1.

Выполните действия:

$$(3B)^2 - 2(BA^{-1} - E)^T,$$

где

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Теория. Пусть даны две прямоугольные матрицы A и B размерности $l \times m$ и $m \times n$ соответственно:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{l1} & a_{l2} & \cdots & a_{lm} \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{pmatrix}$$

Тогда матрица C размерностью $l \times n$:

$$C = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{l1} & c_{l2} & \cdots & c_{ln} \end{pmatrix}$$

в которой

$$c_{ij} = \sum_{r=1}^{m} a_{ir} b_{rj}$$

будет являться их *произведением.*
Транспонированная матрица A^T - это матрица, полученная из матрицы A заменой строк на столбцы.
Обратная матрица. Рассмотрим матрицу $A \in Mn(\mathbb{R})$ (квадратную!). Матрица $B \in Mn(\mathbb{R})$ называется обратной матрицей к матрице A, если $B \cdot A = E = A \cdot B$. Обозначаем A^{-1}.
Матрица A имеет обратную $\Longleftrightarrow det(A) \neq 0$.
Как найти обратную матрицу?
Способ 1. Обратную матрицу A^{-1} можно вычислить по формуле

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \widetilde{A},$$

где $\widetilde{A}$ - союзная матрица, т.е. транспонированная матрица алгебраических дополнений:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & \cdots & A_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{n1} & \cdots & A_{nn} \end{pmatrix}^T, A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij},$$

где M_{ij} - это определитель матрицы, получающейся из исходной матрицы A путем вычеркивания i-ой строки, j-ого столбца.
Способ 2. Запишем рядом матрицы A и единичную матрицу E:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & \cdots & a_{1n} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} & 0 & \cdots & 1 \end{array}\right)$$

Приведем матрицу A к единичной методом Гаусса, применяя аналогичные преобразования к стоящей справа единичной матрице. Когда матрица A станет единичной, вторая матрица окажется равна A^{-1}.

Решение. Определим последовательность действий:

$$3B \Rightarrow (3B)^2 \Rightarrow A^{-1} \Rightarrow BA^{-1} \Rightarrow BA^{-1} - E \Rightarrow (BA^{-1} - E)^T \Rightarrow$$
$$\Rightarrow 2(BA^{-1} - E)^T \Rightarrow (3B)^2 - 2(BA^{-1} - E)^T$$

Погнали!

1) $3B = 3\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

2) $(3B)^2 = \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 15 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 \cdot 15 + 3 \cdot (-3) & 15 \cdot 3 + 3 \cdot 0 \\ -3 \cdot 15 + 0 \cdot (-3) & -3 \cdot 3 + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 216 & 45 \\ -45 & -9 \end{pmatrix}$

3) $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \widetilde{A} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix}$

Чуть дальше на матрице большей размерности мы более наглядно посмотрим нахождение обратной матрицы.

4) $BA^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -3/2 & 1 \\ -1/2 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -15/2 - 1/2 & 5 \\ -3/2 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -3/2 & -1 \end{pmatrix}$

5) $BA^{-1} - E = \begin{pmatrix} -8 & 5 \\ -3/2 & -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 & 5 \\ 3/2 & -2 \end{pmatrix}$

6) $(BA^{-1} - E)^T = \begin{pmatrix} -9 & 3/2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$

7) $2(BA^{-1} - E)^T = 2 \cdot \begin{pmatrix} -9 & 3/2 \\ 5 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -18 & 3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix}$

8) $(3B)^2 - 2(BA^{-1} - E)^T = \begin{pmatrix} 216 & 45 \\ -45 & -9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -18 & 3 \\ 10 & -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 234 & 42 \\ -55 & -5 \end{pmatrix}$

Ответ: $\begin{pmatrix} 234 & 42 \\ -55 & -5 \end{pmatrix}$

2.

Решите систему линейных уравнений *с помощью обратной матрицы*:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 20 \\ 2x_1 - x_3 = 14 \\ x_2 + 2x_3 = 15 \end{cases}$$

Теория. Что значит "решить систему с помощью обратной матрицы"? Мы знаем, что систему линейных уравнений можно записать в виде $Ax = b$, где A - это матрица коэффициентов перед x_i (по строкам - уравнения, по столбцам - x_i), а b - вектор-столбец свободных членов (правая часть уравнений). Если матрица A квадратна и ее определитель не равен 0, мы можем решить это уравнение как обычное матричное уравнение:

$$Ax = b \Leftrightarrow x = A^{-1}b.$$

Имея матрицу A размерности $n \times n$ и столбец b размерности $n \times 1$, в результате получится вектор-столбец размерности $n \times 1$, который и будет решением системы.

Будьте внимательны! Самая частая ошибка в таких номерах - умножение не с той стороны. Всегда помните, что умножение матриц в общем случае не коммутативно, и потому если в правой части матрица A стояла *слева* от x, то и умножать на обратную ей матрицу нужно *слева*:

$$Ax = b \Rightarrow A^{-1}Ax = A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b$$

Решение. Запишем нашу систему уравнений в матричном виде.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix}$$

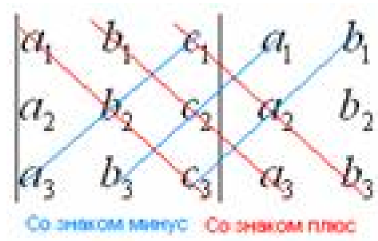
Т.е. $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix}$.

