Разбор задач для подготовки к контрольной работе по алгебре для группы БПИ209
3 модуль
Автор: vk.com/yourkumir

1. Подгруппа G симметрической группы S_n порождена степенями подстановки $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)(8\,9\,10\,11\,12\,13\,14\,15)$. Найти
(a) все элементы $g \in G$ такие, что $g^7 = id$;
(b) элементы g порядка 7,
и в каждом случае подсчитать их количество.

Определение. Пусть q - наименьшее натуральное число, для которого $a^q = e$ (e - нейтральный элемент). Тогда a - элемент конечного порядка q, $ord(a) = q$. Если такого конечного q не существует, то говорят, что a бесконечного порядка.
Утверждение (56.11). Если элемент a имеет порядок n, то порядок элемента x^k равен $\dfrac{n}{\text{НОД}(n,k)}$

Замечание. Порядок перестановки - это НОК длин её циклов. Например, $ord(\sigma) = \text{НОК}(7,8) = 56$

(a) Пусть $g = \sigma^k$, тогда $g^7 = \sigma^{7k} = id \Rightarrow ord(g^7) = ord(\sigma^{7k}) = ord(id) = 1 \Rightarrow \dfrac{ord(\sigma)}{\text{НОД}(ord(\sigma), 7k)} = 1$
$56 = \text{НОД}(56, 7k) \Rightarrow 7k$ делится на 56, то есть k делится на 8, тогда возможные значения элемента g: $\{g^8, g^{16}, g^{24}, g^{32}, g^{40}, g^{48}, g^{56} = id\}$, всего таких значений 7.

(b) Пусть $g = \sigma^k$, тогда $ord(g) = ord(\sigma^k) = 7 \Rightarrow \dfrac{ord(\sigma)}{\text{НОД}(ord(\sigma), k)} = 7$
$8 = \text{НОД}(56, k)$, то есть k делится на 8, но не делится на 7, тогда возможные значения элемента g: $\{g^8, g^{16}, g^{24}, g^{32}, g^{40}, g^{48}\}$, всего таких значений 6.

2. Рассмотрим поле $f = \mathbb{F}_5[x]/\langle x^3 + 3x^2 + 2x + 3\rangle$. Через $\overline{f}$ будем обозначать смежный класс

$$f + \langle x^3 + 3x^2 + 2x + 3\rangle \in F$$

Представить в виде $\overline{f}$, где $deg\overline{f} < 3$ выражение

$$\frac{2x^4 + 4x^2 + 3}{2x^3 + 2x^2} + (4x^6 + 3x^4 + 2x^3 + 2x^2 + 4x + 2)(3x^4 + 4x^3 + x^2 + 2x + 2) - \frac{x^3 + 3x^2 + 3x + 2}{4x + 1}$$

1) $\dfrac{2x^4 + 4x^2 + 3}{2x^3 + 2x^2} = 3x^6 + 4x^5 + 3x^3 + x + 1$
Мы хотим найти обратный к $2x^3 + 2x^2$

выражение	f	g	
$x^3 + 3x^2 + 2x + 3$	1	0	(1)
$2x^3 + 2x^2$	0	1	(2)
$2x^2 + 2x + 3$	1	2	(3)=(1)+2(2)
$2x$	$4x$	$1 + 3x$	(4)=(2)-x(3)=(2)+4x(3)
$2x + 3$	$1 + x^2$	$2 + 4x + 2x^2$	(5)=(3)-x(4)=(3)+4x(4)
3	$1 + x + x^2$	$1 + x + 2x^2$	(6)=(5)-(4)=(5)+4(4)

