Ejemplo 8.5.5 ▶ **Matriz de incidencia**

WWW

Para obtener la matriz de incidencia de la gráfica en la figura 8.5.4, se etiquetan los renglones con los vértices y las columnas con las aristas (en algún orden arbitrario). El elemento en el renglón v y la columna e es 1 si e es incidente en v, y 0 de otra manera. Entonces, la matriz de incidencia para la gráfica de la figura 8.5.4 es

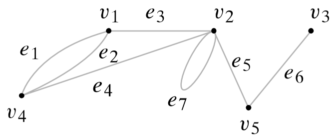


Figura 8.5.4 Gráfica para el ejemplo 8.5.5.

$$
\begin{array}{c}
\\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccccc} e_1 & e_2 & e_3 & e_4 & e_5 & e_6 & e_7 \end{array} \\
\begin{pmatrix}
1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}.
$$

Se entiende que una columna como e_7 representa un lazo. ◀

Observe que en una gráfica sin lazos cada columna tiene dos números 1 y que la suma de un renglón da el grado del vértice identificado con ese renglón.

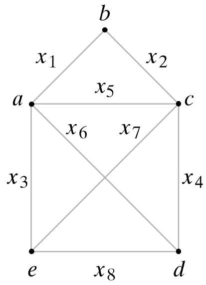
Sección de ejercicios de repaso

1. ¿Qué es una matriz de adyacencia?
2. Si A es la matriz de adyacencia de una gráfica simple, ¿Cuáles son los valores de los elementos de A^n?
3. ¿Qué es una matriz de incidencia?

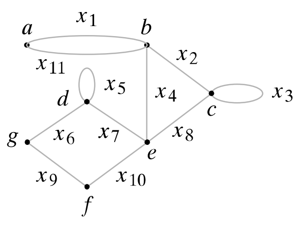
Ejercicios

En los ejercicios 1 al 6, escriba la matriz de adyacencia de cada gráfica.

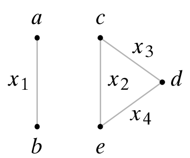
1.



2.



3.



4. La gráfica de la figura 8.2.2
5. La gráfica completa sobre cinco vértices K_5
6. La gráfica completa bipartita $K_{2,3}$

En los ejercicios 7 al 12, escriba la matriz de incidencia de cada gráfica.

7. La gráfica del ejercicio 1
8. La gráfica del ejercicio 2
9. La gráfica del ejercicio 3
10. La gráfica de la figura 8.2.1
11. La gráfica completa sobre cinco vértices K_5
12. La gráfica completa bipartita $K_{2,3}$

En los ejercicios 13 al 17, dibuje la gráfica representada por cada matriz de adyacencia.

13.
$$
\begin{array}{c}
\\ a \\ b \\ c \\ d \\ e
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{pmatrix}
2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 2 & 1 & 1 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
0 & 1 & 1 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

14.
$$
\begin{array}{c}
\\ a \\ b \\ c \\ d \\ e
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\
0 & 0 & 1 & 1 & 2
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

15.
$$
\begin{array}{c}
\\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{pmatrix}
0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 2 & 0 \\
1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\
0 & 2 & 0 & 1 & 0 & 0 \\
1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

16.
$$
\begin{array}{c}
\\ a \\ b \\ c \\ d \\ e \\ f
\end{array}
\begin{array}{c}
\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \end{array} \\
\begin{pmatrix}
4 & 1 & 1 & 1 & 0 & 2 \\
1 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \\
1 & 1 & 0 & 1 & 1 & 3 \\
1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\
0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 1 \\
2 & 0 & 3 & 1 & 1 & 0
\end{pmatrix}
\end{array}
$$

17. La matriz de 7×7 cuyo elemento ij es 1 si $i + 1$ divide a $j + 1$ o $j + 1$ divide a $i + 1$, $i \neq j$; cuyo elemento ij es 2 si $i = j$, y cuyo elemento ij es 0 en otros casos.
18. Escriba la matriz de adyacencia de las componentes de las gráficas dadas por las matrices de adyacencia de los ejercicios 13 al 17.

