

# Прикладная Криптография: Симметричные криптосистемы Абсолютная и Семантическая стойкость (Акт 2)

Макаров Артём  
МИФИ 2025



Плейлист в ожидании пары

# Тест.

- Положить телефон экраном вниз справа от себя
- Не разговаривать с соседями
- Не пользоваться конспектами и электронными устройствами
- Написать номер (по таблице) и ФИО на листочке
- Написать краткий ответ на вопрос
- Дождаться окончания теста



Тест.

**Одноразовый блокнот  
переменной длины по  
модулю 7. Является ли  
абсолютно стойким,  
почему?**

- Положить телефон экраном вниз справа от себя
- Не разговаривать с соседями
- Не пользоваться конспектами и электронными устройствами
- Написать номер (по таблице) и ФИО на листочке
- Написать краткий ответ на вопрос
- Дождаться окончания теста



TIME IS  
UP

# Электронное дз

- Быстрее
- Меньше
- Проще
- Те же задания, но их меньше и меньше доказывать
- Переход возможен только в сторону электронных
- Оцениваются как 75% от «физических» дз
- Для перехода на электронные надо написать в личку

На прошлой лекции...

# Эквивалентные определения абсолютной стойкости

**Теорема 1.4.** Пусть  $E = (E, D)$  - шифр Шеннона на  $(K, M, C)$ . Рассмотрим вероятностный эксперимент для равномерно распределённой  $\mathbf{k} \in_R K$ .

Тогда  $E$  – абсолютно стойкий тогда и только тогда, когда для произвольного предиката  $\phi: C \rightarrow \{0,1\}$  и  $\forall m_0, m_1 \in M$

$$\Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_0)) = 1] = \Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_1)) = 1]$$

Иными словами: при использовании произвольного предиката на шифртекстах абсолютно стойкого шифра злоумышленник не получает информации об открытом тексте.

# Плохие новости

**Теорема 1.7 (Шеннона).** Пусть  $E = (E, D)$  шифр Шеннона на  $(K, M, C)$ . Если  $E$  – абсолютно стойкий, то

- $|K| \geq |M|$
- $H(\mathbf{k}) \geq H(\mathbf{m}), \mathbf{k} \in_R K, \mathbf{m} \in_R M$

Простое объяснение – невозможно получить равномерно распределённую случайную величину длины  $m$ , используя детерминированный алгоритм над равномерно распределённой случайной величиной длины  $n < m$ .

Иными словами, для шифрования 1 Gb данных **любым** абсолютно стойким шифром потребуется ключ размера как минимум 1 Gb.



# Вычислимый шифр

**Вычислимый шифр** на  $(K, M, C)$  – пара **эффективных** алгоритмов  $E = (E, D)$ , где  $E: K \times M \rightarrow C$  – вероятностная функция зашифрования,  $D: K \times C \rightarrow M$  – функция расшифрования.

- Обозначим процедуры зашифрования как  $c \stackrel{R}{\leftarrow} E(k, m)$ .
- Обозначим выбор **равномерно распределённого ключа** как  $k \stackrel{R}{\leftarrow} K$ .

При этом  $\forall k \in K, m \in M, c \stackrel{R}{\leftarrow} E(k, m), m' \leftarrow D(k, c) \Pr[m = m'] = 1$   
(**свойство корректности**).

# Семантическая стойкость

Пусть  $E = (E, D)$  - вычислимый шифр на  $(K, M, C)$ .

**Теорема 1.4**  $\Rightarrow E$  – абсолютно стойкий, если  $\forall \phi: C \rightarrow \{0,1\}, \mathbf{k} \in_R K$  – равномерно распределённый и выполняется

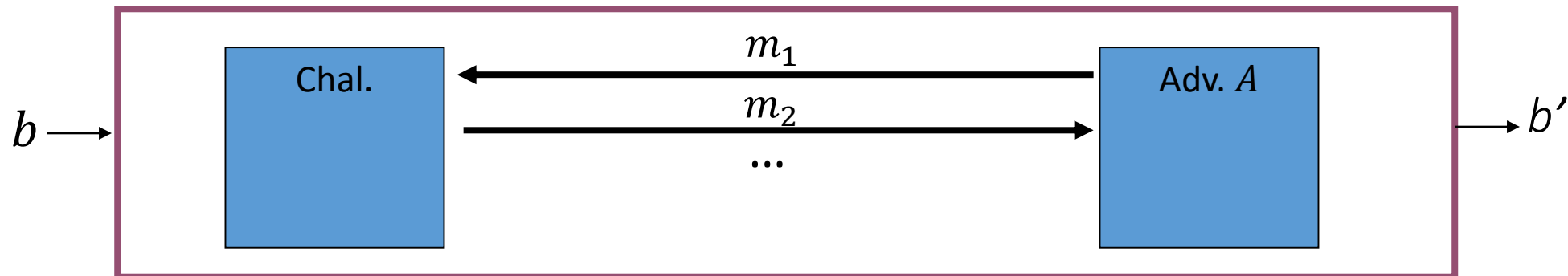
$$\Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_0)) = 1] = \Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_1)) = 1]$$

**Ослабим свойство абсолютной стойкости:** вместо требования равенства вероятностей потребуем чтобы их разность не превосходила величину  $\epsilon$ :

$$|\Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_0)) = 1] - \Pr[\phi(E(\mathbf{k}, m_1)) = 1]| \leq \epsilon$$

# Понятие игры

- Игра состоит из двух сторон – **противника  $A$  (Adversary)** и **претендента (Challenger)**, моделируемые **эффективными** алгоритмами. При этом алгоритм  $A$  – вероятностный
- **Входом** игры называется некоторая величина  $b$
- **Ход игры** – атакующий и претендент обмениваются сообщениями согласно некоторому фиксированному протоколу
- **Результатом** игры называется некоторая величина  $b'$