$(x^2 + x + 1)(x^3 + 3x^2 + 2x + 3) + (2x^2 + x + 1)(2x^3 + 2x^2) = 3 \Rightarrow \dfrac{2x^4 + 4x^2 + 3}{2x^3 + 2x^2} = \dfrac{(2x^4 + 4x^2 + 3)(2x^2 + x + 1)}{(2x^3 + 2x^2)(2x^2 + x + 1)} =$
$\dfrac{(2x^4 + 4x^2 + 3)(2x^2 + x + 1)}{3} = \dfrac{2(2x^4 + 4x^2 + 3)(2x^2 + x + 1)}{6} = \dfrac{2(2x^4 + 4x^2 + 3)(2x^2 + x + 1)}{1} =$
$= 2(2x^4 + 4x^2 + 3)(2x^2 + x + 1) = (2x^4 + 4x^2 + 3)(4x^2 + 2x + 2) = 8x^6 + 4x^5 + 4x^4 + 16x^4 + 8x^3 + 8x^2 + 12x^2 + 6x + 6 =$
$3x^6 + 4x^5 + 3x^3 + x + 1$

2) $\dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{4x+1} = -(x^5+2x^4+x^3+2x^2+x+2)$

Мы хотим найти обратный к $4x+1$

выражение	f	g	
x^3+3x^2+2x+3	1	0	(1)
$4x+1$	0	1	(2)
$4x^2+2x+3$	1	x^2	(3)=(1)+x^2(2)
$x+3$	1	x^2+4x	(4)=(3)-x(2)=(3)+4x(2)
4	1	x^2+4x+1	(5)=(2)+(4)

$(x^3+3x^2+2x+3)+(x^2+4x+1)(4x+1) = 4 \Rightarrow \dfrac{x^3+3x^2+3x+2}{4x+1} = \dfrac{(x^3+3x^2+3x+2)(x^2+4x+1)}{(4x+1)(x^2+4x+1)} = \dfrac{(x^3+3x^2+3x+2)(x^2+4x+1)}{4} = \dfrac{(x^3+3x^2+3x+2)(x^2+4x+1)}{-1} = -(x^3+3x^2+3x+2)(x^2+4x+1) = -(x^5+4x^4+x^3+3x^4+2x^3+3x^2+3x^3+2x^2+3x+2x^2+3x+2) = -(x^5+2x^4+x^3+2x^2+x+2)$

3) $(4x^6+3x^4+2x^3+2x^2+4x+2)(3x^4+4x^3+x^2+2x+2) = \{$возьмем остатки при делении на порождающий многочлен$\} = (3x^2+4x+4)(3x+2) = 9x^3+6x^2+12x^2+8x+12x+8 = 4x^3+3x^2+3$

4) Соберем все вместе:
$(3x^6+4x^5+3x^3+x+1)+(4x^3+3x^2+3)+(x^5+2x^4+x^3+2x^2+x+2) = 3x^6+2x^4+3x^3+2x+1 =$
$= 2x^2+2x+2 \ (mod\ x^3+3x^2+2x+3)$

3. Пусть $f(x) = x^4+3x^3+6x^2+7x$, $g(x) = x^4+5x^3+7x^2+3x$ — многочлены над полем $\mathbb{Z}_{11}$. Найти НОД(f,g) и многочлены $u(x)$, $v(x) \in \mathbb{Z}_{11}[x]$ такие, что

$$u(x)f(x)+v(x)g(x) = \text{НОД}(f,g)$$

Мы это делали в прошлом пункте

выражение	f	g	
$x^4+3x^3+6x^2+7x$	1	0	(1)
$x^4+5x^3+7x^2+3x$	0	1	(2)
$2x^3+x^2+7x$	10	1	(3)=(2)-(1)=(2)+10(1)
$10x^3+9x^2+3x$	$6x$	$1+5x$	(4)=(2)+5x(3)
$8x^2+2x$	$10+x$	$3+10x$	(5)=(3)+2(4)
x^2+3x	$10+7x^2$	$1+4x+4x^2$	(6)=(4)+7x(5)
0	...	...	(7)=(5)+3(6)

НОД$(f,x) = x^2+3x$. Так как НОД многочленов единственен с точностью до константы, то НОД$(f,x) = x^2+3x = 8(x^2+3x) = 8x^2+2x$, тогда $u(x) = 10+x$, $v(x) = 3+10x$

$$(10+x)f(x)+(3+10x)g(x) = 8x^2+2x$$

У вас мог получиться и другой ответ, например $(5+6x)f(x)+(7+5x)g(x) = 4x^2+x$ (умножили все части равенства на 6).

