

# Прикладная Криптография: Симметричные криптосистемы Абсолютная и Семантическая стойкость

Макаров Артём

МИФИ 2025

# Структура курса



- Лекции: 16 недель
- Сдача разделов: 3 блока
  - Для каждого блока жёсткий дедлайн (без переносов)
  - <https://github.com/CryptoCourse/CryptoLectures/wiki/Список-домашних-работ-и-лекций>
  - <https://github.com/CryptoCourse/CryptoLabs/wiki/список-лабораторных-работ>
  - **Штраф за пропуск дедлайна: для дз -5/100 к итоговой оценке за семестр за каждый дедлайн в неделю; лабы после дедлайна не сдаются (и -5 к итоговой оценке за каждую пропущенную лабу)**
- Для сдачи каждого блока:
  - Сдача лабораторных работ для данного блока
  - Сдача домашних работ
  - Сдача теории по лабораторным и домашним

# Структура курса (2)



- Тест в начале каждой пары
  - 3-5 минут
  - 1 вопрос
  - Ответ на листке не больше половины а4 и не меньше четверти а4
  - Нельзя пользоваться телефонами и конспектами, а также соседями
  - При опоздании ждём в коридоре
- Лекция
- Лабораторная/семинар
  - Сдача и защита дз
  - Разбор заданий
  - Сдача лабораторных работ

# Структура курса (3)



- Сдача лабораторных работ
  - ДО начала пары необходимо загрузить их на Github по ссылке
  - Написать в tg о загруженной работе, включить в текст сообщения фамилию
  - На паре во время сдачи лабораторных работ заявить о желании сдать лабораторную работу
  - При сдаче лабораторной работы необходимо продемонстрировать работу программы и ответить на теоретические вопросы, если иное не было указано в личных сообщениях после отправки работы.

# Структура курса (4)



- Формирование оценки:

$$T = \frac{N_1 + N_2 + N_3}{3} * 0.9 + B * 0.1 + E - P$$

- $N_i, i = 1, 2, 3$  – нормированная на 1 сумма оценок по **дз** за  $i$ -й блок
- $B$  – нормированная на 1 сумма оценок по **тестам** в начале пары
- $E$  – дополнительные «плюшки»
- $P$  – штрафы за дедлайны

# Связь



<https://t.me/f1589>

t.me

(Вопросы)

# Лабораторные работы

- REST API служба (dotnet, self-hosted).
- Задача – продемонстрировать атаку на криптосистему с уязвимостью.
- Допустимые языки программирования: C++, C#, Python, Java, другие?
- Подробнее на лабораторной работе.

# Сдача теории

- Сдаётся в формате вопрос – ответ
  - Задаётся набор различных вопросов по пройденному материалу
  - Если на какой то вопрос ответ не получен, или получен не верный ответ – даётся время подумать или поискать ответ
  - Количество попыток – не ограничено внутри блока
- Несправедливости:
  - Разное количество вопросов разным людям
  - Максимальное количество вопросов – не ограничено
  - Возможность не сдать теорию, даже если в гугле были найдены все ответы



# Материалы прошлого года

- Курс обновляется в момент чтения. Материалы прошлого года доступны, но еженедельно обновляются.
- Доверять и использовать нужно только текущие материалы, т.е. материалы всех прошедших в семестре лекций и лабораторных заданий текущего блока.
- Не рекомендуется выполнять задания «наперёд», так как материал может измениться

# Материалы прошлого года

Название	Описание	Блок	Сроки сдачи
Атака при многократном использовании одноразового блокнота	<a href="#">link</a>	1	07.09.19 - 21.09.19(06:00)
Атака на аутентичность при использовании поточных шифров	<a href="#">link</a>	1	07.09.19 - 21.09.19(06:00)
X Атака на аутентичность блочного шифра в режиме CBC	meh	2	20.09.18 - 01.11.18(06:00)

Лекция	Описание	Блок	Сроки сдачи домашней работы
1	Абсолютная и семантическая стойкость ( <a href="#">лекция</a> , <a href="#">задание</a> )	1	14.09.19
2	Поточные шифры ( <a href="#">лекция</a> , <a href="#">задание</a> )	1	XXXX
3	Практические аспекты ( <a href="#">лекция</a> )	1	null

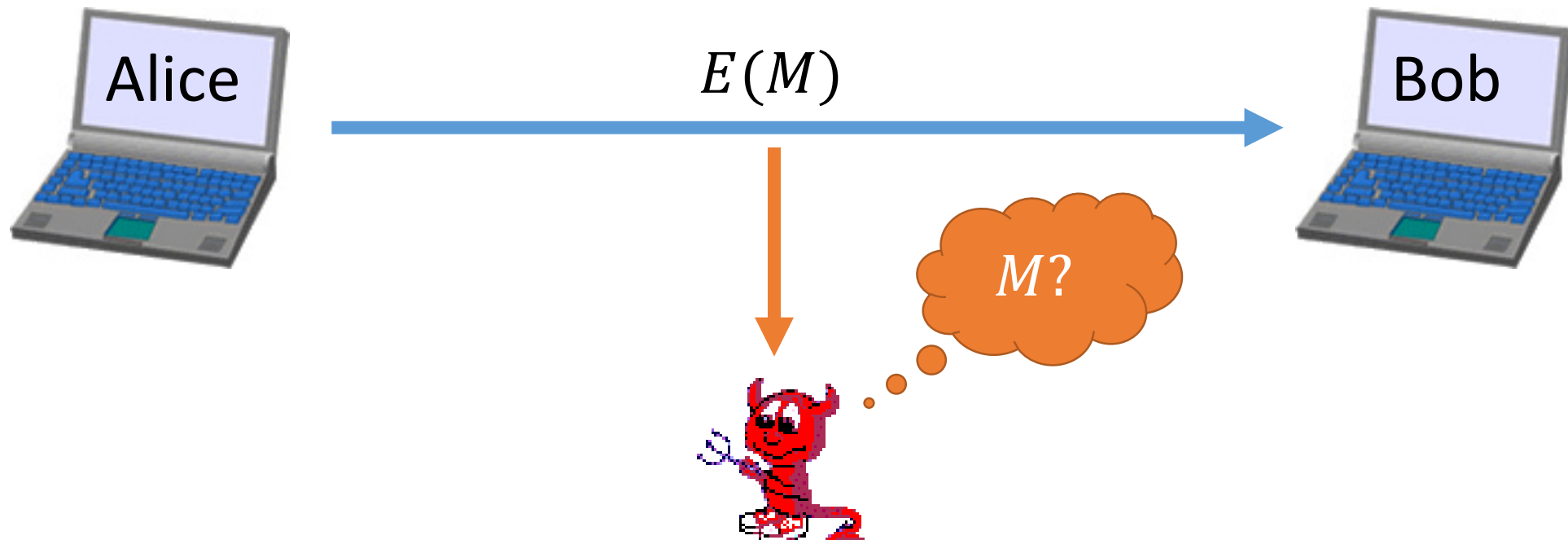
# Использование нейронок

- **Нельзя** использовать выход нейронок для выполнения ДЗ и лабораторных работ, даже для написания README.
  - Если вы всё же использовали нейронку, и по какой то причине, считаете, что это допустимое использование – необходимо явно в материале, где вы её использовали указать это в начале данного материала.
- **Можно** использовать нейронки для генерации смешных картинок с котиками в тематике курса.

