

Прикладная Криптография: Симметричные криптосистемы MAC: схемы

Макаров Артём
МИФИ 2025

Тест.

4 вопроса.

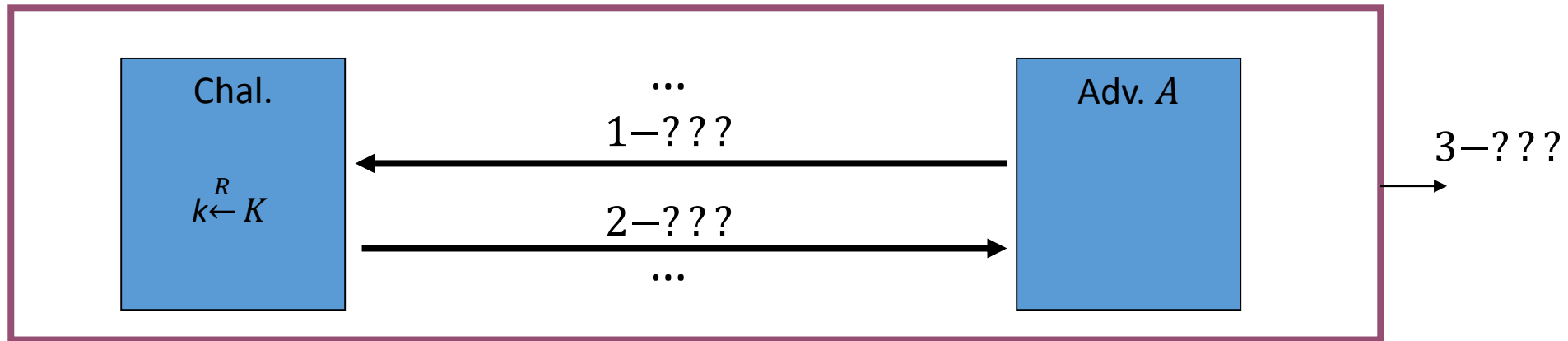
Краткие ответы.

- Положить телефон экраном вниз справа от себя
- Не разговаривать с соседями
- Не пользоваться конспектами и электронными устройствами
- Написать номер (по таблице) и ФИО на листочке
- Написать краткий ответ на вопрос
- Дождаться окончания теста

Three horizontal green bars of equal length and height, stacked vertically, intended for writing answers.

Тест.

Игра на стойкость MAC $I = (S, V)$ на (K, M, T) .

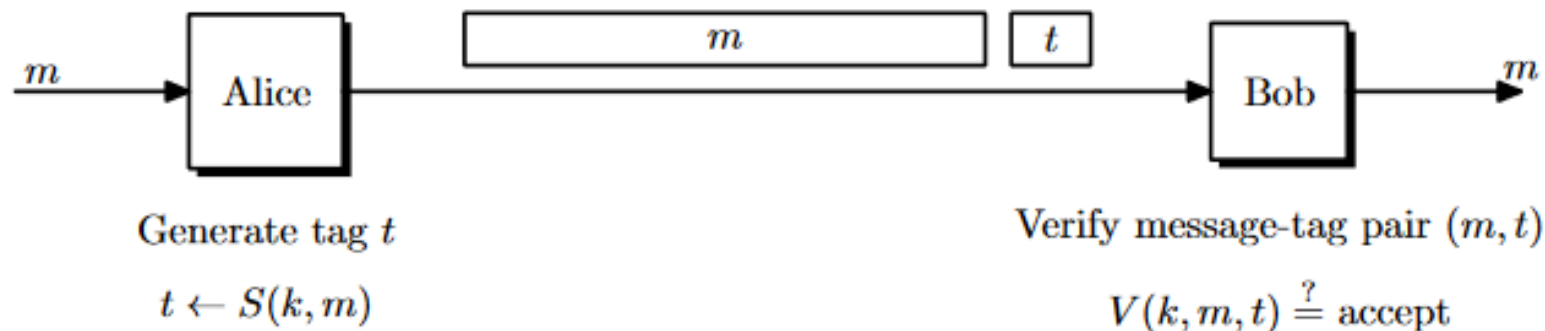


4 – $MAC_{adv}[A, I] = ???$

TIME IS
UP

Целостность сообщений

- Задача – обеспечить целостность сообщений m при передаче
- Обеспечиваем только **целостность**, сообщения предполагаются открытыми
- Основная идея – создать небольшую по длине величину t (tag, метка) на основе сообщения, и передать данную величину вместе с сообщением: (m, t) . На стороне получателя величина t' вычисляется для полученного сообщения m' и производится сравнение $t = t'$. В случае равенства полагается, что целостность сообщения не нарушена.



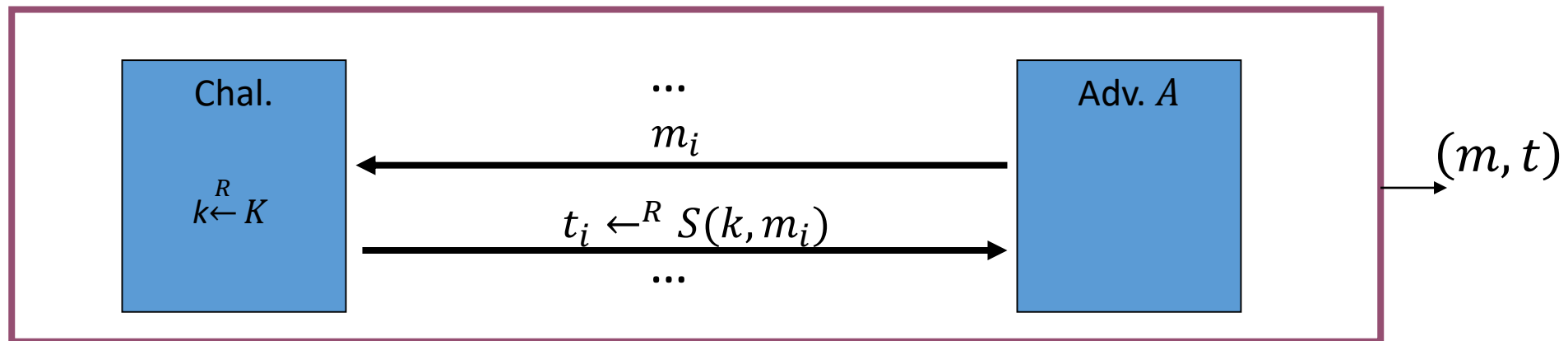
Определение MAC

MAC на (K, M, T) называется пара эффективных алгоритмов $I = (S, V)$. S – алгоритм выработки MAC, V – алгоритм проверки MAC. Пусть M – множество сообщений, K – множество ключей, T – множество кодов аутентичности (меток). Тогда для $m \in M, t \in T, k \in K$

- $S: K \times M \rightarrow T$ - вероятностный алгоритм, вычисляющий $t \leftarrow^R S(k, m)$
- $V: K \times M \times T \rightarrow \{0,1\}$ – детерминированный алгоритм, вычисляющий результат проверки $r \leftarrow V(k, m, t)$.
- Свойство корректности - $\Pr[V(k, m, S(k, m)) = 1] = 1$

