Programación 2

Tecnicatura Universitaria en Inteligencia Artificial

Profesores:

Damian
Andrea
Ariel
Joaquin
Ana

2C. 2024

Breve introducción

¿Qué vamos a ver esta semana?

- Nueva estructura de datos abstractos
- Aplicaciones a problemas reales
- Algoritmos

Objetivos

Objetivos

1) Reconocer y modelar un problema como un grafo.

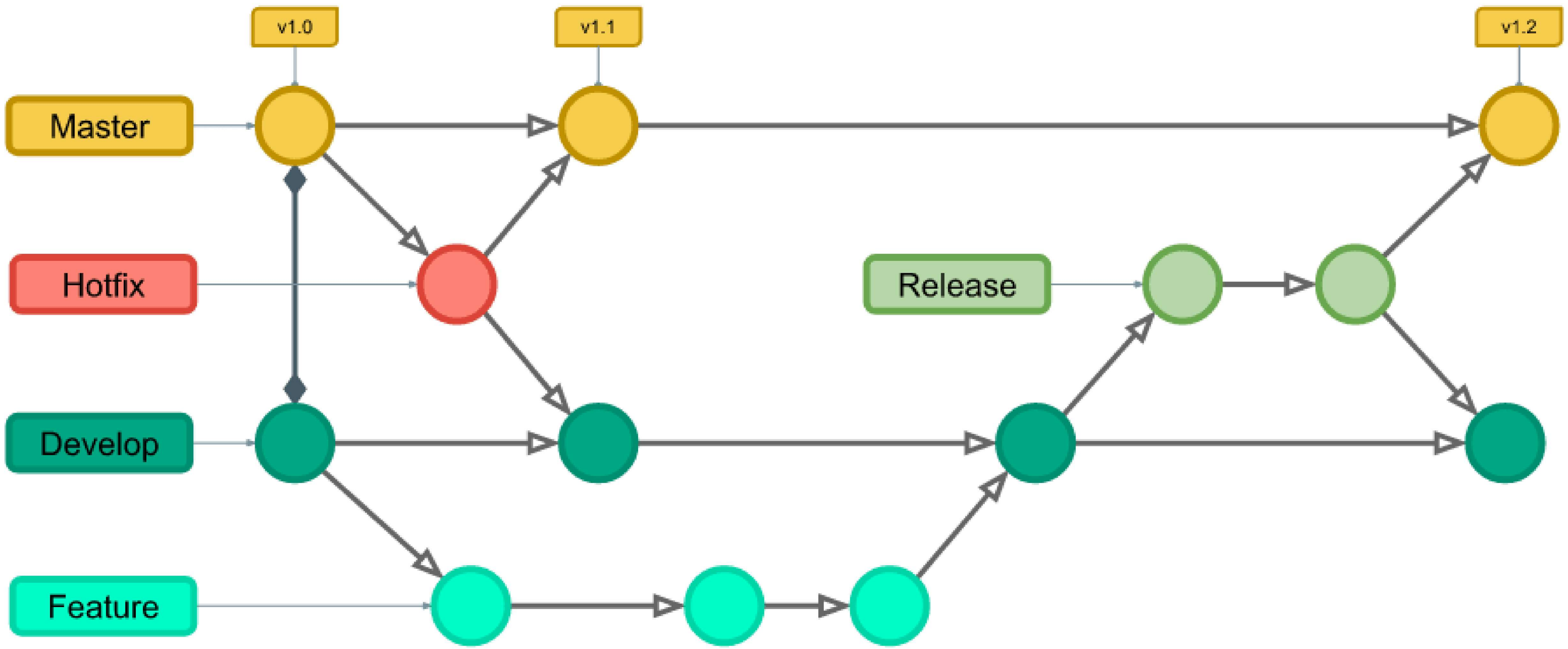
Objetivos

1) Reconocer y modelar un problema como un grafo.