# Обратная связь и пожелания по курсу

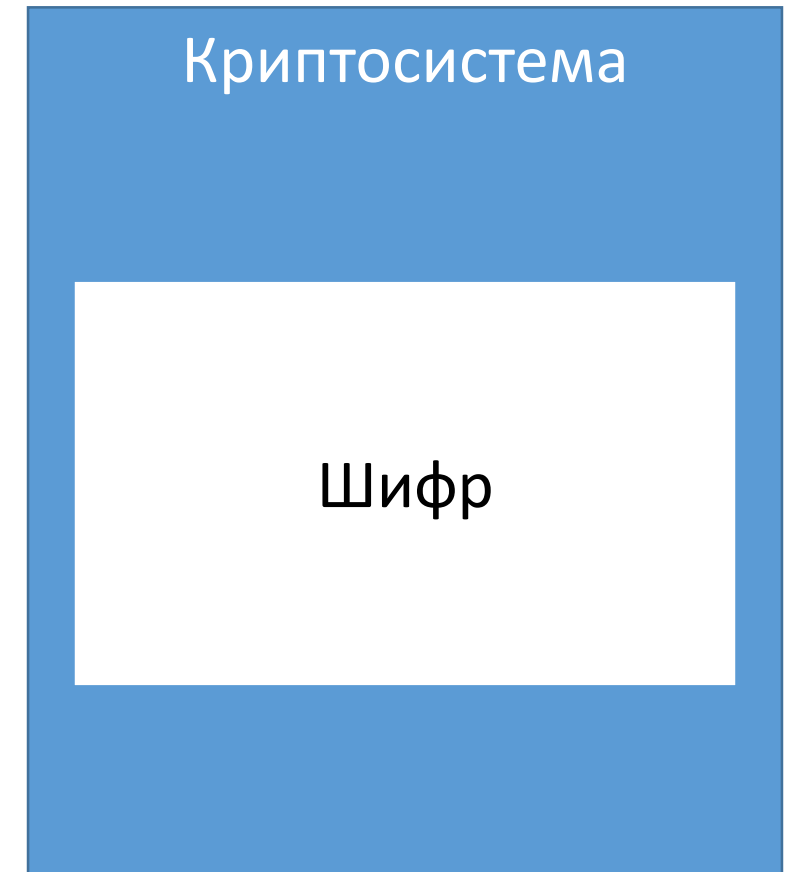
# Историческая задача криптографической защите информации

- Передача зашифрованного сообщения по открытому каналу
- При перехвате зашифрованного сообщения открытый текст должен остаться неизвестным для злоумышленника



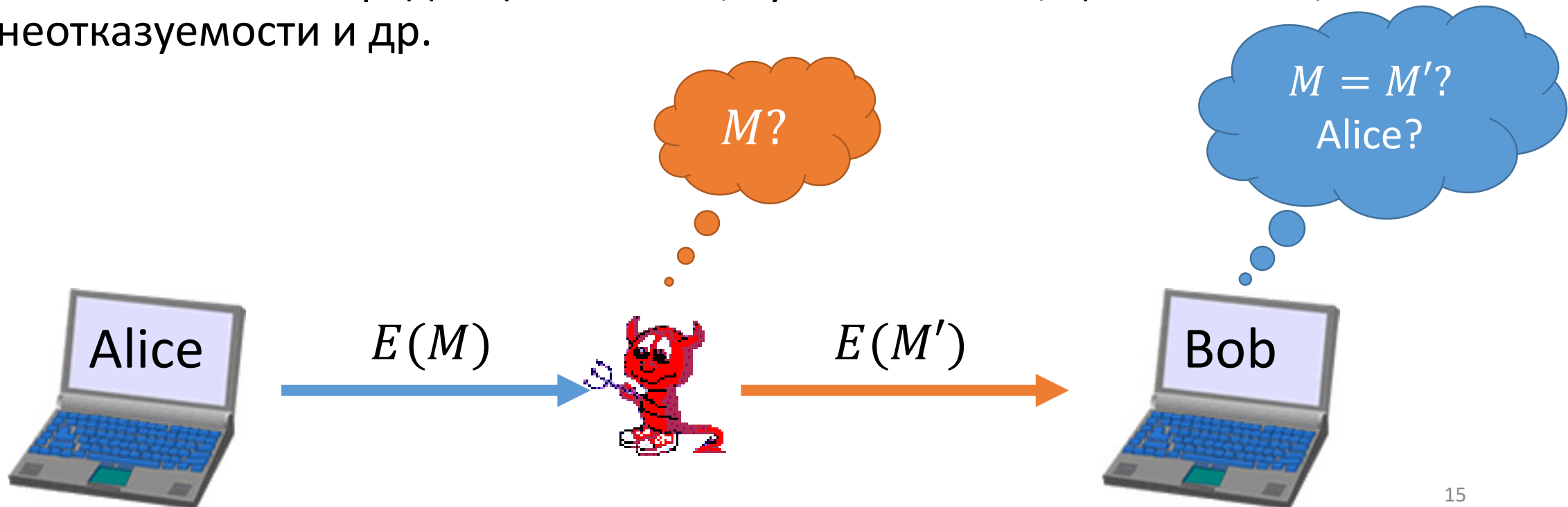
# Способы построения и анализа криптосистем

- **Досистемный подход**– построение и анализ криптосистем, которые выглядят «сложными» для создателя;
- Предположении о стойкости исходит «из очевидной сложности взлома» для создателя схемы
- Примеры – шифр Цезаря, шифр простой замены, шифр Вижинера



# Современная задача криптографической защиты информации

- Передача сообщения по открытому каналу
- Возможен активный злоумышленник
- Обеспечение конфиденциальности, аутентичности, целостности, неотказуемости и др.



# Понятие стойкости

Нужно как то оценивать **стойкость** шифров, желательно в виде некоторой величины. Численное значение оценки стойкости называется **параметром стойкости**.

При оценке стойкости криптографического примитива он рассматривается в некоторой **модели**. Каждая такая модель должна давать возможность оценивать стойкость примитивов в ней.

Все примитивы, имеющие стойкость ниже пороговой будем считать **нестойкими**.