Столбец x будет вычисляться по формуле $x = A^{-1}b$, то есть нам достаточно 1) найти обратную матрицу к A, 2) умножить ее на столбец b.

Для тренировки предлагаю посчитать матрицу A^{-1} двумя способами.

Способ 1. Воспользуемся формулой $A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot \widetilde{A}$.

Мнемонический способ вычисления определителя матрицы 3×3 показан на рисунке ниже:



$$det(A) = 0 + 0 + 2 - 0 - 4 + 1 = -1$$

Найдем союзную матрицу. Помним, что это транспонированная матрица алгебраических дополнений:

$$\widetilde{A} = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{pmatrix}^T$$

Начнем с поиска алгебраических дополнений.

$$A_{11} = (-1)^{1+1} \cdot det \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = 1$$

$$A_{12} = (-1)^{1+2} \cdot det \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = -4$$

$$A_{13} = (-1)^{1+3} \cdot det \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 2$$

$$A_{21} = (-1)^{2+1} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = -1$$

$$A_{22} = (-1)^{2+2} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2$$

$$A_{23} = (-1)^{2+3} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -1$$

$$A_{31} = (-1)^{3+1} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$$

$$A_{32} = (-1)^{3+2} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{pmatrix} = 3$$

$$A_{33} = (-1)^{3+3} \cdot det \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix} = -2$$

Теперь мы можем подставить полученные значения в формулу обратной матрицы:

$$A^{-1} = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & 3 & -2 \end{pmatrix}^T = -1 \cdot \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -4 & 2 & 3 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Способ 2. Теперь найдем обратную матрицу с помощью метода Гаусса.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II=II-2I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III=2III+II}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & -3 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{I = I - III}]{\text{II=II+3III}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 & -8 & 4 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{II=II/(-2)}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 3 & -1 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I=I - II}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 4 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 & 2 \end{array}\right)$$

Получили обратную матрицу:

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Наконец, получим решение нашей системы.

$$x = A^{-1}b = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -2 & -3 \\ -2 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 20 \\ 14 \\ 15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 9 \\ 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

Ответ. $x_1 = 9, x_2 = 7, x_3 = 4$
Замечание. Если бы в условии не было уточнения про обратную матрицу, эту систему можно было бы решить методом Крамера. Так как дальше примеров на него в этом нулевике не будет, приведу дополнительно решение этого номера Крамером.
Теория. Пусть дана СЛАУ, записанная в виде $Ax = b$. Если A - квадратная и $det(A) \neq 0$, то система совместна и имеет единственное решение, которое находится по формулам

$$x_i = \frac{\Delta_i}{\Delta}.$$

Здесь $\Delta = det(A)$, а Δ_i - это определитель матрицы, полученной из матрицы A заменой i-ого столбца столбцом b.

Решение методом Крамера. Первый шаг - посчитать определитель матрицы A. Мы уже посчитали его ранее при нахождении обратной матрицы, поэтому я не буду переписывать вычисления:

$$det(A) = -1.$$

Далее найдем Δ_i для каждого i и, соответственно, x_i.

$$\Delta_1 = det\begin{pmatrix} 20 & 1 & 1 \\ 14 & 0 & -1 \\ 15 & 1 & 2 \end{pmatrix} = 0 - 15 + 14 - 0 + 20 - 28 = -9, x_1 = \frac{\Delta_1}{\Delta} = 9$$

$$\Delta_2 = det\begin{pmatrix} 1 & 20 & 1 \\ 2 & 14 & -1 \\ 0 & 15 & 2 \end{pmatrix} = 28 + 0 + 30 - 0 + 15 - 80 = -7, x_2 = \frac{\Delta_2}{\Delta} = 7$$

$$\Delta_2 = det\begin{pmatrix} 1 & 1 & 20 \\ 2 & 0 & 14 \\ 0 & 1 & 15 \end{pmatrix} = 0 + 0 + 40 - 0 - 14 - 30 = -4, x_3 = \frac{\Delta_3}{\Delta} = 4$$

Получили тот же ответ.

3.

Найдите все решения системы линейных уравнений

$$\begin{cases} x_1 - x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 0 \\ 3x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 = 1 \\ 2x_1 - x_2 - 3x_3 - 3x_4 + 2x_5 = 1 \end{cases}$$

Теория. Сразу обратим внимание, что здесь матрица не квадратная, то есть мы не можем использовать ни обратную матрицу, ни метод Крамера. Следовательно, на помощь нам приходит метод Гаусса. Напомню, что допустимыми операциями метода Гаусса являются:

1) $(i) \leftrightarrow (j)$ - поменять местами строки
2) $(i) \to k \cdot (i)$ - умножить все элементы строки на число $\neq 0$
3) $(i) \to (i) + \lambda(j)$ - заменить i-ую строку на сумму этой строки и j-ой строки, умноженной на число.