19. Calcule los cuadrados de las matrices de adyacencia de K_5 y las gráficas de los ejercicios 1 y 3.

20. Sea A la matriz de adyacencia para la gráfica del ejercicio 1. ¿Cuál es el elemento en el renglón a y la columna d de A^5?

21. Suponga que una gráfica tiene una matriz de adyacencia de la forma

$$A = \left(\begin{array}{c|c} & A' \\ \hline A'' & \end{array}\right),$$

donde todos los elementos de las submatrices A' y A'' son 0. ¿Cómo se ve la gráfica?

22. Repita el ejercicio 21 con "incidencia" en lugar de "adyacencia".

23. Sea A una matriz de adyacencia de una gráfica. ¿Por qué A^n es simétrica respecto a la diagonal principal para todo entero positivo n?

En los ejercicios 24 y 25, dibuje las gráficas representadas por las matrices de incidencia.

24.
$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

25.
$$\begin{array}{c} a \\ b \\ c \\ d \\ e \end{array} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

26. ¿Cómo debe verse una gráfica si algún renglón de su matriz de incidencia tiene sólo ceros?

27. Sea A la matriz de adyacencia de una gráfica G con n vértices. Sea

$$Y = A + A^2 + \cdots + A^{n-1}.$$

Si algún elemento fuera de la diagonal en la matriz Y es cero, ¿qué se puede decir de la gráfica G?

Los ejercicios 28 al 31 se refieren a la matriz de adyacencia A de K_5.

28. Sea n un entero positivo. Explique por qué todos los elementos de la diagonal de A^n son iguales y todos los elementos fuera de la diagonal de A^n son iguales.

Sea d_n el valor común de los elementos de la diagonal de A^n y sea a_n el valor común de los elementos fuera de la diagonal de A^n.

★29. Demuestre que

$$d_{n+1} = 4a_n; \quad a_{n+1} = d_n + 3a_n; \quad a_{n+1} = 3a_n + 4a_{n-1}.$$

★30. Demuestre que

$$a_n = \frac{1}{5}[4^n + (-1)^{n+1}].$$

31. Demuestre que

$$d_n = \frac{4}{5}[4^{n-1} + (-1)^n].$$

★32. Derive resultados similares a los de los ejercicios 29 al 31 para la matriz de adyacencia A de la gráfica K_m.

★33. Sea A la matriz de adyacencia de la gráfica $K_{m,n}$. Encuentre una fórmula para los elementos de A^j.

8.6 ➜ Isomorfismos de gráficas

Las siguientes instrucciones se dan a dos personas que no pueden ver el papel de la otra: "Dibuje y etiquete cinco vértices *a, b, c, d* y *e*. Conecte *a* con *b*, *b* con *c*, *c* con *d*, *d* con *e*, y *a* con *e*". Las gráficas producidas se aprecian en la figura 8.6.1. Sin duda estas figuras definen la misma gráfica aun cuando parezcan diferentes. Se dice que estas gráficas son **isomorfas**.

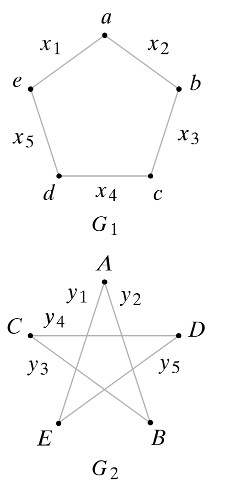


Figura 8.6.1 Gráficas isomorfas.

Definición 8.6.1 ▶

Las gráficas G_1 y G_2 son *isomorfas* si existe una función f uno a uno y sobre de los vértices de G_1 a los vértices de G_2 y una función g uno a uno y sobre de las aristas de G_1 a las aristas de G_2, de manera que una arista e es incidente en v y w en G_1 si y sólo si la arista