# Mathematical Analysis 25Fall Final (Recall)

csxsl Crykkkk

本文件不保证准确，题面及思路仅供参考，考试满分为 100 分，总时间为 120 分钟

## Problem 1:

判断下列命题是否正确，如果正确，请说明原因，如若不然，请举出反例

1. 若 $\int_0^{+\infty} f(x)\mathrm{d}x$ 收敛，则 $\lim_{x\to\infty} f(x) = 0$。
2. 有界数列的上、下极限均存在且相等，则数列收敛。
3. 若 $f(x)$ 与 $g(x)$ 均在 $[a, b]$ 上黎曼可积，则 $h(x) = \max\{f(x), g(x)\}$ 也在 $[a, b]$ 上黎曼可积。
4. 若 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛，$a_n \neq 0$，且 $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$，则 $\sum_{n=1}^{+\infty} b_n$ 收敛。

## Problem 2:

### 2.1

计算极限：

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\int_0^x t^2 e^{t^2}\mathrm{d}t}{xe^{x^2}}$$

### 2.2

计算极限：

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{\frac{(n+k)(n+k+1)}{n^4}}$$

### 2.3

计算不定积分：

$$\int x \arctan x \,\mathrm{d}x$$

**2.4**

计算定积分：

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{1+\tan^\alpha x}\mathrm{d}x \quad (\alpha > 0, \alpha \in \mathbb{R})$$

（Hint：考虑使用 $t = \frac{\pi}{2} - x$ 换元）

**2.5**

计算曲线长度：

$$\begin{cases} x = e^t \cos t \\ y = e^t \sin t \end{cases} \qquad (0 \le t < 2\pi)$$

**2.6**

计算反常积分：

$$\int_0^{+\infty} xe^{-45x}\mathrm{d}x$$

# Problem 3:

判断下列无穷积分的敛散性。若收敛，请指出是条件收敛还是绝对收敛：

$$\int_e^{+\infty} \frac{\sin x}{\ln x}\mathrm{d}x$$

# Problem 4:

若对于任意非负整数 $n$，均存在非负常数 $C$ 满足 $|f^{(n)}(x)| \le C^n, \forall x \in \mathbb{R}$。证明：对于任意 $x_0$，$f(x)$ 在 $x_0$ 处的无穷 Taylor 展开绝对收敛，且满足：

$$f(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

# Problem 5:

已知

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}\left(\frac{a_n}{a_{n+1}} - 1\right) = \lambda > 0$$

证明级数 $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ 收敛。

## Problem 6:

已知 $f(x)$ 一阶导数连续，$f(0)=f(2)=1$，且满足 $|f'(x)| \leq 1, \forall x \in [0,2]$。

(1) 证明：$1 \leq \int_0^2 f(x)\mathrm{d}x \leq 3$。

(2) 不等式两边的等号能否取到？给出结论并说明理由。

## Problem 7:

设 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x \,\mathrm{d}x$：

(1) 证明 $I_n$ 与 $\frac{1}{2n}$ 是等价无穷小（当 $n \to \infty$ 时）。

(2) 计算极限：$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(I_n - \frac{1}{2n}\right)$。