Также в методе Гаусса мы можем удалить из матрицы нулевые строки.
Как же найти решение системы с помощью метода Гаусса? Для этого требуется записать матрицу $(A|b)$, привести ее к ступенчатому виду прямым ходом метода Гаусса, затем провести обратный ход метода Гаусса, получив канонический вид (этот шаг не обязателен, но рекомендуется, так как тогда не потребуется совершать преобразования уравнений отдельно, все преобразования будут совершаться над матрицей) и выписать полученные уравнения, выразив главные переменные через свободные.
Напомню, что матрица имеет *ступенчатый* вид, если номера первых ненулевых элементов всех строк (т.е. ведущих элементов) возрастают, а нулевые строки стоят внизу матрицы. Матрица имеет *канонический* вид, если она уже имеет ступенчатый вид, причем все ведущие элементы равны 1, и в любом столбце, содержащем ведущий элемент, выше и ниже его стоит 0.
ВАЖНО! Настоятельно не рекомендуется одновременно совершать преобразования со строками и столбцами матрицы, особенно при решении СЛАУ. Собственно для СЛАУ единственным валидным преобразованием столбцов будет поменять их местами - это равносильно перемене мест переменных во всех уравнениях системы.

Решение. Запишем матрицу нашей системы и преобразуем с помощью метода Гаусса:

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 3 & -2 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -3 & -3 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III = III - 2I}]{\text{II=II - 3I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & -9 & 2 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III=III - II}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -2 & 2 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III=III/(-2)}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & -7 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II = II + 7III}]{\text{I = I - 3III}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -1 & 4 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -11 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I = I + II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & -7 & 0 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & -11 & 0 & -7 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

Выпишем получившуюся в результате преобразований систему.

$$\begin{cases} x_1 = 1 + 7x_3 + 4x_5 \\ x_2 = 1 + 11x_3 + 7x_5 \\ x_4 = x_5 \end{cases}$$

Это и есть искомое решение! Пусть по условию это и не требуется, можем записать его в векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$$

ФСР соответствующей однородной СЛАУ выглядит так:

$$e_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ 11 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Ответ: $\begin{cases} x_1 = 1 + 7x_3 + 4x_5 \\ x_2 = 1 + 11x_3 + 7x_5 \\ x_4 = x_5 \end{cases}$

4.

Подобрать i и j так, чтобы произведение $a_{32}a_{16}a_{2i}a_{53}a_{45}a_{6j}a_{77}$ входило в определитель 7-ого порядка со знаком минус.

Теория. Определитель можно вычислять по-разному, но его суть от этого остается неизменной. Изначально определитель матрицы размера $n \times n$ - это сумма всех возможных произведений вида $a_{1i_1}a_{2i_2}...a_{ni_n}$, где $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n$, взятых со знаком + или -. Знак, конечно, детерминирован, и находится как четность соответствующей подстановки.
Логичный вопрос - откуда в рассуждении взялась подстановка? Если посмотреть на индексы элементов повнимательнее, а также вспомнить, что по сути в итоге нам нужно

получить все возможные произведения элементов, взятых *по одному* из каждой строки и каждого столбца, то мы получим некоторый набор биекций где числам от 1 до n (номерам строк) сопоставлены те же числа от 1 до n - матрица-то квадратная. Ничего не напоминает?
Иными словами, каждый элемент, входящий в определитель n-ого порядка, мы можем задать с помощью подстановки вида

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}.$$

Все возможные такие подстановки представляют индексы всех элементов, входящих в определитель порядка n. Четность подстановки определяет знак элемента - '-', еси подстановка нечетна, '$+$' в противном случае.
Решение. Рассмотрим индексы входящих в произведение элементов.
Первое, что мы можем определить - какие столбцы не вошли в произведение, учитывая, что каждый из столбцов $1, 2, \cdots, 7$ должен войти в него ровно один раз. Это столбцы 1 и 4.
Чтобы определить, какое именно их расположение подойдет (т.е. будет ли $i = 1$ или $i = 4$), необходимо найти знаки соответствующих подстановок.
Для удобства рекомендуется записывать подстановки со строго возрастающими элементами в первой строке.
Изначально подстановка имела вид $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & i & 2 & 5 & 3 & j & 7 \end{pmatrix}$.
Предположим, что $i = 1, j = 4$. Подстановка примет вид:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 1 & 2 & 5 & 3 & 4 & 7 \end{pmatrix}.$$

Ее четность равна количеству инверсий. Подсчитаем их: $inv = 5 + 2 = 7$ (элемент 6 необходимо передвинуть на 5 позиций вправо, и затем элемент 5 - на 2 позиции вправо).
Подстановка нечетна, следовательно, знак такого произведения будет -. Ответ $i = 1, j = 4$ нам подходит.
Проверим вторую подстановку, в которой $i = 4, j = 1$:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 6 & 4 & 2 & 5 & 3 & 1 & 7 \end{pmatrix}.$$

Количество инверсий равно $inv = 5 + 3 + 1 + 2 + 1 = 12$. Подстановка четна, то есть произведение войдет в определитель со знаком $+$.

Ответ: $i = 1, j = 4$

5.

