1.

(а) Найти собственные векторы и собственные значения линейного оператора, заданного в некотором базисе матрицей $A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 12 & -8 \end{pmatrix}$. Можно ли привести ее к диагональному виду, перейдя к подходящему базису?

(б) Вычислить матрицу $A^n, n \in N$.

Теория. Число λ называется *собственным числом* или *собственным значением* линейного оператора $A : V \to V$, если существует вектор $v \in V, v \neq 0$, такой, что $Av = \lambda v$. При этом вектор v называется собственным вектором, отвечающим за собственное значение λ.

Жорданова клетка размера $m \times m$ - это матрица вида

$$J_m(\lambda_i) = \begin{pmatrix} \lambda_i & 1 & \cdots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \lambda_i & 1 \\ & & 0 & \lambda_i \end{pmatrix}$$

Матрица M является *жордановой нормальной формой*, если она имеет клеточно-диагональный вид, в котором на диагонали располагаются жордановы клетки:

$$\begin{pmatrix} J_{k_1}(\lambda_1) & & & & \\ & J_{k_2}(\lambda_2) & & 0 & \\ & & J_{k_3}(\lambda_3) & & \\ & 0 & & ... & \\ & & & & J_{k_p}(\lambda_p) \end{pmatrix}$$

где $J_i(\lambda_i)$ - жорданова клетка размерности k_i, отвечающая собственному значению λ_i. Пример ЖНФ:

$$\left(\begin{array}{ccc|c|c|cc} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{array}\right)$$

$\forall A \in Mn(F)$ приводится заменой базиса к ЖНФ над алгебраически замкнутым полем (например $\mathbb{C}$). Иными словами $\exists C \in Mn(F)$ и $detC \neq 0$, что $A = CJC^{-1}$, где J - ЖНФ.

Матрицы линейного оператора приводится к *диагональному виду* $\Leftrightarrow$ все корни характеристического многочлена являются собственными значениями оператора и геометрическая кратность каждого собственного значения равна его алгебраической кратности.

Решение.

1) Выпишем и решим характеристическое уравнение $\chi_A(\lambda) = det(A - \lambda E)$

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 4-\lambda & -3 \\ 12 & -8-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(-8-\lambda) + 36 = \lambda^2 + 4\lambda + 4 = (\lambda+2)^2$$

$\lambda = -2$, алгебраическая кратность *(кратность λ как корня характеристического уравнения)* а.к.$= 2$

2) Подставим полученное значение

$$A - \lambda E = A + 2E = \begin{pmatrix} 6 & -3 \\ 12 & -6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2 = e_1$$

3) Получили 1 собственный вектор $\rightarrow$ геометрическая кратность г.к. $= 1$.
г.к. $\neq$ а.к., то есть матрицу **нельзя привести к диагональному виду**.
4) Приведем к ЖНФ

$$A = TJT^{-1}$$
$$A^n = (TJT^{-1})^n = TJ^nT^{-1}$$

$$\begin{pmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & n \cdot \lambda^{n-1} \\ 0 & \lambda^n \end{pmatrix}$$

Уже найдено $J = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -2 \end{pmatrix}$. Найдем T. Для этого необходимо найти второй базисный вектор - *присоединенный*.

Рассмотрим жорданову клетку размером k с собственным значением λ. Такой клетке соответствует k базисных векторов $v_1, v_2, ..., v_k$. Вектор v_1 среди них является *собственным* и удовлетворяет уравнению $Av_1 = \lambda v_1 \Rightarrow (A - \lambda E)v_1 = 0$.

Вектор v_2 определяется из уравнения $(A - \lambda E)v_2 = v_1$ и называется присоединенным вектором первого порядка. Аналогично находятся другие присоединенные векторы более высокого порядка:

$$(A - \lambda E)v_k = v_{k-1}$$

Воспользуемся этим фактом и рассмотрим $(A + 2E)e_1$:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 1 \\ 12 & -6 & 2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 6 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cc|c} 1 & -1/2 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$x_1 = \frac{1}{2}x_2 + \frac{1}{6}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$$

$$\boxed{e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 1/6 \\ 0 \end{pmatrix}}$$

Мы получили жорданов базис. Значит, матрица T примет вид:

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

Теперь можем найти A^n:

$$A^n = TJ^nT^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)^n & n\cdot(-2)^{n-1} \\ 0 & (-2)^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1/6 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \dots$$

(дальше тривиальное умножение матриц, лень считать).

