

# Прикладная Криптография: Симметричные криптосистемы Псевдослучайные функции

Макаров Артём  
МИФИ 2025



# PRP и PRF

Пусть функция  $F: K \times X \rightarrow Y$  определена на  $(K, X, Y)$ .

Тогда  $F$  – **псевдослучайная функция (PRF)**, если существует эффективный алгоритм, вычисляющий  $F(k, m)$ ,  $k \in K, x \in X$ .

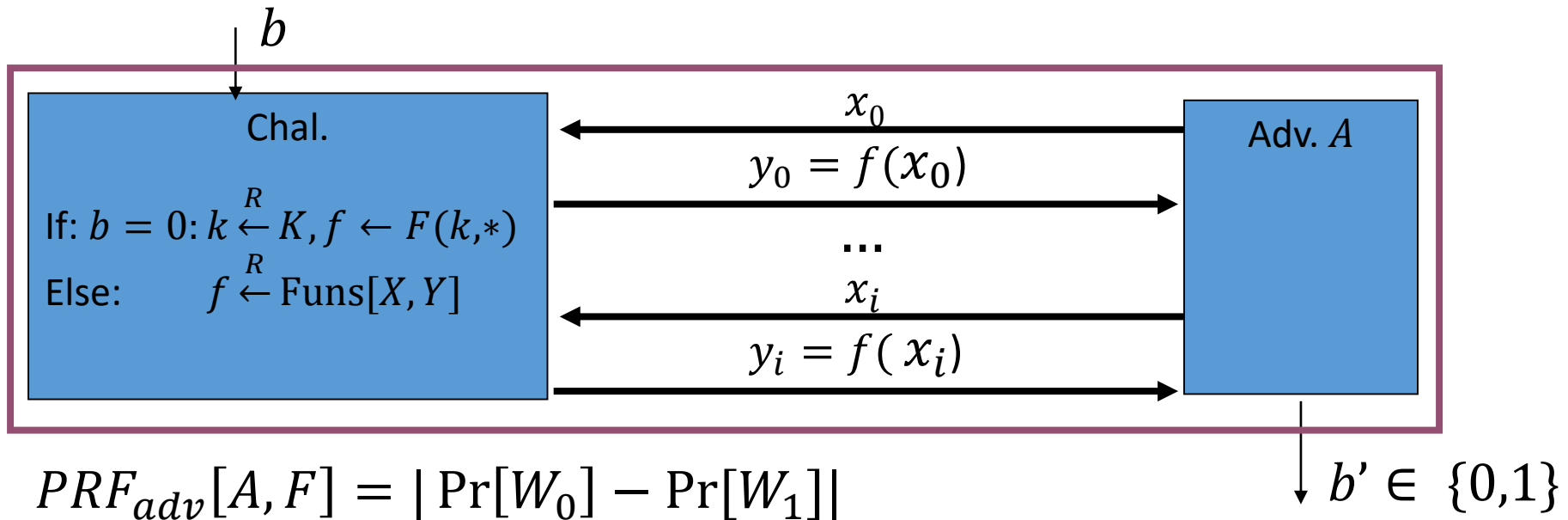
Пусть функция  $E: K \times X \rightarrow X$  определена на  $(K, X)$ .

Тогда  $E$  – **псевдослучайная подстановка (PRP)**, если

- Существует эффективный алгоритм вычисляющий  $E(k, x)$ .  $k \in K, x \in X$
- Функция  $f_k = E(k, *)$  – подстановка.

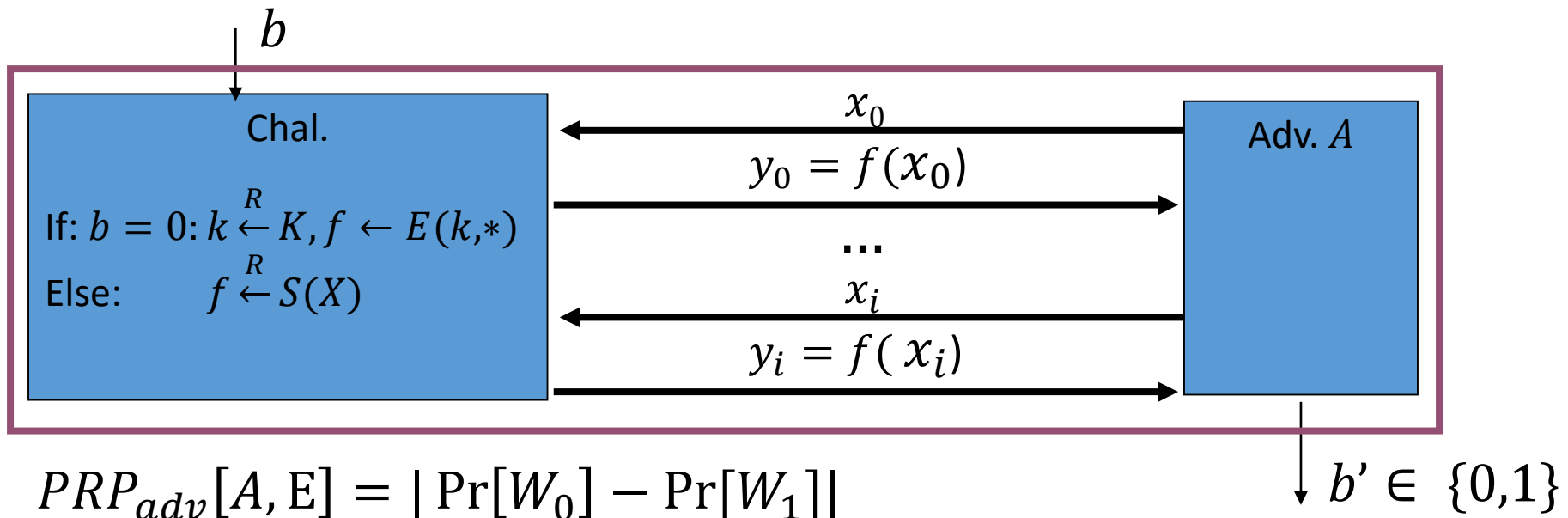
# Стойкая PRF

PRF  $F$ , определённая на  $(K, X, Y)$ , называется стойкой PRF, если  $\forall A$ :  $A$  – эффективный алгоритм в игре на стойкость PRF величина  $PRF_{adv}[A, F] \leq \epsilon$ , где  $\epsilon$  – пренебрежимо малая величина.



# Стойкая PRP

PRP  $E$ , определённая на  $(K, X)$ , называется стойкой PRP, если  $\forall A$ :  $A$  – эффективный алгоритм в игре на стойкость PRP величина  $PRP_{adv}[A, E] \leq \epsilon$ , где  $\epsilon$  – пренебрежимо малая величина.



# Является ли PRP PRF?

- Является ли любая PRP также PRF?
  - Да, любая эффективная подстановка является эффективной функцией
- Является ли любая стойкая PRP стойкой PRF?
  - Нет!

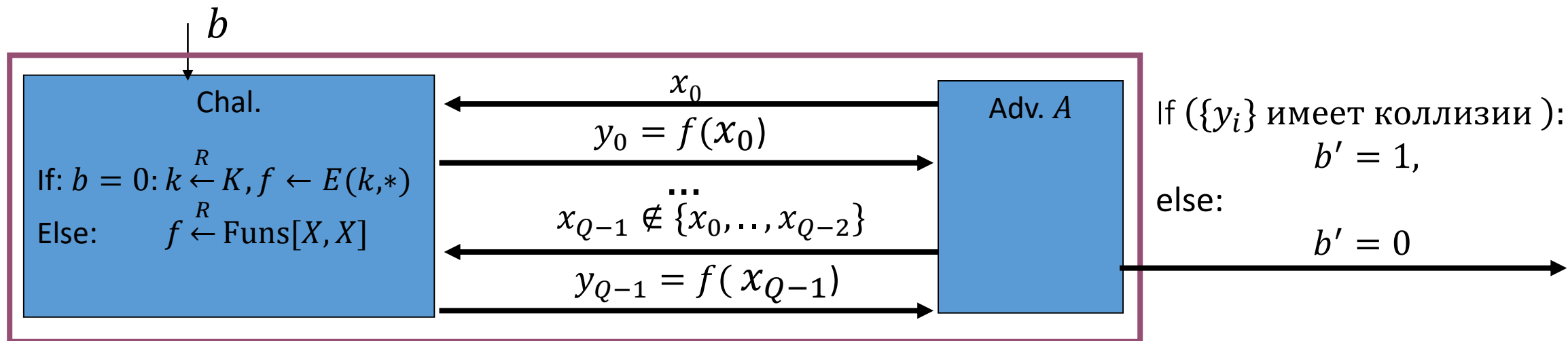
Пусть  $E: K \times X \rightarrow X$  – стойкая PRP,  $|X| = N$ . Очевидно, что  $E$  – PRF на  $(K, X, X)$ .

