1. (b, b)
2. (e, d, c, b)
3. (a, d, c, d, e)
4. (d, c, b, e, d)
5. $(b, c, d, a, b, e, d, c, b)$
6. (b, c, d, e, b, b)
7. (a, d, c, b, e)
8. (d)
9. (d, c, b)

En los ejercicios 10 al 18, dibuje una gráfica que tenga las propiedades indicadas o explique por qué no existe esa gráfica.

10. Seis vértices cada uno de grado 3

11. Cinco vértices cada uno de grado 3

12. Cuatro vértices cada uno de grado 1

13. Seis vértices; cuatro aristas

14. Cuatro aristas; cuatro vértices de grados 1, 2, 3, 4

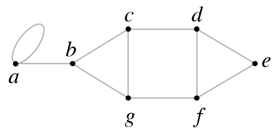
15. Cuatro vértices con grados 1, 2, 3, 4

16. Gráfica simple; seis vértices con grados 1, 2, 3, 4, 5, 5

17. Gráfica simple; cinco vértices con grados 2, 3, 3, 4, 4

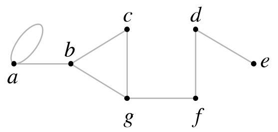
18. Gráfica simple; cinco vértices con grados 2, 2, 4, 4, 4

19. Encuentre todas las trayectorias simples en la siguiente gráfica



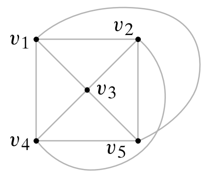
20. Encuentre todas las trayectorias simples de a a e en la gráfica del ejercicio 19.

21. Encuentre todas las subgráficas conexas de la siguiente gráfica, que contengan todos los vértices de la gráfica original y tengan tan pocas aristas como sea posible. ¿Cuáles son trayectorias simples? ¿Cuáles son ciclos? ¿Cuáles son ciclos simples?

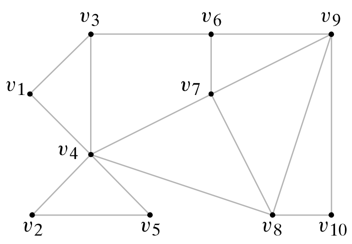


Encuentre el grado de cada vértice para las siguientes gráficas.

22.

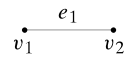


23.

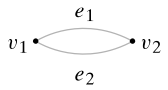


En los ejercicios 24 al 27, encuentre todas las subgráficas que tienen al menos un vértice de la gráfica dada.

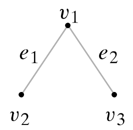
24.



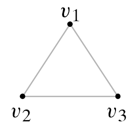
25.



26.



★**27.**



En los ejercicios 28 al 33, decida si las gráficas tienen un ciclo de Euler. Si lo tienen, muestre uno.

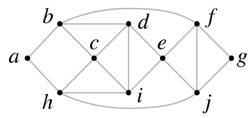
28. Ejercicio 21

29. Ejercicio 22

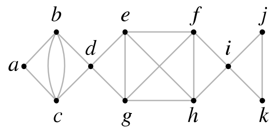
30. Ejercicio 23

31. Figura 8.2.4

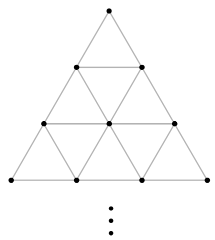
32.



33.



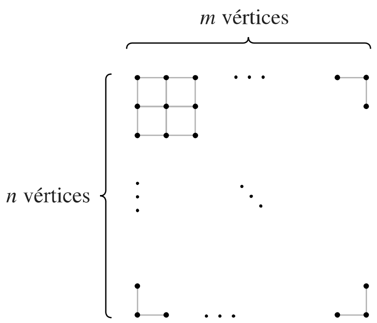
34. La siguiente gráfica se continúa hasta una profundidad finita, arbitraria. ¿Contiene la gráfica un ciclo de Euler? Si la respuesta es afirmativa, describa uno.



35. Una gráfica completa K_n, ¿cuándo contiene un ciclo de Euler?

36. Una gráfica bipartita $K_{m,n}$, ¿cuándo contiene un ciclo de Euler?

37. ¿Para qué valores de m y n una gráfica contiene un ciclo de Euler?

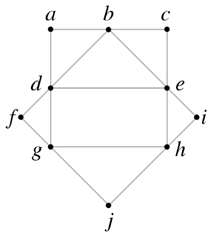


★

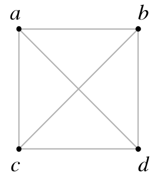
38. ¿Para qué valores de n, el cubo-n contiene un ciclo de Euler?

En los ejercicios 39 y 40, verifique que hay un número par de vértices de grado impar en la gráfica.

39.



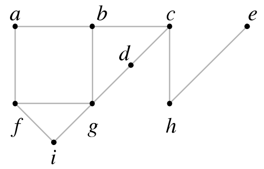
40.



41. Para la gráfica del ejercicio 39, encuentre una trayectoria sin aristas repetidas de d a e que contenga todas las aristas.

42. Sea G una gráfica conexa con cuatro vértices v_1, v_2, v_3 y v_4 de grado impar. Demuestre que existen trayectorias sin aristas repetidas de v_1 a v_2 y de v_3 a v_4 tales que cada arista en G está exactamente en una de las trayectorias.