4. Сколько элементов порядка 2 в группе $D_3 \times S_3 \times \mathbb{Z}_4$?

Определение. Пусть q - наименьшее натуральное число, для которого $a^q = e$ (e - нейтральный элемент). Тогда a - элемент конечного порядка q, $ord(a) = q$. Если такого конечного q не существует, то говорят, что a бесконечного порядка.

Совет. Повторить обозначения таких специальных групп, знать элементы и порядок группы.

$\mathbb{Z}_4$ - группа вычетов по модулю 4 (всего 4 элемента)
$ord(0) = 1$
$ord(1) = 4$
$ord(2) = 2$
$ord(3) = 4$

S_3 - группа перестановок длины 3 (всего $3! = 6$ элементов), порядок - НОК длин всех циклов
$ord\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \quad id = (1)(2)(3)$
$ord\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \quad (1)(23)$
$ord\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \quad (12)(3)$
$ord\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad (123)$
$ord\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \quad (132)$
$ord\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad (13)(2)$

D_3 - группа Диэдра - группа симметрий правильного 3-угольника (всего $2 * 3 = 6$ элементов, 3 вращений и 3 симметрий)
$ord\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = 1 \quad id$ - тождественное преобразование, поворот на 0 градусов
$ord\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 3 & 2 \end{pmatrix} = 2 \quad (1)(23)$ - симметрия относительно 1-1'
$ord\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix} = 2 \quad (12)(3)$ - симметрия относительно 3-3'
$ord\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 \quad (123)$ - поворот на 60 градусов
$ord\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 3 \quad (132)$ - поворот на 240 градусов
$ord\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = 2 \quad (13)(2)$ - симметрия относительно 2-2'

Порядок элемента произведения групп - НОК порядков элементов групп, то есть если мы ищем элемент порядка 2 в произведении групп, то нам подходят такие тройки элементов групп порядки которых
$(1, 1, 2)$ - таких элементов $1 * 1 * 3 = 3$
$(1, 2, 1)$ - таких элементов $1 * 3 * 1 = 3$
$(2, 1, 1)$ - таких элементов $1 * 1 * 1 = 1$
$(1, 2, 2)$ - таких элементов $1 * 3 * 3 = 9$
$(2, 1, 2)$ - таких элементов $1 * 1 * 3 = 3$
$(2, 2, 1)$ - таких элементов $1 * 3 * 1 = 3$
$(2, 2, 2)$ - таких элементов $1 * 3 * 3 = 9$
Всего элементов 31

5. Докажите, что любая подгруппа циклической группы, порожденной элементом a, порождена элементом a^d для d – натурального делителя n. Опишите все подгруппы в $\mathbb{Z}_{220}$

   Пусть $G = \langle a \rangle$ - циклическая группа с порождающим элементом a, тогда рассмотрим подгруппу $H \subset G$. Пусть a^d минимальная степень a, такая что $a^d \in H$, тогда рассмотрим элемент $a^k \in H$ и допустим, что k не делится на d, то есть НОД$(d, k) = n = ud + vk \leq d$. $(a^d)^u * (a^k)^v = a^n \in H$, но $n < d$, пришли к противоречию. Для любого $a^l \in H$ l делится на d, H - циклическая подгруппа, a^d - порождающий элемент.