# Является ли PRP PRF?

Вероятность случайной функции быть подстановкой

Пусть  $E: K \times X \rightarrow X$  – стойкая PRP,  $|X| = N$ . Очевидно, что  $E$  – PRF на  $(K, X, X)$ .

Рассмотрим игру на PRF. Пусть  $N$  – малая величина, такая что противник может эффективно получить полный образ произвольной функции, с областью определения в  $X$  (т.е. получить множество  $\{f(x): x \in X\}$  для  $f: X \rightarrow Y$ ).



$$PRF_{adv}[A, F] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| = |0 - (1 - N!/N^N)| > 1/2$$

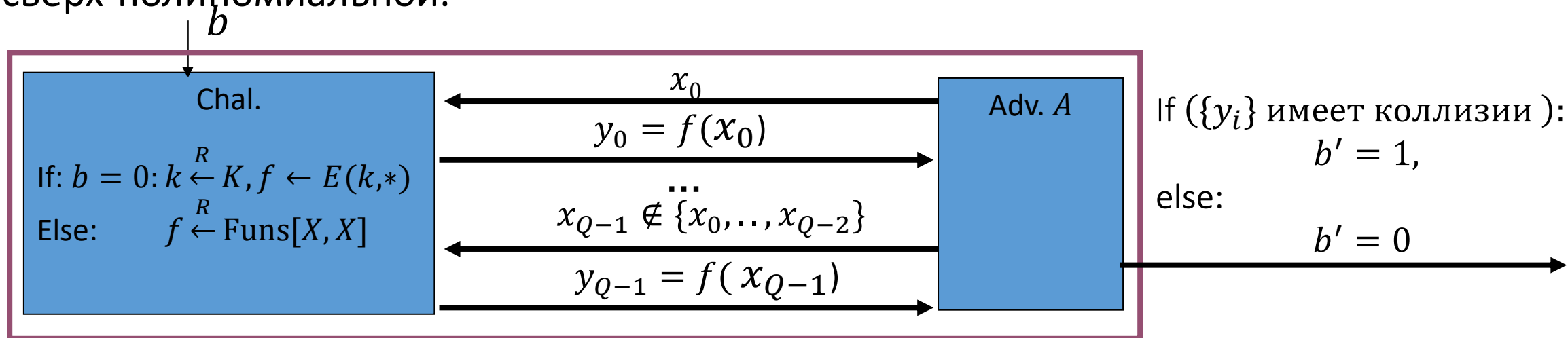
# Является ли PRP PRF?

См. парадокс дней рождений

Какова «малость»  $N$  для осуществления атаки?

Пусть противник делает  $Q$  запросов к претенденту (оракулу), прежде чем выдать результат. Тогда для нахождения коллизии ему необходимо запросить  $O(N^{1/2})$  различных сообщений, для осуществления атаки с преимуществом  $\sim Q^2/N$ .

Следовательно для стойкости PRP как PRF необходимо, чтобы величина  $N$  была сверх-полиномиальной.



$$PRF_{adv}[A, F] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$$

# PRF switching Lemma

**Теорема 6.1.** Пусть  $E: K \times X \rightarrow X$  – стойкая PRP,  $|X| = N$ . Пусть  $A$  – противник в игре на стойкость PRF, делающих не более  $Q$  запросов к претенденту. Тогда

$$|PRF_{adv}[A, E] - PRP_{adv}[A, E]| \leq Q^2 / 2N$$

▷ Необходима вспомогательная теорема. Сформулируем игру для неё.

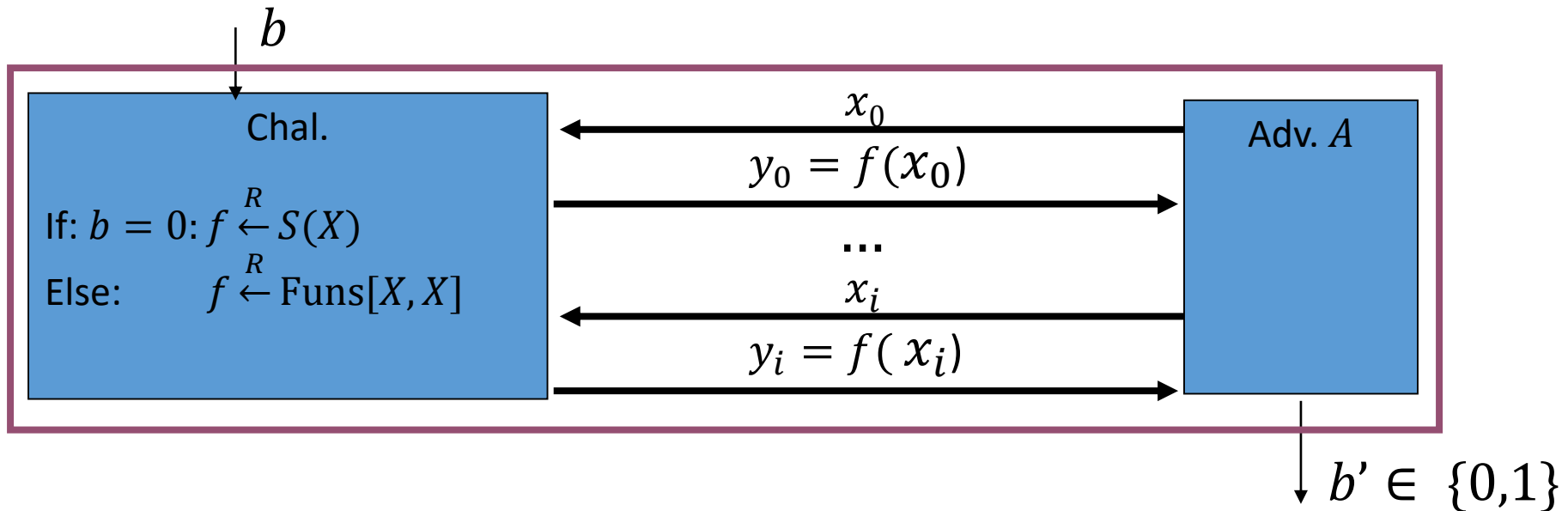


# Игра Подстановки против Функций

Определим игру на различимость случайной подстановки от случайной функции.

Пусть  $W_b$  вероятность того что в эксперименте  $b$   $b' = 1$ .

