из векторов $(1,1,0)^T, (-1,0,3)^T$, то есть $\operatorname{Ker} B_0^2 = \langle (1,1,0)^T, (-1,0,3)^T \rangle$. Из этой линейной оболочки можно взять любой вектор, не лежащий в $\operatorname{Ker} B_0$ (то есть такой, что после применения B_0 к нему не получается 0), например,

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; v_1 = B_0 v_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Для построения v_3 нужно найти собственный вектор для A с собственным значением $\lambda_1 = 1$.

$B_1 = \begin{pmatrix} 3 & -5 & 2 \\ 5 & -8 & 3 \\ 6 & -9 & 3 \end{pmatrix}$, ФСР: $(1,1,1)^T = v_3$ — собственный вектор.

Итак, жорданов базис для A состоит из векторов v_1, v_2, v_3, матрица перехода $C = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Имеем: $C^{-1}AC = J_A$.

Домашнее задание

30.04.21, группа БПИ209

1. Прочитать и понять условие задачи №1529 задачника под редакцией И.В. Проскурякова — формулировки общего метода построения жорданового базиса.

2. Прочитать и понять вышеприведенный разбор трех задач на построение жорданова базиса.

3. Найдите жорданов базис (и ЖНФ) для 3×3 матриц из следующих задач: 1092, 1100, 1530, а также матриц из нижеприведенного скриншота. После выполнения каждой задачи выполните проверку, используя соотношение $C^{-1}AC = J_A$.

d). $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ -3 & -1 & 0 \end{pmatrix}$. e). $\begin{pmatrix} -5 & 1 & 5 \\ 3 & -2 & -4 \\ -4 & 1 & 4 \end{pmatrix}$. f). $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 1 \\ 2 & -2 & 1 \\ 2 & -3 & 2 \end{pmatrix}$.

4. Используя общий метод (см. задачу 1529) или соображения, аналогичные рассмотренным на семинаре, найдите жорданов базис (и ЖНФ) для 4×4 матриц из следующих задач: 1105, 1534, 1535.

5. Используя ЖНФ, вычислите A^{100}, если

$$A = \begin{pmatrix} 10 & 1 & 5 \\ 13 & 2 & 7 \\ -20 & -2 & -10 \end{pmatrix}.$$

6. Используя свойства минимального многочлена матрицы, а также определение инвариантного подпространства, решите задачи: 1134, 41.29, 41.30, 40.27