   Делители 220 : $1, 2, 4, 5, 10, 11, 20, 22, 44, 55, 110, 220$, тогда порождающие элементы циклических подгрупп циклической группы $\mathbb{Z}_{220}$: $a, a^2, a^4, a^5, a^{10}, a^{11}, a^{20}, a^{22}, a^{44}, a^{55}, a^{110}, a^{220}$

6. Найти базис и размерность линейного подпространства L в R^4, заданного системой уравнений

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 0 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 0 \end{cases}$$

   Определение. Базисом векторного пространства назвается набор линейно независимых (из равенства линейной комбинации нулю следует, что коэффициенты равны нулю) векторов (элементов векторного пространства) $b_1, ..., b_n$, что любой вектор представляется в виде их линейной комбинации $x = \alpha_1 b_1 + ... + \alpha_n b_n$. $\alpha_1, ..., \alpha_n$ - координаты вектора x в базисе $b_1, ..., b_n$
   Определение. Размерность векторного пространства - максимальное количество линейно независимых векторов. Если в векторном пространстве есть базис из n векторов, то размерность пространства $dim = n$.

   Алгоритм решения. Если пространство задано системой линейных уравнений (а в 1308, 1298 мы самостоятельно составляли СЛУ, которые описывали наше множество), то его базис - ФСР (всего ФСР $m - rgA$).

$$\begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

   ФСР (базис): $\begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

   Количество ФСР (размерность): $dim = 3$

7. Найти размерность и базис (выбрав его из множества исходных векторов) линейной оболочки векторов $a_1 = (1, -1, 2, 1)^T$, $a_2 = (1, 2, 1, -1)^T$, $a_3 = (0, 3, -1, -2)^T$, $a_4 = (3, 3, 4, -1)^T$, $a_5 = (1, -4, 3, 3)^T$ в $\mathbb{R}^5$, выразить небазисные векторы через базисные.

Определение. Множество $L(a_1, ..., a_m) = \{\lambda_1 a_1 + ... + \lambda_k a_k \mid \forall \lambda_i \in F\}$ называется линейной оболочкой векторов $a_1, ..., a_m$
$L(a_1, ..., a_m)$ является линейным подпространством.

Алгоритм решения. Выписываем векторы по столбцам и элементарными преобразованиями приводим матрицу к каноническому виду. Столбцы с ведущими элементами соответствуют базисным векторам.
Чтобы выразить небазисные вектора через базисные, необходимо посмотреть в остальные столбцы и там будут коэффициенты.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 & 3 & -4 \\ 2 & 1 & -1 & 4 & 3 \\ 1 & -1 & -2 & -1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 3 & 3 & 6 & -3 \\ 0 & -1 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -2 & -2 & -4 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базис: a_1, a_2
Выразим небазисные векторы через базисные:
$a_3 = -a_1 + a_2$
$a_4 = a_1 + 2a_2$
$a_5 = 2a_1 - a_2$

8. Составить систему линейных уравнений, задающую линейную оболочку векторов $a_1 = (1, 1, 2, 1, 2)^T$, $a_2 = (0, -1, -2, 1, -1)^T$, $a_3 = (3, 1, 2, 5, 4)^T$ в $\mathbb{R}^5$

1. В прошлой задаче (7) изложен алгоритм, как найти базис линейной оболочки векторов.
Выписываем векторы по столбцам и элементарными преобразованиями приводим матрицу к каноническому виду. Столбцы с ведущими элементами соответствуют базисным векторам.
2. У нас есть линейное подпространство и его базис, надо составить систему линейных уравнений, которая будет задавать данное линейное подпространство.
Выписываем базисные векторы по строкам, находим ФСР. Векторы ФСР - векторы коэффициентов системы линейных уравнений.
3*. И хоть в это задаче это не понадобится, но напомню, что делать, если есть линейное подпространство и система линейных уравнений, которая его задает, а надо найти базис данного линейного подпространства (из задачи (6)).
Если пространство задано системой линейных уравнений, то его базис - ФСР (всего ФСР $m - rgA$).