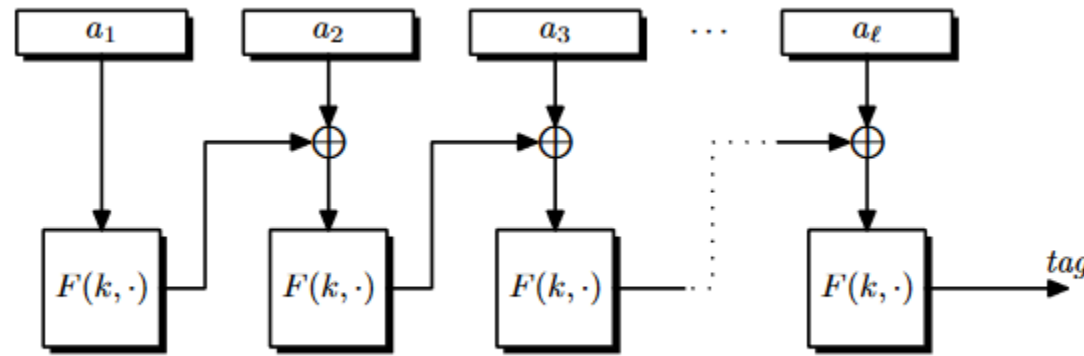
Игра на стойкость MAC (chosen message attack)

- Противник побеждает в игре, если пара (m, t) – верная пара сообщение – MAC, т.е. $V(k, m, t) = 1$.
- Преимуществом противника A в игре против MAC $I = (S, V)$ называется величина $MAC_{adv}[A, I] = \Pr[V(k, m, t) = 1]$.
- MAC $I = (S, V)$ называется стойким MAC, если $\forall A \text{ } MAC_{adv}[A, I] \leq \epsilon$, ϵ – пренебрежимо малая величина.



Беспрификсные PRF

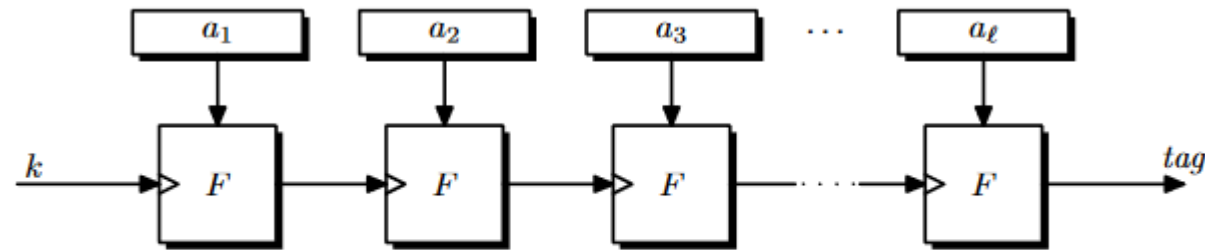
PRF $F_{CBC}(k, m)$ – цепочка CBC с использованием PRF. В качестве значения используется последний элемент цепочки.



(a) The CBC construction $F_{CBC}(k, m)$

Беспрификсные PRF

PRF $F^*(k, m)$ – каскадная конструкция. Выход каждой итерации PRF используется в качестве ключа в следующей итерации PRF.



(b) The cascade construction $F^*(k, m)$

Figure 6.3: Two prefix-free secure PRFs

Беспрификсные PRF

Теорема 9.3. Пусть F – стойкая PRF на (K, X, X) , $X = \{0,1\}^n$. Для полиномиально ограниченной величины l PRF $F_{CBC}: K \times X^{\leq l} \rightarrow X$ является стойкой беспрификсной PRF, причём для любого беспрификсного противника A , делающего не более Q запросов существует противник в игре на PRF, причём

$$PRF^{pf}[A, F_{CBC}] \leq PRF_{adv}[B, F] + (Ql)^2 / 2|X|$$

Теорема 9.4. Пусть F – стойкая PRF на (K, X, K) . Для полиномиально ограниченной величины l PRF $F^*: K \times X^{\leq l} \rightarrow K$ является стойкой беспрификсной PRF, причём для любого беспрификсного противника A , делающего не более Q запросов существует противник в игре на PRF, причём

$$PRF^{pf}[A, F_{CBC}] \leq Ql * PRF_{adv}[B, F]$$

▷ без доказательства◁

Построение стойкий PRF на основе беспрификсных PRF

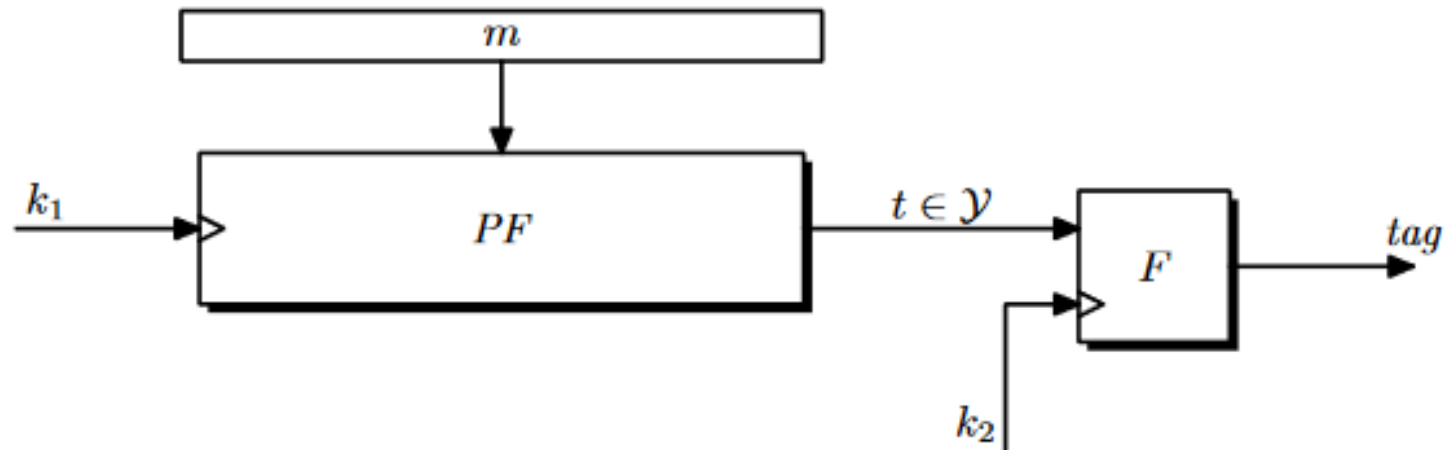
Рассмотрим 3 способа построения PRF на основе беспрификсных PRF:

- Зашифрование выхода беспрификсной PRF: зашифрование выхода беспрификсной PRF с использованием другой PRF
- Беспрификсное кодирование: преобразовать входные данные так, чтобы все они были беспрификсными
- Беспрификсное кодирование с рандомизацией: CMAC

Зашифрование выхода беспрификсной PRF

Пусть $PF - \text{PRF}: K_1 \times X^{\leq l} \rightarrow Y$, $F - \text{PRF}: K_2 \times Y \rightarrow T$.