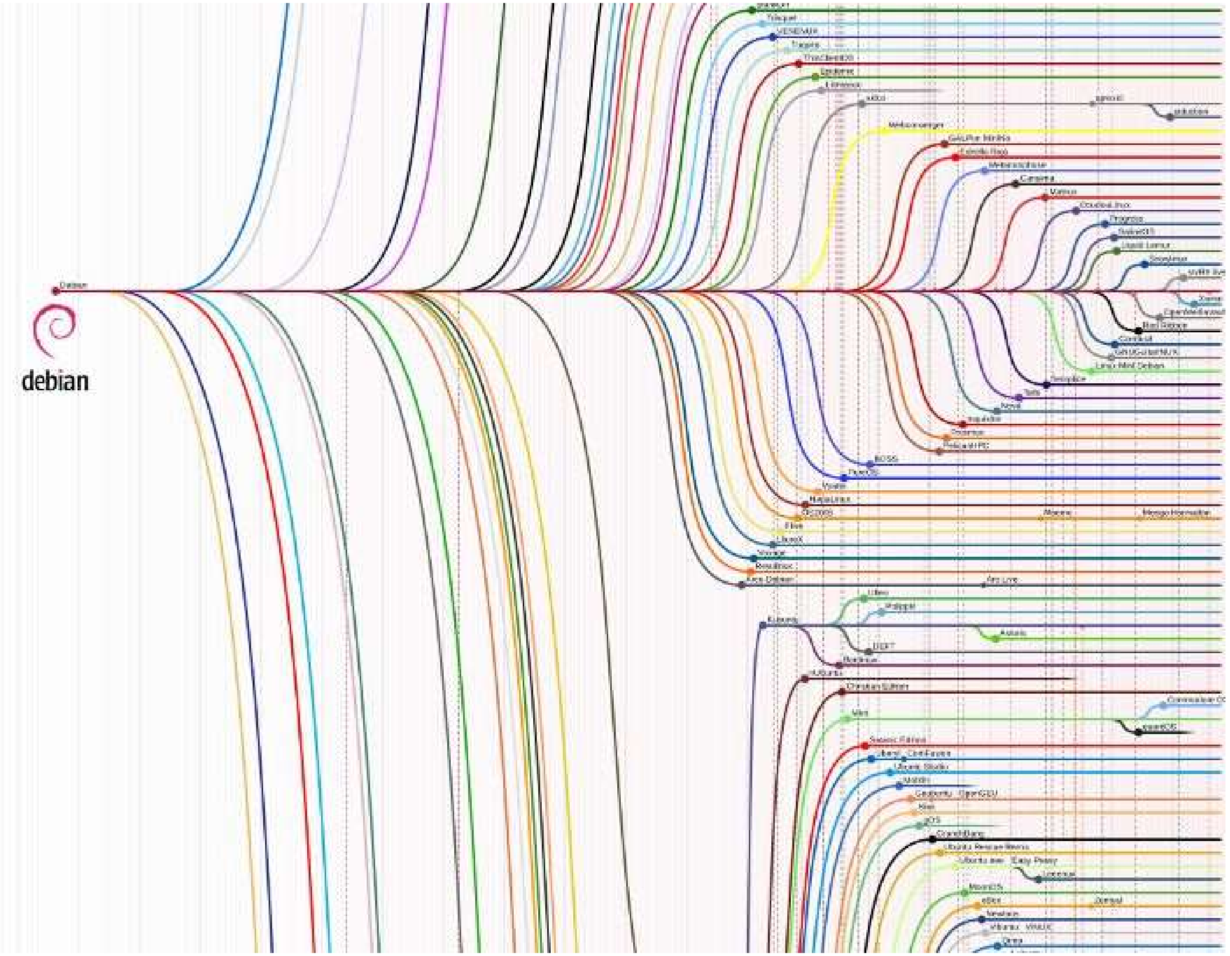
2) Aprender terminología, conceptos, resultados y algoritmos que nos ayuden a resolver el problema modelado

¿Conocen algún Grafo?

¿Conocen algún Grafo?



¿Conocen algún Grafo?



Motivación: ¿Qué usarían para modelar...?

- Una fila de supermercado
- Legajo de alumnos y su nombre
- Días del mes de Septiembre
- Amistades entre los profesores de la TUIA en el facebook

Dibujemos este último grafo

- Importan cuán largas son las lineas?
- Importa si muevo las posiciones?
- Tiene algún tipo de orden o secuencia?
- Cuántos tipos de elementos tengo?