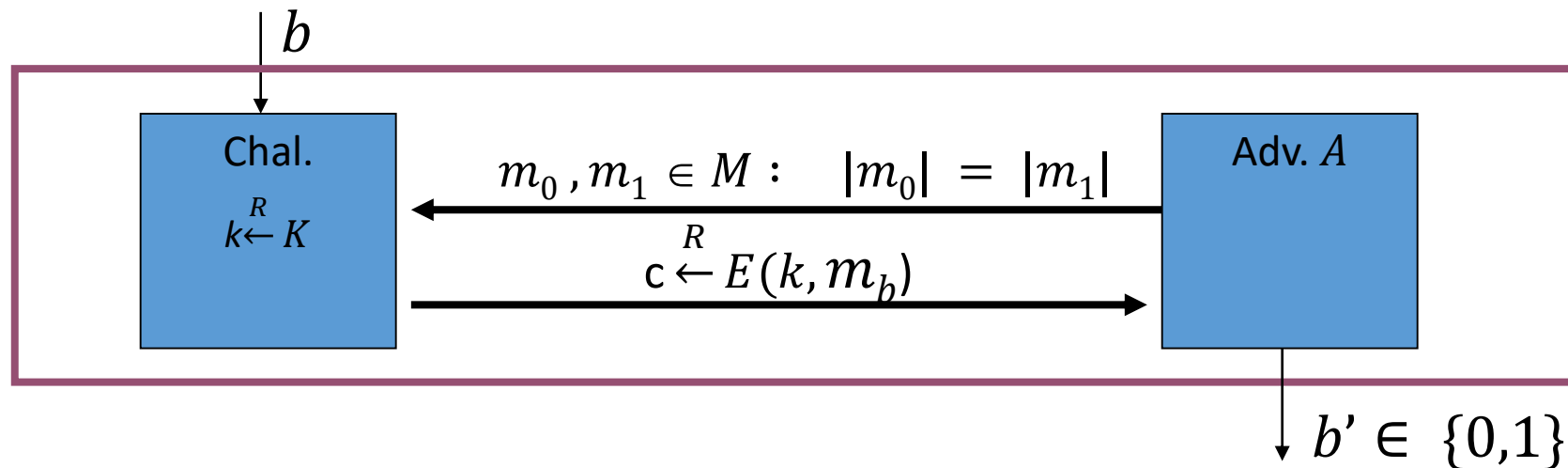


# Понятие игры на различимость, определения

- **Входом** игры называется случайное число  $b \in \{0,1\}$ , неизвестное для атакующего, определяющего эксперимент
- **Экспериментом** ( $\text{Exp } b$ ) называется «режим» претендента при его общении с атакующим
- **Ход игры** – атакующий и претендент обмениваются сообщениями согласно некоторому фиксированному протоколу
- **Цель игры** – атакующий пытается различить два эксперимента
- **Результатом** игры называется число  $b' \in \{0,1\}$  – выход алгоритма  $A$

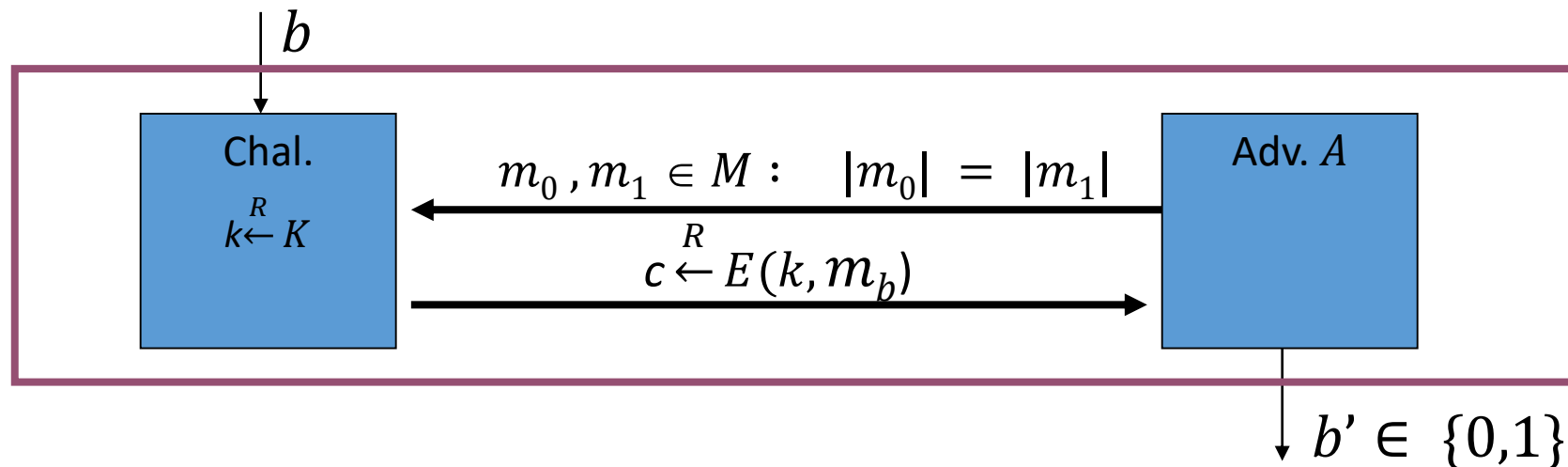
# Игра: семантическая стойкость (одноразовое использование ключа)

Для  $E = (E, D)$  - вычислимого шифра на  $(K, M, C)$  и противника  $A$  определим два эксперимента,  $\text{Exp. 0}$  и  $\text{Exp. 1}$  следующим образом:



# Игра: семантическая стойкость (одноразовое использование ключа)

- Претендент выбирает  $k \stackrel{R}{\leftarrow} K$
- Противник выбирает сообщения  $m_0, m_1 \in M$  **одинаковой длины**
- Претендент вычисляет  $c \stackrel{R}{\leftarrow} E(k, m_b)$  и отправляет противнику
- Противник возвращает бит  $b' \in \{0,1\}$  как результат игры