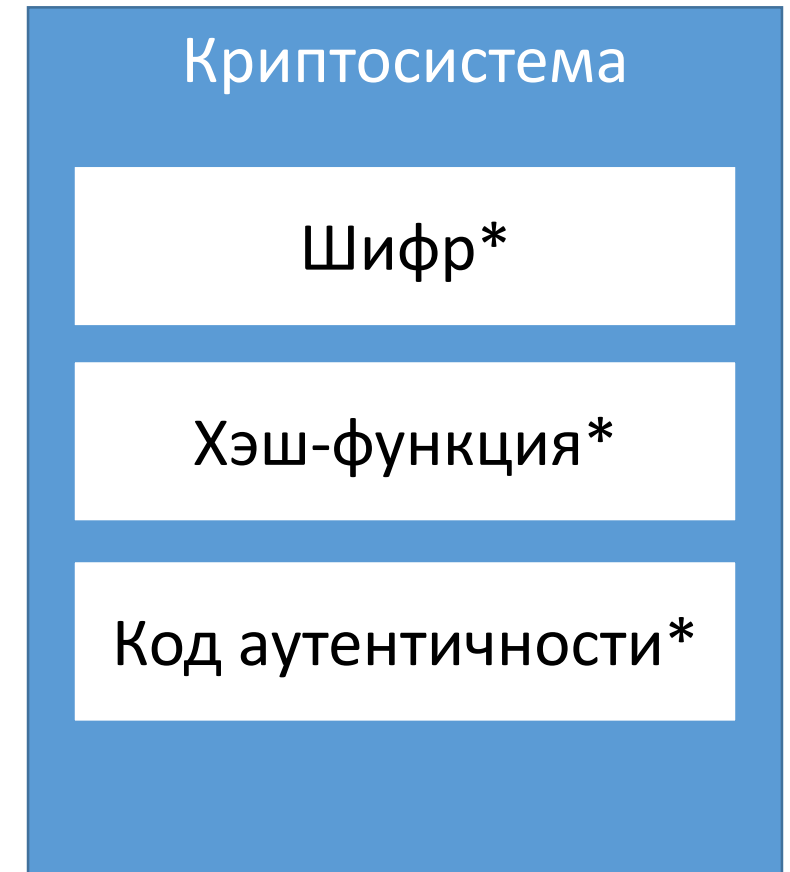
# Оценка стойкости криптографического примитива

- Определение примитива
  - Что делает алгоритм примитива, чем он является?
  - Какие параметры примитива?
- Определение модели
  - Каковы возможности противника?
  - Какой целевой параметр стойкости?
  - Как определена стойкость? Как она зависит от параметров?
- ???
- Сравнение стойкости с целевым параметром



# Способы построения и анализа криптосистем

- **Системный подход** – построение и анализ криптосистем на основе **конкретных** криптографических примитивов
- Возможно наличие не только средств обеспечения секретности, но и аутентичности, целостности и других
- Предположении о стойкости исходит из анализа системы в целом, через сведение стойкости к сложности вычислительно сложной задачи
- При замене части системы или примитива необходимо произвести анализ заново



# Принцип Керкгоффса

При построении и анализе криптосистем предполагаем, что противник знает ВСЁ, кроме секретных ключей.

Предполагается, что противник знает

- Функции зашифрования/расшифрования (подписи/проверки/...)
- Слабые ключи (при наличии)
- «Плохие» значения шифртекстов/открытых текстов
- Любые особенности примитивов
- Любые существующие атаки на примитивы

# Способы построения и анализа криптосистем

- **Современный подход** – построение и анализ криптосистем на основе абстрактных моделей криптографических примитивов
- Вместо анализа частных свойств примитивов и их взаимодействия производится анализ самой конструкции, вне зависимости от используемых примитивов и их стойкости
- Предположении о стойкости исходит из анализа системы в предположении об априорной стойкости примитивов
- При замене части системы нет необходимости проводить повторных анализ



Слишком сложно

# Прикладное мостостроение

## Стойкость мостов через сведение к стойкости составных элементов\*

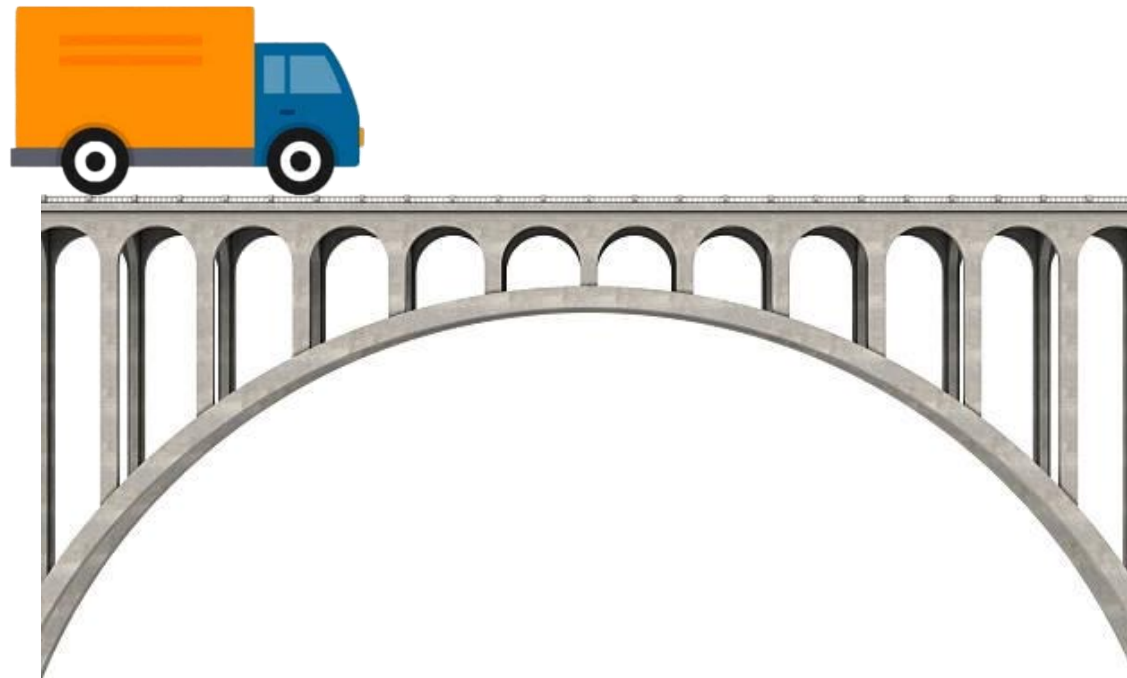
Макаров Артём

МИФИ 2025

\* — исключительно с целью демонстрации на пальцах, автор не имеет понятия, как на самом деле оценивается прочность мостов

# Историческая задача построения мостов

- Отправка товаров на другой берег, используя некоторый транспорт
- Обеспечение целостности грузов, используемого транспорта



# Оценка стойкости моста

- Определение типа моста
  - Арочный? Подвесной?
- Определение модели
  - Какова предполагаемая нагрузка на мост? Какого она типа?
    - Какое количество транспорта, какая нагрузка, если ли «пики» нагрузки...
  - Какая целевая «стойкость» моста? Как она зависит от параметров
- ???
- Сравнение стойкости с целевым параметром





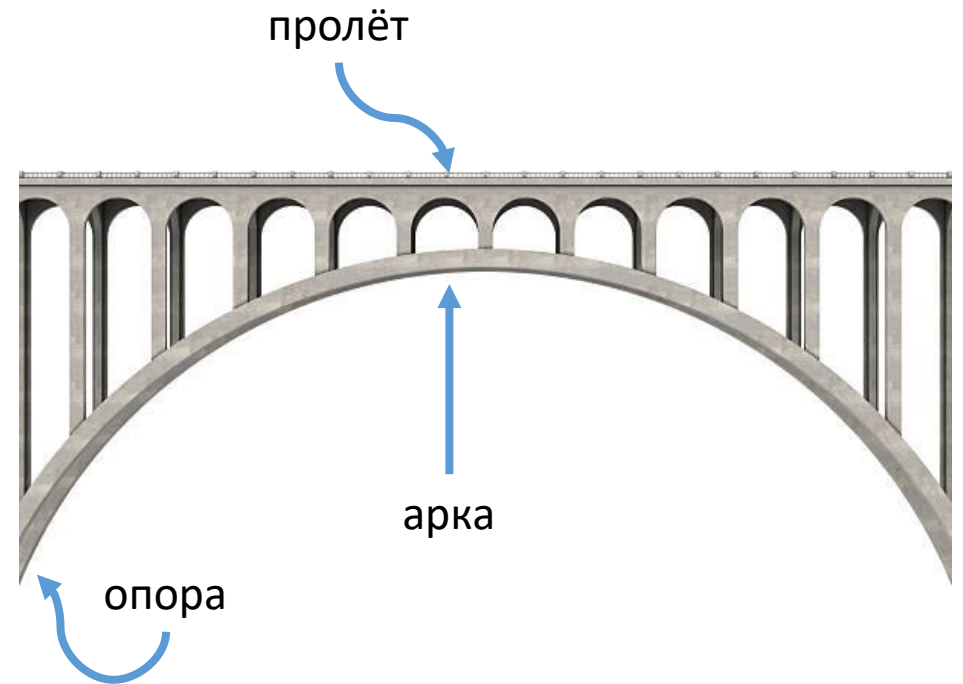
# Сведение стойкости моста к стойкости составных элементов