Historia

La Teoría de Grafos surgió a mediados del siglo XVIII, cuando Leonard Euler publicó un artículo con la solución al problema de los puentes de Königsberg. Königsberg era una ciudad de la antigua Prusia Oriental que, atravesada por el río Pregel, quedaba dividida en cuatro porciones de tierra, todas ellas unidas por siete puentes, como se muestra en la Figura

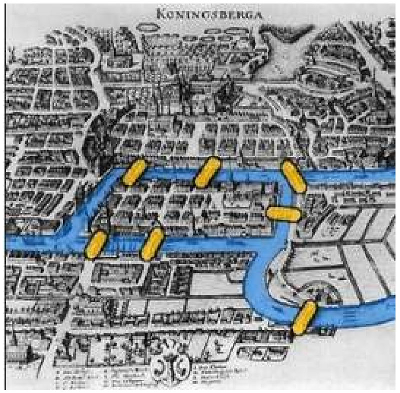


Figure. Mapa de la ciudad de Königsberg.

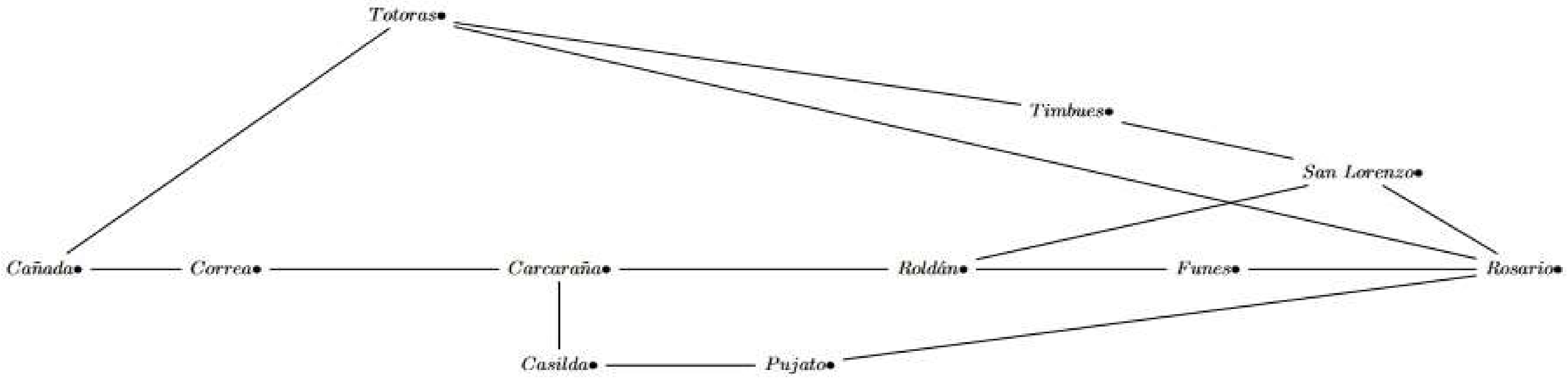
"¿Es posible recorrer todos los puentes una sola vez y volver al punto de partida?"

Otro ejemplo

Presentación del problema

- La provincia de Santa Fé quiere hacer un relevamiento de las condiciones de los caminos que se ven en el mapa.
- Quiere gastar la menor cantidad de nafta en hacer el recorrido, por lo cual quiere recorrer cada camino una única vez.
- El recorrido comienza en la ciudad de Rosario, y debe terminar en Rosario.

