Linear Algebra 25Fall Midterm (Recall)

Crykkk

January 5, 2026

本文件题目仅供学习参考，本次考试共100分(附加分20分)，考试时间为100分钟

1 Problem 1 (10 point)

解一个 3×4 的线性方程组（秩为 3）

2 Problem 2 (5 point)

计算一个 4×4 的行列式

3 Problem 3 (5 point)

在介绍行列式的严密定义之前，我们提到了如下的一种行列式算法:

1. 通过基本列变换将矩阵转为列阶梯形式 (Column echelon form)，并通过对角线上的元素计算其行列式
2. 根据基本列变换的过程“修正”前面计算的行列式，从而得到行列式的结果

请以完整语言解释为什么这种算法**不可以**作为 det(A) 的严密定义(Rigorous definition)

4 Problem 4 (15 point)

考虑一个线性空间 V 与两个有限子集 A, B，满足二者各自 (内部均) 线性独立，证明或证伪下面的命题

1. 如若 $\forall a \in A, b \in B$，a, b 线性独立，则 $A \cup B$ 线性独立
2. 如若 $\forall a \in A, B \cup \{a\}$ 线性独立，反之亦然，则 $A \cup B$ 线性独立
3. 如若 $\forall a \in A, b \in B, a, b$ 相互正交，则 $A \cup B$ 线性独立

5 Problem 5 (15 point)

考虑由以 x 为自变量，最高次数小于等于 n 的多项式组成的集合

$$P_n = \left\{ p(x) = \sum_{i=0}^{n} c_i x^i \middle| c_i \in \mathbb{R} \right\}$$

对其我们可定义如常的加法和标量乘法.

1. 证明 P_n 为线性空间

2. 求出 P_n 的一组基
3. 对于非负整数 m，考虑 $T \subseteq \mathbb{R}^n, |T| = m$，定义

$$W_T = \{p(x) \in P_n | \forall a \in T, p(a) = 0\}$$

   证明 W_T 是 P_n 的一个子空间，并求出 W_T 的维度

6 Problem 6 (15 point)

我们递归地将 Hadamond 矩阵定义如下

$$H_1 = \begin{bmatrix} 1 \end{bmatrix}, \qquad H_n = \begin{bmatrix} H_{n-1} & H_{n-1} \\ H_{n-1} & -H_{n-1} \end{bmatrix}.$$

1. 证明 H_n 的行向量正交.
2. 不加证明地写出 H_n 的逆矩阵.

7 Problem 7 (15 point)

对实矩阵 A 及其一个实特征值 λ，考虑

$$V_\lambda = \{x \in \mathbb{C}^n | Ax = \lambda x\}$$
$$W_\lambda = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = \lambda x\}$$

1. 证明 $W_\lambda \subsetneq V_\lambda$，并说明前者是否为后者的一个子空间
2. 证明 W_λ 是 $\mathbb{R}^n$ 的一个线性子空间, 且 $\dim(W_\lambda) \geq 1$
3. 证明 W_λ 在标量属于实数集时的维度与 V_λ 在标量属于复数集时的维度相等

8 Problem 8 (20 point)

给定 $n \times n$ 的矩阵 A

8.1 Task 1

已知 $A^2 = \mathbf{0}$，证明

1. $C(A) \subseteq N(A)$
2. A 的任意行向量与任意列向量正交
3. $rank(A) \leq \dfrac{n}{2}$

8.2 Task 2

已知 $\exists k \in N^*$，满足 $A^k = \mathbf{0}$，证明

$$rank(A^2) \leq rank(A) - 1$$

9 Extra (20 point)

我们称若干个$\mathbb{R}^n$中的向量 $\{v_1, ..., v_m\}$ 是**等角的**(Equiangular)，如果

$$\exists \theta \in (0, \tfrac{\pi}{2}]\ s.t.\ \forall i, j \in [m],$$
$$|v_i \cdot v_j| = \theta.$$

9.1 Task 1

(不加证明的) 给出 4 个 $\mathbb{R}^3$ 中的等角向量

9.2 Task 2

给定一组 $\mathbb{R}^3$ 中的等角向量 $\{v_1, ..., v_m\}$，证明所有的矩阵

$$A_i = v_i v_i^T, i \in [m]$$

在 3×3 矩阵组成的线性空间下线性独立

9.3 Task 3

依据 Task 2 中的结论，证明 $\mathbb{R}^3$ 中至多有 6 个等角向量