ne un ciclo de Hamilton para toda $n \geq 6$ (vea [Schwenk]). La demostración construye de manera explícita ciclos de Hamilton para ciertos tableros más pequeños y después pega los tableros pequeños para obtener los ciclos de Hamilton para tableros más grandes. ◀

Sugerencias para resolver problemas

Un *ciclo de Euler* comienza en un vértice, recorre cada *arista* exactamente una vez y regresa al vértice inicial. Los teoremas 8.2.17 y 8.2.18 permiten determinar con facilidad si una gráfica tiene un ciclo de Euler: una gráfica tiene un ciclo de Euler si y sólo si G es conexa y todo vértice tiene grado par.

Un *ciclo hamiltoniano* comienza en un vértice, visita cada *vértice* exactamente una vez (excepto por el inicial que se visita dos veces: al inicio y al final del ciclo de Hamilton) y regresa al vértice inicial. A diferencia de los teoremas 8.2.17 y 8.2.18, no se conocen condiciones necesarias y suficientes de verificación rápida para que una gráfica tenga un ciclo de Hamilton. Si una gráfica relativamente pequeña tiene un ciclo de Hamilton, la prueba y error descubrirán uno. Si una gráfica no tiene ciclos de Hamilton, algunas veces se puede usar el hecho de que un ciclo de Hamilton en una gráfica de n vértices tiene longitud n junto con la prueba por contradicción para probar que no tiene un ciclo hamiltoniano. La sección 8.3 contiene dos técnicas para pruebas por contradicción. En la primera, se supone que la gráfica tiene un ciclo de Hamilton. Ciertas aristas no pueden aparecer en el ciclo de Hamilton: si una gráfica tiene un vértice v de grado mayor que 2, sólo dos aristas incidentes en v pueden aparecer en el ciclo de Hamilton. Algunas veces se puede obtener una contradicción mostrando que con tantas aristas eliminadas en la gráfica no puede haber un ciclo de Hamilton (vea el ejercicio 8.3.2).

En la segunda técnica de prueba por contradicción mostrada en la sección 8.3, de nuevo se supone que la gráfica con n vértices tiene un ciclo de Hamilton. Después se argumenta que ciertas aristas *deben* estar en el ciclo hamiltoniano. Por ejemplo, si un vértice v tiene grado 2, ambas aristas incidentes en v deben estar en el ciclo. Algunas veces se puede obtener una contradicción mostrando que las aristas que deben estar en el ciclo de Hamilton forman un ciclo de longitud menor que n (vea el ejemplo 8.3.3).

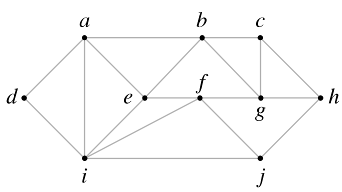
Sección de ejercicios de repaso

1. ¿Qué es un ciclo hamiltoniano?
2. Dé un ejemplo de una gráfica que tiene un ciclo de Hamilton y un ciclo de Euler. Pruebe que la gráfica tiene las propiedades especificadas.
3. Dé un ejemplo de una gráfica que tiene un ciclo de Hamilton pero no un ciclo de Euler. Pruebe que la gráfica tiene las propiedades especificadas.
4. Dé un ejemplo de una gráfica que no tiene un ciclo de Hamilton pero tiene un ciclo de Euler. Pruebe que la gráfica tiene las propiedades especificadas.
5. Dé un ejemplo de una gráfica que no tiene un ciclo hamiltoniano ni un ciclo de Euler. Pruebe que la gráfica tiene las propiedades especificadas.
6. ¿Cuál es el problema del agente viajero? ¿Cómo se relaciona con el problema del ciclo de Hamilton?
7. ¿Qué es el modelo de anillo para la computación en paralelo?
8. ¿Qué es el código Gray?
9. Explique cómo construir un código Gray.

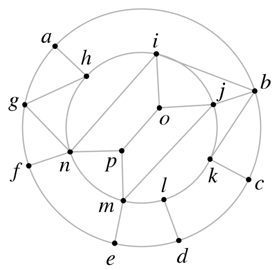
Ejercicios

Encuentre un ciclo hamiltoniano en cada gráfica.