Хотим показать, что мост является стойким от некоторых параметров, если стойкими являются её составные части.

$$S_{\text{моста}} = F(S_{\text{опоры}}, S_{\text{пролёта}}, S_{\text{арки}})$$

Для простоты рассмотрим только сведение до стойкости опоры, т.е. предположим, что пролёт и арка «безусловно стойкие».

$$S_{\text{моста}} = F(S_{\text{опоры}})$$



# Сведение стойкости (Security Reduction)

Доказательство стойкости мостов показывается сведением её к стойкости составных элементов.

(если) Составные элементы стойкие  $\Rightarrow$  (то) Мост стойкий

$\Leftarrow$  (отрицание обеих частей)

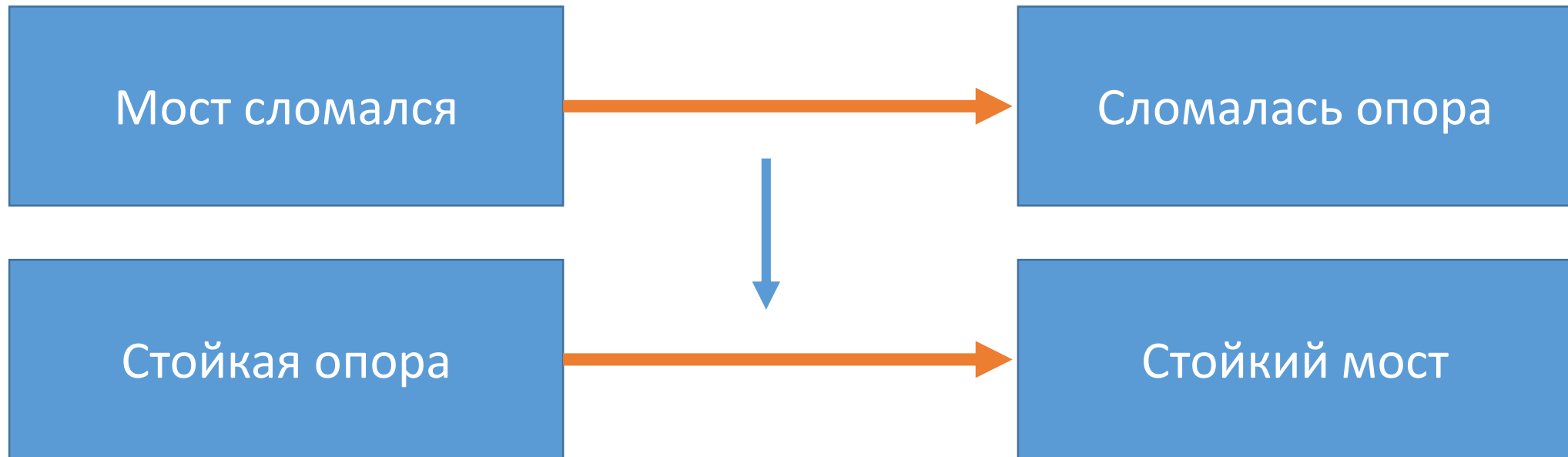
(если) Мост нестойкий  $\Rightarrow$  (то) нестойкие какие то его элементы



# Сведение стойкости (Security Reduction)

Составные элементы не стойкие  $\Rightarrow$  Мост нестойкий

- Если можем показать, что в предположении «Мост сломался» у нас всегда ломается опора, значит мост всегда будет стойким, если будет стойкой опора.



Ах да, криптография

# Сведение стойкости (Security Reduction)

Наиболее распространённый способ доказательства практической стойкости криптографического примитива является сведение атаки на него к вычислительно сложной задаче. Иными словами показывается, что произвести атаку на примитив так же сложно как решить вычислительно сложную задачу.



# Сведение стойкости (Security Reduction)

Доказательство стойкости криптосистемы показывается сведением её к стойкости криптографических примитив. При современном подходе описание системы использует только абстрактные модели примитивов (PRF, PRP, и другие).



# Сведение стойкости (Security Reduction)

Пусть  $A$  – стойкая система. Показать что система  $B$  стойкая. ( $A \rightarrow B$ ).  
(Показать сведение стойкости системы  $B$  к стойкости системы  $A$ .)

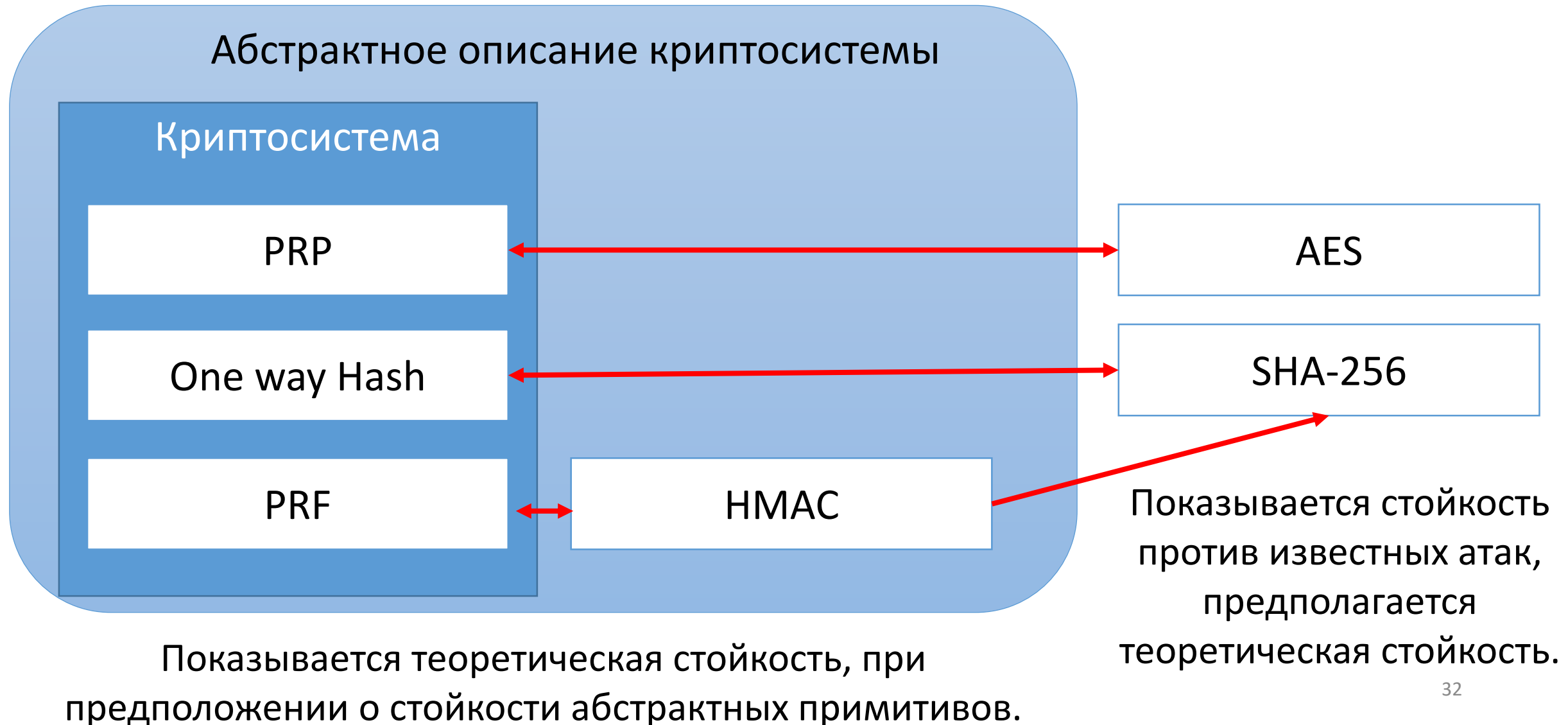
▷ От противного. Пусть существует атака на систему  $B$ . Попробуем использовать эту атаку для построения атаки на систему  $A$ .