Modelo Grafo



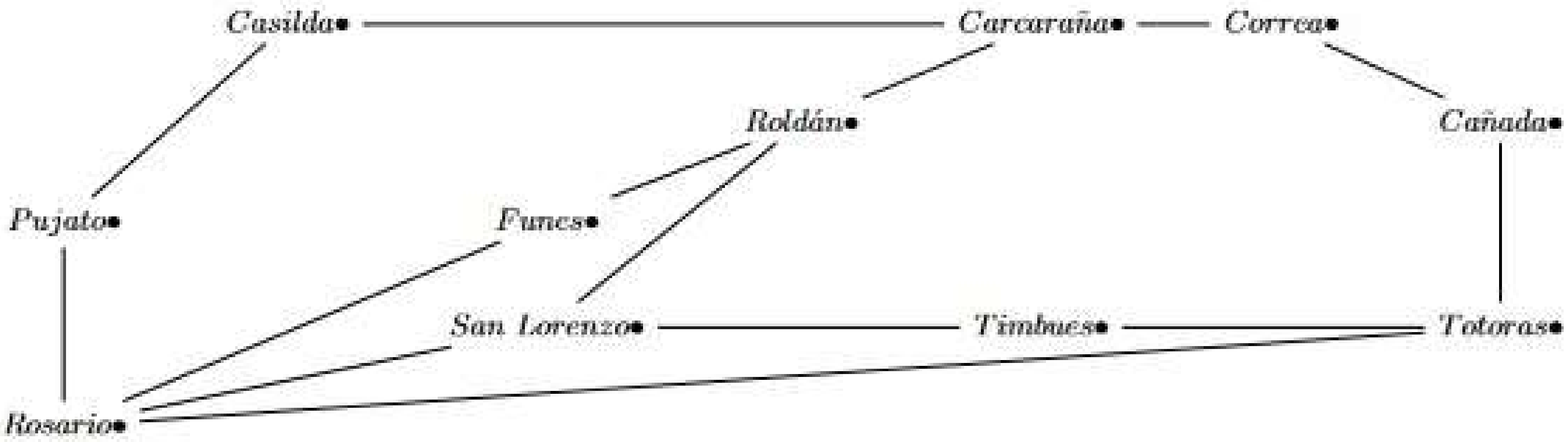
Modelo grafo

¿Para este problema en particular, nos interesa:

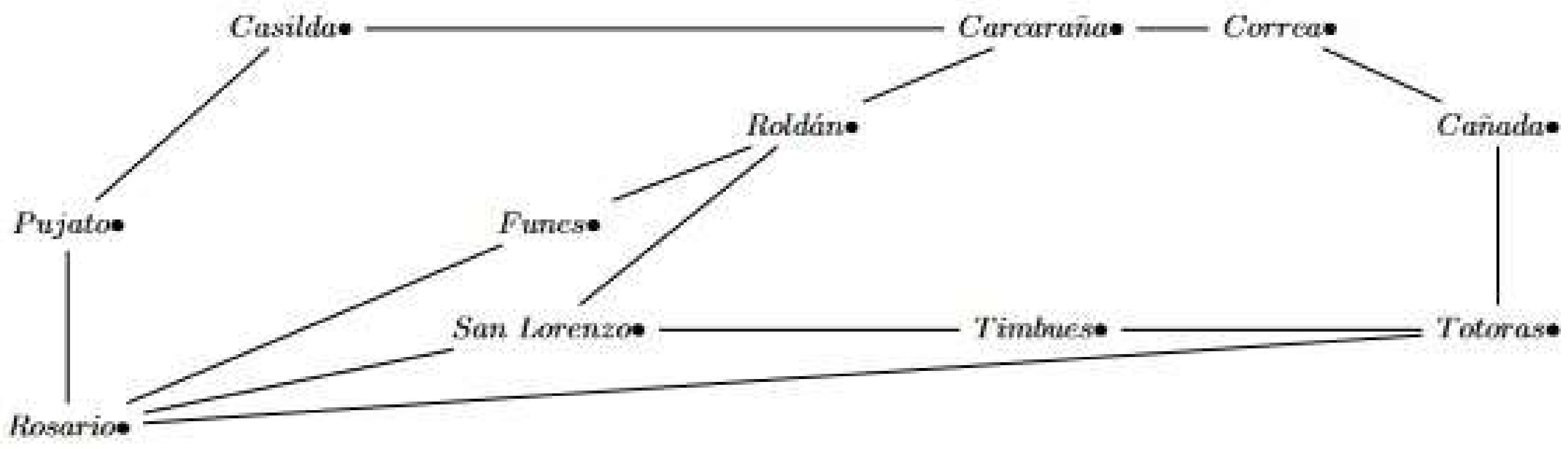
Distancia La distancia entre cada localidad?

Posición relativa La posición en la que están?

Modelo grafo



Modelo grafo



Alguien puede encontrar un recorrido que sólo pase por cada ruta una vez?

Modelo grafo

No se puede! Pero además podemos PROBAR que es imposible, pero para hacer eso, nos va a ser útil un poco de terminología

Grafo

Definición

Un *grafo G*(también llamado grafo no dirigido o grafo simple) es un par (V, E), donde V es el conjunto de vértices (o nodos) y un conjunto E de aristas (o arcos) tal que cada arista $e \in E$ se asocia con un par no ordenado de vértices. Si la arista e está asociada con los vértices v y w, se escribe $e = (v, w)$ o $e = (w, v)$. Es importante notar que ambas son exactamente la misma arista.

