Разбор задач домашнего задания по алгебре на 29.01 для группы БПИ209
3 модуль
Автор: vk.com/yourkumir

1* Изоморфны ли следующие группы:

а) $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$
Да, приведем пример изоморфизма:
$f : (\mathbb{R}, +) \to (\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ $f(x) = 2^x$
Это гомоморфизм по определению: $f(x_1 + x_2) = 2^{x_1+x_2} = 2^{x_1} * 2^{x_2} = f(x_1) * f(x_2)$
Гомоморфизм является сюръективным, так как функция $y = 2^x$ имеет область значений $(0, +\infty)$, то есть $\forall y \in (0, +\infty)$ $\exists x = log_2(y)$
Гомоморфизм является инъективным по определению $f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow 2^{x_1} = 2^{x_2} \Rightarrow 2^{x_1-x_2} = 1 \Rightarrow x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = x_2$
Таким образом, данное отображение $f(x) = 2^x$ является изоморфизмом, а значит, группы $(\mathbb{R}, +)$ и $(\mathbb{R}_+^*, \cdot)$ изоморфны.
Примечание. Можно взять вместо 2 любую другую положительную константу или рассмотреть отображение $f^{-1} : (\mathbb{R}_+^*, \cdot) \to (\mathbb{R}, +)$ $f^{-1}(x) = log_2(x)$

б) $(\mathbb{Q}, +)$ и $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$
Нет, но доказать не изоморфность групп сложнее, тут одного примера мало.
Докажем от противного. Пусть есть такой изоморфизм $f : (\mathbb{Q}, +) \to (\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$, тогда по сюръективности $\exists x \in \mathbb{Q}$ $f(x) = 2$.
Очевидно, что $x \in \mathbb{Q} \Rightarrow \dfrac{x}{2} \in \mathbb{Q}$, тогда по определению гомоморфизма
$f(x) = f\left(\dfrac{x}{2} + \dfrac{x}{2}\right) = f\left(\dfrac{x}{2}\right) * f\left(\dfrac{x}{2}\right) = 2 \Rightarrow f\left(\dfrac{x}{2}\right) = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q}_+^*$, то есть мы пришли к противоречию, а значит, группы $(\mathbb{Q}, +)$ и $(\mathbb{Q}_+^*, \cdot)$ неизоморфны.

58.27 а) Доказать, если группа G гомоморфно отображена на группу H, причем $a \to a'$, то: а) порядок a делится на порядок a';

Пусть $n = ord(a)$, тогда $(a')^n = (f(a))^n = f(a^n) = f(e_G) = e_H$, где f - гомоморфизм из условия.
Таким образом, $(a')^{ord(a)} = e \Rightarrow ord(a)$ делится без остатка на $ord(a')$, что и требовалось доказать.

58.28 а), в), г) Найти все гомоморфные отображения:

Небольшая памятка по этому заданию. Пусть нам надо найти все гомоммрфизмы из $\mathbb{Z}_n$ в $\mathbb{Z}_m$. Тогда таких гомоморфизмов НОД(m, n). Если мы захотим описать образы попрождающего элемента группы $\mathbb{Z}_n$ (образ $a \in \mathbb{Z}_n$ - это $b = f(a) \in \mathbb{Z}_m$), то получим $\langle a^k \rangle$, где $k = \dfrac{m}{\text{НОД}(m, n)}$

а) $\mathbb{Z}_6 \to \mathbb{Z}_6$
Применим нашу памятку. Всего гомоморфизмов будет НОД$(6, 6) = 6$. Образы порождающего элемента $a \in \mathbb{Z}_6$: $f(a) = \langle b \rangle = \{e, b, b^2, b^3, b^4, b^5\}$, где $b \in \mathbb{Z}_6$ - порождающий элемент.

в) $\mathbb{Z}_{18} \to \mathbb{Z}_6$
Применим нашу памятку. Всего гомоморфизмов будет НОД$(18, 6) = 6$. Образы порождающего элемента $a \in \mathbb{Z}_6$: $f(a) = \langle b \rangle = \{e, b, b^2, b^3, b^4, b^5\}$, где $b \in \mathbb{Z}_18$ - порождающий элемент.

