Прикладная Криптография: Симметричные криптосистемы nonce CPA, det-CPA

Макаров Артём

МИФИ 2025

Тест.

4 вопроса.

Краткие ответы.

- Положить телефон экраном вниз справа от себя
- Не разговаривать с соседями
- Не пользоваться конспектами и электронными устройствами
- Написать номер (по таблице) и ФИО на листочке
- Написать краткий ответ на вопрос
- Дождаться окончания теста

Тест.

1 – режим **CTR**, как следует выбирать ключ?

2 – режим **CBC**, как следует выбирать IV?

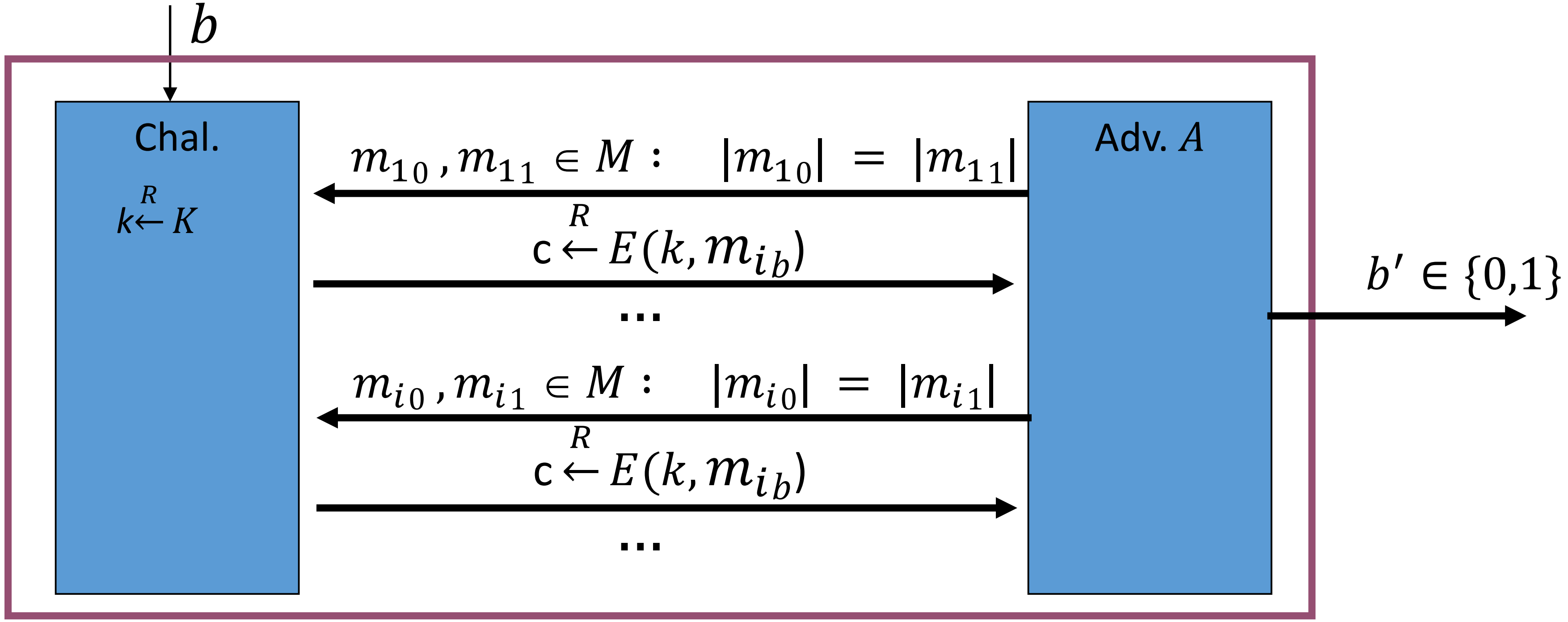
3 – режим **OFB**, нужно ли использовать дополнение ОТ? Если да, то какое?

4 – в блочном шифре «сломалась» процедура шифрования. Доступна только процедура расшифрования. Можно ли построить с помощью такого шифра CPA стойкий шифр? Почему / как именно?