Ответ: (а) $\lambda = -2$, а.к.$= 2$, г.к.$= 1$. С.в. $e_1 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$. Диагонализировать нельзя. (б) досчитайте сами :)

2.

Найти матрицу линейного оператора, переводящего векторы $a_1 = (2,5)^T, a_2 = (1,3)^T$ соответственно в векторы $b_1 = (7,-4)^T, b_2 = (2,-1)^T$ в базисе, в котором даны координаты векторов.

Теория. Матрица оператора Φ, переводящего векторы a_1, a_2 в векторы b_1, b_2, удовлетворяет уравнению:

$$\Phi \cdot A = B$$

$$\Phi = B \cdot A^{-1}$$

где A, B - матрицы, составленные из соответствующих векторов.

Решение.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi = B \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 7 & 2 \\ -4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

Ответ. $\Phi = \begin{pmatrix} 11 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$

3.

Можно ли найти базис из собственных векторов для матрицы A? В случае положительного ответа найти этот базис, в случае отрицательного, объяснить, почему это невозможно.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

Теория. Собственный базис матрицы A существует, если $A = A^T$.

Решение. Матрица симметрична $\Rightarrow$ базис существует.

Найдем собственные значения:

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -1 & 1 \\ -1 & 2-\lambda & -1 \\ 1 & -1 & 2-\lambda \end{vmatrix} = \dots = (2-\lambda)^3 - 3(2-\lambda) + 2 = t^3 - 3t + 2$$

$$t^3 - 3t + 2 = 0$$

$$(t-1)^2(t+2) = 0$$

$$t_1 = t_2 = 1, t_3 = -2 \Rightarrow \boxed{\lambda_1 = \lambda_2 = 2 - t_1 = 1, \lambda_3 = 2 - t_3 = 4}$$

Получили два собственных значения: а.к. λ_1 равно 2, а.к. λ_3 равно 1.
Рассмотрим $A - \lambda_1 E$ и $A - \lambda_3 E$.

1) $A - \lambda_1 E = A - E = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$x_1 = x_2 - x_3$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2 + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Получили первые два собственных вектора:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) $A - \lambda_3 E = A - 4E = \begin{pmatrix} -2 & -1 & 1 \\ -1 & -2 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ -1 & -2 & -1 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & -3 & -3 \\ 0 & -3 & -3 \end{pmatrix} \sim$
$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3 \Rightarrow e_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Таким образом, e_1, e_2, e_3 - базис из собственных векторов.

4.

Линейный оператор переводит вектор $a_1 = (-1, 0)^T$ в вектор $b_1 = (5, 5)^T$, а вектор $a_2 = (1, 1)^T$ в вектор $b_2 = (-2, -3)^T$. 1) В какое множество перейдет прямая, заданная уравнением $2x_1 - x_2 = -2$? 2) Какое множество переходит в эту прямую? 3) Написать уравнения тех прямых, которые переходят сами в себя.

1) Найдем линейный оператор Φ.

$$\Phi = BA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Действие на прямую определяется действием на ее направляющий вектор и на радиус-вектор точки прямой.

Найдем направляющий вектор прямой. Для этого запишем каноническое уравнение:

$$2x_1 = x_2 - 2 \Leftrightarrow \frac{x_1}{1} = \frac{x_2 - 2}{2}$$

Тогда $\vec{s} = (1, 2)^T$
В качестве точки возьмем $M(1, 4)$.
Найдем соответствующие образы:

$$\Phi\vec{s} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\Phi\vec{r} = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ -5 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Таким образом, прямая перейдет в прямую

$$\boxed{\frac{x_1 - 7}{1} = \frac{x_2 - 3}{-1}}$$

.

