16. Defina un *cubo-n*.

17. ¿Qué es una computadora serial?

18. ¿Qué es un algoritmo serial?

19. ¿Qué es una computadora paralela?

20. ¿Qué es un algoritmo paralelo?

21. ¿Qué es una gráfica completa sobre n vértices? ¿Cómo se denota?

22. Defina *gráfica bipartita*.

23. ¿Qué es una gráfica bipartita completa sobre m y n vértices? ¿Cómo se denota?

Ejercicios

En un torneo, el Nieve venció a los Faisanes una vez, el Rascacielos venció al Tuna una vez, el Nieve venció al Rascacielos dos veces, los Faisanes vencieron al Tuna una vez y los Faisanes vencieron al Rascacielos una vez. En los ejercicios 1 al 4, use una gráfica para modelar el torneo. Los equipos son los vértices. Describa el tipo de gráfica usada (no dirigida, dirigida, simple).

1. Hay una arista entre los equipos si los equipos jugaron.

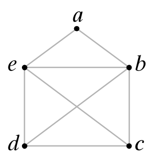
2. Hay una arista entre los equipos para cada juego jugado.

3. Hay una arista del equipo t_i al equipo t_j si t_i venció a t_j al menos una vez.

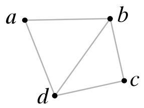
4. Hay una arista del equipo t_i al equipo t_j por cada victoria de t_i sobre t_j.

Explique por qué ninguna gráfica en los ejercicios 5 al 7 tiene una trayectoria del vértice a *al vértice* a *que pasa por cada arista justo una vez.*

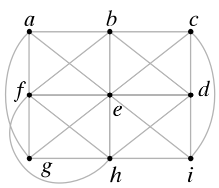
5.



6.

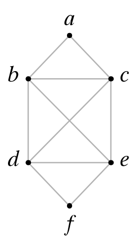


7.

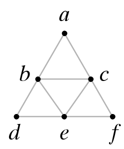


Pruebe que cada gráfica en los ejercicios 8 al 10 tiene una trayectoria del vértice a *al vértice* a *que pasa por cada arista justo una vez, encontrando la trayectoria por inspección.*

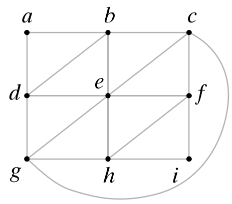
8.



9.

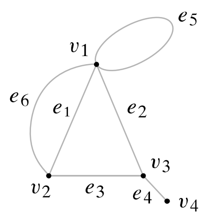


10.

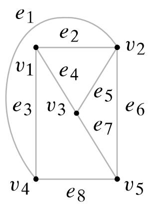


Para cada gráfica G = (V, E) en los ejercicios 11 al 13, encuentre V, E, todas las aristas paralelas, lazos, vértices aislados, y diga si G es una gráfica simple. Además, diga sobre qué vértices incide la arista e_1.

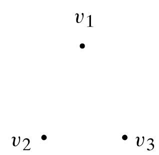
11.



12.



13.



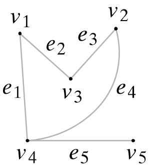
14. Dibuje K_3 y K_5.

15. Encuentre una fórmula para el número de aristas en K_n.

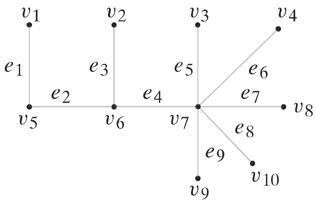
16. Dé un ejemplo de una gráfica bipartita diferente de los ejemplos de esta sección. Especifique los conjuntos ajenos de vértices.

Determine qué gráficas en los ejercicios 17 al 23 son bipartitas. Si la gráfica es bipartita, especifique los conjuntos ajenos de vértices.

17.



18.



19. Figura 8.1.2

20. Figura 8.1.5

21. Ejercicio 11

22. Ejercicio 12

23. Ejercicio 13

24. Dibuje $K_{2,3}$ y $K_{3,3}$.

25. Encuentre una fórmula para el número de aristas en $K_{m,n}$.

26. Muchos autores requieren que V_1 y V_2 sean no vacíos en la definición 8.1.11. Según estos autores, ¿cuáles gráficas en los ejemplos 8.1.12 a 8.1.14 son bipartitas?

En los ejercicios 27 al 29, encuentre una trayectoria de longitud mínima de v a w en la gráfica de la figura 8.1.7 que pase por cada vértice exactamente una vez.

