Разбор задач домашнего задания по алгебре на 26.03 для группы БПИ209
3 модуль
Автор: vk.com/yourkumir

1313 Найти системы линейных уравнений, задающие линейные подпространства, натянутые на следующие системы векторов

$$a_1 = (1, -1, 1, -1, 1), \quad a_2 = (1, 1, 0, 0, 3), \quad a_3 = (3, 1, 1, -1, 7), \quad a_4 = (0, 2, -1, 1, 2)$$

Алгоритм решения подобных задач.
1) составить ОСЛУ, выписав вектора по строкам
2) к матрице ОСЛУ (матрица, у которой строки - исходные векторы) применить метод Гаусса к строкам
3) найти ФСР
4) выписать в систему линейных уравнений, но только уравнения с ведущими элементами

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 1 & -1 & 7 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 2 & 4 \\ 0 & 2 & -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -1/2 & 2 \\ 0 & 1 & -1/2 & 1/2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_5 \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2}x_1 + \dfrac{1}{2}x_2 + x_3 = 0 \\ \dfrac{1}{2}x_1 - \dfrac{1}{2}x_2 + x_4 = 0 \\ -2x_1 - x_2 + x_5 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - x_2 + 2x_4 = 0 \\ 2x_1 + x_2 - x_5 = 0 \end{cases}$$

1318 Найти размерость s суммы и размерость d пересечения линейных подпространств:
L_1, натянутого на векторы $a_1 = (1, 1, 1, 1), \quad a_2 = (1, -1, 1, -1), \quad a_3 = (1, 3, 1, 3)$
и L_2, натянутого на векторы $b_1 = (1, 2, 0, 2), \quad b_2 = (1, 2, 1, 2), \quad b_3 = (3, 1, 3, 1)$

Алгоритм нахождения базиса (и размерности) суммы линейных подпространств.
1) составить матрицу, выписав все векторы по столбцам
2) привести матрицу к ступенчатому виду методом Гаусса по строкам
3) ведущие элементы соответствуют векторам (если вы не меняли столбцы местами), которые являются базисными для суммы
4) размерность суммы - количество базисных векторов, то есть количество ведущих переменных

Алгоритм нахождения базиса (и размерности) пересечения линейных подпространств.
1) составить матрицу для L_1, выписав все векторы L_1 по строкам
2) привести матрицу к каноническому виду методом Гаусса по строкам
3) найти ФСР
4) составить матрицу для L_2, выписав все векторы L_2 по строкам
5) привести матрицу к каноническому виду методом Гаусса по строкам
6) найти ФСР
7) составить матрицу для пересечения L_1 и L_2, выписав ФСР для L_1 (пункт 3) и для L_2 (пункт 6) по строкам
8) привести матрицу к каноническому виду методом Гаусса по строкам
9) найти ФСР

Теорема. Пусть L_1, L_2 - подпространства одного векторного пространства, тогда

$$dimL_1 + dimL_2 = dim(L_1 \cup L_2) + dim(L_1 \cap L_2)$$

$$L_1: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$dimL_1 = 2$

$$L_2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 3 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 3 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$dimL_2 = 3$

Подсказка. Лучше искать размерность суммы после нахождения ФСР у ОСЛУ для L_1 и L_2, так как на данном этапе вы уже представляете, какие векторы точно не войдут в базис суммы. Например, в L_1 последняя строка обнулилась, то есть a_3 являлся некоторой линейной комбинацией a_1, a_2, тогда мы можем не включать его в матрицу для поиска размерности суммы.
Если вам сложно это понять, то добавляйте все векторы, не ошибетесь.

$$L_1 \cup L_2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & -1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Базис суммы: a_1, a_2, b_1

$s = dim(L_1 \cup LL_2) = 3$

$$L_1 \cap L_2: \quad \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Базис пересечения: $(1, 0, 1, 0), \quad (0, 1, 0, 1)$

$d = dim(L_1 \cap L_2) = 2$

Проверим формулу $dimL_1 + dimL_2 = dim(L_1 \cup L_2) + dim(L_1 \cap L_2)$ $2 + 3 = 3 + 2$ - верно