Notaremos al grafo como G=(V,E)

Aristas incidentes y vértices adyacentes

Definición

Se dice que una arista $e = (v, w)$ en una grafo es *incidente* sobre v y w. A su vez, se dice que los vértices v y w son incidentes sobre e y que son *adyacentes* (o vecinos) entre ellos.

Cuando sobre un vértice no incide ninguna arista, a éste se le denomina vértice *aislado*.

Definición

Se denomina *grado de un vértice* y lo denotaremos como $\mathrm{gr}(v)$ o $\delta(v)$ al número de aristas que inciden sobre él.

Relación entre grados de los vértices y cantidad de aristas

¿Existe alguna relación entre los grados de los vértices y la cantidad de aristas totales del grafo?

Relación entre grados de los vértices y cantidad de aristas

Proposición

Sea $G = (V, E)$ *un grafo de* n *vértices. Se verifica que* $\sum_{i=1}^{n} \mathrm{gr}(v_i) = 2|E|$ *siendo* $|E|$ *el número de aristas totales del grafo. Es decir, la suma de los grados de todos los vértices de un grafo es el doble del número total de aristas que contiene el grafo.*

Proof.

La demostración es muy simple. Dado que cada arista incide en dos vértices, al sumar los grados de cada vértice se ha contado cada arista por duplicado, por tanto, al final obtenemos el doble del número total de aristas. $\square$

Definición

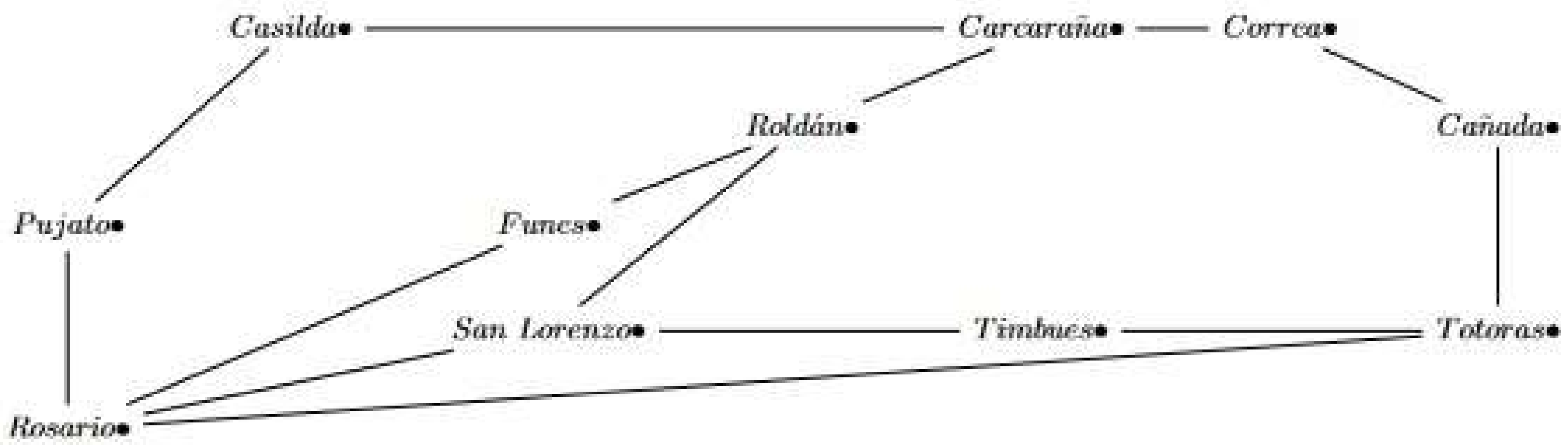
- Sea G un grafo, llamamos *camino de longitud n* entre los vértices v_0 y v_n a una secuencia de n aristas $e_1 e_2 \dots e_n$ y una secuencia de $n+1$ vértices $v_0 v_1 \dots v_n$ que cumplen que $e_i = \{v_{i-1}, v_i\}$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. En tal caso, se dice que los vértices v_0 y v_n están conectados.
- Un camino se llamará *cerrado* si comienza y termina en el mismo vértice.
- Llamamos *recorrido* a un camino donde no se encuentran aristas repetidas. Se llama *circuito* a un recorrido cerrado.
- Denominamos *camino simple* a un camino que no repite vértices, y *ciclo* si es cerrado.