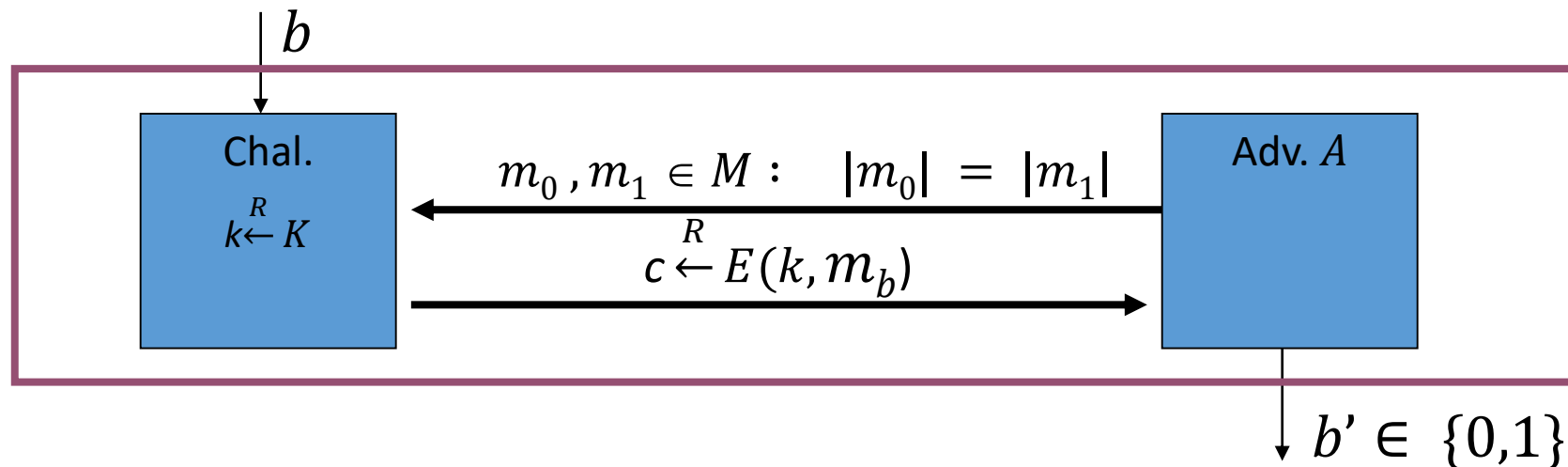


# Игра: семантическая стойкость (одноразовое использование ключа)

Пусть  $W_b$  - событие того, что  $b' = 1$  в эксперименте  $b$ .

**Преимуществом (Advantage)** противника  $A$  против алгоритма  $E$  в игре на семантическую стойкость есть величина:

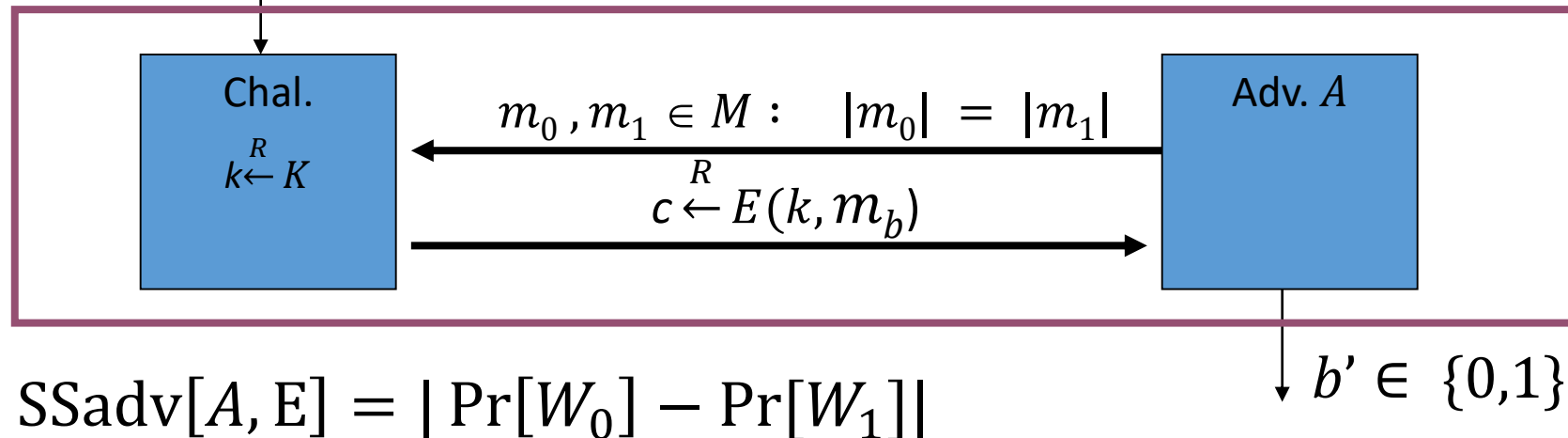
$$\text{SSadv}[A, E] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$$



# Семантическая стойкость (одноразовое использование ключа)

Шифр  $E$  - (одноразово) **семантически стойкий**, если для всех эффективных противников  $A$  величина  $SSadv[A, E] < \epsilon$  – **пренебрежимо малая величина**

Иными словами – вычислительно невозможно отличить шифртексты различных сообщений





# Семантическая стойкость (одноразовое использование ключа)

Заметим, что нам важна только разница вероятностей событий.

- Большая разность означает, что противник может различать эксперименты
- Малая – что противник различает эксперименты с трудом

Также замети, при замене  $b'$  на  $b'' = \begin{cases} 0, & b' = 1 \\ 1, & b' = 0 \end{cases}$  как выхода

противника, то его преимущество не изменится.

Иными словами – важна не величина, которая выдаёт противник, а то, что данные величины позволяют различать эксперименты.