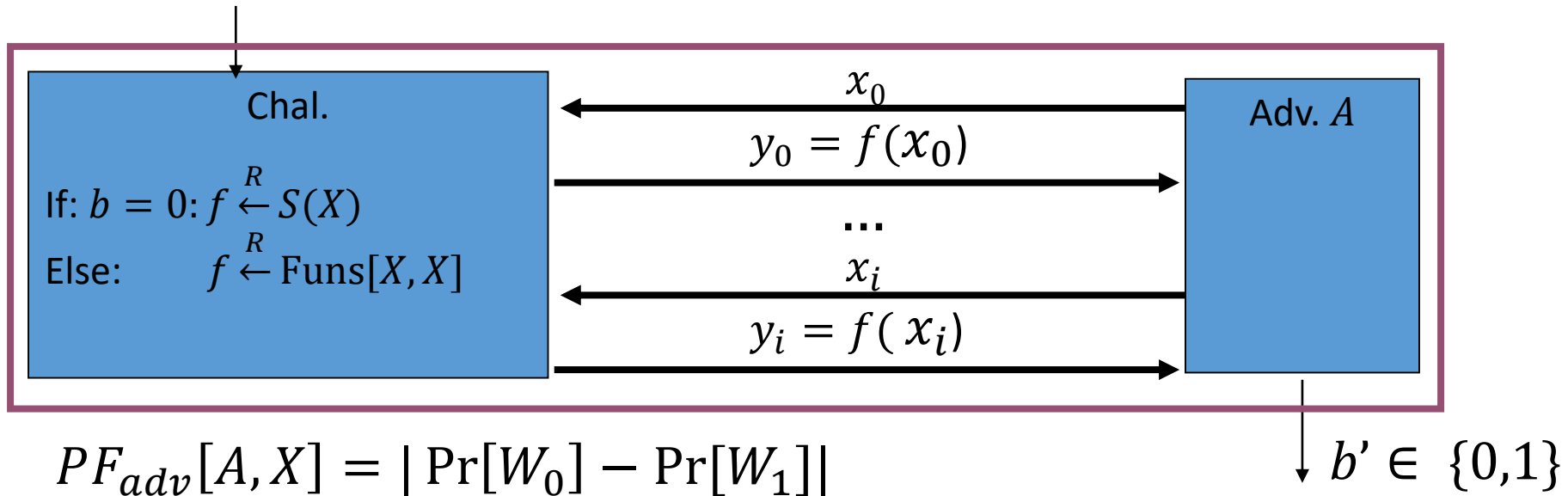
Определим  $PF_{adv}[A, X] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$



# PRF switching Lemma

**Теорема 6.1.1.** Пусть  $X$  конечное множество,  $|X| = N$ . Пусть  $A$  противник в игре на различимость случайных функций и случайных подстановок. Тогда

$$PF_{adv}[A, X] \leq Q^2/2N$$



# PRF switching Lemma



**Теорема 6.1.1.** Пусть  $X$  конечное множество,  $|X| = N$ . Пусть  $A$  противник в игре на различимость случайных функций и случайных подстановок. Тогда

$$PF_{adv}[A, X] \leq Q^2/2N$$

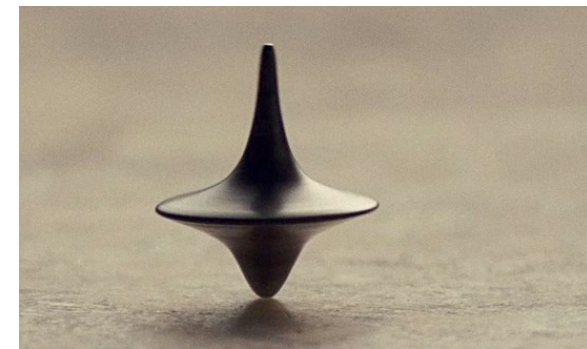
# необходима ещё одна вспомогательная теорема.

**Теорема 6.1.1.1.** Пусть  $Z, W_0, W_1$  события над некоторым вероятностным пространством. Пусть  $W_0 \wedge !Z$  происходит тогда и только тогда когда происходит  $W_1 \wedge !Z$ . Тогда  $|\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| \leq \Pr[Z]$

$$\% \Pr[W_b \wedge Z] \in [0, \Pr[Z]]$$

$$|\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| = |\Pr[W_0 \wedge Z] + \Pr[W_0 \wedge !Z] - \Pr[W_1 \wedge Z] - \Pr[W_1 \wedge !Z]| = |\Pr[W_0 \wedge Z] - \Pr[W_1 \wedge Z]| \leq \Pr[Z] \%$$

# PRF switching Lemma



**Теорема 6.1.1.** Пусть  $X$  конечное множество,  $|X| = N$ . Пусть  $A$  противник в игре на различимость случайных функций и случайных подстановок. Тогда

$$PF_{adv}[A, X] \leq Q^2/2N$$

Рассмотрим противника  $A$  в игре на различимость RP и RF. Пусть он отправляет  $Q$  различных запросов  $x_1, \dots, x_q$ .

Пусть  $Z$  событие того, что  $f(x_i) = f(x_j), i \neq j$  (пара ответов оракула совпала). Если событие  $Z$  не произошло, то все величины  $f(x_i)$  различны, и игры 0 и 1 идентичны. Следовательно, противник будет иметь идентичный результат в обоих играх. Следовательно можем применить Теорему 6.1.1.1.  $|\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| \leq \Pr[Z] \leq Q^2/2N$ .

$\Pr[f(x_i) = f(x_j)] = 1/N$ , число таких пар в игре не больше  $Q^2/2$ . #

# PRF switching Lemma

**Теорема 6.1.** Пусть  $E: K \times X \rightarrow X$  – стойкая PRP,  $|X| = N$ . Пусть  $A$  – противник в игре на стойкость PRF, делающих не более  $Q$  запросов к претенденту. Тогда

$$|PRF_{adv}[A, E] - PRP_{adv}[A, E]| \leq Q^2/2N$$

$$PF_{adv}[A, X] \leq Q^2/2N.$$

Рассмотрим игру с тремя экспериментами.



# Игра на различимость RF, RP и PRP

Пусть  $W_b$  вероятность того что в эксперименте  $b$   $b' = 1$ .

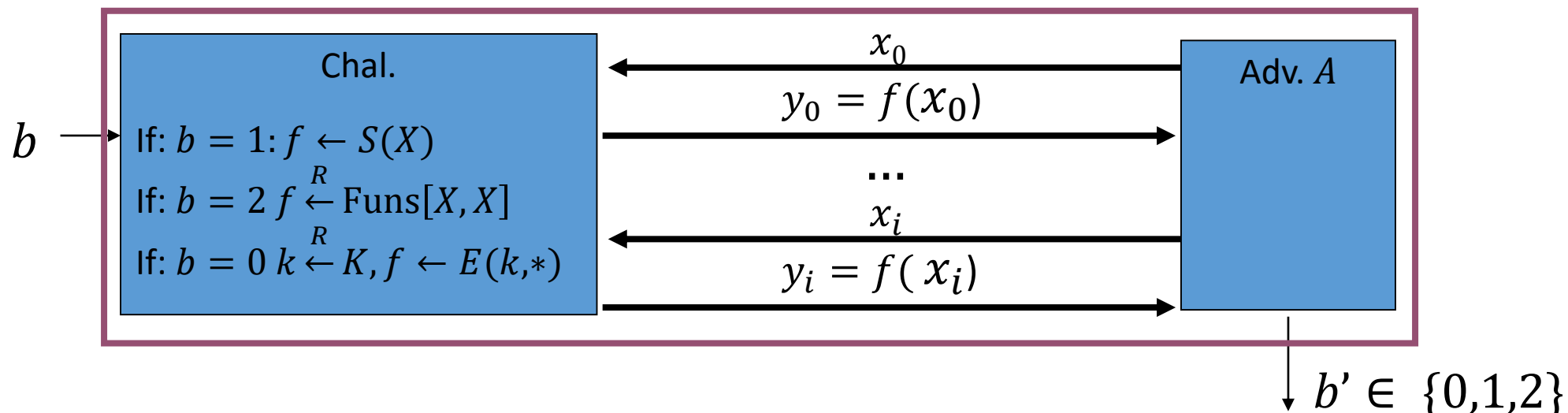
Обозначим  $p_b$  вероятность того, что в эксперименте  $b \in \{0,1,2\}$   $b' = 1$ .

$$|p_1 - p_0| = PRP_{adv}[A, E]$$

$$|p_2 - p_0| = PRF_{adv}[A, E]$$

$$|p_2 - p_1| = PF_{adv}[A, X] \leq Q^2/2N$$

$$|PRF_{adv}[A, E] - PRP_{adv}[A, E]| = ||p_1 - p_0| - |p_2 - p_0|| \leq |p_2 - p_1| \leq Q^2/2N \triangleleft$$