Найти все такие $\sigma \in S_8$, что $\sigma^2 = (123)(456)$.
Теория. Вспомним, что такое подстановки, как определена на них операция умножения (композиции) и как подстановки записываются в виде циклов.
Подстановка - это это биективное отображение множества $1, ..., n$ в себя:

$$\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \cdots & \sigma(n) \end{pmatrix}$$

Пусть σ_1 и σ_2 - две подстановки $\in S_n$. Тогда подстановку $\sigma \in S_n$, являющуюся их *произведением (композицией)* можно получить, последовательно применяя подстановки σ_2 и σ_1:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Обратите внимание, вопрос с какой стороны умножать подстановки - вопрос исключительно договоренности. В примере умножение сделано справа налево.
Каждую подстановку можно разложить в произведение независимых циклов. Цикл - это фактически подстановка, в которой при повторении ее достаточное число раз всякий из действительно перемещаемых ею символов может быть переведен в любой другой из этих символов. Звучит не слишком понятно, но очень просто увидеть разложение подстановки в цикл на примере: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 3 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix} = (14523)$, а $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 1 & 4 & 5 & 2 & 6 & 3 \end{pmatrix} = (1)(24)(356)$.
Во второй подстановке цикл (1) при записи можно опустить.
Решение. Для начала запишем нашу подстановку не в циклическом виде (для наглядности):

$$\sigma^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

1. Обратим внимание, что стоящие в конце на "своих"позициях 7 и 8 могли получиться при возведении в квадрат только в двух случаях: если они изначально не входили в цикл (т.е. в σ содержались одиночные циклы (7) и (8)), либо они составляли цикл (78), который в квадрате также переходит в тождественный цикл. При любом расположении первых 6 элементов мы должны будем учитывать эти два варианта.

2. Теперь подумаем, как могли получиться два цикла длины 3? Рассмотрев поведение циклов разной длины при возведении в квадрат можно понять, что циклы длины 3 могли получиться только в двух случаях: 1) если изначально они были циклами длины 3, или 2) если все элементы входили в состав цикла длины 6.

Рассмотрим сначала цикл длины 3.

$$(abc)^2 = (cab)$$

Тогда первый вариант циклов - (312)(645).

Теперь посмотрим на цикл длины 6:

$$(abcdef)^2 = (ace)(bdf).$$

(Можете проверить этот факт.)

При этом нам известно, что полученная подстановка $(ace)(bdf) = (123)(456)$. Зафиксировав $a = 1, c = 2, e = 3$, получим возможные подстановки: $(142536), (152634), (162435)$. Можно проверить, что такие подстановки при возведении в квадрат действительно дадут искомую:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 2 & 3 & 1 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (123)(456)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 5 & 6 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (123)(456)$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 4 \end{pmatrix} = (123)(456)$$

Также можно отметить, что если не фиксировать цикл (123), мы придем к идентичным уже выписанным подстановкам. Например:

$$(243516) = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 \\ 6 & 4 & 5 & 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Таким образом, комбинируя циклы для первых шести элементов (1-6) и для последних (7 и 8), мы получили $(3+1)\cdot 2 = 8$ разных подстановок (выписывать которые мне лень, а вам по условию придется).

6.

Решите матричное уравнение:

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Теория. Вся теория, необходимая для решения этого номера, уже у нас встречалась: матричное умножение (некоммутативно!), обратные матрицы.
Решение. Мы имеем выражение вида $XA = B$. Чтобы найти отсюда X, достаточно умножить обе части на обратную матрицу A^{-1} *справа*:

$$X = BA^{-1}$$

.
Начнем с вычисления обратной матрицы. Воспользуемся элементарными преобразованиями.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III = 2III + I}]{\text{II = II - I}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 6 & 3 & 1 & 0 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III = III + 2II}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 3 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 9 & -1 & 2 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III = III/9}]{\text{II = II/(-3)}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1/3 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 2/9 & 2/9 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{II = II + III}]{\text{I = I + III}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 2 & 0 & 8/9 & 2/9 & 2/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 2/9 & 2/9 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I = I/2}} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 4/9 & 1/9 & 1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 2/9 & 2/9 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I = I - II}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2/9 & 2/9 & -1/9 \\ 0 & 1 & 0 & 2/9 & -1/9 & 2/9 \\ 0 & 0 & 1 & -1/9 & 2/9 & 2/9 \end{array}\right)$$

Получили обратную матрицу:

$$A^{-1} = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$X = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 5 & 5 & 2 \\ 5 & 5 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

Ответ: $X = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 7/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}$

7.

Решить неравенство:

$$det\begin{pmatrix} x & 2 & 1 & 1 \\ 4 & 1 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} \leqslant -50$$

Теория. Для решения достаточно записать формулу для вычисления определителя и решить полученное неравенство стандартным способом.
Вспомним, какие есть способы вычисления определителя.

- "стандартный"способ - найти сумму всех возможных произведений вида $a_{1i_1}a_{2i_2}...a_{ni_n}$, где $i_1 \neq i_2 \neq \cdots \neq i_n$, взятых со знаком $+$ или -. Подходит для небольших матриц. Для матриц размера 3 существуют мнемоники для запоминания формулы определителя.

- разложением по строке (столбцу). Пусть дана матрица

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

  Зафиксируем некоторую строку i. Тогда определитель матрицы $A_{n\times n}$ можно разложить по выбранной строке следующим образом:

$$det(A) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}A_{ij}.$$

  Обозначение A_{ij} мы уже встречали, это алгебраическое дополнение элемента a_{ij}.

- приведением матрицы к треугольному виду с помощью элементарных преобразований. Однако не забывайте, что такие преобразования могут изменить определитель:

  – при перестановке двух строк определитель меняет свой знак на противоположный;

  – при умножении элементов строки на ненулевое число определитель умножается на это число. Заметьте, что это значит, что чтобы вернуться к искомому определителю, результат придется на это число разделить:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{k1} & a_{k2} & \cdots & a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = \frac{1}{\lambda} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda a_{k1} & \lambda a_{k2} & \cdots & \lambda a_{kn} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$$

  – при прибавлении к строке другой строки, предварительно умноженной на ненулевое число, определитель не изменяется.