# Семантическая стойкость

- «Ослабленная» версия абсолютной стойкости: только **эффективные противники** и разность вероятностей расшифрования в заданные сообщения **не превосходит  $\epsilon$** .
- Позволяет использовать **короткие ключи**

Примеры:

- Одноразовый блокнот – семантически стойкий шифр
- Одноразовый блокнот переменной длины – семантически стойкий шифр
- Шифр подстановки – не семантически стойкий шифр

# Построение атаки на семантическую стойкость

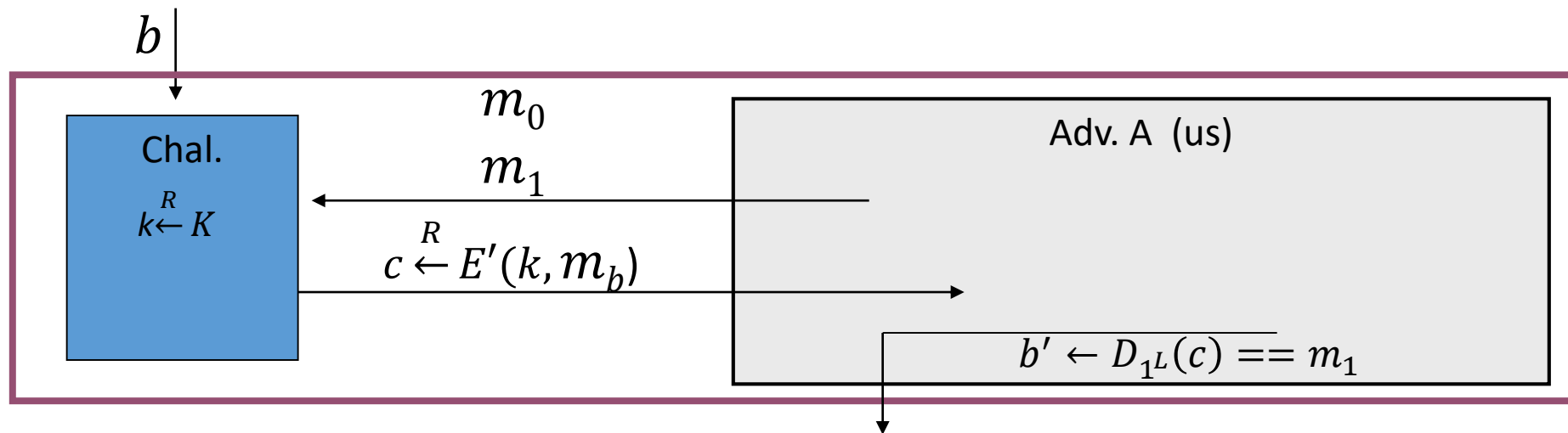
Пусть  $E = (E, D)$  – семантически стойкий шифр,  $E' = (E', D')$ :  $E'(k, m) = E(1^L, m)$ . Тогда  $E'$  – не семантически стойкий.

▷ Построим эффективный алгоритм  $A$ , позволяющий выиграть игру на семантическую стойкость.

- Генерация двух различных сообщений  $m_0, m_1$
- Получение шифртекста  $c$  для одного из сообщений
- Выдать результат  $c == E(1^L, m_1) \triangleleft$

# Построение атаки на семантическую стойкость

Пусть  $E = (E, D)$  – семантически стойкий шифр,  $E' = (E', D')$ :  $E'(k, m) = E(1^L, m)$ . Тогда  $E'$  – не семантически стойкий.



$$\text{SSadv}[A, E] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| = |1 - 0| = 1$$

# Построение атаки на семантическую стойкость (через существующую атаку)

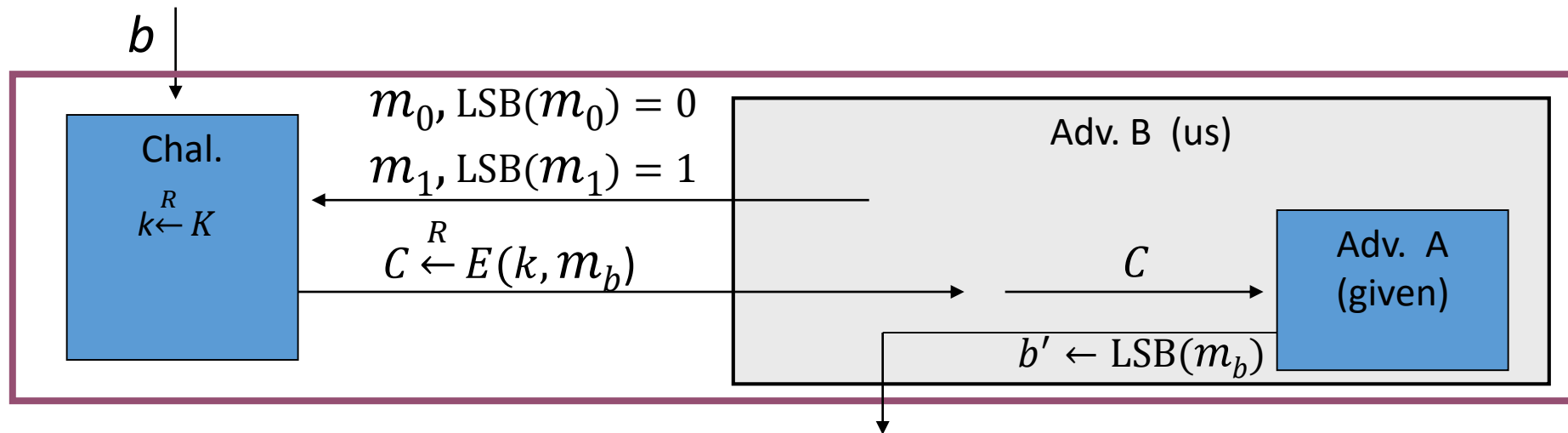
Пусть  $A$  – алгоритм позволяющий получить наименее значимый бит (LSB) открытого текста через шифртекст  $c \xleftarrow{R} E(k, m)$ . Тогда  $E = (E, D)$  на  $(K, M, C)$ ,  $M = \{0,1\}^L$  – не семантически стойкий шифр.