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & 5 \\ 2 & -1 & 4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базис: a_1, a_2, размерность $dim = 2$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & -2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

СЛАУ: $\begin{cases} -2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 + x_2 + x_4 = 0 \\ -x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases}$

9. Найти размерности и базисы суммы и пересечения подпространств L_1, L_2 в $\mathbb{R}^4$, $L_1 = \langle a_1, a_2, a_3\rangle$, $L_2 = \langle b_1, b2\rangle$, где $a_1 = (1, 0, -3, -2)^T$, $a_2 = (7, 1, 9, 14)^T$, $a_3 = (-4, 1, 2, -9)^T$, $b_1 = (10, 1, 0, 8)^T$, $b_2 = (-3, 0, 1, -3)^T$

Алгоритм нахождения базиса (и размерности) суммы линейных подпространств.
1) составить матрицу, выписав все векторы по столбцам
2) привести матрицу к ступенчатому виду методом Гаусса по строкам
3) ведущие элементы соответствуют векторам (если вы не меняли столбцы местами), которые являются базисными для суммы
4) размерность суммы - количество базисных векторов, то есть количество ведущих переменных

Алгоритм нахождения базиса (и размерности) пересечения линейных подпространств.
1) составить матрицу для L_1, выписав все векторы L_1 по строкам
2) привести матрицу к каноническому виду методом Гаусса по строкам
3) найти ФСР
4) составить матрицу для L_2, выписав все векторы L_2 по строкам
5) привести матрицу к каноническому виду методом Гаусса по строкам
6) найти ФСР
7) составить матрицу для пересечения L_1 и L_2, выписав ФСР для L_1 (пункт 3) и для L_2 (пункт 6) по строкам
8) привести матрицу к каноническому виду методом Гаусса по строкам
9) найти ФСР

Теорема. Пусть L_1, L_2 - подпространства одного векторного пространства, тогда

$$dimL_1 + dimL_2 = dim(L_1 \cup L_2) + dim(L_1 \cap L_2)$$

$$L_1: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 9 & 14 \\ -4 & 1 & 2 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 1 & -10 & -17 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 0 & -40 & -45 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 11/8 \\ 0 & 1 & 0 & -46/8 \\ 0 & 0 & 1 & 9/8 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 11 \\ -46 \\ 9 \\ -8 \end{pmatrix}$

$dimL_1 = 3$

$$L_2: \begin{pmatrix} 10 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 10 & -6 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 10/3 & -2 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 1 \\ -10 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$dimL_2 = 2$

$$L_1 \cup L_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 7 & 1 & 9 & 14 \\ -4 & 1 & 2 & -9 \\ 10 & 1 & 0 & 8 \\ -3 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 1 & -10 & -17 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 0 & -8 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 0 & -40 & -45 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -8 & -9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 & -2 \\ 0 & 1 & 30 & 28 \\ 0 & 0 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базис суммы: a_1, a_2, a_3

$dim(L_1 \cup L_2) = 3$

$$L_1 \cap L_2: \begin{pmatrix} 11 & -46 & 9 & -8 \\ 1 & -10 & 3 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -10 & 3 & 0 \\ 0 & 64 & -24 & -8 \\ 0 & -8 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -10 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -6/8 & -10/8 \\ 0 & 1 & -3/8 & -1/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 6 \\ 3 \\ -8 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 10 \\ 1 \\ 0 \\ -8 \end{pmatrix}$

Базис пересечения: $(6, 3, -8, 0), \quad (10, 1, 0, -8)$

$dim(L_1 \cap L_2) = 2$

Проверим формулу $dimL_1 + dimL_2 = dim(L_1 \cup L_2) + dim(L_1 \cap L_2)$ $3 + 2 = 3 + 2$ - верно

10. Вычислить матрицу перехода $C_{e \to e'}$ от базиса $e_1 = (-2, 1, -1)^T$, $e_2 = (1, -1, 3)^T$, $e_3 = (1, 2, -1)^T$ к базису $e_1^{'} = (-1, 2, 3)^T$, $e_2^{'} = (2, 1, 2)^T$, $e_3^{'} = (0, 2, 1)^T$, в линейном пространстве $\mathbb{R}^3$ и определить координаты вектора $x = -e_1^{'} + 3e_2^{'} - e_3^{'}$ в базисе e_1, e_2, e_3

