Разбор задач домашнего задания по алгебре на 19.02 для группы БПИ209
3 модуль
Автор: vk.com/yourkumir

60.45 б) Сколько элементов: порядка 2, 4 и 5 в группе $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5$?

Данный номер, но пункт а, мы разобрали в предыдущем домашнем задании. Мы нашли порядок всех элементов для наглядности устройства прямой суммы групп и применения утверждения 60.8 о том, что
1) прямой порядок произведения конечных групп равен произведению порядков сомножителей
2) порядок элемента прямого произведения конечных групп равен НОК порядков компонент.

Сейчас мы тоже воспользуемся данным утверждением, но не будем выписывать все элементы (их $2*4*4*5 = 160$, пожалейте себя и ассистента), поэтому используем комбинаторику на порядках элементов в группе.

Выпишем сами порядки, не забывайте про формулу $ord(x) = n \Rightarrow ord(kx) = \dfrac{n}{\text{НОД}(n,k)}$:
$\mathbb{Z}_2$: $ord(0) = 1$, $ord(1) = 2$
$\mathbb{Z}_4$: $ord(0) = 1$, $ord(1) = 4$, $ord(2) = 2$, $ord(3) = 4$
$\mathbb{Z}_4$: $ord(0) = 1$, $ord(1) = 4$, $ord(2) = 2$, $ord(3) = 4$
$\mathbb{Z}_5$: $ord(0) = 1$, $ord(1) = 5$, $ord(2) = 5$, $ord(3) = 5$, $ord(4) = 5$

Найдём количество элементов порядка 2. Чтобы НОК порядков был равен 2, то порядки должны быть равны 1 или 2 и хотя бы один порядок равен 2, то есть НОК$(1, 1, 1, 1)$ нам не подходит.
Тогда таких элементов: $2 * 2 * 2 * 1 - 1 = 7$

Найдём количество элементов порядка 4. Чтобы НОК порядков был равен 4, то порядки должны быть равны 1, 2, 4 и хотя бы один порядок равен 4.
Тогда таких элементов: $2 * (4 * 4 - 4) * 1 = 24$
Примечание. -4, потому что нам не подходят в паре $\mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_4$ такие порядки, как $1-1$, $1-2$, $2-1$, $2-2$

Найдём количество элементов порядка 5. Чтобы НОК порядков был равен 5, то порядки должны быть равны 1 или 5 и хотя бы один порядок равен 5, то есть НОК$(1, 1, 1, 1)$ нам не подходит.
Тогда таких элементов: $1 * 1 * 1 * 5 - 1 = 4$

60.42 в), г) Изоморфны ли группы
в) $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36}$ и $\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{24}$
г) $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{10}$ и $\mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{10}$?

в) $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{36} = (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3) \oplus (\mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9) = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_9$
$\mathbb{Z}_9 \oplus \mathbb{Z}_{24} = \mathbb{Z}_9 \oplus (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_8) = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_8 \oplus \mathbb{Z}_9$
Чтобы выяснить изоморфны эти группы или нет, достаточно проверить на изоморфность $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ и $\mathbb{Z}_8$
По утверждению 60.4 (его доказательство есть в прошлом домашнем задании) прямая сумма циклических групп $Z_m \oplus Z_n$ является циклической группой тогда и только тогда, когда наибольший общий делитель m и n равен 1.
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_4$ не является циклической по данному утверждению, а $\mathbb{Z}_8$ - это циклическая группа, то есть они не изоморфны.

г) $\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}_{10} \oplus \mathbb{Z}_{10} = (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3) \oplus (\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_5) \oplus \mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{10}$
$\mathbb{Z}_{60} \oplus \mathbb{Z}_{10} = (\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5) \oplus \mathbb{Z}_{10} = \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_4 \oplus \mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_{10}$
Чтобы выяснить изоморфны эти группы или нет, достаточно проверить на изоморфность $\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ и $\mathbb{Z}_4$
$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}_2$ не является циклической по утверждению 60.4, а $\mathbb{Z}_4$ - это циклическая группа, то есть они не изоморфны.

57.40 а) Доказать, что $AutS_3 \cong S_3$, причем все автоморфизмы группы S_3 внутренние.

Это утверждение - частный случай теоремы Гёльдера, которая утверждает, что совершенными группами ($AutG \cong G$) являются все симметрические группы S_n, $n \neq 2, 6$. Доказательство теоремы Гёльдера и этого утверждения оставим на самостоятельный разбор.

60.27 а), б) Найти группы автоморфизмов групп: а) $\mathbb{Z}$, б) $\mathbb{Q}$

а) Пусть $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ автоморфизм, тогда автоморфизм будет определяться тем, куда переходит порождающий элемент, то есть $f(1) = k$ и $f(0) = 0$, $f(x) = xf(1) = xk$.
Тогда в силу сюръективности автоморфизма $\exists a \in \mathbb{Z}\ f(a) = 1 \Rightarrow f(a) = af(1) = ak = 1$, но a, k - целые числа, следовательно, $k = \pm 1$, то есть у $\mathbb{Z}$ два автоморфизма: тождественный и обратный $Aut\mathbb{Z} \cong \mathbb{Z}_2$

б) $\forall k\ (k \neq 0) \in \mathbb{Q}^* \ \exists$ автоморфизм $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}\ f(q) = kq$, то есть $Aut\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}^*$
Докажем, что $\mathbb{Q}^* \subseteq Aut\mathbb{Q}$. Пусть $f \in Aut\mathbb{Q}$, тогда $f(0) = 0$ и $f(1) = k \in \mathbb{Q}^*$.
$k = f(1) = f(q * \frac{1}{q}) = qf(\frac{1}{q}) \Rightarrow f(\frac{1}{q}) = \frac{k}{q}$
$f(\frac{p}{q}) = f(p\frac{1}{q}) = pf(\frac{1}{q}) = p\frac{k}{q} = \frac{kp}{q}$
Таким образом, каждый автоморфизм имеет вид $f(q) = kq$, то есть $\mathbb{Q}^* \subseteq Aut\mathbb{Q}$ и $Aut\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{Q}^* \Rightarrow Aut\mathbb{Q} \cong \mathbb{Q}^*$

57.42 Найти порядок группы $AutAutAut\mathbb{Z}_9$.

В прошлом домашнем задании мы разбирали количество автоморфизмов у групп $\mathbb{Z}_n$ в 57.39, поэтому воспользуемся теми рассуждениями: $Aut\mathbb{Z}_9 \cong \mathbb{Z}_6$, $Aut\mathbb{Z}_6 \cong \mathbb{Z}_2$
У $\mathbb{Z}_2$ только один автоморфизм - тождественный, то есть $|AutAutAut\mathbb{Z}_9| = 1$