# Построение PRG из PRF

Пусть  $F$  PRF на  $(K, X, Y)$ ,  $l \geq 1$  полиномиально ограничена,  $x_1, \dots, x_l$  **различные** элементы из  $X$ :  $|X| \geq L$ . Определим PRG  $G$  с пространством ключей  $K$ , пространством выходов  $Y^l$  для  $k \in K$  следующим образом:

$$G(k) = (F(k, x_1), \dots, F(k, x_l))$$

**Теорема 6.2.** Если  $F$  стойкая PRF, то  $G$  стойкая PRG, причём  $\forall A$  в игре на стойкость PRG  $\exists B$  в игре на стойкость PRF, такой что

$$PRG_{adv}[A, G] = PRF_{adv}[B, F]$$

▷ Идея: построим противника  $B$ .  $B$  получает от  $A$  запросы  $x_1, \dots, x_l$ , отправляет претенденту, получая ответы  $y_1, \dots, y_l$ , которые прозрачно пересылает  $A$ . Выход  $b'$  соответствует выходу алгоритма  $A$ . ◁

# CTR, вспомним 2 теоремы

**Теорема 2.4.** Пусть  $G: S \rightarrow \{0,1\}^n$  стойкий генератор (PRG).

Тогда поточный шифр  $E$  определённый с использованием  $G$  семантически стойкий, т.е.  $\forall A$ :  $A$  – противник в игре на семантическую стойкость,  $\exists$  противник  $B$  в игре на стойкость PRG (различимость):

$$SS_{adv}[A, E] \leq 2 * PRG_{adv}[B, G]$$

**Теорема 6.1.** Пусть  $E: K \times X \rightarrow X$  – стойкая PRP,  $|X| = N$ . Пусть  $A$  – противник в игре на стойкость PRF, делающих не более  $Q$  запросов к претенденту. Тогда

$$|PRF_{adv}[A, E] - PRP_{adv}[A, E]| \leq Q^2 / 2N$$



# CTR

Формально опишем полученный шифр.

$E' = (E', D')$  определён на  $(K, X^{\leq l}, X^{\leq l})$ , где  $l$  – полиномиально ограниченная,  $l \leq N, N = |X|$ . Пусть  $x_1, \dots, x_l$  элементы из  $X$ . Обозначим  $x_i = (i - 1)_n$  - двоичное  $n$  битное представление числа  $i - 1$ .

Для  $k \in K, m \in X^{\leq l}, v = |m|$

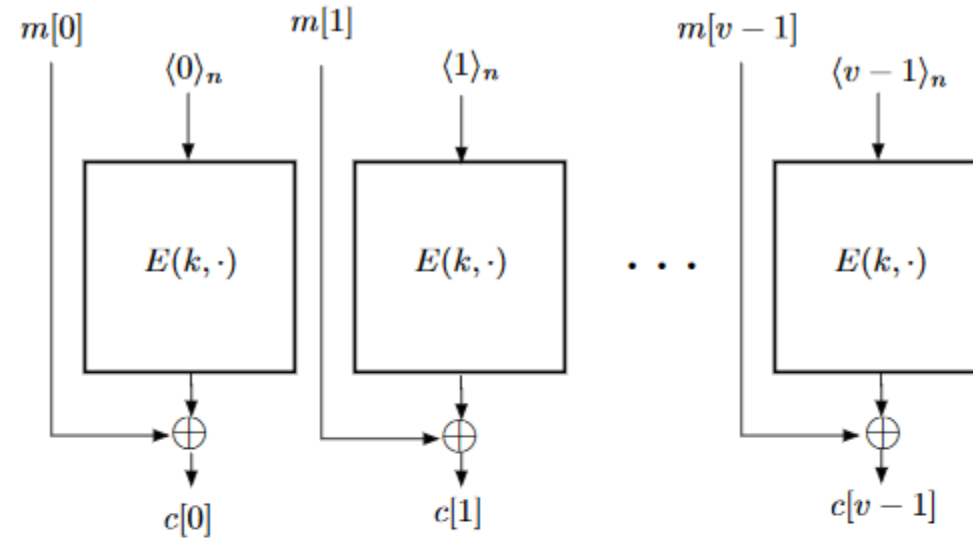
$$E'(k, m) = (E(k, (0)_n) \oplus m[0], \dots, E(k, (v - 1)_n) \oplus m[v - 1])$$

Для  $k \in K, c \in X^{\leq l}, c = |c|$

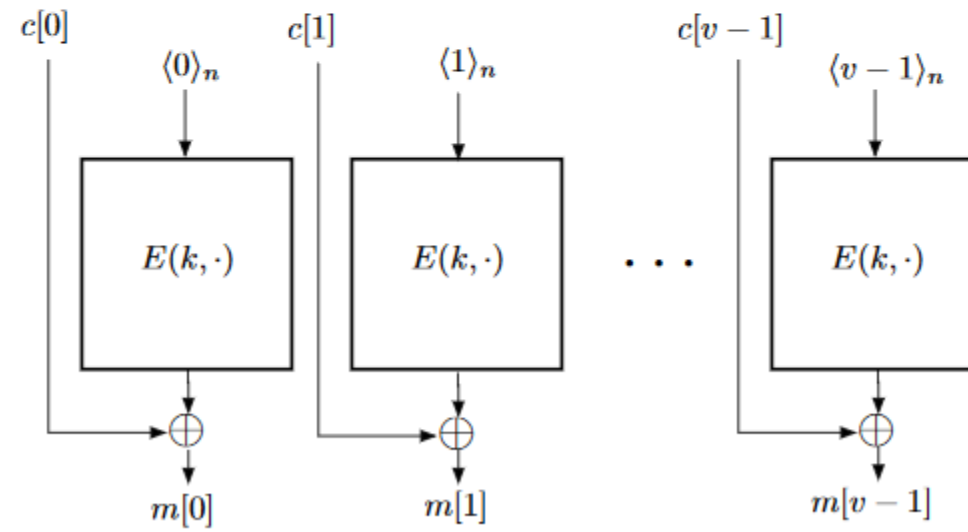
$$D'(k, c) = (E(k, (0)_n) \oplus c[0], \dots, E(k, (v - 1)_n) \oplus c[v - 1])$$

Полученный шифр называется **детерминированным CTR режимом** для блочного шифра  $E$ .

# CTR



(a) encryption



(b) decryption

# CTR

**Теорема 6.2** позволяет построить семантически стойкий шифр с помощью стойкого блочного шифра. Пусть  $E = (E, D)$  стойкий блочный шифр на  $(K, X)$ ,  $X = \{0,1\}^n$ ,  $N = 2^n$  - сверх-полиномиальная.

По **Теореме 6.1** функция зашифрования блочного шифра  $E$  является стойкой PRF на  $(K, X, X)$ . Используя **Теорему 6.2** получаем стойкий PRG, и используя **Теорему 2.4** (стойкий генератор даёт семантически стойкий поточный шифр) получаем семантически стойкий шифр.

# CTR

**Теорема 6.3.** Если  $E = (E, D)$  стойкий блочный шифр, то  $E'$  на  $(K, X^{\leq l}, X^{\leq l})$  введённый ранее – семантически стойкий шифр, причём  $\forall A$  – противников в игре на стойкость блочного шифра (стойкость PRP)  $\exists B$  в игре на семантическую стойкость, причём

$$SS_{adv}[A, E'] \leq 2 * PRP_{adv}[B, E] + l^2/N$$

▷ Используя **Теорему 6.1** получаем PRF из PRP (добавляется слагаемое  $l^2/N$ ), используя **Теорему 6.3** получаем PRG из PRF, используя **Теорему 2.4** получаем семантически стойкий шифр из PRG (множитель 2) ◁

# CTR

- $SS_{adv}[A, E'] \leq 2 * PRP_{adv}[B, E] + l^2/N$
- Стойкий для сообщений произвольной длины
- Стойкость на больших сообщениях убывает квадратично быстро (из за слагаемого  $l^2/N$ , стойкость зависит от размера блока ( $N$ )).