(Строим атаку на систему  $A$ ).

Следовательно, из предположения нестойкости системы  $B$   
(предположения о наличии атаки) мы построили атаку на систему  $A$ ,  
 $\bar{B} \rightarrow \bar{A}$ .

Но система  $A$  – стойкая, следовательно предположение не верно и  $B$  – стойкая. ◁

# Сведение стойкости (Security Reduction)





# Сведение стойкости криптографических примитивов

- Для симметричных криптосистем стойкость сводится к задаче 3SAT:
  - Пусть дана булева функция от  $N$  переменных. Найти вектор решений, при котором значение булевой функции равно 1.
    - NP полная задача
  - Как правило не показывается явное сведение, а доказываемая стойкость к существующим атакам
- Для асимметричных криптосистем стойкость может сводиться:
  - Задача дискретного логарифмирования в конечных группах
  - Задача факторизации больших целых чисел
  - Задача нахождения кратчайшего вектора решётки
  - Задача декодирования линейных кодов
  - Задача решения многомерных квадратичных многочленов
  - ....

# Вопросов больше, чем ответов

Рассмотрим Шифр.

- Как определить модель Шифра?
- Как в рамках модели определить стойкость?
  - Каков смысл числового значения стойкости?
- Как связана стойкость и практические атаки?
- Какой параметр стойкости считать допустимым?



# Шифр Шеннона

Шифр Шеннона - пара функций  $E = (E, D)$ , таких что:

- (1) Функция  $E$  (**функция зашифрования**) принимает на вход ключ  $k$  и сообщение  $m$  (называемой открытым текстом, РТ) и даёт на выходе шифртекст  $c$  (СТ), такой что

$$c = E(k, m).$$

Говорят, что  $c$  есть **зашифрование**  $m$  на ключе  $k$ .

- (2) Функция  $D$  (**функция расшифрования**) принимает на вход ключ  $k$  и шифртекст  $c$  и даёт на выходе сообщение  $m$ , такое что

$$m = D(k, c)$$

Говорят, что  $m$  это **расшифрование**  $c$  на ключе  $k$ .

# Шифр Шеннона

- (3) Функция  $D$  обращает функцию  $E$  (**свойство корректности**):  
$$\forall k, \forall m \ D(k, E(k, m)) = m.$$

Пусть  $K$  – **множество ключей**,  $M$  – **множество сообщений**,  $C$  – **множество шифртекстов**.

Тогда шифром Шеннона, определённым над  $(K, M, C)$  называют пару функций  $E = (E, D)$ :

$$\begin{aligned} E &: K \times M \rightarrow C, \\ D &: K \times C \rightarrow M, \end{aligned}$$

для которых выполняются свойства (1) – (3).

# Нотация

$v \in V_n = \{0,1\}^n$  - двоичный вектор длины  $n$  ( $|v| = n$ )

$0^n$  - двоичный вектор  $(000 \dots 00) \in V_n$

$1^n$  - двоичный вектор  $(111 \dots 11) \in V_n$

$0^k 1^l$  - двоичный вектор  $(\underbrace{000 \dots 00}_k \underbrace{111 \dots 11}_l) \in V_{k+l}$

$v' \in \{0,1\}^* = \bigcup_{k=0}^{\infty} \{0,1\}^k$  - двоичный вектор произвольной длины

$v'' \in \{0,1\}^{\leq L} = \bigcup_{k=0}^L \{0,1\}^k$  - двоичный вектор, длины не больше  $L$

# Нотация

$v \in V_n = \{0,1\}^n$  - двоичный вектор длины  $n$  ( $|v| = n$ )

Пусть  $a \in V_n: a = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1})$ ,  $b \in V_n: b = (b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$

$ab = (a||b) \in V_{2n}: (a||b) = (a_0, a_1, \dots, a_{n-1}, b_0, b_1, \dots, b_{n-1})$  -  
конкатенация векторов  $a$  и  $b$

$v[q]$  -  $q$ -я координата вектора  $v$ ,  $q < n$

$v[q, q + 1, \dots w] \in V_{w-q+1}$  - подвектор, полученный из координат вектора  $v$ ,  $q < w < n$ .

# Нотация

$x \in_R X$  -  $x \in X$ , выбранный случайно равновероятно (если не указано явно иное распределение)

$x \leftarrow_R X$  – выбор случайного равновероятного  $x \in X$  (если не указано явно иное распределение)

$x \leftarrow_R F()$  – вычисление рандомизированной функции  $F()$

$\overset{R}{\leftarrow}$  и  $\overset{R}{\leftarrow}$  – эквивалентные обозначения.

$\Pr[W]$  – вероятность события  $W$

О.Т. (P.T.) – Открытый текст (Plain Text)

Ш.Т (C.T.) – Шифртекст (Cipher Text)

# Пример: Одноразовый блокнот

Пусть  $E = (E, D)$  – **шифр Шеннона**, для которого  $K = M = C = \{0,1\}^L$ , где  $L$  – фиксированный параметр.

Для ключа  $k \in K$  и сообщения  $m \in M$  функция **зашифрования** определена как:

$$E(k, m) = k \oplus m.$$

Для ключа  $k \in K$  и шифртекста  $c \in C$  функция **расшифрования** определена как:

$$D(k, c) = k \oplus c.$$

$\oplus$  - побитное сложение по модулю 2 (XOR).

**Корректность:**  $D(k, E(k, m)) = D(k, k \oplus m) = k \oplus (k \oplus m) = (k \oplus k) \oplus m = 0^L \oplus m = m.$



# Пример: Одноразовый блокнот переменной длины

Пусть  $E = (E, D)$  – **шифр Шеннона**, для которого  $K = \{0,1\}^L$ ,  $M = C = \{0,1\}^{\leq L}$ , где  $L$  – фиксированный параметр.