Определим $EF((k_1, k_2), m) = F(k_2, PF(k_1, m))$, $k_1 \in K_1, k_2 \in K_2, m \in X^{\leq l}$



Зашифрование выхода беспрификсной PRF

Пусть PF – PRF на $(K, X^{\leq l}, Y)$. PF является **расширяемой PRF**, если $\forall k \in K, x, y \in X^{\leq l-1}, a \in X$:

$$PF(k, x) = PF(k, y) \Rightarrow PF(k, x||a) = PF(k, y||a).$$

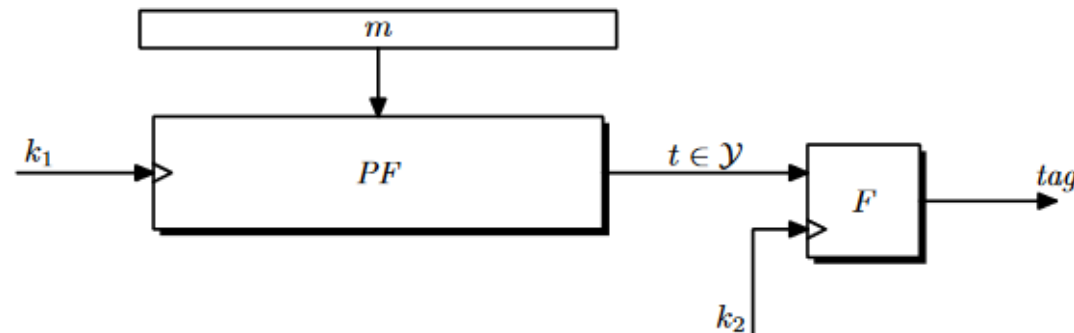
PRF CBC и каскадной конструкции являются расширяемыми.

Зашифрование выхода беспрификсной PRF

Если PF функция CBC или каскадная конструкция то PRF EF – стойкая PRF.

Теорема 10.1. Пусть PF – расширяемая беспрификсная PRF на $(K_1, X^{\leq l+1}, Y)$, $|Y|$ - сверх полиномиальная, l – полиномиально ограниченная, Q – число запросов к PF . Пусть F – стойкая PRF на (K_2, Y, T) . Тогда EF определённая ранее – стойкая PRF на $(K_1, \times K_2, X^{\leq l}, T)$:

$$PRF_{adv}[A, EF] \leq PRF_{adv}[B_1, F] + PRF_{adv}^{pf}[B_2, PF] + Q^2/2|Y|$$

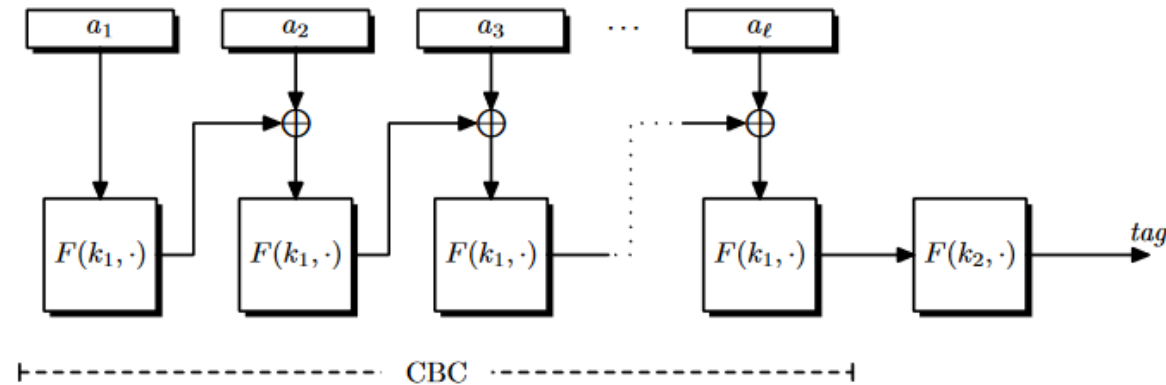


Зашифрование выхода беспрификсной PRF

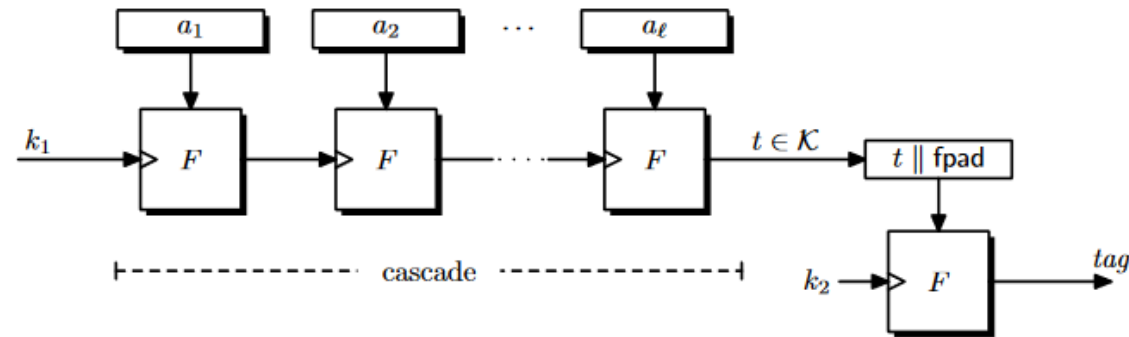
▷ Рассмотрим идею доказательства. Самая неочевидная часть результирующей формулы $PRF_{adv}[A, EF] \leq PRF_{adv}[B_1, F] + PRF_{adv}^{pf}[B_2, PF] + Q^2/2|Y|$ это слагаемое $Q^2/2|Y|$. Рассмотрим причину его появления.

Пусть противник запрашивает у оракула (претендента) Q кодов аутентичности для Q различных сообщений. Так как размер области значений PF есть $|Y|$, то используя парадокс дней рождений за $Q \sim \sqrt{|Y|}$ произойдёт коллизия, и итоговое значение MAC тоже даст коллизию. Т.е. мы нашли пару $x_i, x_j: PF(k_1, x_i) = PF(k_1, x_j)$. Так как PF расширяемая, то противник имея MAC t для сообщения $x_i || a$ фактически имеет MAC для сообщения $x_j || a$. ◁

Зашифрование выхода беспрификсной PRF



(a) The ECBC construction $ECBC(k, m)$ (encrypted CBC)



(b) The NMAC construction $NMAC(k, m)$ (encrypted cascade)

ECBC MAC

Теорема 10.2. Зашфированный CBC MAC $ECBC$, зашифрованный с использованием PRF F на (K, X, X) ($|X|$ - сверх полиномиальная, l – полиномиально ограниченная, число блоков, Q – число запросов противника к $ECBC$) – стойкая PRF на $(K^2, X^{\leq l}, X)$:

$$PRF_{adv}[A, ECBC] \leq PRF_{adv}[B_1, F] + PRF_{adv}[B_2, F] + \frac{(Q(l+1))^2 + Q^2}{2|X|}$$

▷ следствие **Теоремы 10.1.** ◁

NMAC

- PRF F на (K, M, K) , $K = \{0,1\}^k$, $X = \{0,1\}^n$, $k \leq X$
- $g(t) = t || \text{fpad}$, fpad – фиксированное дополнение, длины $n - k$ бит (например все 0).