3) Проведем обратные действия. Пусть направляющий вектор неизвестной прямой $\vec{s}_1$, радиус вектор ее точки - $\vec{r}_1$. Тогда нам известно, что

$$\begin{cases} \Phi\vec{s}_1 = \vec{s} \\ \Phi\vec{r}_1 = \vec{r} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \vec{s}_1 = \Phi^{-1}\vec{s} \\ \vec{r}_1 = \Phi^{-1}\vec{r} \end{cases}$$

$$\Phi^{-1} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix}$$

Тогда можем найти каноническое уравнение искомой прямой:

$$\vec{s}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/5 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{r}_1 = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\frac{x_1 + 2}{-4/5} = \frac{x_2 + 3}{-1}}$$

4) Для ответа на последний вопрос вспомним определение собственного значения:

Число λ называется собственным значением линейного оператора $A : V \to V$, если существует вектор $v \in V, v \neq 0$, такой, что $Av = \lambda v$. Предположим, что $\lambda = 1$: тогда $A\vec{v} = \vec{v}$, что нам и требуется.

То есть условию будут отвечать все такие прямые, у которых направляющий вектор и радиус-вектор точки будут соответствовать собственным векторам линейного оператора Φ для собственного значения $\lambda = 1$.

Найдем собственные значения нашего линейного оператора.

$$|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} -5 - \lambda & 3 \\ -5 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 3\lambda + 5$$

Можно заметить, что у полученного характеристического многочлена нет действительных корней. То есть прямых, которые переходят сами в себя под действием заданного линейного оператора, не существует.

5.

Найти базис ядра и базис образа линейного отображения $\phi : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{R}^3$, заданного матрицей

$$A_\phi = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Является ли отображение сюръективным?

Теория. *Ядром* линейного отображения $\phi : A \to B$ называют множество:

$$Ker_\phi = \{x \in A | \phi(x) = 0\}.$$

Образом линейного отображения называют множество:

$$Im_\phi = \{y \in B | \exists x \in A : \phi(x) = y\}.$$

Пусть линейный оператор ϕ задан в некотором базисе матрицей A. Чтобы **найти базис подпространства** Im_ϕ, надо привести к ступенчатому виду матрицу A^T. Ненулевые строки полученной матрицы будут базисом пространства Im_ϕ, а число этих строк — его размерностью.

Чтобы **найти базис подпространства** Ker_ϕ, надо найти фундаментальную систему решений однородной системы линейных уравнений, основная матрица которой есть A. Она и будет базисом пространства Ker_ϕ, а число векторов в ней — его размерностью.

Линейное отображение $\phi : A \to B$:

1) инъективно тогда и только тогда, когда $Ker_\phi = 0$;

2) сюръективно тогда и только тогда, когда $Im_\phi = B$;

3) биективно тогда и только тогда, когда $Ker_\phi = 0$ и $Im_\phi = B$

Решение.

1) Найдем базис образа линейного отображения, приведя матрицу A^T к ступенчатому виду.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ -1 & 9 & 6 \\ 2 & -14 & -9 \\ 4 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 12 & 9 \\ 0 & -20 & -15 \\ 0 & -10 & -11 \\ 0 & 7 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 7 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 3 \\ 0 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Получили, что размерность пространства $dim(Im_\phi) = 3$, базис пространства

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}, e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

2) Найдем базис ядра линейного отображения, решив СЛАУ с матрицей A.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 4 & -2 \\ 3 & 9 & -14 & 2 & 1 \\ 3 & 6 & -9 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/3 & 0 & 1/6 \\ 0 & 1 & -5/3 & 0 & 1/6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

Перейдем к системе уравнений:

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \\ x_2 = \frac{5}{3}x_3 - \frac{1}{6}x_5 \\ x_4 = \frac{1}{2}x_5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 5/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$$

Получили, что размерность пространства $dim(Ker_\phi) = 2$, базис пространства ядра:

$$f_1 = \begin{pmatrix} -1/3 \\ 5/3 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2 = \begin{pmatrix} -1/6 \\ -1/6 \\ 0 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

3) Так как $Im_\phi = \mathbb{R}^3$ (а именно - их размерности совпадают), можно утверждать, что отображение сюръективно.

6.

Представить невырожденную матрицу $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ в виде произведения ортогональной матрицы Q на верхнетреугольную матрицу R.

