总分 100 + 10。

T1

判断并简答。正确的简述理由，错误的举出反例。

$6' \times 5 = 30'$

1. 若数列 $\{x_n\}$ 的任意子列都有收敛子列，则 $\{x_n\}$ 收敛。
2. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在区间 $(0,1)$ 上一致连续，则 $f(x)g(x)$ 也在 $(0,1)$ 上一致连续。
3. 设 $\forall n \in \mathbb{N}_+ : x_n \le y_n \le z_n$，并且 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$ 与 $\lim\limits_{n\to\infty} z_n$ 均存在且有限，则 $\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ 存在。
4. 设函数 f 在 $x=0$ 处可导，则存在 0 的某个邻域使得 f 在它上面连续。
5. 设函数 $f(x) \in C(-1,1)$，且当 $x \to 0$ 时，有

   $$f(x) = a + bx + cx^2 + o(x^2)$$

   则 $f(x)$ 在 0 点二阶可导，且 $f''(0) = 2c$。

T2

计算题。

$6' \times 5 = 30'$

1. 用 $\varepsilon - N$ 语言说明 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^2}{2^n} = 0$。
2. 求极限 $\lim\limits_{x\to+\infty} (\cos\frac{1}{x} + \sin\frac{1}{x})^x$。
3. 求极限 $\lim\limits_{x\to 0}(\frac{1}{x} - \frac{1}{\tan x})$。
4. 设 $y = y(x)$ 由方程 $\tan y - xy = 0$ 确定，求 $y'(x)$。
5. 设 $f(x) = x^3 e^{2x}$。计算 $f^{(2025)}(0)$。

T3

$10'$

设函数 $f(x) = (x-a)\phi(x)$，其中 $\phi(x)$ 在 a 处连续，求 $f(x)$ 在 a 处的导数。

T4

$10'$

讨论下面数列的敛散性。若收敛，请计算极限值。

$$x_1=\sqrt{2}, x_2=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, \ldots, x_{n+1}=\sqrt{2}^{x_n}, n=1,2,3,\ldots$$

T5

定义函数 $f(x)=\begin{cases}x^2\sin\frac{1}{x}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$。

(i)

$6'$

说明 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上可微，但导函数 $f'(x)$ 在 $x=0$ 间断。

(ii)

$6'$

但是，下面却"证明"了：如果 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 可微，则 f' 在每一点 $a\in\mathbb{R}$ 均连续。

> *证明：根据 Lagrange 中值定理，有 $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(\xi)$，其中 ξ 是介于 a 和 x 之间的一个点。因此，当 x 趋于 a 时，ξ 也趋于 a。由导数的定义，$\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=f'(a)$，于是由这个极限存在就得出 Lagrange 中值定理等式右边的极限也等于 $f'(a)$，即当 $\xi\to a$ 时有 $f'(\xi)\to f'(a)$。这样，$f'(x)$ 在点 a 处的连续性得证。*

请指出这个"证明"的错误何在。

T6

$8'$

设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,+\infty)$ 上可微，且满足 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)=f(a)$。证明：存在一点 $\xi\in(a,+\infty)$，使得 $f'(\xi)=0$。

T7（附加题）

$10'$

设函数 $f(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上二阶可导。若 $\lim\limits_{x\to+\infty}f(x)$ 收敛，$f''(x)$ 有界，证明：$\lim\limits_{x\to+\infty}f'(x)=0$。