Определение. Пусть V - n-мерное линейное пространство и в нем есть два базиса: $A = \{a_1, ..., a_n\}$, $B = \{b_1, ..., b_n\}$
Разложим векторы базиса B по векторам базиса A
$$\begin{cases} b_1 = t_{11}a_1 + t_{21}a_2 + ... + t_{n1}a_n \\ ...b_n = t_{1n}a_1 + t_{2n}a_2 + ... + t_{nn}a_n \end{cases}$$
Тогда матрицей перехода от базиса A к базису B называется квадратная матрица
$T_{A \to B} = \begin{pmatrix} t_{11} & ... & t_{1n} \\ ... & ... & ... \\ t_{n1} & ... & t_{nn} \end{pmatrix}$, i-тый столбец в матрице перехода - это стобец координат b_i в A
$B = A * T_{A \to B}$

Пусть вектор $x \in V$ и $x^a = (x_1^a, ..., x_n^a)^T$ - векторы-столбцы координат x в A и B соответственно. Тогда $x^a = T_{A \to B} * x^b$

$e^{'} = e * T_{e \to e'} \Rightarrow T_{e \to e'} = e^{-1} * e^{'}$

$$e^{-1} = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 3 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$
$T_{e \to e'} = e^{-1} * e^{'} = \frac{1}{11}\begin{pmatrix} -5 & 4 & 3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, то есть $e_1^{'} = 2e_1 + 2e_2 + e_3$, $e_2^{'} = e_2 + e_3$, $e_3^{'} = e_1 + e_2 + e_3$

$x = -e_1^{'} + 3e_2^{'} - e_3^{'} \Rightarrow x^{e^{'}} = (-1, 3, -1)^T$
$$x^e = T_{e \to e'} * x^{e^{'}} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

11. Доказать, что пространство является прямой суммой подпространств $L_1 = \langle a_1, a_2\rangle$, а $L_2 = \langle b_1, b_2\rangle$ и разложить вектор $x = (0, -2, 2, 0)^T$ на сумму проекций на эти подпространства, где
$a_1 = (1, 1, 1, 0)^T$, $a_2 = (1, 1, 0, 1)^T$, $b_1 = (1, 0, 1, 1)^T$, $b_2 = (1, 1, -1, -1)^T$

Определение. Множество $L_1 + L_2 = \{x_1 + x_2 \mid x_i \in L_i\}$ называется суммой подпространств. Сумма подпространств сама является подпространством.
Определение. Сумма $L_1 + L_2$ линейных подпространств L_1 и L_2 называется прямой, если $L_1 \cap L_2 = \{0\}$. Обозначение $L_1 \oplus L_2$.
$dim(L_1 \oplus L_2) = dimL_1 + dimL_2$

Сумма L_1 и L_2 является прямой тогда и только тогда, когда $\forall x \in L_1 + L_2$ его представление $x = x_1 + x_2$ $(x_i \in L_i)$ единственно.
x_1 называется проекцией x на L_1 вдоль L_2, x_2 называется проекцией x на L_2 вдоль L_1.

1) Будем доказывать, используя утверждение $dim(L_1 \oplus L_2) = dimL_1 + dimL_2$, то есть докажем, что $dim(L_1 \cap L_2) = 0$

$$L_1: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$dimL_1 = 2$

$$L_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$dimL_2 = 2$

$$L_1 \cup L_2: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$dim(L_1 \cup L_2) = 4$

$4 = 2 + 2 \Rightarrow dim(L_1 \cup L_2) = dimL_1 + dimL_2 \Rightarrow dim(L_1 \cap L_2) = 0$