Теорема 10.3. NMAC, использующая PRF F стойкая PRF на $(K^2, X^{\leq l}, K)$:

$$PRF_{adv}[A, NMAC] \leq (Q(l + 1)) * PRF_{adv}[B_1, F] + PRF_{adv}[B_2, F] + \frac{Q^2}{2|K|}$$

▷ следствие **Теоремы 10.1.** ◁

NMAC и ECBC MAC

- Рассмотренные конструкции являются стойкими PRF и следовательно стойкими MAC
- Нет необходимости знать длину сообщения заранее, можно обновлять полученное значение MAC при получении новых блоков сообщения, не дожидаясь получения сообщения целиком
- Можно использовать для сообщений произвольной длины, **кратной размеру блока** PRF (чаще всего – блочного шифра)

Беспрификсное кодирование

Цель – закодировать «префиксные строки» в непрификсные, для использования в непрификсных PRF для получения MAC

Пусть $X_{>0}^{\leq l}$ - множество непустых строк, длины не более l элементов в X .

Функция $pf: M \rightarrow X_{>0}^{\leq l}$ называется непрификсным кодированием, если pf – инъективна и множество элементов из образа pf – непрификсное множество.

Теорема 10.4. Пусть pf – непрификсное кодирование, PF – непрификсная PRF на $(K, X^{\leq l}, Y)$. Тогда PRF $F(k, m) = PF(k, pf(m))$ – стойкая PRF на (K, M, Y)

▷Очевидно следует из определения непрификсной PRF◁

Беспрификсное кодирование

- Метод 1. Добавление длины

$$X = \{0,1\}^n, M = X^{\leq l-1}, m = (a_1, \dots, a_v) \in M$$
$$pf(m) = (< v >, a_1, \dots, a_v) \in X_{>0}^{\leq l}$$

- Метод 2. «Остановочные биты»

$$X = \{0,1\}^n, \tilde{X} = \{0,1\}^{n-1}, M = \tilde{X}_{>0}^{\leq l}, m = (a_1, \dots, a_v) \in M$$
$$pf(m) = ((a_1 || 0), (a_2 || 0), \dots, (a_{v-1} || 0), (a_v || 1)) \in X_{>0}^{\leq l}$$

▷Очевидна инъективность и беспрификсность образа◁

Беспрификсное кодирование

- Позволяет использовать непрификсные PRF в качестве MAC
- Добавление длины сообщения увеличивает длину сообщений как входа для непрификсной PRF, так как непрификсное кодирование – избыточно.
- Добавление длины к сообщению не позволяет использовать MAC в поточном режиме (когда сообщение передаётся по частям), так как длина сообщения заранее не известна
- Так как в основном используются блочные шифры – добавление данных непрификсным кодирование означает добавление лишних блоков
- Использование «остановочных битов» также увеличивает длину сообщения

Беспрификсное кодирование с рандомизацией

Пусть $x, y \in X^{\leq l}$. Обозначим $x \sim y$ если x префикс y или y префикс x (т.е. \sim отношение «префиксности» на $X^{\leq l}$).

Пусть ϵ – действительное число, $0 \leq \epsilon \leq 1$. Вероятностное ϵ -префиксное кодирование это функция $prf: K \times M \rightarrow X_{>0}^{\leq l}: m_0, m_1 \in M, m_0 \neq m_1$:

$$\Pr[prf(k, m_0) \sim prf(k, m_1)] \leq \epsilon$$

Где вероятность рассматривается при случайном равновероятном выборе $k \in K$

Пример - $prf(k, (a_1, \dots, a_v)) = (a_1, \dots, a_v, (a_v \oplus k)) \in X_{>0}^{\leq l}$

Беспрификсное кодирование с рандомизацией

Пусть PF – непрификсная PRF на $(K, X^{\leq l}, Y)$, $prf: K_1 \times M \rightarrow X_{>0}^{\leq l}$ – вероятностное ϵ -префиксное кодирование.

Определим PRF F на $(K \times K_1, M, Y)$:

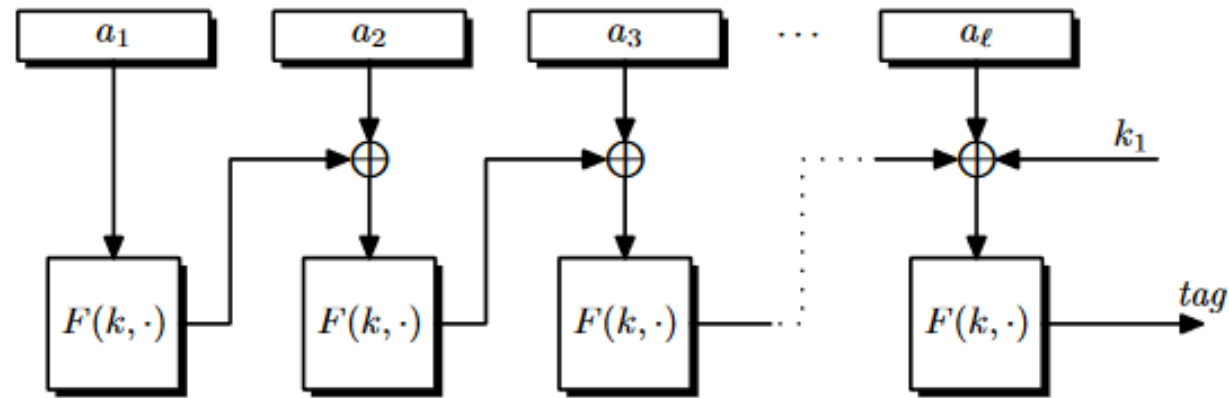
$$F((k_1, k_2), m) = PF(k, prf(k_1, m))$$

Теорема 10.5. Если PF - непрификсная PRF, prf - вероятностное ϵ -префиксное кодирование, тогда F , введённая выше – стойкая PRF:

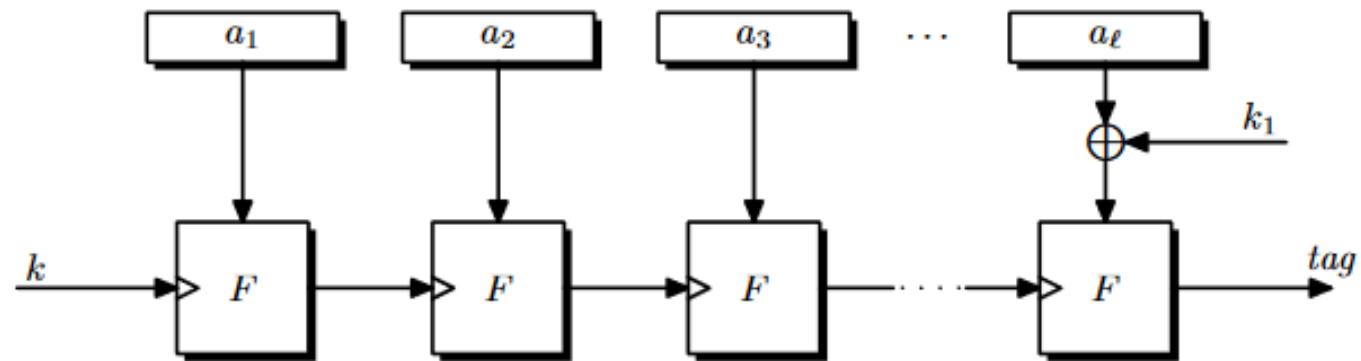
$$PRF_{adv}[A, F] \leq PRF_{adv}^{pf}[B_1, PF] + PRF_{adv}^{pf}[B_2, PF] + \frac{Q^2 \epsilon}{2}$$

▷ без доказательства ◁

Беспрификсное кодирование с рандомизацией



(a) *rpf* applied to CBC



(b) *rpf* applied to cascade

MAC для сообщений, некратных длине блока

Все рассмотренные до этого схемы были применимы только для сообщений длины кратных длине блока PRF (блочного шифра).

Пусть F – PRF на $(K, X^{\leq l+1}, Y)$, $inj: \{0,1\}^{\leq nl} \rightarrow X^{\leq nl}$ – инъекция.
Определим PRF F_{bit} :

$$F_{bit} = F(k, inj(x))$$

Теорема 10.6. PRF введенная выше – стойкая PRF на $(K, \{0,1\}^{\leq nl}, Y)$

▷очевидно◁

Построение инъективных функций

Пусть $X = \{0,1\}^n$, $inj: \{0,1\}^{\leq nl} \rightarrow X^{\leq l+1}$

inj :

- Если входное сообщение имеет длину не кратную n – добавить 10...00 до длины кратной n
- Иначе – добавить n -блок $(1||0^{n-1})$
- Инъективна и обратима

case 1:

a_1	a_2
-------	-------

 \longrightarrow

a_1	a_2	1000
-------	-------	------

case 2:

a_1	a_2
-------	-------

 \longrightarrow

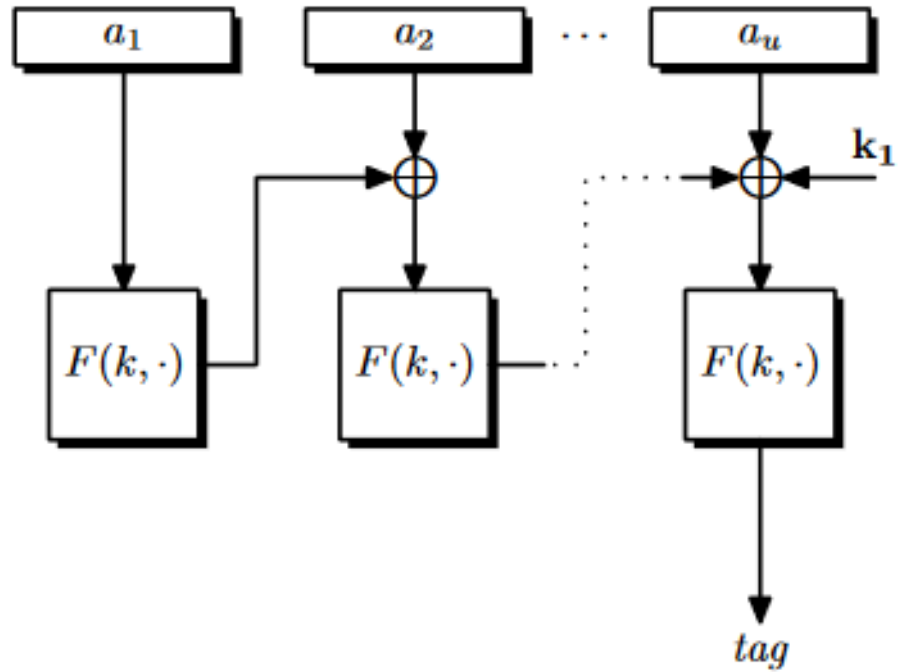
a_1	a_2	1000000
-------	-------	---------

CMAC

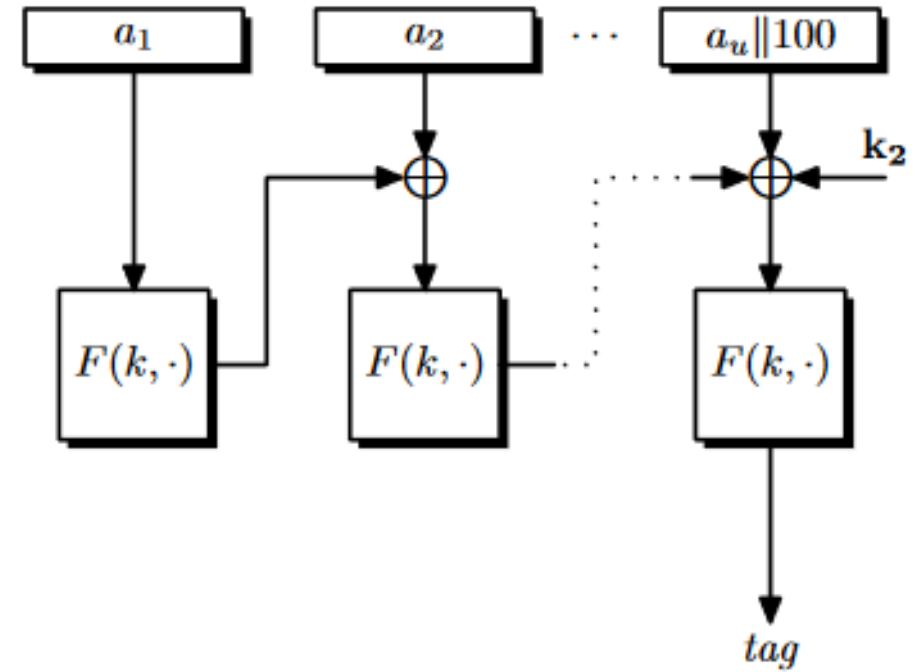
- Стандарт NIST
- Один из наиболее популярных алгоритмов вычисления MAC (самый популярных после HMAC)
- Использует три различных ключа (могут быть выработаны на основе одного ключа)
- Текущее название алгоритма, описываемое стандартом – OMAC (до этого – TMAC).

