Разбор задач для подготовки к экзамену по алгебре для группы БПИ209
2 модуль
Автор: vk.com/yourkumir
За представленный исходный разбор спасибо: vk.com/id556098027

Задачи по подстановкам, комплексным числам и общей алгебре

1. Разложить подстановку $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix}$ в произведение циклов, выяснить ее четность. Определить порядок этой подстановки, вычислить σ^{744}.

   Повторим номер из ИДЗ 1 модуля.

   $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 3 & 2 & 5 & 6 & 7 & 4 & 8 & 9 & 1 \end{pmatrix} = (1\ 3\ 5\ 7\ 8\ 9)\,(4\ 6)$ (цикл (2) опускается)

   Четность подстановки - это знак единицы в степени количества инверсий. Количество инверсий равно $2+1+2+2+2+1+1+1 = 12$, то есть $sgn\sigma = 1 \Rightarrow$ подстановка чётная.

   Порядок подстановки - это минимальная степень, в которой подстановка равна тождественной id, и порядок подстановки равен НОК длин независимых циклов подстановки. $\text{НОК}(6, 2, 1) = 6$, то есть порядок подстановки равен 6.

   Вычислим σ^{744} с помощью порядка подстановки. $\sigma^{744} = \sigma^{6*124} = (\sigma^6)^{124} = id^{124} = id$

2. Решить систему уравнений $\begin{cases} (-2+4i)x + 3yi = -10 + 21i \\ (1+5i)x + (1-2i)y = 14 + 19i \end{cases}$.

   Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} -2+4i & 3i & -10+21i \\ 1+5i & 1-2i & 14+19i \end{array}\right)$$

   И решим её

$$\begin{pmatrix} -2+4i & 3i & | & -10+21i \\ 1+5i & 1-2i & | & 14+19i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 20 & -6i+12 & | & 104-2i \\ 26 & -9-7i & | & 109-51i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 10 & -3i+6 & | & 52-i \\ 26 & -9-7i & | & 109-51i \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 10 & -3i+6 & | & 52-i \\ 6 & -21-i & | & 5-49i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 27-2i & | & 47+48i \\ 6 & -21-i & | & 5-49i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 4 & 27-2i & | & 47+48i \\ 2 & -48+i & | & -42-97i \end{pmatrix} \to$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 123-4i & | & 131+242i \\ 1 & -24+0.5i & | & -21-48.5i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 1+2i \\ 1 & -24+0.5i & | & -21-48.5i \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 1 & | & 1+2i \\ 1 & 0 & | & 4-i \end{pmatrix}$$

   Ответ: $x = 4 - i$, $y = 1 + 2i$

3. Решить уравнение $z^2 - (7+i)z + (18+i) = 0$.

$$D = b^2 - 4ac = (7+i)^2 - 4(18+i) = -24 + 10i$$

Найдём корень из дискриминанта, используя тот факт, что $(a+bi)^2 = a^2 + 2abi - b^2$:

$$-24 + 10i = (a+bi)^2 \Rightarrow 10i = 2abi$$

Тогда есть два случая

$$5 = ab \Rightarrow \left[\begin{array}{l} a = 1, b = 5 \ (1) \\ a = 5, b = 1 \ (2) \end{array}\right.$$

Нам подходит случай (1):

$$(1+5i)^2 = 1 + 10i - 25 = -24 + 10i$$

Тогда

$$z_1 = \frac{-b + \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + i + 1 + 5i}{2} = 4 + 3i$$

$$z_2 = \frac{-b - \sqrt{D}}{2a} = \frac{7 + i - 1 - 5i}{2} = 3 - 2i$$

4. Пусть $z = -\sqrt{3} - i$. Вычислить значение $\sqrt[7]{z^3}$, для которого число $\frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i}$ имеет аргумент $\frac{9\pi}{28}$. Найди модуль этого числа.

Переведём z в тригонометрическую форму записи

$$z = -\sqrt{3} - i = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{i}{2}\right) = 2\left(\cos\left(\frac{7\pi}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{6}\right)\right)$$

Воспользуемся формулой Муавра для z^3

$$z^3 = 2^3\left(\cos\left(\frac{7\pi * 3}{6}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi * 3}{6}\right)\right) = 8\left(\cos\left(\frac{7\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{2}\right)\right) = 8\left(\cos\left(\frac{3\pi}{2}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{2}\right)\right)$$

Извлечём корень $\sqrt[7]{z^3}$

$$\sqrt[7]{z^3} = \sqrt[7]{8}\left(\cos\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{7}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{3\pi}{2} + 2\pi k}{7}\right)\right) = \sqrt[7]{8}\left(\cos\left(\frac{3\pi + 4\pi k}{14}\right) + i\sin\left(\frac{3pi + 4\pi k}{14}\right)\right), \ k = \overline{0, 6}$$