Теория. Для решения задачи (а именно для нахождения ортогональной матрицы Q) нам потребуется использовать *процесс ортогонализации Грама-Шмидта*. После этого матрицу R будет легко найти из факта

$$A = QR$$

Пусть имеется система линейно независимых векторов $(a_1, ..., a_n)$. Определим оператор проекции следующим образом: $proj_b a = \frac{(a,b)}{(b,b)} b$. Этот оператор проецирует вектор a коллинеарно вектору b.

Классический процесс Грама-Шмидта выполняется следующим образом:

$$b_1 = a_1$$

$$b_2 = a_2 - proj_{b_1} a_2$$

$$\vdots$$

$$b_n = a_n - \sum_{j=1}^{n-1} proj_{b_j} a_n$$

В результате получим систему ортогональных векторов $(b_1, ..., b_n)$

Решение.

Применим процесс ортогонализации Грама-Шмидта к векторам $a_1 = (2, 2, -1)^T$, $a_2 = (0, 4, 2)^T$, $a_3 = (1, -1, 3)^T$.

$$b_1 = a_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$b_2 = a_2 - \frac{(a_2, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4/3 \\ 8/3 \\ 8/3 \end{pmatrix}$$

$$b_3 = a_3 - \frac{(a_3, b_1)}{(b_1, b_1)} b_1 - \frac{(a_3, b_2)}{(b_2, b_2)} b_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -4/3 \\ 8/3 \\ 8/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Получили матрицу

$$Q = \boxed{\begin{pmatrix} 2 & -4/3 & 2 \\ 2 & 8/3 & -1 \\ -1 & 8/3 & 2 \end{pmatrix}}$$

Теперь выразим матрицу R из вышеуказанного равенства:

$$R = Q^{-1}A = \begin{pmatrix} 2 & -4/3 & 2 \\ 2 & 8/3 & -1 \\ -1 & 8/3 & 2 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} 1 & 2/3 & -1/3 \\ 0 & 1 & 1/4 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

7.

Постройте сингулярное разложение для матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix}$$

Теория. Для любой матрицы $A \in M_{m\times n}$ существуют ортогональные матрицы $V \in M_m$ и $W \in M_n$ и диагональная матрица $\Sigma \in M_{m\times n}$, такие что

$$\boxed{A = V\Sigma W^T}, \Sigma = \left(\begin{array}{ccc|ccc} \sigma_1 & & & & & \\ & \ddots & & & 0 & \\ & & \sigma_r & & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 0 \end{array}\right), \sigma_1 \geqslant \sigma_2 \geqslant ... \geqslant \sigma_r \geqslant 0$$

Столбцы матрицы V являются собственными векторами матрицы AA^T. Столбцы матрицы W являются собственными векторами матрицы A^TA. Числа $\sigma_1, ..., \sigma_r$ - расположенные в порядке неубывания арифметические квадратные корни из ненулевых собственных чисел матрицы AA^T.

Решение. Матрица A имеет размерность 4×3, т.е. мы придем к разложению

$$A_{4\times 3} = V_{4\times 4}\Sigma_{4\times 3}W^T_{3\times 3}$$

Меньшую размерность имеет матрица W, поэтому рассмотрим сперва матрицу A^TA.

$$A^TA = \begin{pmatrix} 8 & 8 & 4 & -4 \\ 5 & 5 & 7 & -7 \\ 1 & 1 & 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 160 & 136 & 56 \\ 136 & 148 & 80 \\ 56 & 80 & 52 \end{pmatrix}$$

Найдем собственные числа A^TA:

$$|A^TA - \lambda E| = \begin{vmatrix} 160-\lambda & 136 & 56 \\ 136 & 148-\lambda & 80 \\ 56 & 80 & 52-\lambda \end{vmatrix} = -11664\lambda + 360\lambda^2 - \lambda^3$$

$$\lambda_1 = 324, \lambda_2 = 36, \lambda_3 = 0$$

Сингулярные числа равны соответствено $\sigma_1 = 18, \sigma_2 = 6, \sigma_3 = 0$.
Тогда можем выписать матрицу Σ:

$$\boxed{\Sigma = \begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}$$

Найдем собственные вектора, соответствующие полученным собственным значениям.
1) $\lambda_1 = 324$

$$A^T A - 324E = \begin{pmatrix} -164 & 136 & 56 \\ 136 & -176 & 80 \\ 56 & 80 & -272 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -41 & 34 & 14 \\ 17 & -22 & 10 \\ 7 & 10 & -34 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = 2x_3 \\ x_2 = 2x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