CMAC

(a) when $\text{length}(m)$ is a positive multiple of n



(b) otherwise



OMAC

- В текущей вариации (OMAC) использует единственный ключ для генерации этих трех ключей для некоторой константы R_n :

input: key $k \in \mathcal{K}$

output: keys $k_0, k_1, k_2 \in \mathcal{X}$

$k_0 \leftarrow k$

$L \leftarrow F(k, 0^n)$

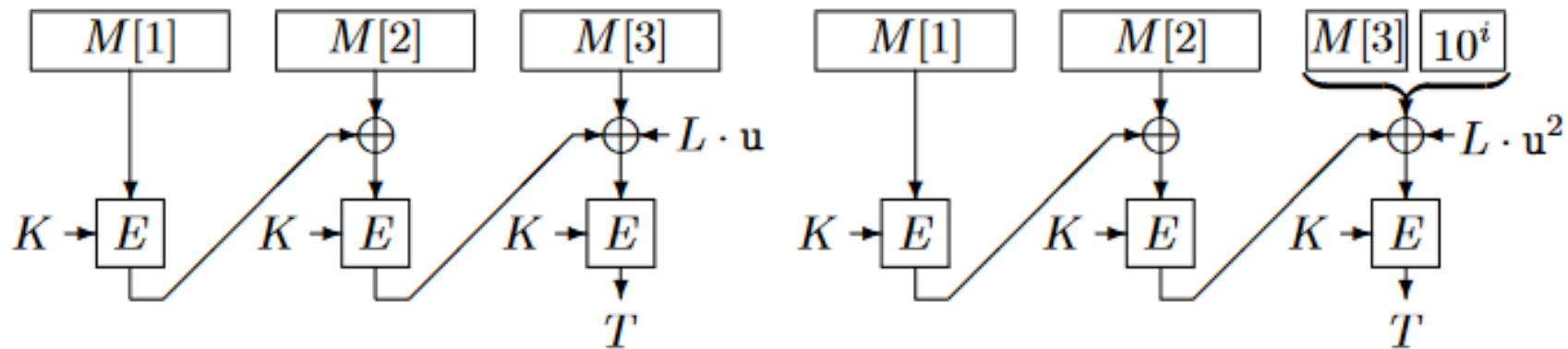
(1) if $\text{msb}(L) = 0$ then $k_1 \leftarrow (L \ll 1)$ else $k_1 \leftarrow (L \ll 1) \oplus R_n$

(2) if $\text{msb}(k_1) = 0$ then $k_2 \leftarrow (k_1 \ll 1)$ else $k_2 \leftarrow (k_1 \ll 1) \oplus R_n$

output k_0, k_1, k_2 .

ОМАС

- Фактически для получения трех ключей реализуется умножение в кольце многочленов на некоторую константу u



Trunkated CBC MAC

Основная идея – не дать противнику возможность воспользоваться MAC для осуществления префиксной атаки.

Использование части кода аутентичности. Используется в ГОСТ 28147-98

Оптимально использовать половину исходного MAC

Основной недостаток – фактически понижаем достижимый параметр стойкости в 2 раза

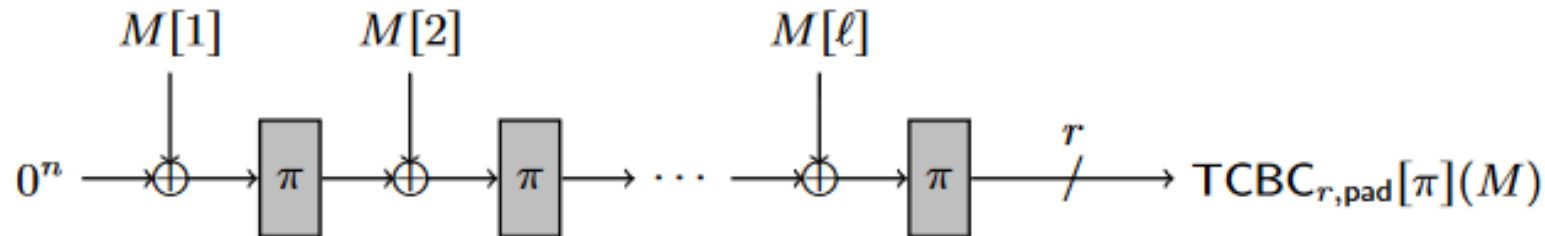


Fig. 1. Truncated CBC. Representation of $\text{TCBC}_{r,\text{pad}}[\pi]$. Here, $M[1], \dots, M[\ell]$ are n -bit blocks resulting from applying the padding scheme pad to the input message $M \in \{0, 1\}^*$.

PMAC

PMAC – параллельный MAC

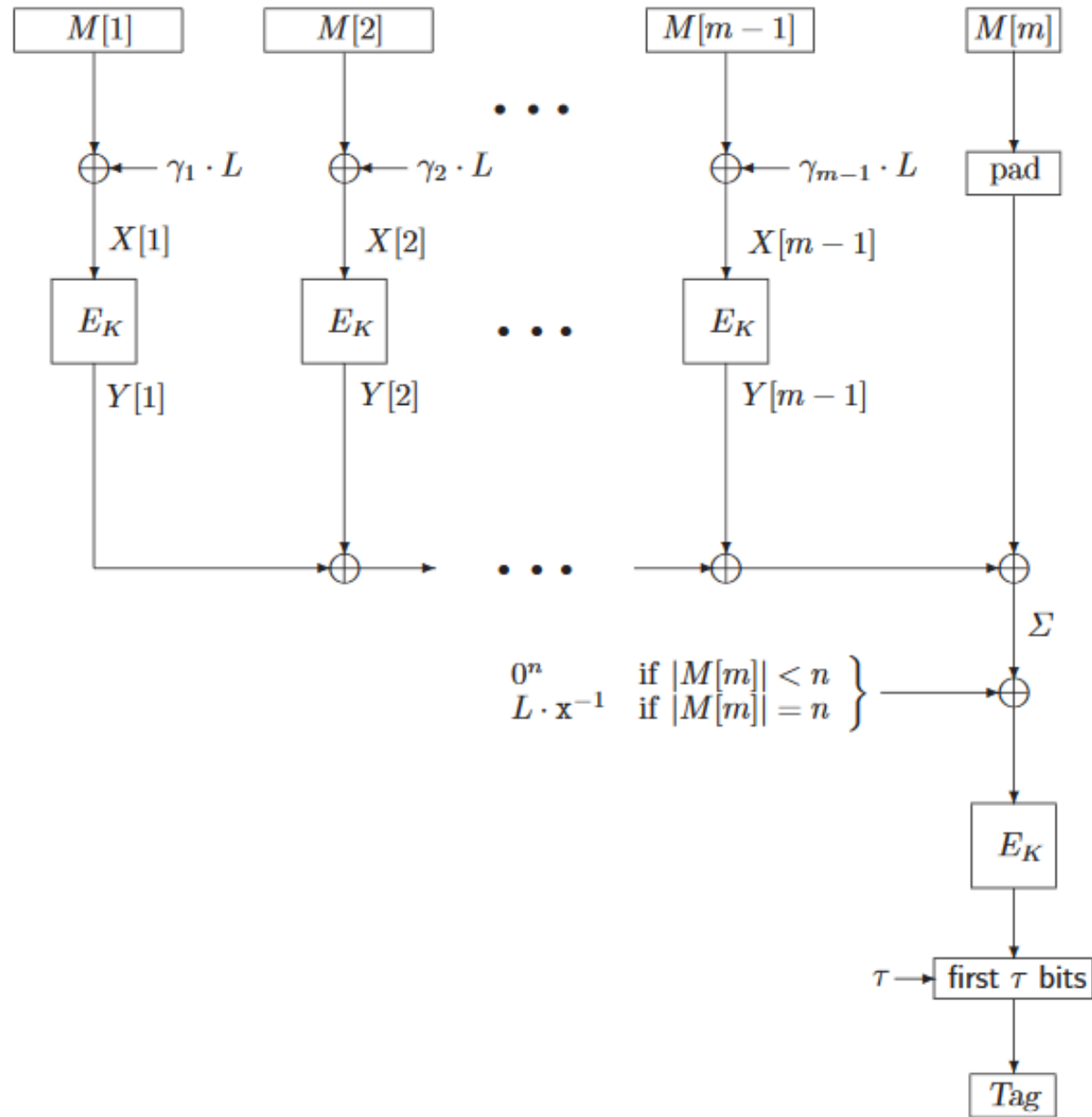
Возможность добавлять и удалять блоки из итогового значения MAC