г) $\mathbb{Z}_{12} \to \mathbb{Z}_{15}$
Применим нашу памятку. Всего гомоморфизмов будет НОД$(12, 15) = 3$. Образы порождающего элемента $a \in \mathbb{Z}_12$: $f(a) = \langle b^5 \rangle = \{e, b^5, b^{10}\}$, где $b \in \mathbb{Z}_15$ - порождающий элемент.

58.1 а), в), г) Доказать, что подгруппа H группы G нормальна, если:

Определение. $H \subseteq G$ - нормальная подгруппа, если $\forall g \in G\ gH = Hg\ (gHg^{-1} = H)$
Проверка нормальности (критерий). $H \subseteq G$ - нормальная подгруппа , если $\forall g \in G\ \forall h \in H\ ghg^{-1} \in H$

а) G — коммутативная группа, H — любая ее подгруппа;
$\forall g \in G\ \forall h \in H\ ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in H \Rightarrow H$ - нормальная подгруппа.

б) $G = GL_n(\mathbb{R})$, H — подгруппа матриц с определителем, равным 1 ($H = SL_n(\mathbb{R})$);
$\forall g \in G\ \forall h \in H\ det(ghg^{-1}) = det(g)det(h)det(g^{-1}) = det(gg^{-1})det(h) = det(E) = 1 \Rightarrow gg^{-1}h \in H \Rightarrow H$ - нормальная подгруппа.

в) $G = S_n$, $H = A_n$;
$\forall g \in G\ \forall h \in H\ sgn(ghg^{-1}) = sgn(g)sgn(h)sgn(g^{-1}) = sgn(gg^{-1})sgn(h) = sgn(id) = 1 \Rightarrow gg^{-1}h \in H \Rightarrow H$ - нормальная подгруппа.

г) $G = S_4$, $H = V_4$ (V_4 - четвертая группа Клейна, все обозначения смотрите в конце Кострикина);
Четвёртая группа Клейна имеет такую таблицу Кэли:

·	e	a	b	c
e	e	a	b	c
a	a	e	c	b
b	b	c	e	a
c	c	b	a	e

Группа Клейна коммутативна, $\forall g \in G\ \forall h \in H\ ghg^{-1} = gg^{-1}h = h \in H \Rightarrow H$ - нормальная подгруппа.

58.2 Будет ли нормальной подгруппой в группе $GL_n(\mathbb{Z})$ множество всех матриц вида $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, где числа a, d нечетны, а числа b, c четны?

Нам предлагают рассмотреть гомоморфизм $f : GL_n(\mathbb{Z}) \to GL_n(\mathbb{Z}_2)$, который каждому элементу матрицы ставит в соответствие 0, если он чётный, 1 - нечётный. Тогда ядро нашего гомоморфизма $kerf$ - это матрицы, у которых на диагонали нечётные элементы, а остальные - чётные, а это и есть наша подгруппа из условия.
По утверждению (криетрию нормальности с использованием ядра), ядро гомоморфизма из G_1 в G_2 является нормальной подгруппой в G_1, то есть наша подгруппа из условия является нормальной подгруппой в $GL_n(\mathbb{Z})$.

58.3 Доказать, что любая подгруппа индекса 2 является нормальной.

Индекс подгруппы - количество смежных классов по этой подгрупппе.
Очевидно, что один из смежных классов - сама подгруппа ($H = eH$), тогда второй смежный класс содержит в себе все остальные элементы (смежные классы разбивают группу и не пересекаются).
Это справедливо и для левых, и для правых смежных классов, тогда первый левый смежный класс, равный H, равен первому правому смежному классу, тоже равному H, и аналогично для вторых смежный классов, которые равны всему остальному, что не попало в H. Таким образом, левый и правый смежный класс равны друг другу для любого элемента группы, и по определению H нормальна.

56.32 а) Найти все подгруппы в группах: а) S_3;

Выпишем все элементы S_3 (их $3! = 6$):

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = id$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = (23)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = (12)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = (123)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = (132)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = (13)$$

Теперь придётся вспоминать определение подгруппы: нам нужен нейтральный элемент, замкнутость на операции, замкнутость на обратимости, то есть обратный элемент подгруппы тоже принадлежит подгруппе.