2) $\lambda_2 = 36$

$$A^T A - 36E = \begin{pmatrix} 124 & 136 & 56 \\ 136 & 112 & 80 \\ 56 & 80 & 16 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 31 & 34 & 14 \\ 17 & 14 & 10 \\ 7 & 10 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

3) $\lambda_3 = 0$

$$A^T A - 36E = \begin{pmatrix} 160 & 136 & 56 \\ 136 & 148 & 80 \\ 56 & 80 & 52 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 20 & 17 & 7 \\ 34 & 37 & 20 \\ 14 & 20 & 13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1/2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

Нормируем полученные векторы:

$$w_1 = \begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, w_3 = \begin{pmatrix} 1/3 \\ -2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

Получили матрицу W:

$$\boxed{W = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}}$$

Для нахождения векторов, составляющих матрицу V, воспользуемся формулой

$$v_i = \frac{Aw_i}{\sigma_i}$$

Тогда получим:

$$v_1 = \frac{1}{18}\begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2/3 \\ 2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \frac{1}{6}\begin{pmatrix} 8 & 5 & 1 \\ 8 & 5 & 1 \\ 4 & 7 & 5 \\ -4 & -7 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2/3 \\ 1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Так как $\sigma_3 = 0$, подберем два оставшихся вектора так, чтобы они оказались ортогональны и линейно независимы относительно уже найденных. Для этого рассмотрим следующую систему. Линейно-независимые векторы, удовлетворяющие этой системе, подойдут нам в качестве решения.

$$\begin{cases} (v_1, x) = 0 \\ (v_2, x) = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -x_2 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$$

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}, v_4 = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ -1/2 \\ -1/2 \end{pmatrix}$$

Получили матрицу V:

$$\boxed{V = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}}$$

Таким образом, итоговое разложение:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 18 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -2 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 2 \end{pmatrix}$$

Можно проверить, что оно действительно дает в результате матрицу A.

8.

Пусть в некотором ортонормированном базисе трехмерного евклидова пространства заданы векторы $e_1 = (0,1,1)^T, e_2 = (-1,-1,1)^T, e_3 = (1,0,1)^T$. Пусть оператор f задан матрицей

$$A_f = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 0 \\ -3 & 2 & 7 \end{pmatrix}$$

в базисе e_1, e_2, e_3. Найти матрицу A_{f^*} сопряженного оператора f^* в том же базисе.

Теория. Линейный оператор A^* называется *сопряженным* к линейному оператору A в евклидовом пространстве, если $\forall x, y \in \mathbb{E}$ верно, что $(Ax, y) = (x, A^*y)$.

Матрицей Грама системы векторов $(e_1, ..., e_n)$ называется квадратная матрица, состоящая из всевозможных скалярных произведений этих векторов:

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & \cdots & (e_1,e_n) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & \cdots & (e_2,e_n) \\ \vdots & & & \\ (e_n,e_1) & (e_n,e_2) & \cdots & (e_n,e_n) \end{pmatrix}$$

Найти матрицу сопряженного оператора в произвольном базисе можно с помощью матрицы Грама:

$$A^* = \Gamma^{-1}A^T\Gamma$$

.

Решение.

1) Найдем матрицу Грама для заданного базиса.

$$\Gamma = \begin{pmatrix} (e_1,e_1) & (e_1,e_2) & (e_1,e_3) \\ (e_2,e_1) & (e_2,e_2) & (e_2,e_3) \\ (e_3,e_1) & (e_3,e_2) & (e_3,e_3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

2) Найдем обратную матрицу к Γ:

$$\Gamma^{-1} = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

3) Подставим полученные значения в формулу

$$A^* = \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 1 & 5 & 2 \\ 1 & 0 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} = \boxed{\begin{pmatrix} -1 & 2 & -7 \\ 4/3 & 5 & 5/3 \\ 5 & -1 & 11 \end{pmatrix}}$$

9.