1.

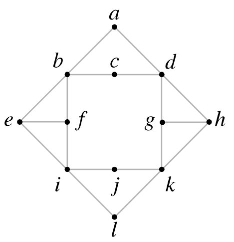


2.

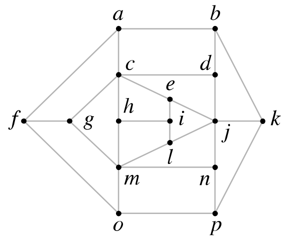


Demuestre que ninguna gráfica contiene un ciclo hamiltoniano.

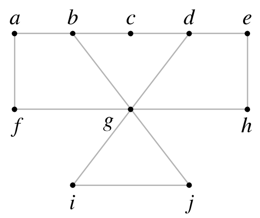
3.



4.

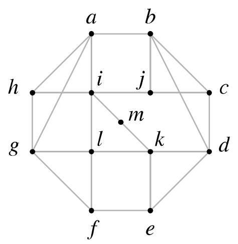


5.

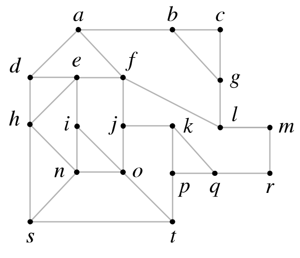


Determine si cada gráfica contiene un ciclo de Hamilton. Si así es, exhiba uno; de otra manera, dé un argumento para demostrar que no hay un ciclo de Hamilton.

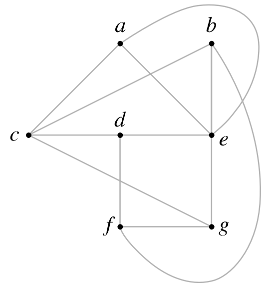
6.



7.



8.



9. Dé un ejemplo de una gráfica que tiene un ciclo de Euler pero no contenga un ciclo de Hamilton.

10. Dé un ejemplo de una gráfica que tiene un ciclo de Euler que también es un ciclo de Hamilton.

11. Dé un ejemplo de una gráfica que tiene un ciclo de Euler y un ciclo de Hamilton que no son idénticos.

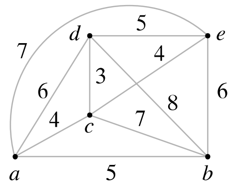
★*12.* ¿Para qué valores de m y n la gráfica del ejercicio 37, sección 8.2, contiene un ciclo de Hamilton?

13. Modifique la gráfica del ejercicio 37, sección 8.2, insertando una arista entre el vértice en la fila i, columna 1, y el vértice en la fila i, columna m, para $i = 1, \ldots, n$. Demuestre que la gráfica obtenida siempre tiene un ciclo de Hamilton.

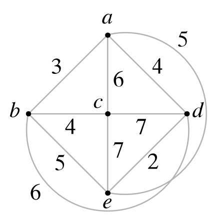
14. Demuestre que si $n \geq 3$, la gráfica completa sobre n vértices K_n contiene un ciclo hamiltoniano.

15. ¿Cuándo la gráfica completa bipartita $K_{m,n}$ contiene un ciclo hamiltoniano?

16. Demuestre que el ciclo (e, b, a, c, d, e) proporciona una solución al problema del agente viajero para la gráfica mostrada.



17. Resuelva el problema del agente viajero para la gráfica dada.



★*18.* Sean m y n enteros que satisfacen $1 \leq m \leq 2^n$. Pruebe que el cubo-n tiene un ciclo simple de longitud m si y sólo si $m \geq 4$ y m es par.

19. Use el Teorema 8.3.6 para calcular el código Gray G_4.

20. Sea G una gráfica bipartita con conjuntos ajenos de vértices V_1 y V_2, como en la definición 8.1.11. Demuestre que si G tiene un ciclo de Hamilton, V_1 y V_2 tienen el mismo número de elementos.

21. Encuentre un ciclo de Hamilton en GK_6 (vea el ejemplo 8.3.9).

22. Describa un modelo de gráficas adecuado para resolver el siguiente problema: ¿Pueden arreglarse las permutaciones de $\{1, 2, \ldots, n\}$