27. $v = b, w = e$

28. $v = c, w = d$

29. $v = a, w = b$

30. Paul Erdős (1913–1996) fue uno de los matemáticos más prolíficos de todos los tiempos. Fue autor o coautor en cerca de 1500 artículos. Se dice que los matemáticos que trabajaron en un artículo con Erdős tienen un *número de Erdős de uno*. Los matemáticos que no son coautores con Erdős pero que publicaron con un matemático que tiene número de Erdős de uno, tienen un *número de Erdős de dos*. Los números de Erdős mayores se definen de manera similar. Por ejemplo, el autor de este libro tiene un número de Erdős de cinco. Johnsonbaugh es coautor de un artículo con Tadao Murata, quien es coautor con A. T. Amin; Amin es coautor con Peter J. Slater; Slater es coautor con Frank Harary; y Harary es coautor de un artículo con Erdős. Desarrolle un modelo de gráficas para los números de Erdős. En su modelo, ¿qué es un número de Erdős?

31. El modelo de gráficas para los números de Bacon (vea el ejemplo 8.1.6), ¿es una gráfica simple?

32. Dibuje la gráfica de similitud que se obtiene al hacer $S = 40$ en el ejemplo 8.1.7. ¿Cuántas clases hay?

33. Dibuje la gráfica de similitud que se obtiene al hacer $S = 50$ en el ejemplo 8.1.7. ¿Cuántas clases hay?

34. En general, ¿“es similar a” es una relación de equivalencia?

35. Sugiera propiedades adicionales para el ejemplo 8.1.7 que resulten útiles al comparar programas.

36. ¿Cómo se puede automatizar la selección de S para agrupar datos en clases usando un gráfica de similitud?

37. Dibuje un cubo-2.

38. Haga un dibujo como el de la figura 8.1.11 para mostrar cómo se construye un cubo-3 a partir de dos cubos-2.

39. Pruebe que la construcción recursiva en el ejemplo 8.1.8 de hecho lleva a un cubo-n.

40. ¿Cuántas aristas inciden en un vértice en un cubo-n?

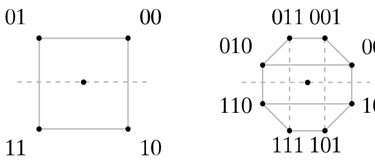
41. ¿Cuántas aristas hay en un cubo-n?

★**42.** ¿De cuántas maneras pueden etiquetarse los vértices de un cubo-n como $0, \ldots, 2^n - 1$, de forma que haya una arista entre dos vértices si y sólo si la representación binaria de sus etiquetas difiere exactamente en un bit.

[Bain] inventó un algoritmo para dibujar el cubo-n en el plano. En el algoritmo, todos los vértices están en el círculo de unidad en el plano xy. El ángulo de un punto es el ángulo desde el lado positivo del eje x en sentido contrario a las manecillas del reloj hasta el rayo que va del origen al punto. La entrada es n.

1. *Si n = 0, se coloca un vértice sin etiqueta en (−1, 0) y se detiene.*
2. *Se invoca recursivamente este algoritmo con entrada n − 1.*
3. *Se mueve cada vértice para que su nuevo ángulo sea la mitad del actual, manteniendo las aristas conectadas.*
4. *Se refleja cada vértice y arista respecto al eje x.*
5. *Se conecta cada vértice arriba del eje x con su imagen de espejo abajo del eje x.*
6. *Se antepone 0 a las etiquetas de cada vértice arriba del eje x, y 1 a las etiquetas de los vértices abajo del eje x.*

Las siguientes figuras muestran la manera en que el algoritmo dibuja un cubo-2 y un cubo-3.

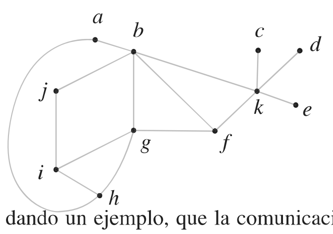


43. Muestre cómo el algoritmo construye el cubo-2 a partir del cubo-1.

44. Muestre cómo el algoritmo construye el cubo-3 a partir del cubo-2.

45. Muestre cómo el algoritmo construye el cubo-4 a partir del cubo-3.

Los ejercicios 46 al 48 se refieren a la siguiente gráfica. Los vértices representan oficinas. Una arista conecta dos oficinas si hay un enlace de comunicación entre las dos. Observe que cualquier oficina se puede comunicar con cualquier otra con un enlace de comunicación directo o haciendo que otros pasen el mensaje.



46. Muestre, dando un ejemplo, que la comunicación entre las oficinas es posible aun cuando se rompan algunos enlaces de comunicación.

47. ¿Cuál es el número máximo de enlaces de comunicación que se pueden romper teniendo todavía comunicación entre todas las oficinas?

48. Muestre una configuración en la que se rompió el número máximo de enlaces de comunicación y todavía es posible la comunicación entre todas las oficinas.