Переведём $w = -1 + i$ в тригонометрическую форму записи

$$w = -1 + i = \sqrt{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \sqrt{2}\left(\cos\left(\frac{3\pi}{4}\right) + i\sin\left(\frac{3\pi}{4}\right)\right)$$

Тогда воспользуемся утверждением

$$\frac{z}{w} = \frac{\rho_z}{\rho_w}\left(\cos\left(\phi_z - \phi_w\right) + i\sin\left(\phi_z - \phi_w\right)\right)$$

По условию $arg\frac{\sqrt[7]{z^3}}{-1+i} = \frac{9\pi}{28}$

$$\frac{3\pi + 4\pi k}{14} - \frac{3\pi}{4} = \frac{9\pi}{28}$$

$$2 * (3\pi + 4\pi k) - 7 * (3\pi) = 9\pi$$

$$6\pi + 8\pi k - 21\pi = 9\pi \Rightarrow k = \frac{9\pi + 21\pi - 6\pi}{8\pi} = \frac{24}{8} = 3$$

Ответ: $\sqrt[7]{z^3} = \sqrt[7]{8}\left(\cos\left(\frac{15\pi}{14}\right) + i\sin\left(\frac{15\pi}{14}\right)\right)$

5. Является ли отображение $\phi : X \to Y$, где $X = \left\{\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, a, b, c \in \mathbb{Z}\right\}, Y = \mathbb{Z}, \phi\left(\begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = a + b + c$, инъективным, сюръективным, биективным?

   Обсудим свойства отображения:
   - инъективность: $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
   В данном случае инъективность не выполняется, так как число можно представить в виде суммы трёх чисел бесконечным количеством способов. Для того, чтобы доказать, что отображение не инъективно, используем контрпример:
$$x = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; y = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \; \phi(x) = \phi(y) = 6, \text{ но } x \neq y$$
   - сюръективность: $\forall y \in Y \; \exists x \in X : y = f(x)$
   В данном случае сюръективность выполняется, потому что любое целое число можно представить в виде суммы трёх чисел, например $z = 0 + 0 + z$, то есть для любого целого числа существует соответствующая матрица.

   - биективность: выполняется инъективность и сюръективность одновременно
   В данном случае для отображения не выполняется инъективность, а значит, не выполняется биективность.

6. Является ли (a) группоидом, (b) полугруппой, (c) моноидом, (d) группой множество целых чисел $\mathbb{Z}$ относительно операции $a \circ b = a + b - 5$? Ответ обосновать.

   Будем обозначать множество из условия с операцией на нём, как пару $(\mathbb{Z}, \circ)$.

   (a) Группоид - это множество с заданной на нём бинарной операцией $X * X \to X$.
   Операция $\circ$ является замкнутой на множестве целых чисел, поэтому $(\mathbb{Z}, \circ)$ является группоидом.

   (b) Полугруппа - это множество с заданной на нём ассоциативной бинарной операцией.
   Если $\forall a, b, c \in X \; a * (b * c) = (a * b) * c$, то операция $*$ ассоциативна.
   Из предыдущего пункта вывели замкнутость операции, осталось проверить ассоциативность.
   $a \circ (b \circ c) = a + (b + c - 5) - 5 = a + b + c - 5 - 5 = (a + b - 5) + c - 5 = (a \circ b) \circ c$, то есть $(\mathbb{Z}, \circ)$ является полугруппой.

   (c) Моноид - это полугруппа, в которой есть нейтральный элемент.
   Нейтральным элементом называется $e \in X : \; \forall x \in X \; e * x = x * e = x$
   В нашей полугруппе таким элементом является 5: $\exists e = 5 \in \mathbb{Z} : \forall a \in \mathbb{Z} \; e \circ a = a \circ e = a + e - 5 = a$, то есть $(\mathbb{Z}, \circ)$ является моноидом.

   (d) Группа - это моноид, все элементы которого обратимы.
   Элемент моноида a $(M, *, e)$ называется обратимым, если $\exists b \in M : \; a * b = b * a = e$
   В нашем моноиде обратным элементом будет являться $(10 - a)$: $\forall a \in \mathbb{Z}, \exists b = 10 - a \in \mathbb{Z} : a \circ b = a + b - 5 = a + 10 - a - 5 = 5 = e$, то есть $(\mathbb{Z}, \circ)$ является группой.

7. Является ли отображение $\phi(7^a) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix}$ гомоморфизмом групп, если первая группа — это множество $G = \{7^a, a \in \mathbb{Z}\}$ с операцией умножения, а вторая группа — множество $H = \left\{\begin{pmatrix} b_1 & 0 \\ 0 & b_2 \end{pmatrix}, b_1, b_2 \in \mathbb{Z}\right\}$ с операцией сложения? Является ли это отображение изоморфизмом?