1320 Найти базис суммы и пересечения линейных подпространств:
L_1, натянутого на векторы $a_1 = (1, 2, 1)$, $\quad a_2 = (1, 1, -1)$, $\quad a_3 = (1, 3, 3)$
и L_2, натянутого на векторы $b_1 = (2, 3, -1)$, $\quad b_2 = (1, 2, 2)$, $\quad b_3 = (1, 1, -3)$

$$L_1: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

$dimL_1 = 2$

$$L_2: \quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -5 \\ 0 & -1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -8 \\ 0 & 1 & 5 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$dimL_2 = 2$

$$L_1 \cup L_2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 3 & -1 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 0 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & -3 & 1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

Базис суммы: a_1, a_2, b_1

$dim(L_1 \cup LL_2) = 3$

$$L_1 \cap L_2: \quad \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 8 & -5 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 2 & -1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -5 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = dim(L_1 \cap L_2) = 1$

Базис пересечения: $(3, 5, 1)$

Проверим формулу $dimL_1 + dimL_2 = dim(L_1 \cup L_2) + dim(L_1 \cap L_2)$ $2 + 2 = 3 + 1$ - верно

1321 Найти базис суммы и пересечения линейных подпространств:
L_1, натянутого на векторы $a_1 = (1,2,1,-2)$, $a_2 = (2,3,1,0)$, $a_3 = (1,2,2,-3)$
и L_2, натянутого на векторы $b_1 = (1,1,1,1)$, $b_2 = (1,0,1,-1)$, $b_3 = (1,3,0,-4)$

$$L_1: \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 3 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 2 & -3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$dimL_1 = 3$

$$L_2: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 0 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & -1 & -5 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -10 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 9 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 10 \\ -2 \\ -9 \\ 1 \end{pmatrix}$

$dimL_2 = 3$

$$L_1 \cup L_2 : \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 & 1 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & -3 & 1 & -1 & -4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 4 & -1 & 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 & -3 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -1 & -1 & -7 & 2 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & -5 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -5 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 05 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Базис суммы: a_1, a_2, a_3, b_2

$dim(L_1 \cup LL_2) = 4$

$$L_1 \cap L_2 : \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ 10 & -2 & -9 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 4 & -7 & 3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 3 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -7/4 & 3/4 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} -5 & 0 & 25/4 & -5/4 \\ 0 & 1 & -7/4 & 3/4 \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -5/4 & 1/4 \\ 0 & 1 & -7/4 & 3/4 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ -3 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$

$d = dim(L_1 \cap L_2) = 2$

Базис пересечения: $(5,7,4,0)$ $(-1,-3,0,4)$

Проверим формулу $dimL_1 + dimL_2 = dim(L_1 \cup L_2) + dim(L_1 \cap L_2)$ $3 + 3 = 4 + 2$ - верно

1322 Найти базис суммы и пересечения линейных подпространств:
L_1, натянутого на векторы $a_1 = (1,1,0,0)$, $a_2 = (0,1,1,0)$, $a_3 = (0,0,1,1)$
и L_2, натянутого на векторы $b_1 = (1,0,1,0)$, $b_2 = (0,2,1,1)$, $b_3 = (1,2,1,2)$

$$L_1: \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$dimL_1 = 3$

$$L_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

ФСР: $\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$dimL_2 = 3$

$$L_1 \cup L_2: \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

Базис суммы: a_1, a_2, a_3, b_1

$dim(L_1 \cup LL_2) = 4$

$$L_1 \cap L_2: \begin{pmatrix} -1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & -2 & 2 & 0 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \to$$

ФСР: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$d = dim(L_1 \cap L_2) = 2$

Базис пересечения: $(0,1,1,0)$ $(1,0,0,1)$

Проверим формулу $dimL_1 + dimL_2 = dim(L_1 \cup L_2) + dim(L_1 \cap L_2)$ $3 + 3 = 4 + 2$ - верно

1329 Доказать, что пространство всех квадратных матриц порядка n есть прямая сумма линейных подпространств S - симметрических ($A^T = A$) и K - кососимметрических ($A^T = -A$) матриц. Найти проекции A_1 и A_2 матрицы

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

на S параллельно K и на K параллельно S.