Способы можно комбинировать, например, сперва элементарными преобразованиями занулить все элементы какой-нибудь строки кроме одного, и таким образом понизить порядок определителя, а затем разложить по этой строке.

Решение. Разложим определитель по первой строке. Вообще можно было бы предварительно воспользоваться элементарными преобразованиями, но здесь предлагаю потренироваться решать "в лоб".

$$x \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 4 & 1 & -2 \\ -1 & 1 & 2 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 4 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$= x\cdot(2+16+-2+8-2-4)-2\cdot(8+12+2+6-8+4)+(8+6+8+6-32+2)-(4+3-8-6-16+1) =$$
$$= 18x - 2 \cdot 24 - 2 + 22 = 18x - 28$$

$$18x - 28 \leqslant -50$$
$$18x \leqslant -22$$
$$x \leqslant -\frac{11}{9}$$

Ответ. $x \leqslant -\frac{11}{9}$

8.

Вычислите определитель матрицы порядка n:

$$det \begin{pmatrix} 5 & 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Теория. Перед нами так называемая *трехдиагональная* матрица, определитель которой задается с помощью рекуррентной формулы. Рассмотрим вывод этой формулы и ее дальнейшие преобразования сразу на практике.
Решение. Обозначим определитель матрицы размера $n \times n$ как Δ_n и разложим его по первой строке.

$$\Delta_n = 5 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 5 \end{vmatrix}_{n-1} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 5 \end{vmatrix}_{n-1}$$

Заметим, что первый определитель в формуле - не что иное, как определитель аналогичной трехдиагональной матрицы, но размера $n-1$. Обозначим его соответственно Δ_{n-1} и разложим второй определитель по первому столбцу.

$$\Delta_n = 5 \cdot \Delta_{n-1} - 2 \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 3 & 5 & 2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 5 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 3 & 5 \end{vmatrix}_{n-2} = 5 \cdot \Delta_{n-1} - 6 \cdot \Delta_{n-2}$$

Получили рекуррентную формулу, в которой определитель порядка n выражается через определители порядка $n-1$ и $n-2$.
Следующим шагом мы должны найти такие λ, что последовательность λ^n удовлетворит нашей формуле. Для этого решим уравнение

$$\lambda^n = 5\lambda^{n-1} - 6\lambda^{n-2}$$

$$\lambda^2 = 5\lambda - 6$$

$$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$$

$$\lambda_1 = 2, \lambda_2 = 3$$

Осталось найти такую линейную комбинацию $\lambda_1^n = 2^n$ и $\lambda_2^n = 3^n$, которая удовлетворит нашему рекуррентному соотношению.
Для этого найдем первые два значения определителя:

$$\Delta_1 = 5, \Delta_2 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 3 & 5 \end{vmatrix} = 19$$

и выразим их через л.к. λ^n:

$$\begin{cases} 2c_1 + 3c_2 = 5 \\ 2^2c_1 + 3^2c_2 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2c_1 + 3c_2 = 5 \\ 4c_1 + 9c_2 = 19 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_1 = -2 \\ c_2 = 3 \end{cases}$$

Ответ: $\Delta_n = -2 \cdot 2^n + 3 \cdot 3^n$

9.

Найти ранг матрицы при всевозможных значениях параметра λ:

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & \lambda & -2 \\ -7 & -8 & 1 & \lambda - 7 \end{pmatrix}$$

Теория. *Минором* k-ого порядка матрицы A называется определитель матрицы, составленный из элементов, стоящих на пересечении произвольных k строк и k столбцов. *Ранг* матрицы - это наивысший порядок отличного от нуля минора.
Простейший способ найти ранг матрицы - с помощью элементарных преобразований привести матрицу к ступенчатому виду и посчитать количество ненулевых строк.
Решение. Воспользуемся элементарными преобразованиями! Конечно, за счет параметра их может быть сложно довести до ступенчатой матрицы, но так мы сможем увидеть зависимость ранга от λ.

$$\begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & \lambda & -2 \\ -7 & -8 & 1 & \lambda - 7 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{IV = IV + I}} \begin{pmatrix} 3 & 3 & -1 & 5 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & \lambda & -2 \\ -4 & -5 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{I = I - II}}$$

$$\to \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ -4 & -5 & \lambda & -2 \\ -4 & -5 & 0 & \lambda - 2 \end{pmatrix} \xrightarrow[\text{IV = IV + I}]{\text{III = III + I}} \begin{pmatrix} 4 & 5 & 0 & 2 \\ -1 & -2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda \end{pmatrix}$$

Во-первых, мы можем заметить, что наша матрица имеет ранг как минимум 2, так как угловой минор порядка 2 не равен 0: $\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} = -3$.
Во-вторых, обратим внимание на нижние две строки. Они станут нулевыми при $\lambda = 0$, в остальных случаях они войдут в не равный нулю минор порядка 4.
Ответ: при $\lambda = 0$ $Rg = 2$, иначе $Rg = 4$

10.