Основная идея – использование «различных» ключей для каждого блока, полученных через умножение в кольце многочленов

Возможность вычислять MAC параллельно для всех блоков

Был патентован (США), разрешено бесплатное использование в образовательных и open-source проектах. В настоящий момент патент истёк

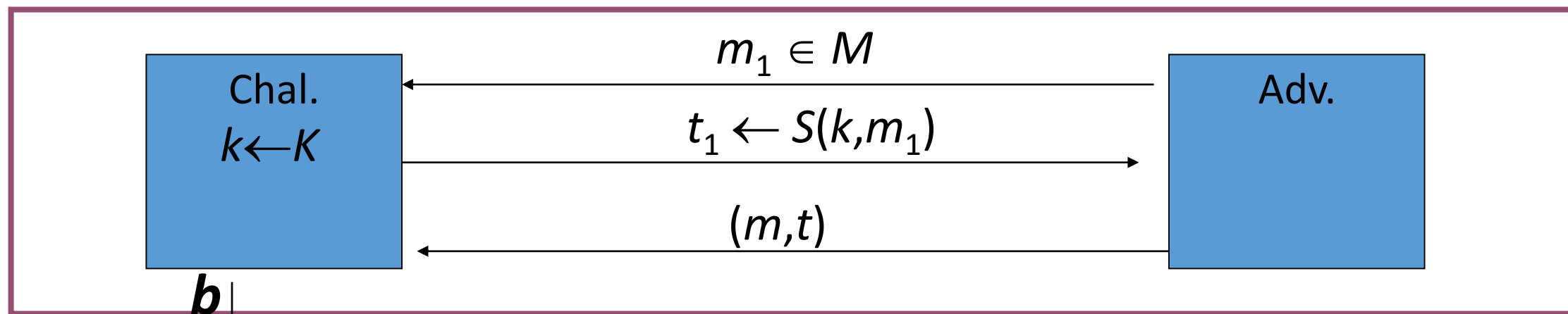
PMAC



Одноразовый MAC

(по аналогии с одноразовым блокнотом)

Введём игру



$$\begin{cases} \mathbf{b=1} & \text{если } V(k, m, t) = 1 \text{ and } (m, t) \neq (m_1, t_1) \\ \mathbf{b=0} & \text{иначе} \end{cases}$$

$I = (S, V)$ стойкий одноразовый MAC, если $Adv_{mac1}[A, I] = \Pr[b = 1] \leq \epsilon$, ϵ – пренебрежимо малая величина

Одноразовый МАС : пример

Стойкий против любых (не только эффективных) противников

Пусть q большое простое число

$$\begin{aligned} key &= (a, b) \in \{1, \dots, q\}^2 \\ msg &= (m[1], \dots, m[L]) \end{aligned}$$

$P_{msg}(x) = x^{L+1} + m[L] * x^L + \dots + m[1] * x$ – полином степени $L + 1$

$$S(key, msg) = P_{msg}(a) + b \pmod{q}$$

Одноразовый MAC \Rightarrow Многоразовый MAC

Пусть (H, V) стойкий одноразовый MAC на $(K, M, \{0,1\}^n)$.

Пусть $F: K_F \times \{0,1\}^n \rightarrow \{0,1\}^n$ стойкая PRF.

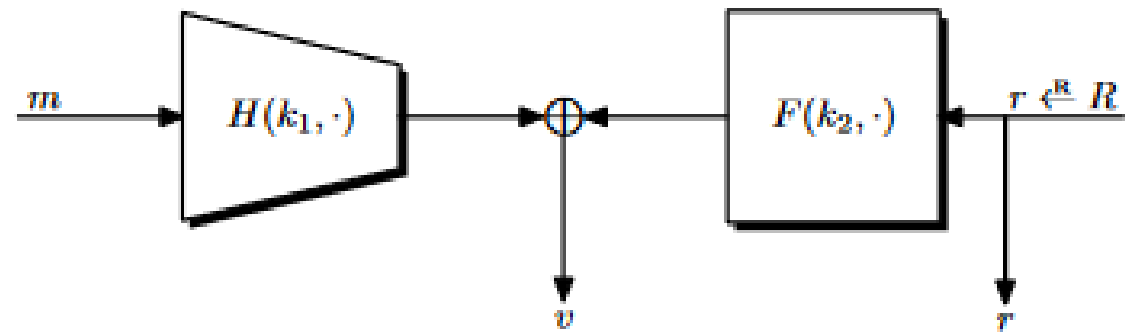
$r \leftarrow^R R$.
Медленная, Быстрая,
Короткий вход Длинный вход

Carter-Wegman MAC:

$$S_{cw}((k_1, k_2), m) = (r, F(k_2, r) \oplus H(k_1, m)) = (r, v)$$

$$V_{cw}(k, (r, v), m) = \begin{cases} 1, & v = F(k_2, r) \oplus H(k_1, m) \\ 0, & \text{иначе} \end{cases}$$

Является недетерминированным



Carter-Wegman MAC

Наиболее быстрые современные MAC

- VMAC
- UMAC
- Poly1305-AES

Poly1305

Poly1305:

Пусть $m[0], m[1], \dots, m[l - 1]$ – сообщение, $q = \frac{l}{16}$ (округление сверху)

$$c_i = m[16i - 16] + 2^8 m[16i - 15] + \\ + 2^{16} m[16i - 14] + \dots + 2^{120} m[16i - 1] + 2^{128}$$

Если 16 не делит l :

$$c_q = m[16q - 16] + 2^8 m[16q - 15] + \dots + \\ + 2^{8(l \bmod 16) - 8} m[l - 1] + 2^{8(l \bmod 16)}$$

Простыми словами – дополнить каждые 16 байт до 17, добавляя 1. Если не хватает до 16 байт – добавить 100...000 чтоб хватало.