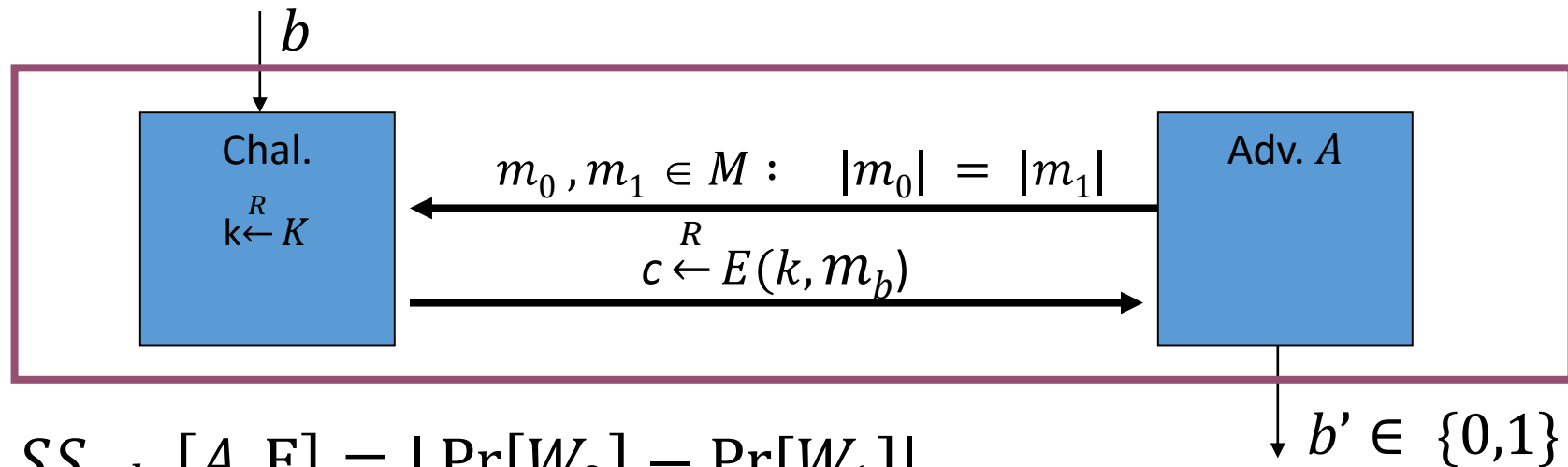
Рассмотрим атаку -  $m_0$  - сообщение из  $l$  нулевых блоков,  $m_1$  - сообщение из  $l$  случайных блоков. При шифровании сообщения  $m_0$  шифртекст не будет содержать повторяющихся блоков. При шифровании  $m_1$  вероятность получить повторяющиеся блоки  $\sim l^2/N$ . Т.е. можно построить алгоритм  $A$  в игре на семантическую стойкость для  $l \sim N^{1/2}$ .

# Многоразовое использование ключей

- Семантическая стойкость – ослабленная версия абсолютной стойкости, позволяющая описывать стойкость шифров, для которых энтропия ключа меньше энтропии множества открытых текстов.
- Семантически стойкие шифры позволяют использовать короткие ключи.

# Многократное использование ключей

До этого момента мы рассматривали ситуации, когда ключ использовался претендентом только один раз. Т.е. мы моделировали одноразовое использование ключа.



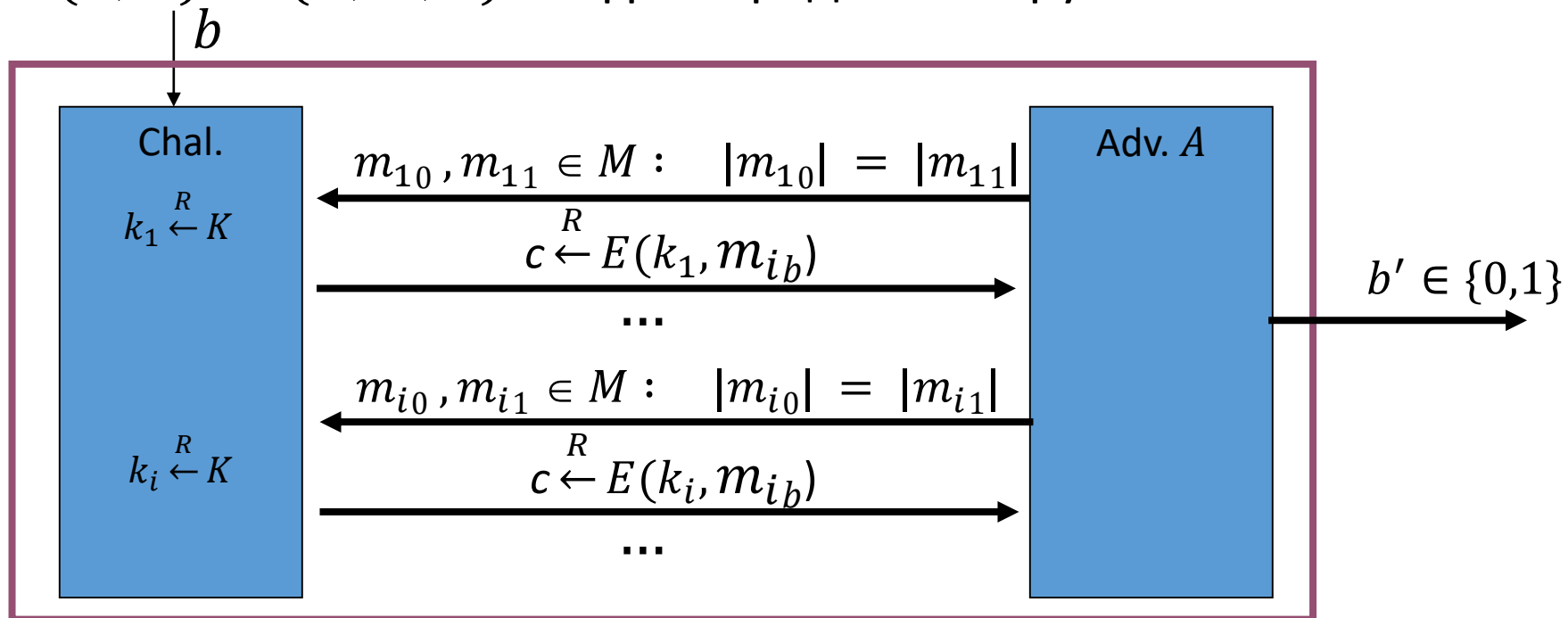
$$SS_{adv}[A, E] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$$

Но мы хотели бы иметь возможность использовать ключи для шифрования множества сообщений.

# Использование множества ключей

- Будет ли семантически стойким шифр, если для шифрования множества сообщений будут использоваться различные случайные независимые ключи?