2) Алгоритм решения. Строим расширенную матрицу, где выписываем все векторы a_1, a_2, b_1, b_2, x по столбцам, приводим её основную часть к каноническому виду и в последнем столбце будет разложение.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ 1 & 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & -1 & 0 & -2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 2 & -1 & 4 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & -4 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & -3 & 4 \end{array}\right) \to$$
$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$\Rightarrow x = -2a_2 + 2b_1$, где $x_1 = -2a_2$ - проекция x на L_1, $x_2 = 2b_1$ - проекция x на L_2
Проверка. $-2a_2 + 2b_1 = (-2, -2, 0, -2)^T + (2, 0, 2, 2)^T = (0, -2, 2, 0)^T = x$ - верно.

12. В базисе $e_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $e_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ билинейная форма $B(x, y)$ имеет матрицу $B = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$. Найти матрицу билинейной формы $B(x, y)$ в базисе $e_1^{'} = \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \end{pmatrix}$, $e_2^{'} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

Определение. Пусть V - линейное пространство над $\mathbb{R}$, тогда функцию $b: \ V \times V \to \mathbb{R}$ называют билинейной формой на линейном пространстве V, если $\forall x, y, z \in V$ и $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ выполняется
1) $b(\alpha x + \beta y, z) = \alpha b(x, z) + \beta(y, z)$
2) $b(x, \alpha y + \beta z) = \alpha b(x, y) + \beta(x, z)$
Определение. Матрица B размера $n \times n$ с элементами $b_{ij} = b(e_i, e_j)$ называется матрицей билинейной формы в базисе $e_1, ..., e_n$. Тогда $b(x, y) = x^T B y$
Пусть U - матрица перехода от базиса e к базису $e^{'}$, B_e - матрица билинейной формы в базисе e, $B_{e'}$ - матрица билинейной формы в базисе $e^{'}$, тогда $B_{e'} = U^T_{e \to e'} B_e U_{e \to e'}$

В задаче (10) вычисляли матрицу перехода, напомню только формулу
$e^{'} = e * T_{e \to e'} \Rightarrow T_{e \to e'} = e^{-1} * e^{'}$

$e^{-1} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$ - обратите внимание, что матрицы базисов выписываем по столбцам
$T_{e \to e'} = e^{-1} * e^{'} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{-5} \begin{pmatrix} -10 & -3 \\ 5 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0.6 \\ -1 & -0.4 \end{pmatrix}$
$B_{e'} = U^T_{e \to e'} B_e U_{e \to e'} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0.6 & -0.4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0.6 \\ -1 & -0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0.6 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0.6 \\ -1 & -0.4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 1.4 \\ 2.2 & 0.76 \end{pmatrix}$

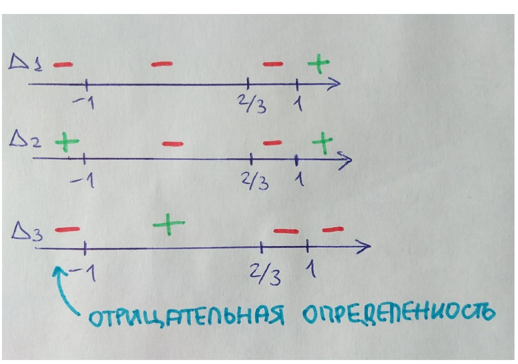
13. Исследовать квадратичную форму на положительную или отрицательную определенность в зависимости от параметра: $k = (\alpha - 1)x_1^2 + (2\alpha - 2)x_1 x_2 - 2\alpha x_1 x_3 + 2\alpha x_2^2 - 2\alpha x_2 x_3 + (\alpha - 2)x_3^2$