▷ Построим эффективный алгоритм  $B$ , позволяющий выиграть игру на семантическую стойкость.

- Генерация двух сообщений  $m_0, m_1$  с различным наименее значимым битом
- Получение шифртекста  $c$  для одного из сообщений
- Передача шифртекста на вход алгоритма  $A$
- Получение наименее значимого бита открытого текста, определение эксперимента. ◁

# Построение атаки на семантическую стойкость (через существующую атаку)

Пусть  $A$  – алгоритм позволяющий получить наименее значимый бит (LSB) открытого текста через шифртекст  $c \xleftarrow{R} E(k, m)$ . Тогда  $E = (E, D)$  – не семантически стойкий шифр.



$$\text{SSadv}[B, E] = |\text{Pr}[W_0] - \text{Pr}[W_1]| = |1 - 0| = 1$$

# Доказательства сведением (Reduction proof)

Пусть  $E = (E, D)$  – вычислимый семантически стойкий шифр на  $(K, M, C)$ . Тогда  $E' = (E', D')$ : 
$$\begin{cases} (c_0, c_1) = E'(k, m) = c || c; c = E(k, m) \\ D'(k, (c_0, c_1)) = D(k, c_0) \end{cases}$$
 – семантически стойкий шифр.

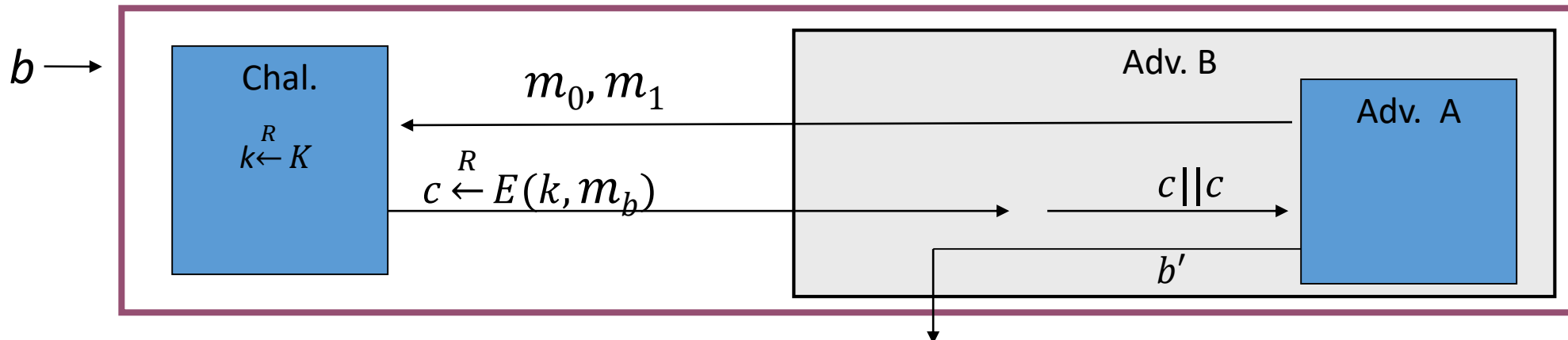
▷ От противного. Пусть  $E'$  – не семантически стойкий шифр. Тогда  $\exists$  противник  $A$ :  $SSadv[A, E'] \geq e$ , где  $e$  – не пренебрежимо малая величина.

Построим эффективный алгоритм  $B$  для игры против семантической стойкости шифра  $E$  с использованием алгоритма  $A$ , показав тем самым что  $E$  – не семантический стойкий  $\Rightarrow$  противоречие  $\Rightarrow E'$  – семантический стойкий. ◁

# Доказательства сведением (Reduction proof)

Пусть  $E = (E, D)$  - вычислимый семантически стойкий шифр на  $(K, M, C)$ .  
Тогда  $E' = (E', D')$ :  $\begin{cases} (c_0, c_1) = E'(k, m) = c || c; c = E(k, m) \\ D'(k, (c_0, c_1)) = D(k, c_0) \end{cases}$  —  
семантически стойкий шифр.

$\text{SSadv}[A, E'] \geq e$ , где  $e$  – не пренебрежимо малая величина.



$$\text{SSadv}[B, E] = \text{SSadv}[A, E'] \geq e$$



# Принципы доказательства стойкости и построения атак

- Строим атаку имея некоторые данные (примитив **A** нестойкий)
  - Просто строим атаку в указанной модели примитива **A**.

**или**

- Строим доказательство сведением (примитив **A** стойкий в некотором предположении стойкости другого примитива **B**; **стойкость B => стойкость A**).
  - От противного. Предполагаем, что примитив **A НЕ стойкий**.
  - Используя этот факт пытаемся построить **атаку** на примитив **B**.
  - Построили. Следовательно на **B** есть атака и он **НЕ стойкий**.  
Следовательно предположение, что A НЕ стойкий было неверно, и **A – стойкий**.

# Связь модели семантической стойкости с реальными атаками

- Есть ли связь между семантической стойкостью и, скажем, стойкостью к восстановлению сообщений (расшифровки ОТ по ШТ)
- Можно ли описать атаку на восстановление сообщений в терминах игры?