Пусть  $E = (E, D)$  на  $(K, M, C)$  шифр. Определим игру

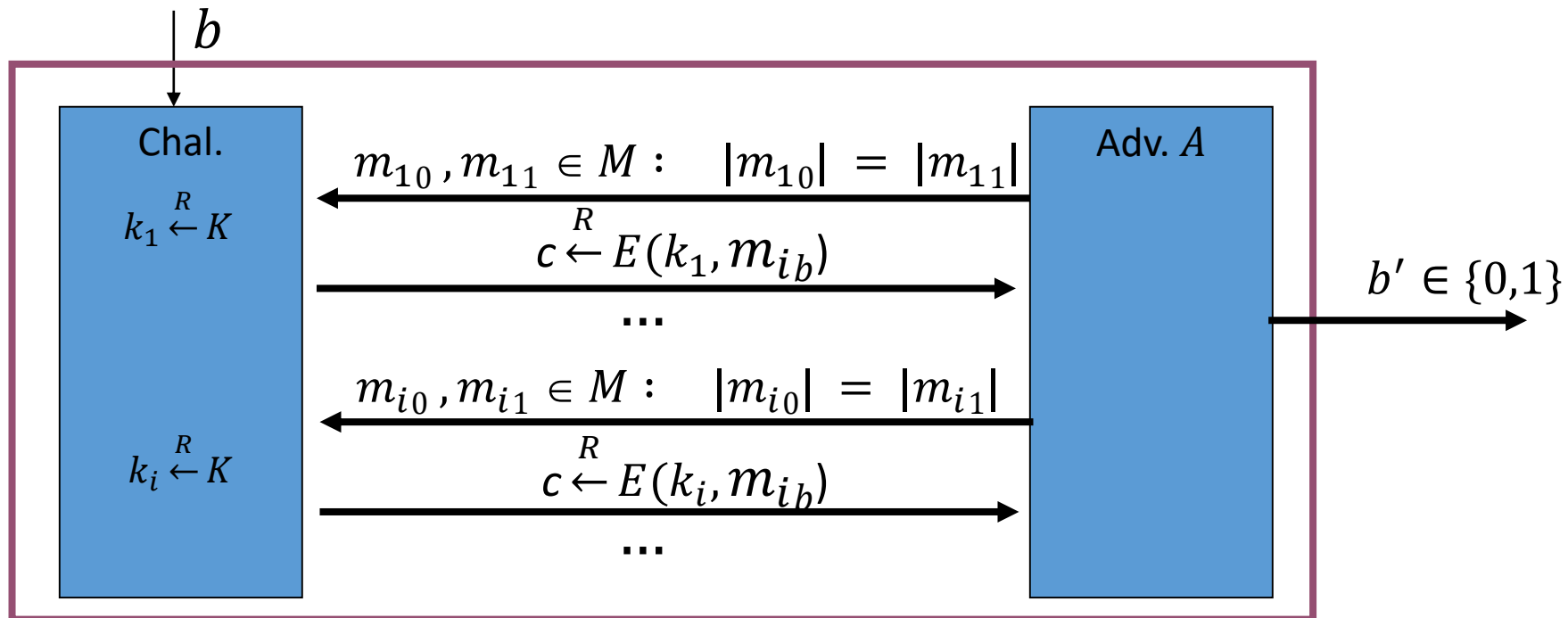




# Использование множества ключей

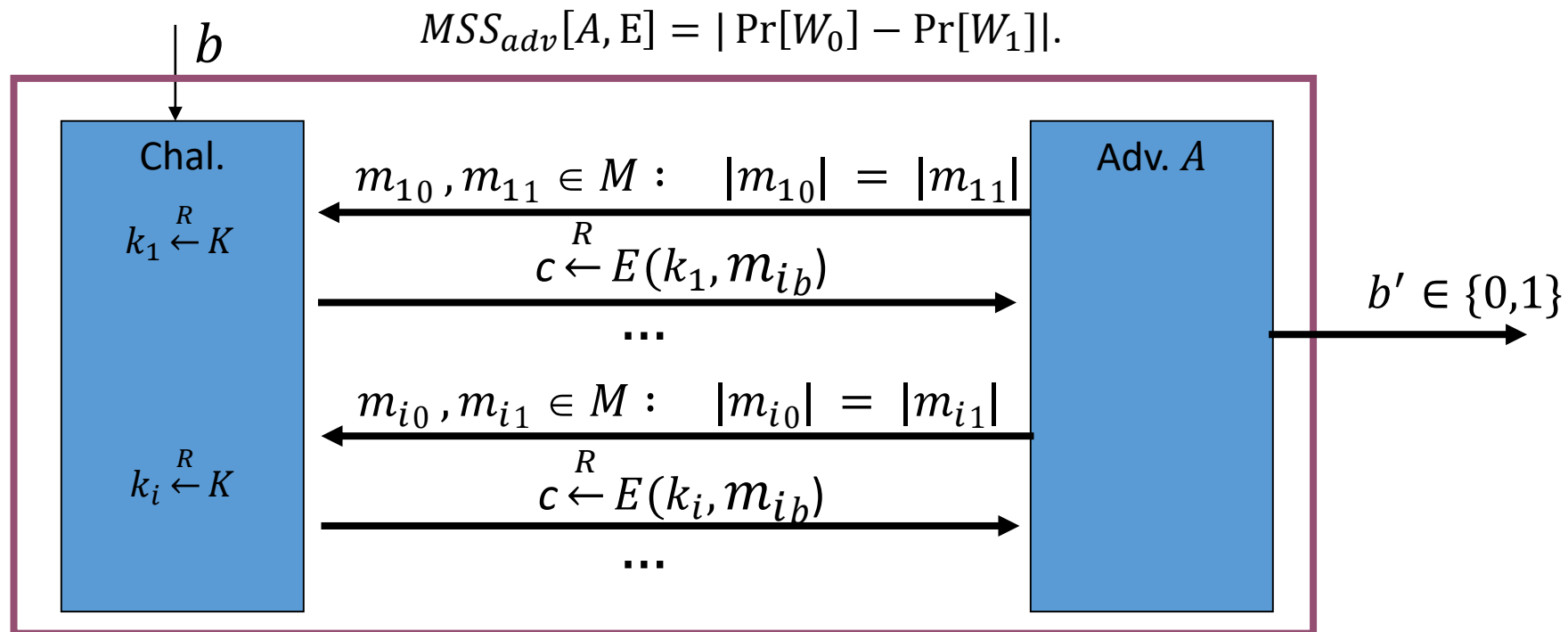
Пусть  $W_b$  событие того что в игре  $b$   $b' = 1$ .

Введём  $MSS_{adv}[A, E] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$ .



# Использование множества ключей

Шифр  $E$  называется семантически стойким при использовании множества ключей, если величина  $MSS_{adv}[A, E] \leq \epsilon$ , где  $\epsilon$  – пренебрежимо малая.

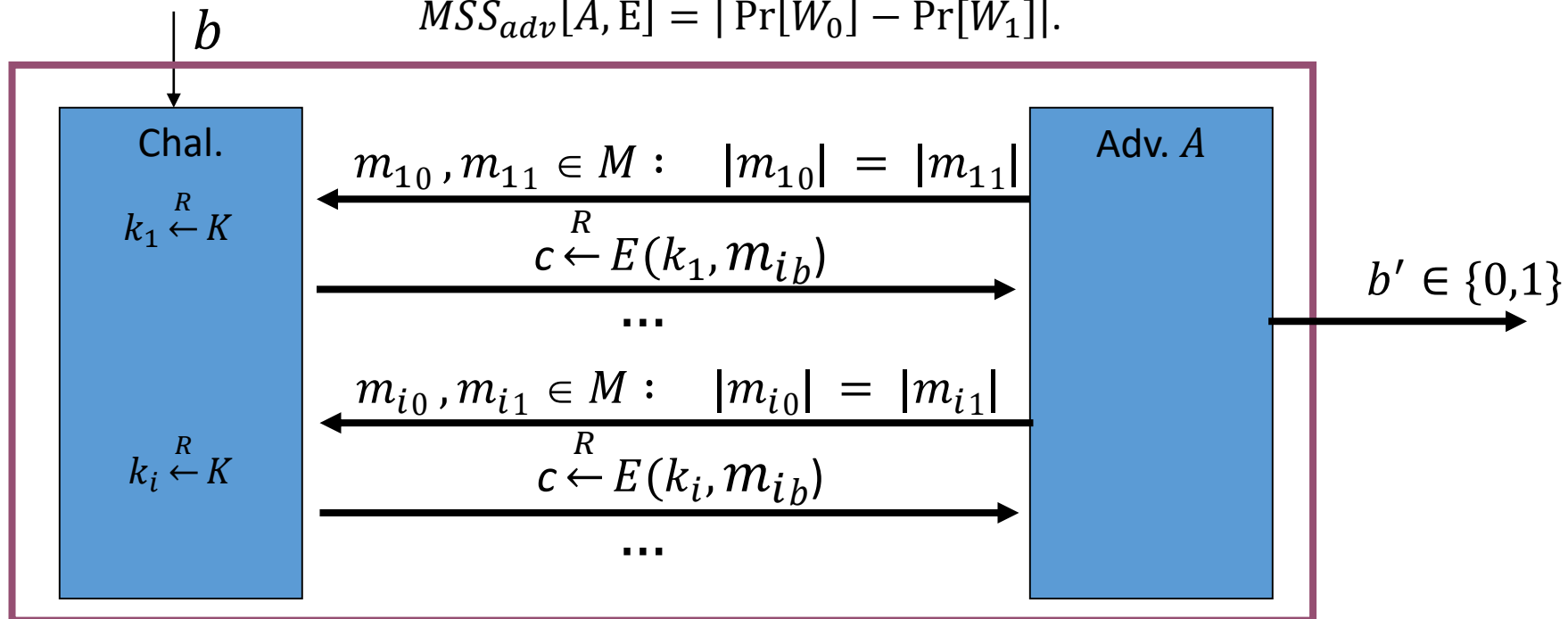


# Использование множества ключей

Альтернативное определение преимущества – вероятность угадывания эксперимента противником. Обозначим  $MSS_{adv}^*[A, E]$ .