Для ключа  $k \in K$  и сообщения  $m \in M$ :  $|m| = l$  функция **зашифрования** определена как:

$$E(k, m) = k[0..l-1] \oplus m.$$

Для ключа  $k \in K$  и шифртекста  $c \in C$ :  $|c| = l$  функция **расшифрования** определена как:

$$D(k, c) = k[0..l-1] \oplus c.$$

$\oplus$  - побитное сложение по модулю 2 (XOR).

**Корректность:**  $D(k, E(k, m)) = D(k, k \oplus m) = k \oplus (k \oplus m) = (k \oplus k) \oplus m = 0^L \oplus m = m.$

# Пример: Шифр подстановки

Пусть  $\Sigma$  – конечный алфавит. Пусть  $E = (E, D)$  – **шифр Шеннона**. для которого  $M = C = \Sigma^L$ , где  $L$  – фиксированный параметр.  $K = S(\Sigma)$  – множество всех подстановок над  $\Sigma$ .

Для ключа  $k \in K$  и сообщения  $m \in M: |m| = L$  функция **зашифрования** определена как:

$$E(k, m) = (k(m[0]), k(m[1]), \dots, k(m[L - 1])).$$

Для ключа  $k \in K$  и шифртекста  $c \in C: |c| = l$  функция **расшифрования** определена как:

$$D(k, c) = (k^{-1}(c[0]), k^{-1}(c[1]), \dots, k^{-1}(c[L - 1])).$$

**Корректность:**  $D(k, E(k, m)) =$

$$(k^{-1}(k(m[0])), \dots, k^{-1}(k(m[L - 1]))) = (m[0], \dots, m[L - 1]) = m$$

# Пример: Аддитивный одноразовый блокнот

Пусть  $E = (E, D)$  – **шифр Шеннона**, для которого  $K = M = C = \{0, \dots, n - 1\}^L$ , где  $n$  – фиксированный параметр.

Для ключа  $k \in K$  и сообщения  $m \in M$  функция **зашифрования** определена как:

$$E(k, m) = (m + k) \bmod n, \text{ по координатам}$$

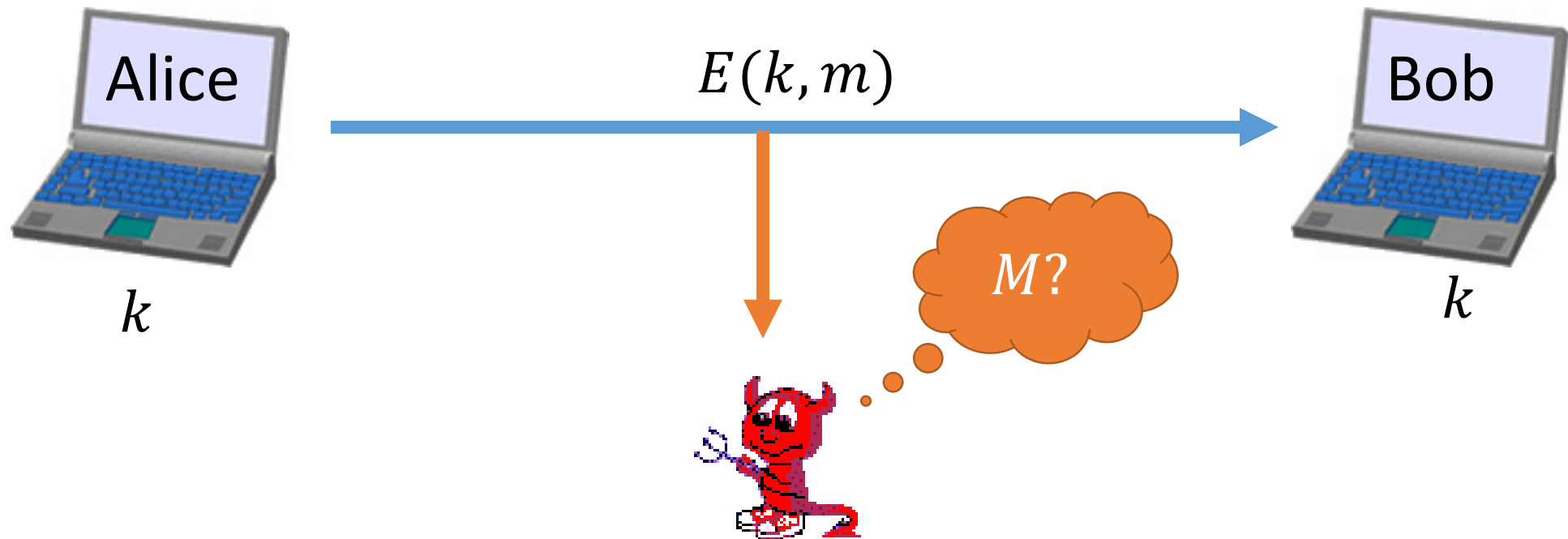
Для ключа  $k \in K$  и шифртекста  $c \in C$  функция **расшифрования** определена как:

$$D(k, c) = (c - k) \bmod n, \text{ по координатам}$$

**Корректность:**  $D(k, E(k, m)) = D(k, m + k) = (m + k) - k = m.$

# Цель шифра Шеннона

- Цель шифра Шеннона – обеспечение **секретности** передаваемых сообщений по открытому каналу
- Для обеспечения секретности необходим общий секретный ключ  $k \in K$ , неизвестный для злоумышленника



# Понятие стойкости

Очевидный вопрос – что понимать под стойкостью шифра?

Стойкость – метрика «качества» шифра.

- Попытка 1: размер ключа
  - Чем больше ключ, тем сложнее перебрать все возможные варианты. Длина ключа как параметр стойкости.
  - Но возможны и другие атаки, кроме перебора, например частотный анализ
  - Пример – шифр подстановки,  $|\Sigma| = 27$ ,  $K = S(\Sigma)$ :  $|K| \sim 10^{28}$ , но возможна полиномиальная частотная атака

# Понятие стойкости

- Попытка 2: малая вероятность расшифрования
  - Чем меньше вероятность расшифрования для злоумышленника, тем более стойкий шифр. Вероятность расшифрования как параметр стойкости.
  - Но тогда шифр определённый на коротких сообщениях, например 1 бит, менее стойкий чем шифр, определённый на длинных сообщениях, так как велика возможность «угадать» сообщение.
  - Иными словами, невозможно обеспечить стойкость при шифровании однобитного сообщения

# Понятие стойкости

- Попытка 3: **равная** вероятность расшифрования
  - При данном шифртексте вероятность расшифрованы его в любой открытый текст **одинакова**
  - Пример нестойкого шифра:  $M = \{0,1\}^n$ ,  $E = (E, D)$  – шифр Шеннона над  $(K, M, C)$ :

$$K_0 \subset K: E(k_0, m_0) = c,$$

$$K_1 \subset K: E(k_1, m_1) = c,$$

$$|K_0| > |K_1|$$

$$m_0, m_1 \in M: m_0 \neq m_1; (k_0, k_1) \in (K_0 \times K_1)$$

Вероятность расшифровать  $c$  как  $m_0$  ( $|K_0| = 800, |K_1| = 600$ ):

$$\frac{|K_0|}{|K_0| + |K_1|} \approx 57\% > 50\%$$

# Абсолютная стойкость

**Определение 1.1.** Пусть  $E = (E, D)$  – шифр шеннона над  $(K, M, C)$ . Рассмотрим вероятностный эксперимент, в котором случайная величина  $k$  равномерна распределена на  $K$  ( $k \in_R K$ ).