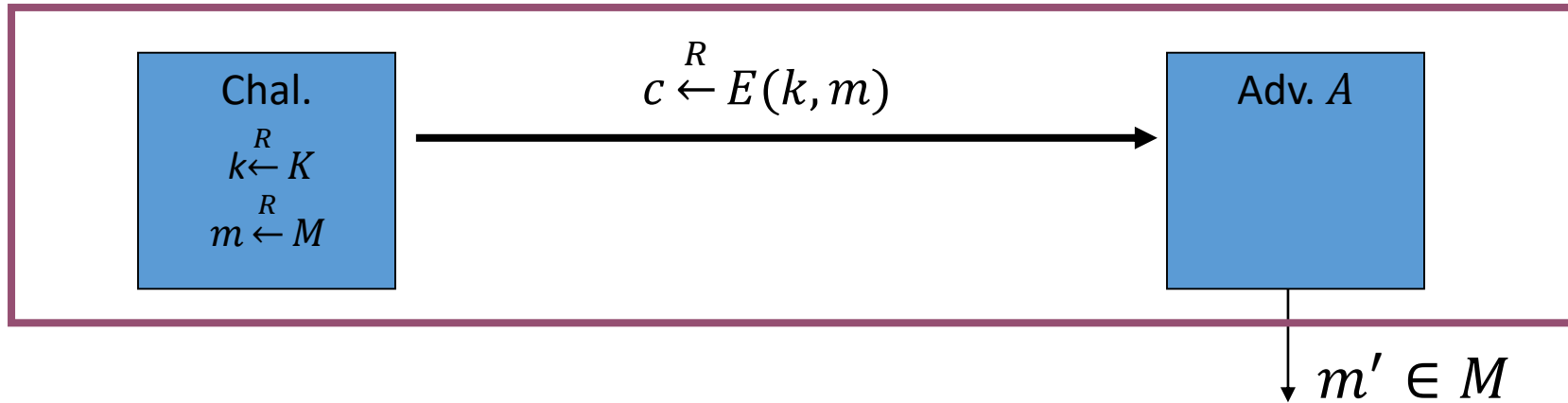
# Восстановление сообщений

**Атака на восстановление сообщений:** имея зашифрованное сообщение  $c \leftarrow E(k, t)$ ,  $t \in M$ , восстановить сообщение  $t$ , с вероятностью больше  $1/|M|$ .

Опишем игру на восстановление сообщений.

- Претендент вычисляет  $t \xleftarrow{R} M$ ,  $k \xleftarrow{R} K$ ,  $c \xleftarrow{R} E(k, t)$  и отправляет  $c$  противнику.
- Противник возвращает  $t'$  как результат игры.

# Восстановление сообщений

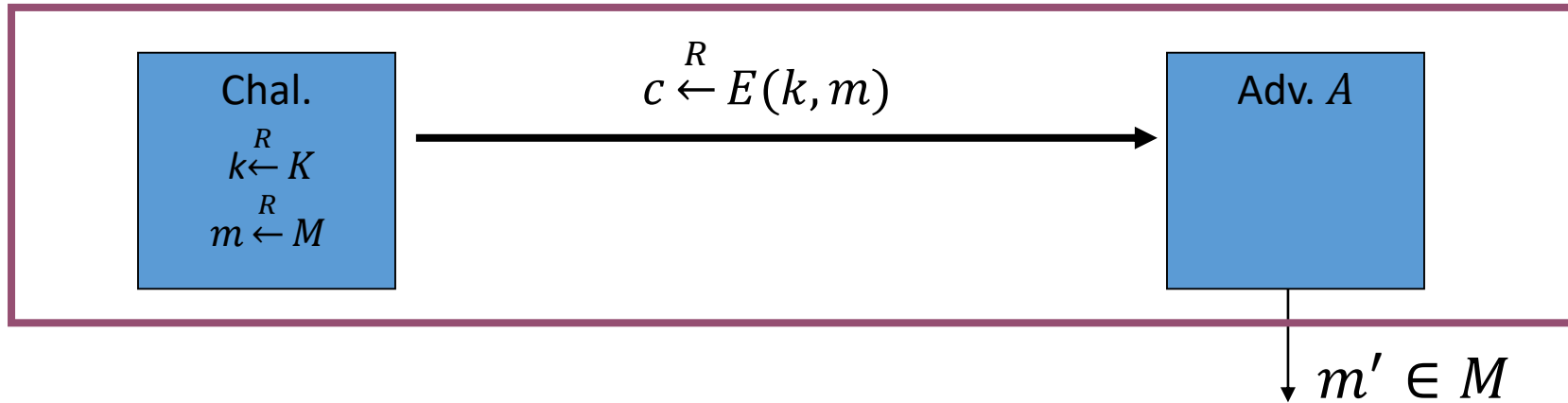


Пусть  $W$  – событие, при котором  $m' = m$ .

Преимуществом алгоритма  $A$  против шифра  $E$  при атаке на восстановление сообщений является величина

$$\text{MRadv}[A, E] = \left| \Pr[W] - \frac{1}{|M|} \right|$$

# Восстановление сообщений



$$\text{MRadv}[A, E] = \left| \Pr[W] - \frac{1}{|M|} \right|$$

Шифр  $E$  называется **стойким к атаке на восстановление сообщений**, если  $\forall A$  величина  $\text{MRadv}[A, E] < \epsilon$ , где  $\epsilon$  - пренебрежимо малая величина.

# Восстановление сообщений

**Теорема 1.8.** Если шифр  $E = (E, D)$  семантически стойкий на  $(K, M, C)$ , то он стойкий к атаке на восстановление сообщений

▷ Покажем, что атака на восстановление сообщений даёт атаку на семантическую стойкость.