Проверьте совместность системы линейных уравнений. Найдите все ее решения (ответ запишите в векторном виде, выделив частное решение):

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + 2x_3 + 3x_5 = 5 \\ 2x_1 - 7x_2 + 4x_3 + x_4 = 9 \\ x_1 - 3x_2 + 2x_3 + x_4 - 3x_5 = 4 \end{cases}$$

Теория. Совместность СЛАУ - это существование у нее решений. Самый простой способ определить, совместна ли СЛАУ - воспользоваться теоремой Кронекера-Капелли, тем более для этого нет необходимости совершать дополнительные действия, достаточно привести матрицу к ступенчатому виду.
По *теореме Кронекера-Капелли* СЛАУ $Ax = b$ совместна $\Leftrightarrow Rg(A|b) = Rg(A)$.
Решение. Начнем приводить матрицу к каноническому виду, по ходу преобразований определив ее совместность.

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 2 & -7 & 4 & 1 & 0 & 9 \\ 1 & -3 & 2 & 1 & -3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{III = III - I}]{\text{II = II - 2I}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III = III - II}}$$

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right)$$

$Rg(A) = Rg(A|b)$, поэтому по теореме Кронекера-Капелли система совместна.

$$\to \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & -4 & 2 & 0 & 3 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I = I + 4II}} \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 2 & 4 & -21 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -6 & -1 \end{array}\right)$$

Запишем полученный результат в виде системы.

$$\begin{cases} x_1 = 1 - 2x_3 - 4x_4 + 21x_5 \\ x_2 = -1 - x_4 + 6x_5 \end{cases}$$

В векторном виде:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} x_3 + \begin{pmatrix} -4 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} x_4 + \begin{pmatrix} 21 \\ 6 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} x_5$$

Частным решением системы является вектор $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

184.

Найти все подстановки чисел $1, 2, 3, 4$, перестановочные с подстановкой

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 4 & 3 \end{pmatrix}$$

Теория. Решение, которое помогло в свое время мне осознать этот номер, можно найти вот здесь. Для решения нам необходимо будет воспользоваться следующими двумя фактами.
Во-первых, что означает "подстановка, перестановочная с данной"? На самом деле это не что иное, как *коммутирующая* подстановка. То есть такая подстановка X, что $XS = SX$. Перепишем эту формулу немного иначе:

$$S = XSX^{-1}$$

Во-вторых, что нам известно о конструкции вроде $\sigma\tau\sigma^{-1}$? В части, посвященной общей алгебре, вы еще не раз встретите такое произведение. В данном случае нас интересует следующее его свойство. Пусть $\tau = (i_1 i_2 \cdots i_k)(j_1 j_2 \cdots j_s) \cdots$ - разложение подстановки τ в произведение независимых циклов. Тогда

$$\sigma\tau\sigma^{-1} = (\sigma(i_1)\sigma(i_2) \cdots \sigma(i_k))(\sigma(j_1)\sigma(j_2) \cdots \sigma(j_s)) \cdots .$$

Доказательство этого факта можно посмотреть по ссылке выше.
Также решение представлено в учебнике в ответах, поэтому разбирать его здесь подробно не вижу смысла.

283

Вычислить определитель приведением к треугольному виду:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$$

Теория. Этот способ подразумевает использование элементарных преобразований. Их действие уже на определитель описывалось выше.
Решение. Попробуем подобрать такие преобразования, которые максимально просто приведут нашу матрицу к треугольному виду.
Заметим, что на первой позиции элемент не равен 1. Как мы можем привести его к 1? Поделить на 3? Тогда дальше нам придется работать с дробями, а в них легко запутаться. Давайте вычтем из первой строки вторую и посмотрим, что получится.

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{I=I-II}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{(i)=(i)-2I, i>1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 5 & 2 & \cdots & 2 \\ 0 & 4 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 4 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix} =$$

Повторим трюк со второй строкой, превратив 5 в 1.

$$\overset{\text{II=II-III}}{=}\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 4 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 4 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{(i)=(i)-4II, i>2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 6 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$$

Заметим, что каждый раз на диагонали остается элемент, равный $2n+1$, а под ним столбец заполняется элементами $2n$, где n - номер столбца. Т.е. в итоге мы придем к определителю вида:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & -1 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2n+1 \end{vmatrix} = 2n+1$$

Еще один вариант преобразований:

$$\begin{vmatrix} 3 & 2 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 3 & 2 & \cdots & 2 \\ 2 & 2 & 3 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{(i)=(i)-(n), i<n}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & -1 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & -1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 2 & 2 & 2 & \cdots & 3 \end{vmatrix} \overset{\text{T}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \cdots & 3 \end{vmatrix}$$

Если теперь мы поочередно будем прибавлять к строке (n) строки от (1) до $(n-1)$, мы обнулим все значения, кроме значения в правом нижнем углу. К концу преобразований мы $n-1$ раз прибавим к этому значению 2, то есть в правом нижнем углу будет стоять $2(n-1)+3 = 2n-2+3 = 2n+1$. Итоговый определитель будет иметь вид:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 2 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 2 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2n+1 \end{vmatrix} = 2n+1$$

Ответ: $2n+1$

299.