Если  $\forall m_0, m_1 \in M$  и  $c \in C$  имеем:

$$\Pr[E(k, m_0) = c] = \Pr[E(k, m_1) = c]$$

То шифр  $E$  называется **абсолютно стойким шифром Шеннона**.

Абсолютная стойкость защищает против **любых** (не только эффективных\*) противников.

\* – формально введём этот термин через пару лекций



# Эквивалентные определения абсолютной стойкости

**Теорема 1.1.** Пусть  $E = (E, D)$  – шифр Шеннона над  $(K, M, C)$ . Тогда следующие определения эквивалентны:

- (1)  $E$  – абсолютно стойкий
- (2)  $\forall c \in C \exists N_c(c): \forall m \in M |\{k \in K: E(k, m) = c\}| = N_c$
- (3) Если  $\mathbf{k} \in_R K$  тогда все случайные величины  $E(\mathbf{k}, m)$  имеют одинаковое равномерное распределение

▷ (2)  $\Leftrightarrow$  (3) Переформулируем (2): для каждого  $c \in C$  существует число  $P_c(c)$ , такое что  $\forall m \in M \Pr[E(\mathbf{k}, m) = c] = P_c, \mathbf{k} \in_R K. P_c = \frac{N_c}{|K|}.$  ◁

# Эквивалентные определения абсолютной стойкости

**Теорема 1.1.** Пусть  $E = (E, D)$  – шифр Шеннона над  $(K, M, C)$ . Тогда следующие определения эквивалентны:

- (1)  $E$  – абсолютно стойкий
- (2)  $\forall c \in C \exists N_c(c): \forall m \in M |\{k \in K: E(k, m) = c\}| = N_c$
- (3) Если  $\mathbf{k} \in_R K$  тогда все случайные величины  $E(\mathbf{k}, m)$  имеют одинаковое равномерное распределение

▷ (1)  $\Rightarrow$  (2) Пусть  $c \in C$  фиксированный шифртекст. Выберем произвольное сообщение  $m_0 \in M$ . Пусть  $P_c = \Pr[E(\mathbf{k}, m_0) = c]$ . (1)  $\Rightarrow \forall m \in M \Pr[E(\mathbf{k}, m) = c] = \Pr[E(\mathbf{k}, m_0) = c] = P_c, N_c = P_c * |K| \triangleleft$

# Эквивалентные определения абсолютной стойкости

**Теорема 1.1.** Пусть  $E = (E, D)$  – шифр Шеннона над  $(K, M, C)$ . Тогда следующие определения эквивалентны:

- (1)  $E$  – абсолютно стойкий
- (2)  $\forall c \in C \exists N_c(c): \forall m \in M |\{k \in K: E(k, m) = c\}| = N_c$
- (3) Если  $\mathbf{k} \in_R K$  тогда все случайные величины  $E(\mathbf{k}, m)$  имеют одинаковое равномерное распределение

$\triangleright (2) \Rightarrow (1)$ . Фиксируем  $m_0, m_1 \in M, c \in C$   $(2) \Rightarrow \Pr[E(\mathbf{k}, m_0) = c] = P_c = \frac{N_c}{|K|} = \Pr[E(\mathbf{k}, m_1) = c]$ .  $\triangleleft$

# Одноразовый блокнот – абсолютно стойкий шифр

**Теорема 1.2.** Пусть  $E = (E, D)$  – одноразовый блокнот при  $K = M = C = \{0,1\}^L$  для параметра  $L$ . Тогда  $E$  – абсолютно стойкий шифр.

▷ Для фиксированного сообщения  $m \in M$ , шифртекста  $c \in C$  и ключа  $k \in K$ , уникального для сообщения  $m : k = m \oplus c$  имеем определение (2) из **Теоремы 1.1** ◁

# Одноразовый блокнот переменной длины – не абсолютно стойкий шифр

**Теорема 1.3.** Пусть  $E = (E, D)$  – одноразовый блокнот переменной длины при  $K = \{0,1\}^L$ ,  $M = C = \{0,1\}^{\leq L}$  для параметра  $L$ . Тогда  $E$  – **не** абсолютно стойкий шифр.

▷ Пусть  $m_0 \in M: |m_0| = 1$ ,  $m_1 \in M: |m_1| > 1$ ,  $c \in C: |c| = 1$

$$\begin{aligned}a &= \Pr[E(k, m_0) = c] = 0.5 \\b &= \Pr[E(k, m_1) = c] = 0 \\a &\neq b.\end{aligned}$$

(Шифртекст размера 1 бит не может иметь открытый текст длины  $> 1$ )

Иными словами не выполняется **Определение 1.1.** (Абсолютная стойкость). ◁

# Предикат

Пусть имеется некоторый элемент  $s \in S$ .

Пусть мы хотим получить некоторую информацию обладая  $s$ . Пусть функция  $F(s)$  – есть функция «получения» некоторой информации из  $s$ .

Предикатом на множестве  $S$  назовём булеву функцию  $\phi: S \rightarrow \{0,1\}$ .

Тогда вычисление предиката  $F(s) = \phi(s)$  есть минимальная функция «получения» информации из  $s$  (функция получения информации, с выходом 1 бит).

Альтернативная трактовка предиката – бинарная различимость элементов множества.

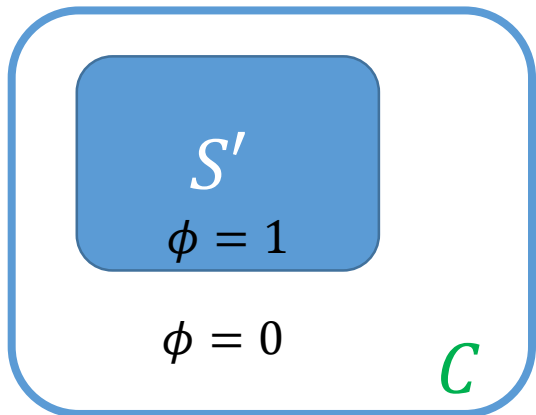
# Эквивалентные определения абсолютной стойкости

**Теорема 1.4.** Пусть  $E = (E, D)$  – шифр Шеннона на  $(K, M, \mathcal{C})$ . Рассмотрим вероятностный эксперимент для равномерно распределённой  $\mathbf{k} \in_R K$ .

Тогда  $E$  – абсолютно стойкий тогда и только тогда, когда для произвольного предиката  $\phi: \mathcal{C} \rightarrow \{0,1\}$  и  $\forall m_0, m_1 \in M$

$$\Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_0)) = 1] = \Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_1)) = 1]$$

▷ Пусть  $S' = \{c \in \mathcal{C} : \phi(c) = 1\}$ . Так как  $E$  – абсолютно стойкий имеем



$$\Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_0)) = 1] = \sum_{c \in S'} \Pr[E(\mathbf{k}, m_0) = c] = \sum_{c \in S'} \Pr[E(\mathbf{k}, m_1) = c] = \Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_1)) = 1]$$

# Эквивалентные определения абсолютной стойкости

**Теорема 1.4.** Пусть  $E = (E, D)$  – шифр Шеннона на  $(K, M, \mathcal{C})$ . Рассмотрим вероятностный эксперимент для равномерно распределённой  $\mathbf{k} \in_R K$ .