Пусть  $A$  – эффективный алгоритм. Обозначим  $p$  – вероятность выиграть игру на восстановление сообщений для алгоритма  $A$ :

$$\text{MRadv}[A, E] = \left| p - \frac{1}{|M|} \right|.$$

Построим эффективный алгоритм  $B$  для игры на семантическую стойкость против алгоритма  $E$ , для которого

$$\text{MRadv}[A, E] \leq \text{SSadv}[B, E].$$

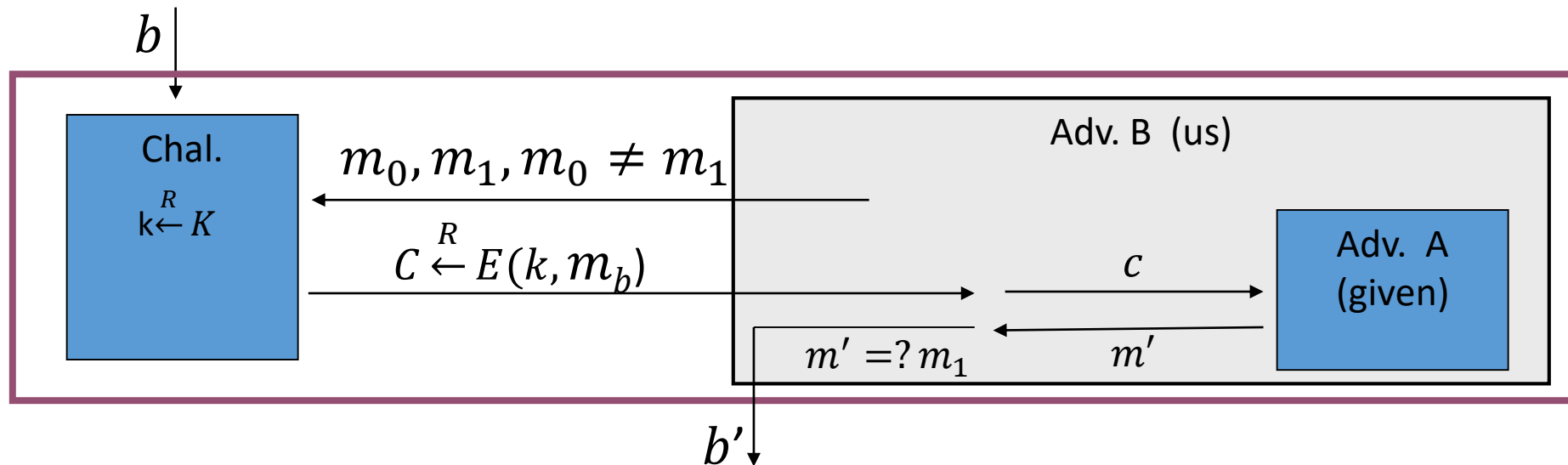
# Восстановление сообщений

**Теорема 1.8.** Если шифр  $E = (E, D)$  семантически стойкий на  $(K, M, C)$ , то он стойкий к атаке на восстановление сообщений

Построим алгоритм  $B$ . Алгоритм  $B$  генерирует два случайных сообщения  $m_0$  и  $m_1$  и отправляет их претенденту в игре на семантическую стойкость. Претендент отвечает шифртекстом  $c$  одного из сообщений, которых алгоритм  $B$  пересылает алгоритму  $A$ , получая восстановленное сообщение  $m'$ . Если  $m' = m_0$  то выводит  $b' = 0$ , иначе  $b' = 1$ .

# Восстановление сообщений

**Теорема 1.8.** Если шифр  $E = (E, D)$  семантически стойкий на  $(K, M, C)$ , то он стойкий к атаке на восстановление сообщений





# Восстановление сообщений

**Теорема 1.8.** Если шифр  $E = (E, D)$  семантически стойкий на  $(K, M, C)$ , то он стойкий к атаке на восстановление сообщений

Для  $b = 0, 1$  пусть  $p_b$  – вероятность того, что алгоритм  $B$  выдаст значение  $b' = 1$ , при шифровании сообщения  $m_b$ . Тогда  $SSadv[B, E] = |p_0 - p_1|$ . С другой стороны, если  $c$  есть зашифрование  $m_1$  то вероятность  $p_1 = p$  (Вероятность выиграть игру на восстановление для  $A$ ). Если же  $c$  есть зашифрование  $m_0$ , то  $p_0$  не зависит от  $m_1$  и  $p_0 = \Pr[m' = m_1] = 1/|M|$ . Следовательно

$$SSadv[B, E] = |p_1 - p_0| = \left| \frac{1}{|M|} - p \right| = MRadv[A, E]$$

⇒ атака на восстановление сообщений даёт атаку на семантическую стойкость. ◁

# Восстановление битов сообщения

Пусть  $E = (E, D)$  шифр на  $(K, M, C)$ .  $M = \{0,1\}^L$ . Пусть  $par(m)$  – произвольный предикат, вычисляющий 1 бит информации об открытом тексте (Например функция вычисления бита чётности сообщения  $m \in M$ ).

Определим игру на восстановление битов.

- Претендент вычисляет  $m \stackrel{R}{\leftarrow} M, k \stackrel{R}{\leftarrow} K, c \stackrel{R}{\leftarrow} E(k, m)$  и отправляет  $c$  противнику.
- Противник возвращает  $b' \in \{0,1\}$  как результат игры.

Пусть  $W$  – событие, при котором  $b' = par(m)$ .

Преимуществом алгоритма  $A$  против шифра  $E$  при атаке на восстановление битов является величина

$$\text{PARadv}[A, E] = |\Pr[W] - 1/2|$$

# Восстановление битов сообщения

Пусть  $E = (E, D)$  шифр на  $(K, M, C)$ .  $M = \{0,1\}^L$ . Пусть  $par(m)$  – функция вычисления бита чётности сообщения  $m \in M$  (здесь и далее  $par: M \rightarrow \{0,1\}$ :  $par(m) = \bigoplus_{i=1}^L m_i$ ).

Шифр  $E$  называется **стойким к восстановлению битов**, если величина  $PARadv[A, E] < \epsilon$ , где  $\epsilon$  – пренебрежимо малая величина.