   Разберём понятие гомоморфизма и изоморфизма.
   Пусть даны две группы $(G_1, \circ)$ и $(G_2, *)$. Тогда отображение $f : \; G_1 \to G_2$ называется гомоморфизмом, если $\forall a, b \in G_1 \; f(a \circ b) = f(a) * f(b)$
   Биективный гомоморфизм называется изоморфизмом.

   Данное отображение является гомоморфизмом:
$$\phi\left(7^a \cdot 7^b\right) = \phi\left(7^{a+b}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a+b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} = \phi\left(7^a\right) + \phi\left(7^b\right)$$

   Изоморфизм проверяется аналогично задаче 5.

20.4г Решить систему уравнений $\begin{cases} 2z_1 - (2+i)z_2 = -i \\ (4-2i)z_1 - 5z_2 = -1-2i \end{cases}$.

Выпишем расширенную матрицу системы:

$$\left(\begin{array}{cc|c} 2 & -2-i & -i \\ 4-2i & -5 & -1-2i \end{array}\right)$$

И решим её

$$\begin{pmatrix} 2 & -2-i & | & -i \\ 4-2i & -5 & | & -1-2i \end{pmatrix} \to || \text{ - (2-i)*}| \to \begin{pmatrix} 2 & -2-i & | & -i \\ 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \to$$

Ответ: $z_1 = \dfrac{(2+i)z_2 - i}{2}$

22.7 Вычислить:

к) $\sqrt[8]{16}$

Переведём в тригонометрическую форму число 16:

$$16 = 16(\cos 0 + i \sin 0) \Rightarrow \rho = 16,\ arg = 0$$

Тогда $\sqrt[8]{16}$ в тригонометрической форме:

$$\sqrt[8]{16} = \sqrt[8]{16}\left(\cos\frac{0+2\pi k}{8} + i\sin\frac{0+2\pi k}{8}\right)$$

$$\sqrt[8]{16} = \left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi k}{4} + i\sin\frac{\pi k}{4}\right),\ k = \overline{0,7}\right\}$$

Ответ: $\{\pm\sqrt{2}, \pm\sqrt{2}i, \pm(1+i), \pm(1-i)\}$

л) $\sqrt[6]{-27}$

Переведём в тригонометрическую форму число -27:

$$-27 = 27(\cos\pi + i\sin\pi) \Rightarrow \rho = 27,\ arg = \pi$$

Тогда $\sqrt[6]{-27}$ в тригонометрической форме:

$$\sqrt[6]{-27} = \sqrt[6]{27}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right)$$

$$\sqrt[6]{-27} = \left\{\sqrt{3}\left(\cos\frac{\pi+2\pi k}{6} + i\sin\frac{\pi+2\pi k}{6}\right),\ k = \overline{0,5}\right\}$$

Ответ: $\{\pm i\sqrt{3}, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}+i), \pm\frac{\sqrt{3}}{2}(\sqrt{3}-i)\}$

м) $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$

Переведём в тригонометрическую форму число $8\sqrt{3}i - 8$:

$$8\sqrt{3}i - 8 = 16(\cos\frac{2\pi}{3} + i\sin\frac{2\pi}{3}) \Rightarrow \rho = 16,\ arg = \frac{2\pi}{3}$$

Тогда $\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8}$ в тригонометрической форме:

$$\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8} = \sqrt[4]{16}\left(\cos\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4} + i\sin\frac{\frac{2\pi}{3}+2\pi k}{4}\right)$$

$$\sqrt[4]{8\sqrt{3}i - 8} = \left\{2\left(\cos\frac{2\pi+6\pi k}{12} + i\sin\frac{2\pi+6\pi k}{12}\right),\ k = \overline{0,3}\right\}$$

Ответ: $\{\sqrt{3}+i, -1+i\sqrt{3}, -\sqrt{3}-i, 1-i\sqrt{3}\}$

54.1 Ассоциативна ли операция $*$ на множестве M, если

а) $M = \mathbb{N},\ x * y = x^y$
Если $\forall a, b, c \in M\ a * (b * c) = (a * b) * c$, то операция $*$ ассоциативна.
Проверим: $a * (b * c) = a * (b^c) = a^{b^c} \neq a^{bc} = (a^b) * c = (a * b) * c$
Для контрпримера возьмём $a = b = c = 3$: $3 * (3 * 3) = 3 * (3^3) = 3 * 27 = 3^{27} \neq 3^9 = 27^3 = (3^3)^3 = (3 * 3) * 3$
Ответ: нет.