Обратите внимание, что в нулевике опечатка. В сборнике Проскурякова этот номер просят решать методом рекуррентных соотношений!
Вычислить определитель методом рекуррентных соотношений:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}$$

Решение. Воспользуемся уже известным алгоритмом. Разложим наш определитель по первой строке:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_n = 2 \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-1} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-1} =$$

$$= 2\Delta_{n-1} - \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 2 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 2 \end{vmatrix}_{n-2} = 2\Delta_{n-1} - \Delta_{n-2}$$

Перейдем к квадратному уравнению и решим его.

$$\lambda^2 = 2\lambda - 1$$

$$\lambda^2 - 2\lambda + 1 = 0$$

$$\lambda_{1,2} = 1$$

Для случая $\lambda_1 = \lambda_2$ дальнейшнее решение незначительно отличается. Вместо рассмотрения равенства $\Delta_n = c_1\lambda_1^n + c_2\lambda_2^n$ мы рассмотрим $\Delta_n = c_1\lambda^n + c_2 n\lambda^n$.
Найдем первые два значения определителя для $n = 1$ и $n = 2$:

$$\Delta_1 = 2, \Delta_2 = 3$$

Тогда получаем систему:

$$\begin{cases} 2 = c_1 + c_2 \\ 3 = c_1 + 2c_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c_2 = 1 \\ c_1 = 1 \end{cases}$$

Итого определитель выражаем через формулу:

$$\Delta_n = 1 \cdot 1^n + 1 \cdot n \cdot 1^n = n + 1$$

Ответ: $\Delta_n = n + 1$

316.

Обратите внимание, в задачнике в этом номере не был указан метод, которым необходимо пользоваться!
Вычислите определитель:

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix}$$

Решение. Вычтем из каждой строки $(i), i < n$ строку (n).

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{(i)=(i)-(n), i<n}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \end{vmatrix} =$$

Теперь поочередно будем прибавлять к строке (n) строки (1)-$(n-1)$. В результате все элементы строки станут равны 0, а последний элемент будет инкрементирован $n-1$ раз.

$$\overset{\text{(n)=(i)+(n) for i<n}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \cdots & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \cdots & 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & n-1 \end{vmatrix} = (-1)^{n-1}(n-1)$$

Ответ: $(-1)^{n-1}(n-1)$

348.

Вычислить определитель:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix}$$

Теория. Для вычисления этого определителя нам понадобится использовать другой очень важный определитель - определитель Вандермонда.

$$V(x_1, \cdots, x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant j < i \leqslant n} (x_i - x_j)$$

Решение. Давайте сделаем не очень очевидное действие и допишем к нашему определителю строчку и столбец:

$$\begin{vmatrix} 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & 1+x_1 & 1+x_1^2 & \cdots & 1+x_1^n \\ 1 & 1+x_2 & 1+x_2^2 & \cdots & 1+x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 1+x_n & 1+x_n^2 & \cdots & 1+x_n^n \end{vmatrix} =$$

Почему мы можем так сделать? Разложив новый определитель по первой строке, мы получим ровно наш искомый определитель! Продолжим с обычными элементарными преобразованиями, а именно, вычтем из всех столбцов первый, а затем представим верхний левый элемент как разность: $1 = 2 - 1$ и разложим определитель на разность двух других определителей:

$$= \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 & \cdots & -1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix}$$

Если мы разложим первый определитель по первой строке и вынесем из каждой строки множитель x_i, то получим произведение $\prod x_i$, умноженное на тот самый определитель Вандермонда:

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = 2 \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} x_n \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= 2V(x_1, \cdots, x_n) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} x_n$$

Теперь посмотрим на второй определитель. Давайте из каждого столбца, начиная с (n), вычтем предыдущий столбец, разложим по первой строке и вынесем из каждой строки множитель $(x_i - 1)$. Определитель снова сведется к определителю Вандермонда!

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \cdots & x_1^n \\ 1 & x_2 & x_2^2 & \cdots & x_2^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \cdots & x_n^n \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & x_1 - 1 & x_1^2 - x_1 & \cdots & x_1^n - x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 - 1 & x_2^2 - x_2 & \cdots & x_2^n - x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n - 1 & x_n^2 - x_n & \cdots & x_n^n - x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= \begin{vmatrix} x_1 - 1 & x_1^2 - x_1 & \cdots & x_1^n - x_1^{n-1} \\ x_2 - 1 & x_2^2 - x_2 & \cdots & x_2^n - x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_n - 1 & x_n^2 - x_n & \cdots & x_n^n - x_n^{n-1} \end{vmatrix} = \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - 1) \begin{vmatrix} 1 & x_1 & \cdots & x_1^{n-1} \\ 1 & x_2 & \cdots & x_2^{n-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^{n-1} \end{vmatrix} =$$

$$= V(x_1, \cdots, x_n) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - 1)$$

Осталось объединить полученные результаты.

$$\Delta = 2V(x_1, \cdots, x_n) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} x_n - V(x_1, \cdots, x_n) \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - 1) = V(x_1, \cdots, x_n)(2 \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} x_n - \prod_{1 \leqslant i \leqslant n} (x_i - 1))$$

365.

Рядом Фибоначчи называется числовой ряд, который начинается числами $1, 2$ и в котором каждое следующее число равно сумме двух предыдущих, то есть ряд $1, 2, 3, 5, 8, 13, 21 \cdots$ Доказать, что n-ый член ряда Фибоначчи равен определителю n-ого порядка

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}$$

Решение. Во-первых, отметим, что первые два значения данного определителя совпадают с рядом Фибоначчи:

$$\Delta_1 = 1, \Delta_2 = 2$$

Найдем рекуррентную формулу определителя.

$$\Delta_n = 1\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n-1} - 1\begin{vmatrix} -1 & 1 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n-1} = \Delta_{n-1} - (-1)\begin{vmatrix} 1 & 1 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix}_{n-2} =$$

$$= \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}$$

Мы получили, что определитель n-ого порядка задается формулой $\Delta_n = \Delta_{n-1} + \Delta_{n-2}$, а эта формула совпадает с формулой элементов ряда Фибоначчи.