# Вычисление индивидуальных битов сообщений

**Теорема 1.9.** Если шифр  $E = (E, D)$  семантически стойкий на  $(K, M, C)$ , то он стойкий к атаке на восстановление битов сообщения (Атака на восстановление битов сообщения даёт атаку на семантическую стойкость)

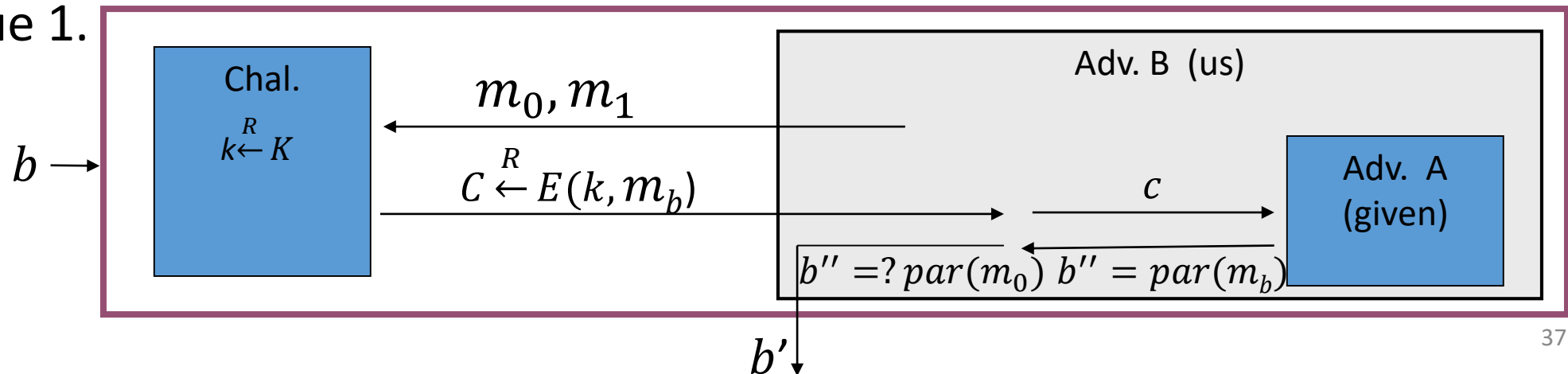
▷ От противного, имея алгоритм  $A$  в игре на восстановление битов построим эффективный алгоритм  $B$  для игры на семантическую стойкость против алгоритма  $E$ , для которого

$$\text{PARadv}[A, E] = \frac{1}{2} \text{SSadv}[B, E].$$

# Вычисление индивидуальных битов сообщений

**Теорема 1.9.** Если шифр  $E = (E, D)$  семантически стойкий на  $(K, M, C)$ , то он стойкий к атаке на восстановление битов сообщения (Атака на восстановление битов сообщения даёт атаку на семантическую стойкость)

Противник  $B$  генерирует сообщения  $m_0, m_1 \leftarrow m_0 \oplus (0^{L-1}1)$  и отправляет претенденту, получая шифртекст  $c$ , который он передаёт алгоритму  $A$ . После получения значения  $b''$  если  $b'' = \text{par}(m_0)$  то  $b' = 0$ , иначе 1.



# Вычисление индивидуальных битов сообщений

**Теорема 1.9.** Если шифр  $E = (E, D)$  семантически стойкий на  $(K, M, C)$ , то он стойкий к атаке на восстановление битов сообщения (Атака на восстановление битов сообщения даёт атаку на семантическую стойкость)

Пусть  $A$ :  $\text{PARadv}[A, E] = \epsilon$ , т.е. вероятность угадать чётность есть  $\frac{1}{2} + \epsilon$ .

Для  $b = 0, 1$  пусть  $p_b$  - вероятность того, что алгоритм  $B$  выдаст значение  $b' = 1$ . Тогда  $\text{SSadv}[B, E] = |p_1 - p_0| = 2\epsilon = 2\text{PARadv}[A, E]$ .

$$p_0 = \frac{1}{2} + \epsilon \text{ (угадали чётность } m_0),$$
$$p_1 = 1 - \left(\frac{1}{2} + \epsilon\right) = \frac{1}{2} - \epsilon \text{ (не угадали чётность } m_1).$$

⇒ атака на восстановление даёт атаку на семантическую стойкость. ◁<sub>38</sub>

# Семантическая стойкость (альтернативная формулировка)

**Теорема 1.10. (обобщение 1.9)** Пусть задана игра на семантическую стойкость для алгоритма  $A$  против шифра  $E = (E, D)$  на  $(K, M, C)$ .

Определим  $SSadv^*[A, E] = \left| \Pr[W] - \frac{1}{2} \right|$ , где  $W$  — событие, при котором  $b' = b$ . Тогда  $SSadv[A, E] = 2 * SSadv^*[A, E]$

▷ доказательство аналогично **Теореме 1.9.** ◁

# Выводы

- Модель абсолютно стойкого шифра делает его сложно применимым в практическом смысле
  - Требуется размер ключа равный размеру сообщения
  - Невозможно добиться стойкости при переменной длине сообщений
- Семантически стойкий шифр – ослабленная модель абсолютно стойкого шифра, пригодная для практического применения
  - Стойкость к восстановлению сообщений
  - Стойкость к восстановлению битов сообщений
- Игровая модель – модель, позволяющая вводить определения стойкости для криптографических примитивов
  - Доказательства стойкости методом сведения (reduction)
  - Построение атак через моделирование игры



# Тест.

## Определение абсолютной стойкости через вероятность (без предиката):

Пусть  $E = (E, D)$  – шифр шеннона над  $(K, M, C)$ ,  $k \in_R K$

$\forall m_0, m_1 \in M$  и  $c \in C$  имеем:

$$\Pr[???] = \Pr[????]$$

- Положить телефон экраном вниз справа от себя
- Не разговаривать с соседями
- Не пользоваться конспектами и электронными устройствами
- Написать номер (по таблице) и ФИО на листочке
- Написать краткий ответ на вопрос
- Дождаться окончания теста

Тест.

## **Определение абсолютной стойкости через предикат**

- Положить телефон экраном вниз справа от себя
- Не разговаривать с соседями
- Не пользоваться конспектами и электронными устройствами
- Написать номер (по таблице) и ФИО на листочке
- Написать краткий ответ на вопрос
- Дождаться окончания теста