1) $Mn(\mathbb{R}) = S + K$

Это следует из равенства $A = \dfrac{A+A^T}{2} + \dfrac{A-A^T}{2}$, где $S_A = \dfrac{A+A^T}{2} \in S$, $K_A = \dfrac{A-A^T}{2} \in K$

Пусть $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & ... & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & ... & a_{2n} \\ ... & ... & ... & ... \\ a_{n1} & a_{n2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$, тогда

$$S_A = \frac{A+A^T}{2} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dfrac{a_{12}+a_{21}}{2} & ... & \dfrac{a_{1n}+a_{n1}}{2} \\ \dfrac{a_{21}+a_{12}}{2} & a_{22} & ... & \dfrac{a_{2n}+a_{n2}}{2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \dfrac{a_{n1}+a_{1n}}{2} & \dfrac{a_{n2}+a_{2n}}{2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

$$K_A = \frac{A-A^T}{2} = \begin{pmatrix} a_{11} & \dfrac{a_{12}-a_{21}}{2} & ... & \dfrac{a_{1n}-a_{n1}}{2} \\ \dfrac{a_{21}-a_{12}}{2} & a_{22} & ... & \dfrac{a_{2n}-a_{n2}}{2} \\ ... & ... & ... & ... \\ \dfrac{a_{n1}-a_{1n}}{2} & \dfrac{a_{n2}-a_{2n}}{2} & ... & a_{nn} \end{pmatrix}$$

2) $S \cap K = \{0\}$
Пусть $A \in S, K \Rightarrow\ A = A^T = -A \Rightarrow\ A = 0$
$\Rightarrow\ Mn(\mathbb{R}) = S \oplus K$

3) Чтобы найти проекции, достаточно в формулы из первого пункта подставить нашу матрицу

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

$$S_A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & ... & 1/2 \\ 1/2 & 1 & ... & 1/2 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1/2 & 1/2 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

$$K_A = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & ... & 1/2 \\ -1/2 & 1 & ... & 1/2 \\ ... & ... & ... & ... \\ -1/2 & -1/2 & ... & 1 \end{pmatrix}$$

Определение. Векторы $a_1, ..., a_n$ являются линейно независимыми, если из равенства линейной комбинации нулю $\lambda_1 a_1 + ... \lambda_n a_n = 0$ следует, что $\forall i \ \lambda_i = 0$

34.3 а),г) Докажите линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

а) $\sin x, \cos x$
Мы должны решить следующее уравнение относительно a, b (всегда есть тривиальное решение $a = 0$ и $b = 0$, но если нетривиальных решений нет, то мы делаем вывод, что функции независимы)
$\forall x \in \mathbb{R} \ a \sin x + b \cos x = 0$
Пусть $x = 0$, тогда $a \sin 0 + b \cos 0 = 0 + b = 0 \Rightarrow b = 0$
Пусть $x = \dfrac{\pi}{2}$, тогда $a \sin \dfrac{\pi}{2} + b \cos \dfrac{\pi}{2} = a + 0 = 0 \Rightarrow a = 0$
Таким обазом, мы доказали, что из $a \sin x + b \cos x = 0$ следует, что $a = 0$ и $b = 0$, то есть функции $\sin x, \cos x$ независимы.

г) $1, \cos x, \cos 2x, ..., \cos nx$

$\forall x \in \mathbb{R} \ a_0 * 1 + a_1 \cos x + a_2 \cos 2x + ... + a_n \cos nx = 0 \quad (0)$
Возьмём первую производную у (0)
$a_1 \sin x + 2a_2 \sin 2x + ... + na_n \sin nx = 0 \quad (1)$
Возьмём вторую производную у (0)
$a_1 \cos x + 2^2 a_2 \cos 2x + ... + n^2 a_n \cos nx = 0 \quad (2)$
...
Возьмём $2n$-ую производную у (0)
$a_1 \cos x + 2^{2n} a_2 \cos 2x + ... + n^{2n} a_n \cos nx = 0 \quad (2n)$

Пусть $x = 0$, выпишем в единую систему четные производные, то есть выражения $(0), (2), (4), ..., (2n)$

$$\begin{cases} a_0 + a_1 + a_2 + ... + a_n = 0 \\ a_1 + 2^2 a_2 + ... + n^2 a_n = 0 \\ ... \\ a_1 + 2^{2n} a_2 + ... + n^{2n} a_n = 0 \end{cases}$$