0) Очевидны два тривиальных случая: $H_1 = \{id\}$ (нейтральный элемент) и $H_2 = S_3$ (вся группа).

1) Тождественная подстановка и цикл длины два тоже образуют подгруппу:
$H_3 = \{id, (23)\}$, $H_4 = \{id, (12)\}$, $H_5 = \{id, (13)\}$:
- $id \in H_3, H_4, H_5$
- $id * id = id$, $id * (ij) = (ij) * id = (ij)$, $(ij) * (ij) = (ij)^2 = id$ - замкнуто на умножении
- $id * id = id \Rightarrow (id)^{-1} = id$, $(ij) * (ij) = id \Rightarrow (ij)^{-1} = (ij)$ - замкнуто на обратимости

2) Давайте попробуем добавить (123) к тождественной подстановке и посмотреть, образуют ли они основание для подгруппы, если добавить потом для выполнения свойств другие подстановки.
$H_6 = \{id, (123), ?\}$
- $id \in H_6$
- $id * id = id$, $id * (123) = (123) * id = (123)$, но $(123) * (123) = (132)$, поэтому для замкнутости на умножении добавим (132) в H_6 и ещё раз проверим замкнутость:
- $id * (132) = (132) * id = (132)$, $(123) * (132) = (132) * (123) = id$, $(132) * (132) = (123)$ - получили замкнутость на умножении
- $id * id = id \Rightarrow (id)^{-1} = id$, $(123) * (132) = (132) * (123) = id \Rightarrow (123)^{-1} = (132)$, $(132)^{-1} = (123)$ - замкнуто на обратимости

Конечно, нам стоит доказать, что нет других подгрупп, кроме найденных, это можно сделать перебором комбинаций элементов, но повторяя тот алгоритм, который мы провели в пункте (2). Или поверьте мне на слово, что других подгрупп точно нет.

Ответ: $\{id\}$, $\{id, (12)\}$, $\{id, (13)\}$, $\{id, (23)\}$, $\{id, (123), (132)\}$, $\{id, (12), (13), (23), (123), (132)\}$

58.4 а) Найти все нормальные подгруппы, отличные от единичной и от всей группы в группах: а) S_3;

В прошлом задании мы нашли все подгруппы, поэтому можем проверить их на нормальность. Однако для начала посмотрим на задание **58.1 в)** и получим первую нормальную подгруппу $A_3 = \{id, (123), (132)\}$. Осталось проверить 3 подгруппы с циклами длины 2:
$\{id, (12)\}$ не нормальная подгруппа, так как $(123) * (12) * (123)^{-1} = (123) * (12) * (132) = (13) \notin \{id, (12)\}$
$\{id, (13)\}$ не нормальная подгруппа, так как $(123) * (13) * (123)^{-1} = (123) * (13) * (132) = (23) \notin \{id, (13)\}$
$\{id, (23)\}$ не нормальная подгруппа, так как $(123) * (23) * (123)^{-1} = (123) * (23) * (132) = (12) \notin \{id, (23)\}$

Ответ: $A_3 = \{id, (123), (132)\}$

56.44 Пусть H_1, H_2 — подгруппы в группе G, причем $H_1 \subseteq H_2$. Если индекс H_1 в H_2 равен n, а индекс H_2 в G равен m, то индекс H_1 в G равен mn.

Воспользуемся теоремой Лагранжа:
$H_2 = |H_1| * [H_2 : H_1] = |H_1| * n \Rightarrow G = |H_2| * [G : H_2] = |H_2| * m = (|H_1| * n) * m = |H_1| * mn \Rightarrow [G : H_1] = mn$

Примечание. В этом доказательстве есть слабое место: в теореме Лагранжа мы делаем допущение, что G - конечная группа, но в исходном утверждении на G такого ограничения нет. Что делать в таком случае? Мы можем повторить словесное доказательство теоремы Лагранжа для нашего случая, используя только две леммы о том, что смежные классы или совпадают, или не пересекаются, и что $|gH| = |H|$, которые правдивы не только для конечных групп.