43. Ilustre el ejercicio 42 usando la siguiente gráfica.



★ **44.** Establezca y pruebe una generalización del ejercicio 42 donde hay un número arbitrario de vértices de grado impar.

En los ejercicios 45 y 46, diga si cada afirmación es falsa o verdadera. Si es falsa dé un contraejemplo y si es verdadera, explique.

45. Sea G una gráfica y sean v y w vértices distintos. Si hay una trayectoria de v a w, existe una trayectoria simple de v a w.

46. Si una gráfica contiene un ciclo que incluye todas las aristas, se trata de un ciclo de Euler.

47. Sea G una gráfica conexa. Suponga que una arista e está en un ciclo. Demuestre que G con e eliminada sigue siendo conexa.

48. Dé un ejemplo de una gráfica conexa tal que la eliminación de cualquier arista produzca una gráfica no conexa. (Suponga que eliminar una arista no implica eliminar los vértices).

49. ¿Puede un caballo moverse en un tablero de ajedrez y regresar a su posición original haciendo cada movimiento exactamente una vez? (Un movimiento se considera hecho cuando se mueve en cualquiera de las dos direcciones).

50. Demuestre que si G' es una subgráfica conexa de una gráfica G, entonces G' está contenida en una componente.

51. Demuestre que si se hace una partición de un gráfica G en subgráficas conexas de manera que cada arista y cada vértice en G pertenezca a una de las subgráficas, las subgráficas son componentes.

52. Sea G una gráfica dirigida y sea G' la gráfica no dirigida que se obtiene de G si se ignora la dirección de las aristas. Suponga que G es conexa. Si v es un vértice en G, se dice que la *paridad de v* es *par* si el número de aristas de la forma (v, w) es par; la *paridad impar* se define de manera similar. Pruebe que si v y w son vértices en G que tienen paridad impar, es posible cambiar la orientación de ciertas aristas en G de manera que v y w tengan paridad par y la paridad de todos los otros vértices en G permanezca inalterable.

53. Demuestre que el número máximo de aristas en una gráfica simple, no conexa con n vértices es $(n - 1)(n - 2)/2$.

54. Demuestre que el número máximo de aristas en una gráfica bipartita simple con n vértices es $\lfloor n^2/4 \rfloor$.

Un vértice v en una gráfica conexa G es un punto de articulación si la eliminación de v y todas las aristas incidentes en v desconecta a G.

55. Dé un ejemplo de una gráfica con seis vértices que tenga exactamente dos puntos de articulación.

56. Dé un ejemplo de una gráfica con seis vértices que no tenga puntos de articulación.

57. Demuestre que un vértice v en una gráfica conexa G es un punto de articulación si y sólo si existen vértices w y x en G que tengan la propiedad de que toda trayectoria de w a x pasa por v.

Sea G una gráfica dirigida y sea v un vértice en G. El grado de entrada a v, in(v), es el número de aristas de la forma (w, v). El grado de salida de v, out(v), es el número de aristas de la forma (v, w). Un ciclo de Euler dirigido en G es una sucesión de aristas de la forma

$$(v_0, v_1), (v_1, v_2), \ldots, (v_{n-1}, v_n),$$

donde $v_0 = v_n$, cada arista en G ocurre exactamente una vez, y todos los vértices aparecen.

★★ ***58.*** Demuestre que una gráfica dirigida G contiene un ciclo de Euler dirigido si y sólo si la gráfica no dirigida que se obtiene al ignorar la dirección de las aristas de G es conexa y además $\text{in}(v) = \text{out}(v)$ para todo vértice v en G.

Una sucesión de Bruijn para n (en ceros y unos) es una sucesión

$$a_1, \quad \ldots, \quad a_{2^n}$$

de 2^n *bits que tiene la propiedad de que si s es una cadena de bits de longitud n, para alguna m,*

$$s = a_m a_{m+1} \cdots a_{m+n-1}. \qquad \textbf{(8.2.2)}$$

En (8.2.2), se define $a_{2^n+i} = a_i$ *para* $i = 1, \ldots, 2^n - 1$.

59. Verifique que 00011101 es una sucesión de Bruijn para $n = 3$.

60. Sea G una gráfica dirigida con vértices correspondientes a todas las cadenas de bits de longitud $n - 1$. Existe una arista dirigida del vértice $x_1 \cdots x_{n-1}$ a $x_2 \cdots x_n$. Demuestre que un ciclo de Euler dirigido corresponde a la sucesión de Bruijn.

61. Demuestre que existe una sucesión de Bruijn para cada $n = 1, 2, \ldots$.

62. Una *trayectoria cerrada* es una trayectoria de v a v. Demuestre que una gráfica conexa G es bipartita si y sólo si toda trayectoria cerrada en G tiene longitud par.

63. ¿Cuántas trayectorias de longitud $k \geq 1$ hay en K_n?

64. Demuestre que hay

$$\frac{n(n-1)[(n-1)^k - 1]}{n-2}$$

trayectorias cuyas longitudes están entre 1 y k, inclusive, en K_n, $n > 2$.

65. Sean v y w vértices distintos en K_n. Sea p_m el número de trayectorias de longitud m de v a w en K_n, $1 \leq m \leq n$.