Distancia y diámetro

Definición

- Definimos la *distancia* entre dos vértices como la longitud del recorrido más corto entre ellos. La distancia entre dos vértices no conectados se toma como infinita.
- Se define el *diámetro* de un grafo como el máximo de todas las distancias de los vértices del grafo.

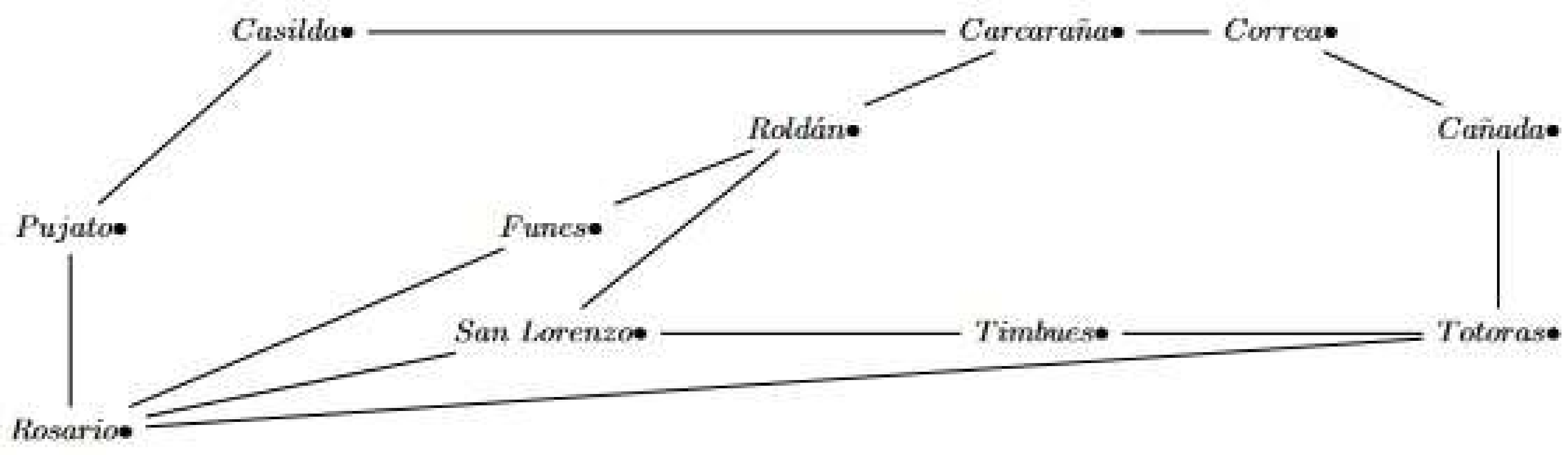
Volviendo a nuestro problema



Volviendo a nuestro problema

¿Cómo lo podemos formular con la nueva terminología?

Volviendo a nuestro problema



Existe un circuito que pase por todas las aristas?

Teorema

Se puede probar que existe un circuito que pase por todas las aristas(conocido como circuito Euleriano) sii todos los vértices tienen grado par y está "pegado".

Nos falta formalizar el concepto de "pegado"

Grafo conexo

Definición

- Sea $G = (V, E)$ un grafo. Se dice que G es *conexo* si para todo $u, v \in V$, existe al menos un camino que conecte u y v.
- En caso contrario, el grafo se dice *disconexo*.
- Además, definimos cada *componente conexa* de G como el subgrafo* conexo(cada una de las "partes").
- Se denomina *arista de separación* a aquella arista de un grafo conexo que, al eliminarla, lo transforma en disconexo.
- Se nota con $\kappa(G)$ a la cantidad de componenentes conexas

Subgrafo

Definición

Sea H un grafo con conjunto de vértices V' y conjunto de aristas E'. Decimos que H es un *subgrafo* de $G = (V, E)$ si:

- $V' \subset V$,
- $E' \subset E$ y
- Para toda arista $e \in E'$ si e incide en los vértices v y w entonces $v, w, \in V'$