Выпишем определитель матрицы ОСЛУ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 0 & 1 & 2^2 & ... & n^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 1 & 2^{2n} & ... & n^{2n} \end{vmatrix} = \text{раскладываем по первому столбцу} = \begin{vmatrix} 1 & 2^2 & ... & n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 2^{2n} & ... & n^{2n} \end{vmatrix} =$$

$$= \text{второй столбец поделим на } 2^2\text{, третий на } 3^2\text{, ..., n-ый на } n^2 = (n!)^2 * \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 2^2 & ... & n^2 \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & 2^{2n-2} & ... & n^{2n-2} \end{vmatrix} =$$

$$= \text{транспонируем } (detA = detA^T) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 2^2 & ... & 2^{n-2} \\ ... & ... & ... & ... \\ 1 & n^2 & ... & n^{2n-2} \end{vmatrix}$$

Видим определитель Вандермонда (в данном случае в степени возводятся $2^2, 3^2, ..., n^2$), вспоминаем, что определитель Вандермонда не равен нулю.
Критерий существования ненулевого решения ОСЛУ: $Ax = 0$ имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow detA = 0$.
Пользуясь критерием, получаем, что наша система не умеет ненулевого решения,
то есть $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$ и функции линейно независимы.

34.4 a) Докажите линейную независимость над $\mathbb{R}$ систем функций

а) $e^{\lambda_1 x}, e^{\lambda_2 x}, ..., e^{\lambda_n x}$,

$\forall x \in \mathbb{R}\ a_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 e^{\lambda_2 x} + ... + a_n e^{\lambda_n x} = 0 \quad (0)$
Возьмём первую производную у (0)
$a_1 \lambda_1 e^{\lambda_1 x} + a_2 \lambda_2 e^{\lambda_2 x} + ... + a_n \lambda_n e^{\lambda_n x} = 0 \quad (1)$
Возьмём вторую производную у (0)
$a_1 \lambda_1^2 e^{\lambda_1 x} + a_2 \lambda_2^2 e^{\lambda_2 x} + ... + a_n \lambda_n^2 e^{\lambda_n x} = 0 \quad (2)$
...
Возьмём $n-1$-ую производную у (0)
$a_1 \lambda_1^{n-1} e^{\lambda_1 x} + a_2 \lambda_2^{n-1} e^{\lambda_2 x} + ... + a_n \lambda_n^{n-1} e^{\lambda_n x} = 0 \quad (n-1)$

Пусть $x = 0$, выпишем в единую систему найденные производные, то есть выражения $(0), (1), (2), ..., (n-1)$

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + ... + a_n = 0 \\ a_1\lambda_1 + a_2\lambda_2 + ... + a_n\lambda_n = 0 \\ ... \\ a_1\lambda_1^{n-1} + a_2\lambda_2^{n-1} + ... + a_n\lambda_n^{n-1} = 0 \end{cases}$$

Выпишем определитель матрицы ОСЛУ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 & ... & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \lambda_3^2 & ... & \lambda_n^2 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \lambda_3^{n-1} & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix} = \text{транспонируем } (detA = detA^T) = \begin{vmatrix} 1 & \lambda_1 & \lambda_1^2 & ... & \lambda_1^{n-1} \\ 1 & \lambda_2 & \lambda_2^2 & ... & \lambda_2^{n-1} \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & \lambda_n & \lambda_n^2 & ... & \lambda_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

Видим определитель Вандермонда, вспоминаем, что определитель Вандермонда не равен нулю.
Критерий существования ненулевого решения ОСЛУ: $Ax = 0$ имеет ненулевое решение $\Leftrightarrow detA = 0$.
Пользуясь критерием, получаем, что наша система не умеет ненулевого решения,
то есть $a_0 = a_1 = ... = a_n = 0$ и функции линейно независимы.

34.5 Доказать, что в пространстве функций одной вещественной переменной векторы f_1, ..., f_n линейно независимы тогда и только тогда, когда существуют числа a_1, ..., a_n такие, что $det(f_i(a_j)) \neq 0$