$$MSS_{adv}[A, E] = 2 * MSS_{adv}^*[A, E]$$

$$MSS_{adv}[A, E] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|.$$



# Использование множества ключей

**Теорема 6.4.** Пусть  $E$  семантически стойкий на  $(K, M, C)$ . Тогда он семантически стойкий при использовании множества ключей, причём  $\forall A$  в игре на семантическую стойкость при использовании множества ключей, использующий не более  $Q$  запросов к претенденту,  $\exists B$  в игре на семантическую стойкость такой что

$$MSS_{adv}[A, E] = Q * SS_{adv}[B, E]$$

▷ идея доказательства основана на использовании гибридных игр, аналогично

**Теореме 3.1.** В эксперименте 0 игры MSS претендент шифрует сообщения  $m_{10}, m_{20}, \dots, m_{Q0}$ . Для шифрования сообщения  $m_{10}$  используется ключ  $k_1$ . Так как шифр семантически стойкий можем заменить шифрование  $m_{10}$  на шифрование  $m_{11}$  и противник не заметит разницы. В итоге производя  $Q$  таких модификаций мы получим эксперимент 1 игры MSS◁

# Многоразовое использование ключей

- Описанная ранее семантическая стойкость с использованием множества ключей требует уникального случайного ключа для каждого нового зашифровываемого сообщения.
- Можно ли построить шифр так, чтобы на одном фиксированном ключе можно было зашифровать множество сообщений?
- Вводится понятие многоразовой семантической стойкости, т.е. семантической стойкости, при которой ключ используется более одного раза.

# Многоразовое использование ключей

- Является ли одноразово семантически стойкий шифр многократно семантически стойким?
  - Нет. Пример. При использовании поточного шифра необходима уникальность ключа  $s \in S$ . При повторении ключа получаем двухразовый блокнот, который не является семантически стойким, так как позволяет восстановить исходные сообщения.
- Нужно новое определение - необходим аналог семантической стойкости, но при многократном использовании ключа.

# Многоразовое использование ключей

- Попробуем выдвинуть необходимые требования к шифру, семантически стойкому при многократном использовании ключей.
- Поточный поточные шифры не подходят, как видели ранее. Не подойдут и любые **детерминированные** шифры, т.е. такие, которые при фиксированном ключе на одинаковом открытом тексте дают одинаковый выход.
  - Если противник знает, что  $E(k, x) = c$  и шифр детерминированный, то он может отличить сообщения  $m_0 = x, m_1 \neq x$  по их шифртекстам.
- Следовательно, шифр должен быть **вероятностным**, т.е. дающим разные шифртексты на фиксированном ключе для указанного сообщения. Это **необходимое** условие.

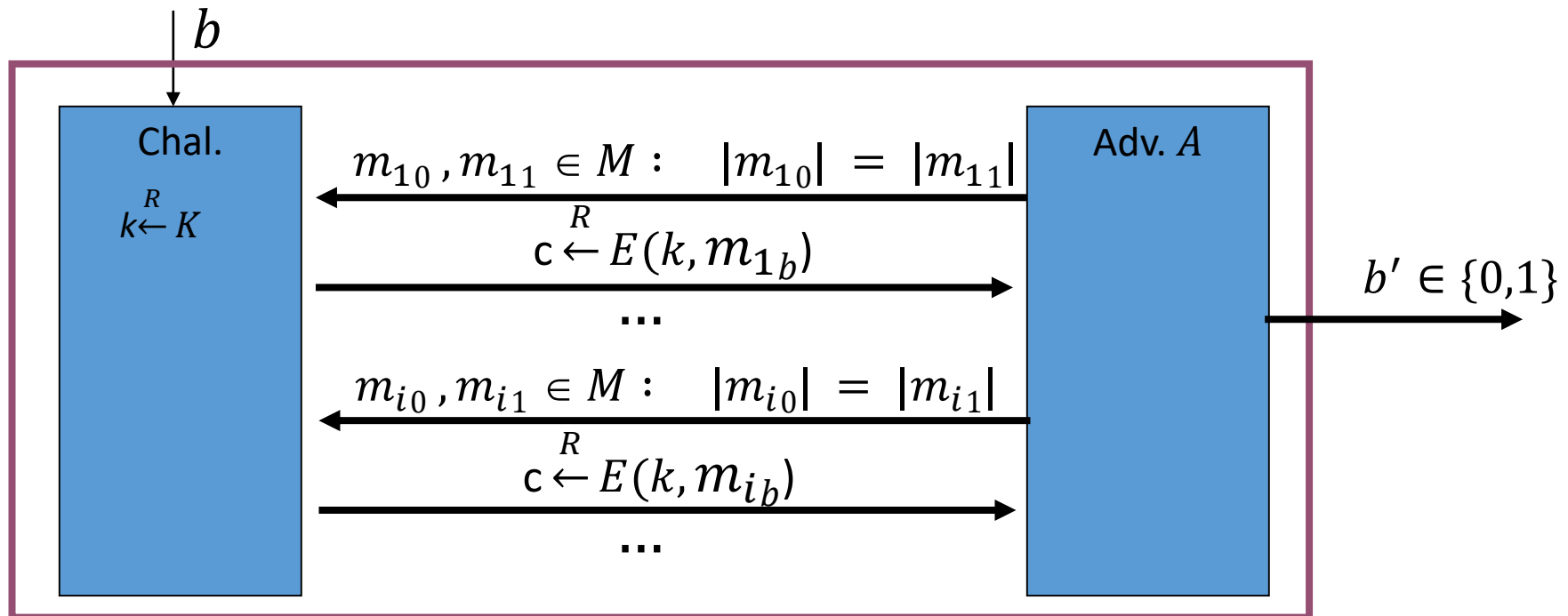
# CRA

- CRA (атака по выбранному открытому тексту, атака по парам открытый текст – шифртекст).
- Возможности противника – получить шифртексты для произвольных открытых текстов при фиксированном ключе.
- Цель противника – атака на семантическую стойкость.
- Рассмотрим игру



# CPA

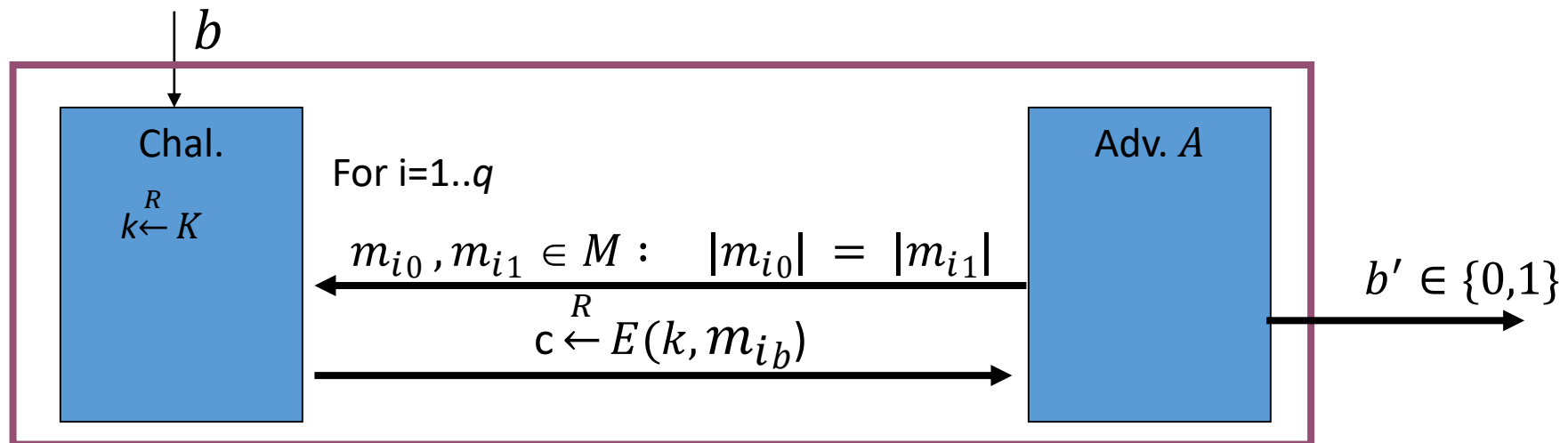
Введём игру аналогично игре при использовании множества ключей семантически стойким шифром, но фиксируя ключ. Определим  $CPA_{adv}[A, E] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$ .