177.

Найти A^{150}, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 5 & 4 & 6 & 9 & 7 & 1 & 10 & 8 & 2 \end{pmatrix}$$

Теория. В принципе, как подстановки возводить в степень, мы уже знаем. Но, конечно, не хочется 150 раз производить умножение...
Здесь на помощь придут свойства циклов. Пусть у нас есть цикл длины k, тогда при возведении его в степень k (или кратную ей), будет получаться тождественная подстановка:

$$(a_1, a_2, \cdots, a_k)^k = id$$

Но обычно у нас подстановка раскладывается в произведение нескольких независимых циклов. Что делать? Тогда требуется найти *порядок* подстановки, который равен НОК длин ее циклов. Если у τ порядок $ord(\tau)$, то

$$\tau^{ord(\tau)} = id$$

Решение. Разложим нашу подстановку на произведение независимых циклов.

$$A = (1\ 3\ 4\ 6\ 7)(2\ 5\ 9\ 8\ 10)$$

Длины циклов равны 5, то есть порядок подстановки равен

$$ord(A) = LCM(5, 5) = 5$$

Степень 150 кратна порядку подстановки, следовательно, при возведении в нее мы получим тождественную подстановку id:

$$A^{150} = id$$

Замечание. Если бы степень не делилась без остатка на порядок, следовало бы произвести деление с остатком и возводить в степень остатка:

$$A^{153} = id \cdot A^3 = A^3$$

Ответ: id

178.

Найти подстановку X из равенства $AXB = C$, где

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 3 & 2 & 1 & 6 & 5 & 4 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 3 & 1 & 2 & 7 & 4 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}$$

Теория. Напомню, что *умножение подстановок в общем случае не коммутативно*, то есть как и с матрицами ВАЖНО следить, с какой стороны производится умножение.
Решение. Выразим из нашего уравнения X.

$$AXB = C \Leftrightarrow A^{-1}AXB = A^{-1}C \Leftrightarrow XB = A^{-1}C \Leftrightarrow X = A^{-1}CB^{-1}$$

Получается, нам необходимо 1) найти A^{-1}, 2) найти B^{-1}, 3) произвести умножение. Для нахождения подстановки, обратной данной, достаточно ее "перевернуть"и упорядочить относительно верхней строки.

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}$$

$$B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix}$$

$$A^{-1}CB^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 3 & 2 & 7 & 6 & 5 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 1 & 3 & 6 & 4 & 7 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 2 & 3 & 1 & 5 & 6 & 7 & 4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

Умножение в этом решении осуществляется справа.
Ответ: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 4 & 2 & 6 & 7 & 1 & 3 & 5 \end{pmatrix}$

586.

Найти многочлен 3-ей степени $f(x)$, для которого $f(-1) = 0, f(1) = 4, f(2) = 3, f(3) = 16$.
Решение. Многочлен 3-ей степени имеет вид $f(x) = a_1x^3 + a_2x^2 + a_3x + a_4$. Подставим известные значения и рассмотрим систему уравнений.

$$\begin{cases} -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 = 0 \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 4 \\ 8a_1 + 4a_2 + 2a_3 + a_4 = 3 \\ 27a_1 + 9a_2 + 3a_3 + a_4 = 16 \end{cases} \Leftrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 4 \\ 8 & 4 & 2 & 1 & 3 \\ 27 & 9 & 3 & 1 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{III=III+8I} \\ \text{IV=IV+27I}}]{\text{II=II+I}}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 2 & 4 \\ 0 & 12 & -6 & 9 & 3 \\ 0 & 36 & -24 & 28 & 16 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{III=III/3} \\ \text{IV=IV/4}}]{\text{II=II/2}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -2 & 3 & 1 \\ 0 & 9 & -6 & 7 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow[\text{IV=IV - 9II}]{\text{III=III - 4II}}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & -6 & -2 & -14 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{IV=IV - 3III}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & -1 & -7 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\text{II=II - IV} \\ \text{III=III+IV}}]{\text{I=I - IV}}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{III=III/(-2)}} \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & -1 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I=I+III}}$$

$$\to \left(\begin{array}{cccc|c} -1 & 1 & 0 & 0 & -7 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{I = -I+II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 7 \end{array}\right)$$

Система решена! Выпишем наш результат:

$$\begin{cases} a_1 = 2 \\ a_2 = -5 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 7 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$$

Ответ: $f(x) = 2x^3 - 5x^2 + 7$

829.

Доказать, что матрица $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ удовлетворяет уравнению

$$x^2 - (a+d)x + ad - bc = 0$$

Решение. Подставим нашу матрицу на место x и проверим равенство.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + ad - bc =$$

$$= \begin{pmatrix} a^2+bc & ab+bd \\ ac+cd & bc+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & ab+bd \\ ac+cd & ad+d^2 \end{pmatrix} + adE - bcE =$$

$$= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ad & 0 \\ 0 & ad \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} bc & 0 \\ 0 & bc \end{pmatrix} = 0$$

Что и требовалось доказать.