Определение. Квадратичную форму $Q(x)$ называют положительно определенной, если $\forall x \neq 0 \ Q(x) > 0$
Определение. Квадратичную форму $Q(x)$ называют отрицательно определенной, если $\forall x \neq 0 \ Q(x) < 0$
Определение. Квадратичную форму $Q(x)$ называют знакопеременной, если $\exists x \neq y \ Q(x) < 0 < Q(y)$
Критерий Сильвестра. Квадратная форма положительно определена тогда и только тогда, когда последовательность главных угловых миноров положительна, то есть $\Delta_1 > 0, \Delta_2 > 0, ...$
Теорема. Квадратная форма отрицательно определена тогда и только тогда, когда знаки последовательности главных угловых миноров чередуются, начиная с отрицательного, то есть $\Delta_1 < 0, \Delta_2 > 0, \Delta_3 < 0, ...$

Матрица квадратичной формы

$$\begin{pmatrix} \alpha - 1 & \alpha - 1 & -\alpha \\ \alpha - 1 & 2\alpha & -\alpha \\ -\alpha & -\alpha & \alpha - 2 \end{pmatrix}$$

$\Delta_1 = \alpha - 1$
$\Delta_2 = (\alpha - 1)2\alpha - (\alpha - 1)^2 = \alpha^2 - 1 = (\alpha - 1)(\alpha + 1)$
$\Delta_3 = (\alpha - 1)(2\alpha)(\alpha - 2) + (-\alpha)(-\alpha)(\alpha - 1) + (-\alpha)(-\alpha)(\alpha - 1) - (-\alpha)(2\alpha)(-\alpha) - (\alpha - 1)(\alpha - 1)(\alpha - 2) - (-\alpha)(-\alpha)(\alpha - 1) = -3\alpha^2 - \alpha + 2 = -3(\alpha + 1)(\alpha - \frac{2}{3})$
Критические точки: $-1, \frac{2}{3}, 1$. Квадратичная форма отрицательно определена на $(-\infty; -1)$



64.41 . Доказать, что

в) $\mathbb{R}[x]/\langle x^2+x+1\rangle \cong \mathbb{C}$

Используем теорему о гомоморфизме колец:

$f: \mathbb{R}[x] \to \mathbb{C}$ $f(p(x)) = p(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})$ - гомоморфизм

$kerf = \{p(x) \mid p(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}) = 0$ и $p(-\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2}) = 0\} = \langle (x+\frac{1}{2}-\frac{i\sqrt{3}}{2})(x+\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2})\rangle = \langle x^2+x+1\rangle$ - ядро гомоморфизма

$Imf = \mathbb{C}$, так как $\forall c \in \mathbb{C}\ \exists p:\ p(-\frac{1}{2}+\frac{i\sqrt{3}}{2}) = c$

64.42 При каких a и b факторкольца $\mathbb{Z}_2[x]/\langle x^2+ax+b\rangle$

(a) изоморфны между собой;

(b) являются полями?

Переберём все значения пары (a, b) и построим таблицы Кэли.

Таблица аддитивной группы для всех факторколец будет одинакова

$+$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	1	α	$\alpha+1$
1	1	0	$\alpha+1$	α
α	α	$\alpha+1$	0	1
$\alpha+1$	$\alpha+1$	α	1	0

$a=0, b=0, \langle x^2\rangle$

$*$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$\alpha+1$
α	0	α	0	α
$\alpha+1$	0	$\alpha+1$	α	1

$a=0, b=1, \langle x^2+1\rangle$

$*$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$\alpha+1$
α	0	α	1	$\alpha+1$
$\alpha+1$	0	$\alpha+1$	$\alpha+1$	0

$a=1, b=0, \langle x^2+x\rangle$

$*$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$\alpha+1$
α	0	α	α	0
$\alpha+1$	0	$\alpha+1$	0	$\alpha+1$

$a=1, b=1, \langle x^2+x+1\rangle$

$*$	0	1	α	$\alpha+1$
0	0	0	0	0
1	0	1	α	$\alpha+1$
α	0	α	$\alpha+1$	1
$\alpha+1$	0	$\alpha+1$	1	α

Видим, что случаи $a=0, b=0, \langle x^2\rangle$ и $a=0, b=1, \langle x^2+1\rangle$