# CPA

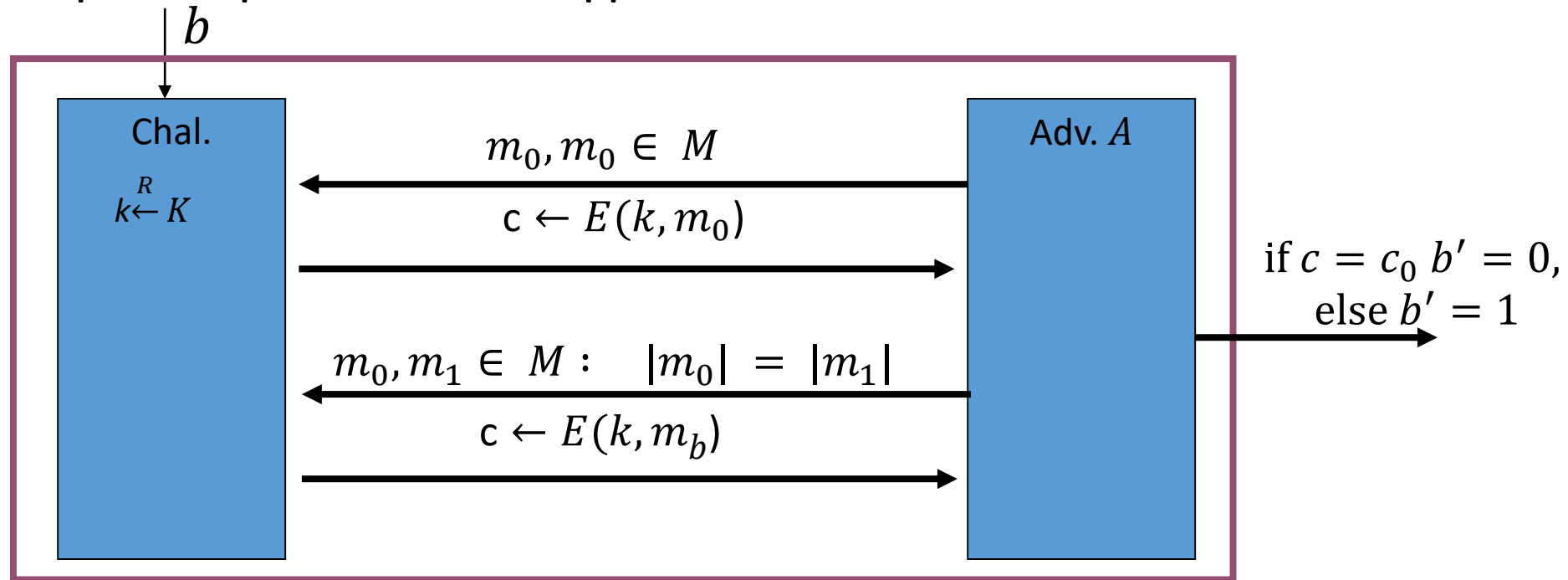
Шифр  $E$  называется стойким к атаке по выбранным открытым текстам (CPA стойким), если величина  $CPA_{adv}[A, E] \leq \epsilon$ , где  $\epsilon$  – пренебрежимо малая.  $q$  – параметр, определяющий максимальное количество сообщений противника.

Заметим, что противник может получить  $c = E(k, m)$  отправив претенденту  $m_{j0} = m_{i1} = m$ .



# CPA

- Детерминированные шифры не CPA стойкие

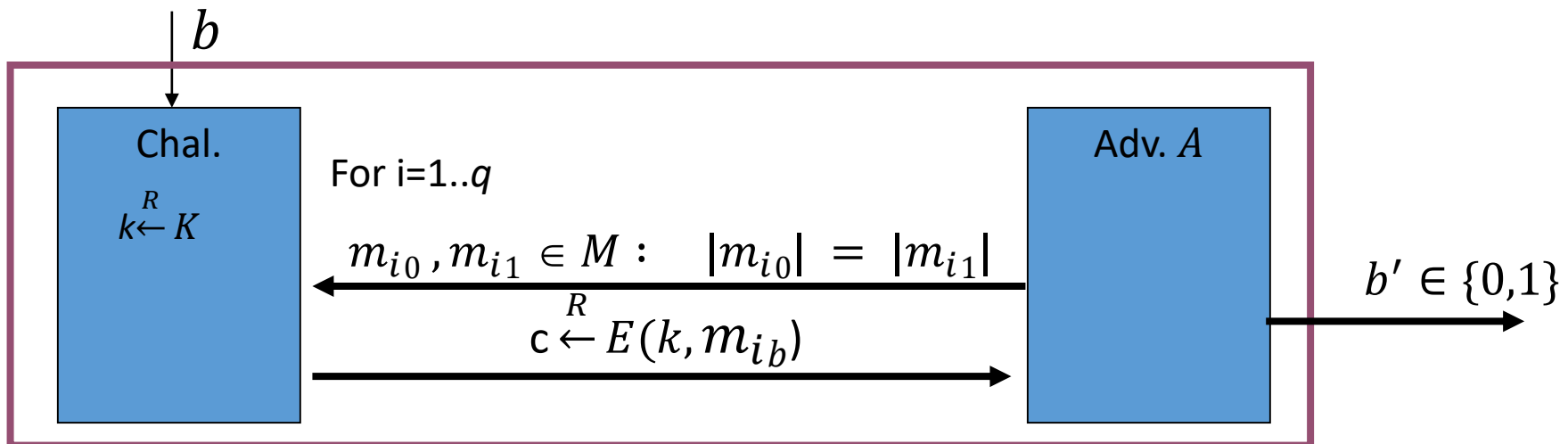


- Следовательно необходимо использовать вероятностные алгоритмы

# CPA

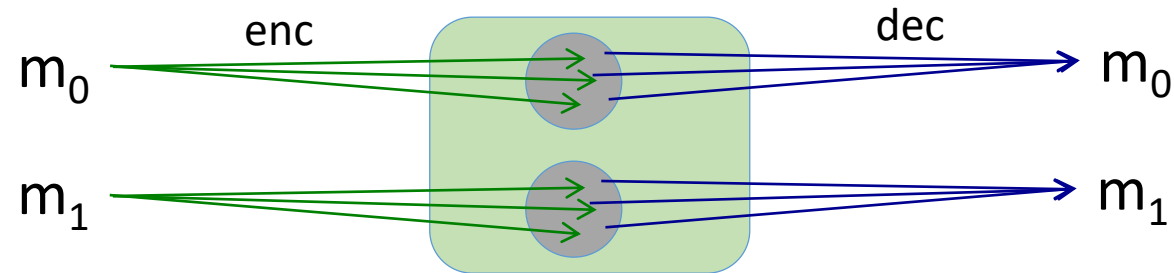
Альтернативное определение преимущества – вероятность угадывания эксперимента противником. Обозначим  $CPA_{adv}^*[A, E]$ .

$$CPA_{adv}[A, E] = 2 * CPA_{adv}^*[A, E]$$



# Вероятностное шифрование

- Как показано ранее, для СРА стойкости необходима «рандомизация» шифртекстов
- Подход 1 – рандомизация функции зашифрования



- Зашифрование одного и того же сообщения даст разные шифртексты
- Необходим внешний источник энтропии
- Шифртексты всегда длиннее открытых текстов, так как необходимо также передать энтропию, необходимую для восстановления открытого текста

# Вероятностное шифрование

- Подход 2 – использование уникальных, неповторяющихся величин (nonce)
- $m \rightarrow E(k, *, n) \rightarrow c \rightarrow D(k, *, n) \rightarrow m$
- Nonce должна быть уникально для каждого сообщения, пара (nonce, key) не должна повторяться при жизни ключа.
- В качестве nonce можно использовать счётчик или случайные величины
- Nonce может не пересылаться в явном виде, обе стороны могут синхронно обновлять её независимо.
- Не любое использование nonce даёт стойкие схемы!