Тогда  $E$  – абсолютно стойкий тогда и только тогда, когда для произвольного предиката  $\phi: \mathcal{C} \rightarrow \{0,1\}$  и  $\forall m_0, m_1 \in M$

$$\Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_0)) = 1] = \Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_1)) = 1]$$

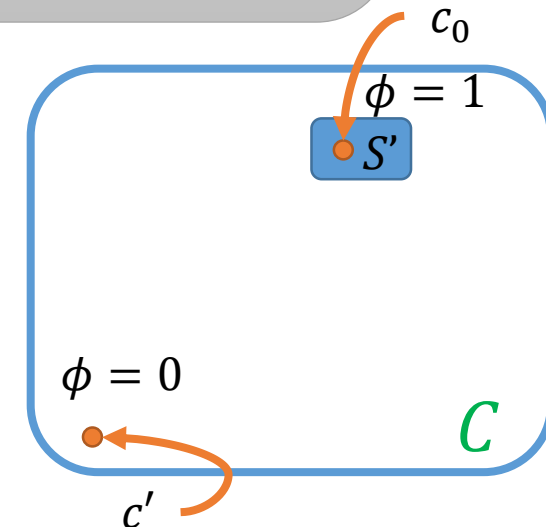
Пусть  $E$  – **не** абсолютно стойкий. То есть  $\exists c_0 \in \mathcal{C}$ :

$$\Pr[E(\mathbf{k}, m_0) = c_0] \neq \Pr[E(\mathbf{k}, m_1) = c_0].$$

Пусть  $\phi: \phi(c_0) = 1, \phi(c') = 0, \forall c' \neq c_0$

$$\begin{aligned} \Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_0)) = 1] &= \Pr[E(\mathbf{k}, m_0) = c_0] \neq \\ \Pr[E(\mathbf{k}, m_1) = c_0] &= \Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_1)) = 1] \end{aligned}$$

◁





# Эквивалентные определения абсолютной стойкости

**Теорема 1.4.** Пусть  $E = (E, D)$  – шифр Шеннона на  $(K, M, \mathcal{C})$ . Рассмотрим вероятностный эксперимент для равномерно распределённой  $\mathbf{k} \in_R K$ .

Тогда  $E$  – абсолютно стойкий тогда и только тогда, когда для произвольного предиката  $\phi: \mathcal{C} \rightarrow \{0,1\}$  и  $\forall m_0, m_1 \in M$

$$\Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_0)) = 1] = \Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_1)) = 1]$$

Иными словами: при использовании произвольного предиката на шифртекстах абсолютно стойкого шифра злоумышленник не получает информации об открытом тексте.

# Эквивалентные определения абсолютной стойкости

**Теорема 1.5.** Пусть  $E = (E, D)$  – шифр Шеннона на  $(K, M, C)$ . Рассмотрим вероятностный эксперимент для  $k \in_R K$ ,  $m \in_R M$  (для  $m$  не обязательно равномерное распределение)  $m$  и  $k$  – независимы. Введём случайную величину  $c = E(k, m)$  Тогда:

- Если  $E$  – абсолютно стойкий, тогда  $c$  и  $m$  независимы:
- Если  $c$  и  $m$  независимы, и каждое сообщение из  $M$  выберется с вероятностью, отличной от 0, то  $E$  – абсолютно стойкий.

Иными словами, для абсолютно стойкого шифра верно равенство:

$$\Pr[m = m | c = c] = \Pr[m = m]$$

То есть наличие шифртекста не даёт злоумышленнику никаких преимуществ.

# Энтропия

Мера неопределённости в поведении сигнала, количество информации передаваемое сигналом, величина измерения – бит.

$H(\mathbf{x}) = - \sum_{\mathbf{x} \in X} \Pr[\mathbf{x} = \mathbf{x}] \log_2 \Pr[\mathbf{x} = \mathbf{x}]$  - энтропия **случайной величины**  $\mathbf{x} \in_R X$ .

Пусть  $\mathbf{x} \in_R \{0,1\}^n$ , тогда  $H(\mathbf{x}) \leq n$ .  $H(\mathbf{x}) = n$  если  $\mathbf{x}$  – равномерно распределённая

$H(\mathbf{x}|\mathbf{y} = \mathbf{x}) = - \sum_{\mathbf{x} \in X} \sum_{\mathbf{y} \in Y} \Pr[\mathbf{x} = \mathbf{x}|\mathbf{y} = \mathbf{y}] \log_2 \Pr[\mathbf{x} = \mathbf{x}|\mathbf{y} = \mathbf{y}]$  - условная энтропия случайной величины  $\mathbf{x}$ .  $H(\mathbf{x}|\mathbf{y}) \leq H(\mathbf{x})$ ,  $H(\mathbf{x}|\mathbf{y}) = H(\mathbf{x})$ , если  $\mathbf{x}$  и  $\mathbf{y}$  независимы.

# Энтропия

Простыми словами – сколько в данной величине случайности в битах.

$$H(0 \dots 0) =$$

$$H(10 \dots 0) =$$

$$H(1001) =$$

$$H(0110) =$$

$$H(00 * 001) =$$

$$H(**) =$$

$$H(1 **) =$$

$$H(\text{бросок монетки}) =$$

$$H(\text{бросок кубика с 4 гранями}) =$$

$$H(\text{бросок кубика с 3 гранями}) =$$

# Энтропия

Энтропия аддитивна для независимых событий

$$H(**) + H(1 *) = \\ H(\text{бросок кубика с 4 гранями}) + H(\text{бросок монетки}) =$$

Энтропия максимальна при случайном равновероятном выборе

$$H(\text{бросок "честной" монетки}) \\ \geq H(\text{бросок монетки, одна из сторон которой тяжелее})$$

# Эквивалентные определения идеального шифра

**Теорема 1.6.** Пусть  $E = (E, D)$  – шифр Шеннона на  $(K, M, C)$ . Пусть  $\mathbf{m} \in_R M, \mathbf{c} \in_R C$  (для  $\mathbf{m}$  не обязательно равномерное распределение). Тогда шифр  $E$  – абсолютно стойкий, если  $H(\mathbf{m}) = H(\mathbf{m}|\mathbf{c})$

Иными словами шифртекст не даёт никакой информации об открытом тексте.

Принцип действия абсолютно стойкого шифра – «применить» энтропию (неопределённость) равномерно распределённого ключа к сообщению для получения равномерно распределённого шифртекста.

# Плохие новости

**Теорема 1.7 (Шеннона).** Пусть  $E = (E, D)$  шифр Шеннона на  $(K, M, C)$ . Если  $E$  – абсолютно стойкий, то

- $|K| \geq |M|$
- $H(\mathbf{k}) \geq H(\mathbf{m}), \mathbf{k} \in_R K, \mathbf{m} \in_R M$

Простое объяснение – невозможно получить равномерно распределённую случайную величину длины  $m$ , используя детерминированный алгоритм над равномерно распределённой случайной величиной длины  $n < m$ .

Иными словами, для шифрования 1 Gb данных **любым** абсолютно стойким шифром потребуется ключ размера как минимум 1 Gb.

# Семантическая стойкость

Продолжение следует...