а) $M = \mathbb{N},\ x * y = \text{НОД}(x, y)$
Если $\forall a, b, c \in M\ a * (b * c) = (a * b) * c$, то операция $*$ ассоциативна.
Проверим: $\forall a, b, c \in \mathbb{N} a * (b * c) = \text{НОД}(a, \text{НОД}(b, c)) = \text{НОД}(a, b, c) = \text{НОД}(\text{НОД}(a, b), c) = (a * b) * c$
Ответ: да.

55.17 Какие из отображений $f : \mathbb{C}^* \to \mathbb{R}^*$ являются гомоморфизмами?
Пусть даны две группы $(G_1, \circ)$ и $(G_2, *)$. Тогда отображение $f:\ G_1 \to G_2$ называется гомоморфизмом, если $\forall a, b \in G_1\ f(a \circ b) = f(a) * f(b)$
а) $f(z) = |z|$
Проверим: $\forall z_1 = \rho_1 (\cos\phi_1 + i \sin\phi_1),\ z_2 = \rho_2 (\cos\phi_2 + i \sin\phi_2) \in \mathbb{C}^*\ f(z_1 * z_2) = |z_1 * z_2| = \rho_1 * \rho_2 = |z_1| * |z_2| = f(z_1) * f(z_2)$, то есть данное отображение является гомоморфизмом.

б) $f(z) = 2|z|$
Проверим: $\exists z_1 = \rho_1 (\cos\phi_1 + i \sin\phi_1),\ z_2 = \rho_2 (\cos\phi_2 + i \sin\phi_2) \in \mathbb{C}^*\ f(z_1 * z_2) = 2|z_1 * z_2| = 2 * \rho_1 * \rho_2 \neq 4 * \rho_1 * \rho_2 = 2|z_1| * 2|z_2| = f(z_1) * f(z_2)$, то есть данное отображение не является гомоморфизмом и достаточно легко придумать контрпример, подобрав такие числа $\rho_1,\ \rho_2$, для которых выполняется неравенство $2 * \rho_1 * \rho_2 \neq 4 * \rho_1 * \rho_2$.

55.30 Пусть G - множество всех вещественных чисел, отличных от -1. Доказать, что G является группой относительно операции $x \cdot y = x + y + xy$.

Множество M с бинарной операцией $*$ называется группой, если
1) $\forall x, y, z \in M:\ (x * y) * z = x * (y * z)$
2) $\exists e \in M\ \forall x \in M:\ x * e = e * x = x$
3) $\forall x \in M\ \exists x^{-1} \in M:\ x * x^{-1} = x^{-1} * x = e$

Проверим все эти свойства:
0) операция $\cdot$ замкнута на множестве G
1) $\forall x, y, z \in G:\ (x \cdot y) \cdot z = (x + y + xy) \cdot z = (x + y + xy) + z + (x + y + xy) * z = x + y + z + xy + xz + yz + xyz =$ $= x + (y + z + yz) + x * (y + z + yz) = x \cdot (y + z + yz) = x \cdot (y \cdot z)$
2) $\exists e = 0 \in G\ \forall x \in M:\ x \cdot e = e \cdot x = x + 0 + x * 0 = x$
3) $\forall x \in G\ \exists x^{-1} = \dfrac{-x}{1 + x} \in M:\ x \cdot x^{-1} = x^{-1} \cdot x = x - \dfrac{x}{1 + x} - \dfrac{x^2}{1 + x} = \dfrac{x * (1 + x) - x - x^2}{1 + x} 0 = e$
Что и требовалось доказать.

56.3 Найти порядок элемента группы:

Порядок элемента группы - это наименьшее натуральное число такое, что элемент группы в степени, равной данному числу, равен нейтральному элементу группы. Если такого числа нет, то говорят, что элемент группы имеет бесконечный порядок.

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \in \mathbb{S}_5$
Переходя из теории групп к подстановкам, порядок подстановки как элемента группы - это привычный нам порядок подстановки, который равен НОК длин всех циклов, на которые она разбивается, поэтому:

$$ord\left(\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix}\right) = \text{НОК}(3, 2) = 6$$

в) $\dfrac{-\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i \in \mathbb{C}^*$
Нейтральным элементом по умножению в группе комплексных чисел без нуля является 1, поэтому нам необходимо найти степень n, в которой данное число равняется 1 с помощью формулы Муавра:

$$\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i = 1\left(\cos\frac{5\pi}{6}+i\sin\frac{5\pi}{6}\right)$$

$$\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)^n = 1^n\left(\cos\frac{5\pi n}{6}+i\sin\frac{5\pi n}{6}\right) = 1\left(\cos 0+i\sin 0\right) = 1 \Rightarrow n = 12$$

$$ord\left(\frac{-\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right) = n = 12$$