Привести квадратичную форму $k = x_1^2 - 6x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2^2 + 2x_2x_3 + 5x_3^2$ к каноническому виду посредством ортогональной замены координат. Определить ранг и индексы инерции. Указать соответствующее линейное преобразование.

Теория. *Квадратичной формой* называют однородный многочлен второй степени от n переменных:

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}x_i^2 + 2\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n} x_ix_j, a_{ij} \in \mathbb{R}$$

Квадратичную форму $Q(x) = \alpha_1x_1^2 + ... + \alpha_nx_n^2, \alpha_i \in \mathbb{R}, i = \overline{1,n}$ называют квадратичной формой *канонического вида*. Если $\alpha_i \in \{1, -1, 0\}$, то канонический вид называется *нормальным*.

Положительный индекс инерции - это количество положительных коэффициентов λ_i у квадратичной формы канонического вида. Аналогично - отрицательный индекс инерции.

Для приведения квадратичной формы к каноническому виду методом *ортогональных преобразований* необходимо найти собственные значения матрицы квадратичной формы - они будут коэффициентами канонического вида. Матрица соответствующего линейного преобразования образована ортонормированными собственными векторами.

Решение.
Матрица квадратичной формы имеет вид

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -1 \\ -3 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 5 \end{pmatrix}$$

1) Найдем собственные значения матрицы квадратичной формы.

$$|Q - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & -3 & -1 \\ -3 & 1-\lambda & 1 \\ -1 & 1 & 5-\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + 7\lambda^2 - 36$$

Собственные значения равны $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 3, \lambda_3 = -2$. Канонический вид квадратичной формы $\boxed{Q(x) = 6x_1^2 + 3x_2^2 - 2x_3^2}$.

Ранг квадратичной матрицы $Rg = 3$, положительный индекс инерции 2, отрицательный 1.

2) Найдем собственные векторы.

$\lambda_1 = 6$:

$$Q - 6E = \begin{pmatrix} -5 & -3 & -1 \\ -3 & -5 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & -1/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{1}{2}x_3 \\ x_2 = \frac{1}{2}x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1/2 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

После нормализации получим вектор:

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} \\ 1/\sqrt{6} \\ 2/\sqrt{6} \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = 3$:

$$Q - 3E = \begin{pmatrix} -2 & -3 & -1 \\ -3 & -2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = -x_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} x_3$$

После нормализации получим вектор:

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} \\ 1/\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$\lambda_2 = -2$:

$$Q + 2E = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -1 \\ -3 & 3 & 1 \\ -1 & 1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_2$$

После нормализации получим вектор:

$$v_3 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

Получили матрицу соответствующего ортогонального преобразования:

$$A = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{6} & -1/\sqrt{3} & 1/\sqrt{2} \\ 2/\sqrt{6} & 1/\sqrt{3} & 0 \end{pmatrix}$$

10.

Уравнение $5x^2 + 2y^2 + 4xy + 4\sqrt{5}x + 4\sqrt{5}y - 14 = 0$ линии второго порядка на плоскости привести к каноническому виду с помощью ортогонального преобразования и сдвига, указав:

а) одно из преобразований перехода от заданной системы координат к канонической системе координат;

б) канонический вид уравнения линии;

в) определить тип кривой. На плоскости построить каноническую систему координат, в которой схематично изобразить кривую.

Теория. Вся теория по кривым второго порядка вроде есть в присланной презе, так что переписывать ее не буду. Очень хороший разбор есть вот здесь:

http://mathmod.bmstu.ru/Docs/Eduwork/la_fnp/LA-07.pdf

Решение. 1) Квадратичная форма кривой имеет вид $Q(x) = 5x^2+2y^2+4xy$, ее матрица $A = \begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$. Чтобы найти *ортогональное преобразование*, приводящее эту квадратичную форму к каноническому виду, выпишем характеристическое уравнение матрицы A:

$$A - \lambda E = \begin{vmatrix} 5-\lambda & 2 \\ 2 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda - 6)$$

Таким образом, собственные значения матрицы A равны $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = 6$.Стандартным образом найдем собственные вектора:

$$A - 6E = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$$

$$A - E = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \end{pmatrix} x_2$$

Нормируем полученные вектора:

$$v_1 = \begin{pmatrix} 2/\sqrt{5} \\ 1/\sqrt{5} \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{5} \\ 2/\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