Poly1305

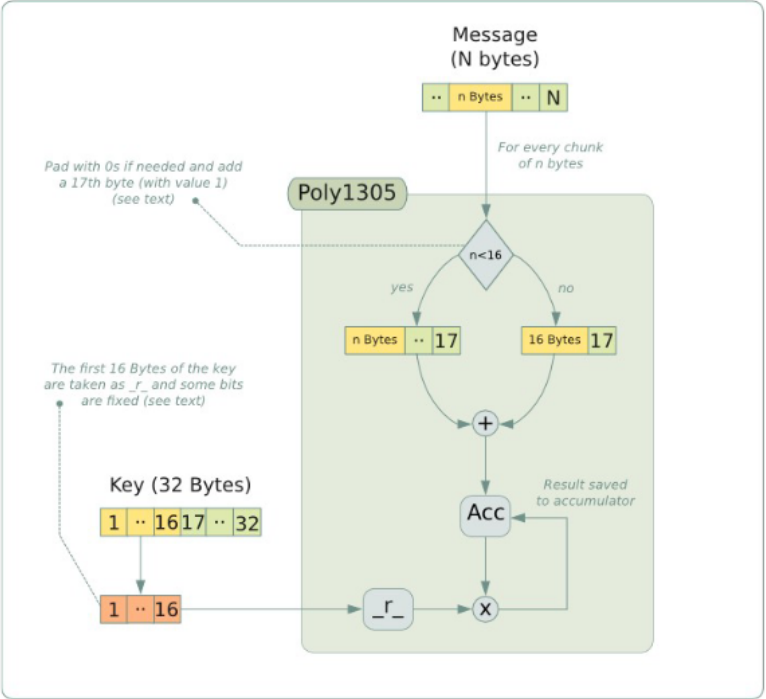
$$\text{Poly1305}_r(m, \text{AES}_k(n)) \\ = \left[\left((c_1 r^q + c_2 r^{q-1} + \dots + c_q r^1) \bmod 2^{130} - 5 \right) \right. \\ \left. + \text{AES}_k(n) \right] \bmod 2^{128}$$

- n – nonce, $k' \in \{0,1\}^{234}$ – ключ, m – подписываемое сообщение.
- $(r, k) \leftarrow k', r \in \{0,1\}^{128}, k \in \{0,1\}^{128}$ (некоторые биты r просто выставляются константами в 0 или 1. Возможно использование полностью случайного r для увеличения параметра стойкости до 128 бит, но снижения производительности)
- $2^{130} - 5$ – выбранное простое число
- 106 бит стойкости (число случайный бит в r)

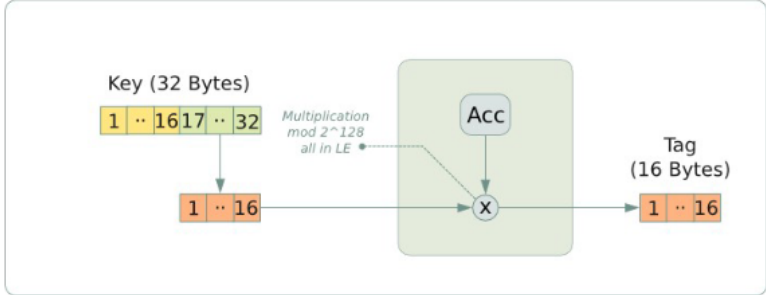
```
#include <gmpxx.h>

void poly1305_gmpxx(unsigned char *out,
    const unsigned char *r,
    const unsigned char *s,
    const unsigned char *m, unsigned int l)
{
    unsigned int j;
    mpz_class rbar = 0;
    for (j = 0; j < 16; ++j)
        rbar += ((mpz_class) r[j]) << (8 * j);
    mpz_class h = 0;
    mpz_class p = (((mpz_class) 1) << 130) - 5;
    while (l > 0) {
        mpz_class c = 0;
        for (j = 0; (j < 16) && (j < l); ++j)
            c += ((mpz_class) m[j]) << (8 * j);
        c += ((mpz_class) 1) << (8 * j);
        m += j; l -= j;
        h = ((h + c) * rbar) % p;
    }
    for (j = 0; j < 16; ++j)
        h += ((mpz_class) s[j]) << (8 * j);
    for (j = 0; j < 16; ++j) {
        mpz_class c = h % 256;
        h >>= 8;
        out[j] = c.get_ui();
    }
}
```


1. First, initialize `_r_` then process groups of 16 bytes



2. Finally, add the last 16 bytes of the key and generate the tag



Poly 1305



Introduction

- Poly1305 is a Wegman-Carter, one-time authenticator designed by D. J. Bernstein
- It is used to calculate a Message Authentication Code (MAC) for a message
- Poly 1305 uses a 32 Byte key and operates on an N byte message

Operation

- The first 16 bytes of the one-time key are interpreted as a number `_r_` with the following modifications:
 - ▶ The top 4 bits of bytes 3, 7, 11, 15 are set to 0
 - ▶ The bottom 2 bits of bytes 4, 8, 12 are set to 0
 - ▶ The 16 bytes are interpreted as a little endian value
- The accumulator (Acc in the diagram) is set to 0
- For every `n` bytes read from the N byte message, if `n = 16` then just add a 17th byte having a value of 1 and the 17 bytes are treated as a little endian number
- If `n < 16` then pad with 0s until there are 16 bytes and add the 17th byte as in the case when `n = 16`
- The number is then added to the accumulator which is multiplied by `_r_` and the result is saved back to the accumulator
- Note : These operations are all mod $2^{130} - 5$
- Finally, the last 16 bytes of the key are interpreted as a little endian number and this number is added to the accumulator mod 2^{128}
- The result is then written out as a little endian number and this is taken as the 16 byte tag

NB: картинка слева предполагает, что правая часть ключа Poly1305 уже получена ранее как выход некоторой PRF, вычисленной от некоторого n поэтому явного вычисления PRF нет.

В качестве PRF используется не только AES, но и ChaCha20 (обычно в рамках построения аутентифицированного шифрования ChaCha 20 – Poly 1305)

Тест.

1 – Стойкая PRF со сверх-полиномиальной областью значений.

Является ли она стойкой MAC.

2 – Стойкий блочный шифр со сверх-полиномиальной областью значений. **Является ли он стойким MAC?**

3 – Связь преимущества противника в игре против MAC с и без запросов на проверку MAC.

4 – $E: K \times X \rightarrow X$ – стойкая PRP. Пусть $E': K \times X^{\leq l} \rightarrow X$ – цепочка CBC с использованием E (результат – последний блок). Является ли E' стойким MAC для произвольных сообщений? **Почему?**