Получили матрицу ортогонального преобразования:

$$S = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Этому преобразованию соответствует линейная замена переменных вида

$$\begin{cases} x = \frac{2}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}y_1 \\ y = \frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1 \end{cases}$$

2) Подставим полученную замену в данное в условии уравнение кривой.

$$5(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}y_1)^2 + 2(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1)^2 + 4(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}y_1)(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1) + 4\sqrt{5}(\frac{2}{\sqrt{5}}x_1 - \frac{1}{\sqrt{5}}y_1) +$$

$$+4\sqrt{5}(\frac{1}{\sqrt{5}}x_1 + \frac{2}{\sqrt{5}}y_1) - 14 = 0$$

$$6x_1^2 + y_1^2 + 12x_1 + 4y_1 - 14 = 0$$

Выделяем по каждой переменной полный квадрат:

$$6(x_1+1)^2 + (y_1+2)^2 = 24$$

$$\frac{(x_1+1)^2}{4} + \frac{(y_1+2)^2}{24} = 1$$

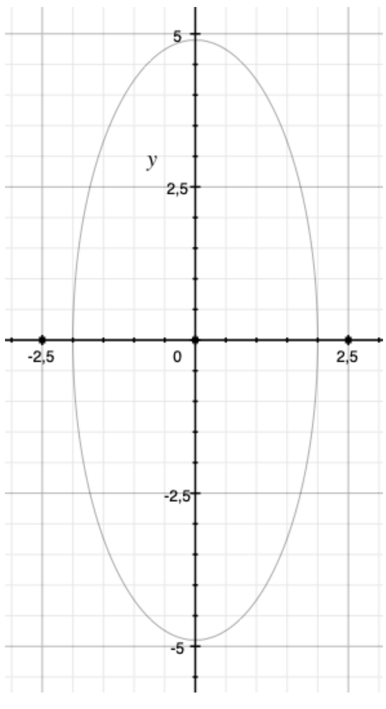
Параллельный перенос системы координат:

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 1 \\ y_2 = y_1 + 2 \end{cases}$$

Таким образом мы можем записать каноническое уравнение нашей кривой:

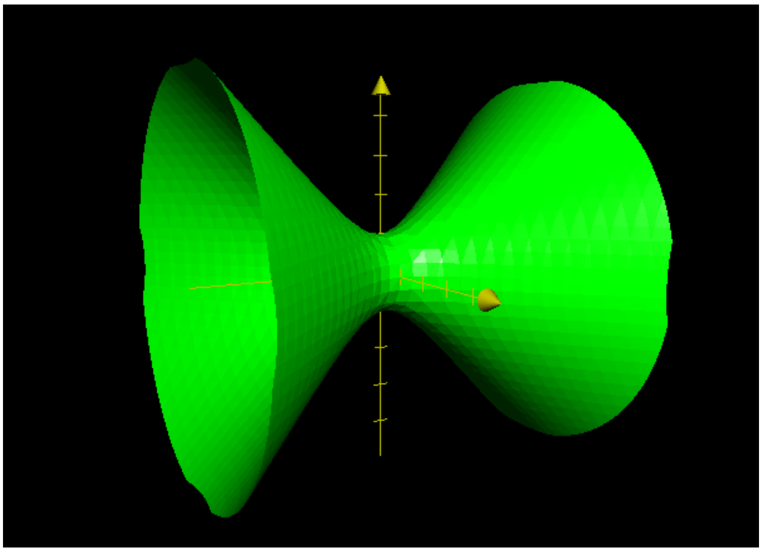
$$\boxed{\frac{x_2^2}{4} + \frac{y_2^2}{24} = 1}$$

Это уравнение соответствует *эллипсу* с параметрами $a = 2, b = \sqrt{24} = 2\sqrt{6}$
3) Эллипс, проходящий через точки $(-2,0), (2,0), (0,2\sqrt{6}), (0,-2\sqrt{6})$.



11.

Определить тип поверхности второго порядка, назвать ее и сделать эскиз:
а) $x^2 + z^2 - y^2 = 1$
б) $y^2 = -2x$
Решение.
а) Однополостный гиперболоид



б) Параболический цилиндр