TIME IS UP

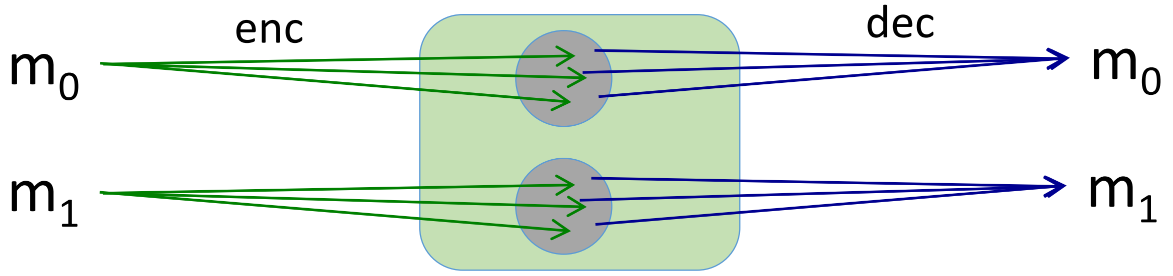
CPA

- Шифр называется CPA стойким, если для любого противника A величина $CPA_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| \leq \epsilon, \epsilon$ – пренебрежимо малая величина.
- Детерминированный шифр не может быть CPA стойким



Вероятностное шифрование

- Как показано ранее, для CPA стойкости необходима «рандомизация» шифртекстов
- Подход 1 – рандомизация функции зашифрования



  - Зашифрование одного и того же сообщения даст разные шифртексты
  - Необходим внешний источник энтропии
  - Шифртексты всегда длиннее открытых текстов, так как необходимо также передать энтропию, необходимую для восстановления открытого текста

Вероятностное шифрование

- Подход 2 – использование уникальных, неповторяющихся величин (nonce)
- $m \to E(k, *, n) \to c \to D(k, *, n) \to m$
- Nonce должна быть уникально для каждого сообщения, пара (nonce, key) не должна повторяться при жизни ключа.
- В качестве nonce можно использовать счётчик, строго возрастающую последовательность, случайные величины (большой длины)
- Nonce может не пересылаться в явном виде, обе стороны могут синхронно обновлять его.
- Не любое использование nonce даёт стойкие схемы!

CBC vs CTR

$$CPA_{adv}[A, \mathrm{E}_{ctr}] \leq \frac{4Q^2 l}{N} + 2 * PRF_{adv}[B, F]$$

$$CPA_{adv}[A, \mathrm{E}_{cbc}] \leq \frac{2Q^2 l^2}{N} + 2 * BC_{adv}[B, \mathrm{E}]$$

- CTR режим имеет большую стойкость для фиксированных параметров и блочного шифра
- CTR может использоваться в параллельном режиме, так как зашифрование блоков производит независимо
- Для коротких сообщений CTR может иметь длины шифртекстов значительно короче, чем CBC, так как нет необходимости в дополнении до длины блока.
- CTR использует только функцию зашифрования блочного шифра.
- **IV должны быть случайными!**

Nonce based encryption

- Для всех рассмотренных ранее схем CPA шифрования длина результирующего шифртекста была больше длины открытых тестов из-за добавления вектора инициализации.
- Длина вектора инициализации не зависит от длины сообщения
- Для больших сообщений не является проблемой (добавление 16 байт к мегабайту несущественно)
- Может являться проблемой для небольших шифтекстов, сравнимых с длинной блока (добавление 16 байт к сообщению длинны меньше 16 байт)
- Возможно ли уйти от случайных векторов инициализации?

Nonce based encryption

- Первый подход – хранить некоторое состояние на стороне получателя и отправителя, которое явно или не явно синхронизируется перед процедурой шифрования. Затем обновлять эти значения после приёма-отправления сообщений.
  - Необходима полная синхронизация, при рассинхронизации – необходимо заново проводить процедуру синхронизации

- Второй подход – использование nonce. Вместо использования внутренних состояний использовать уникальные неповторяющиеся величины (nonce).

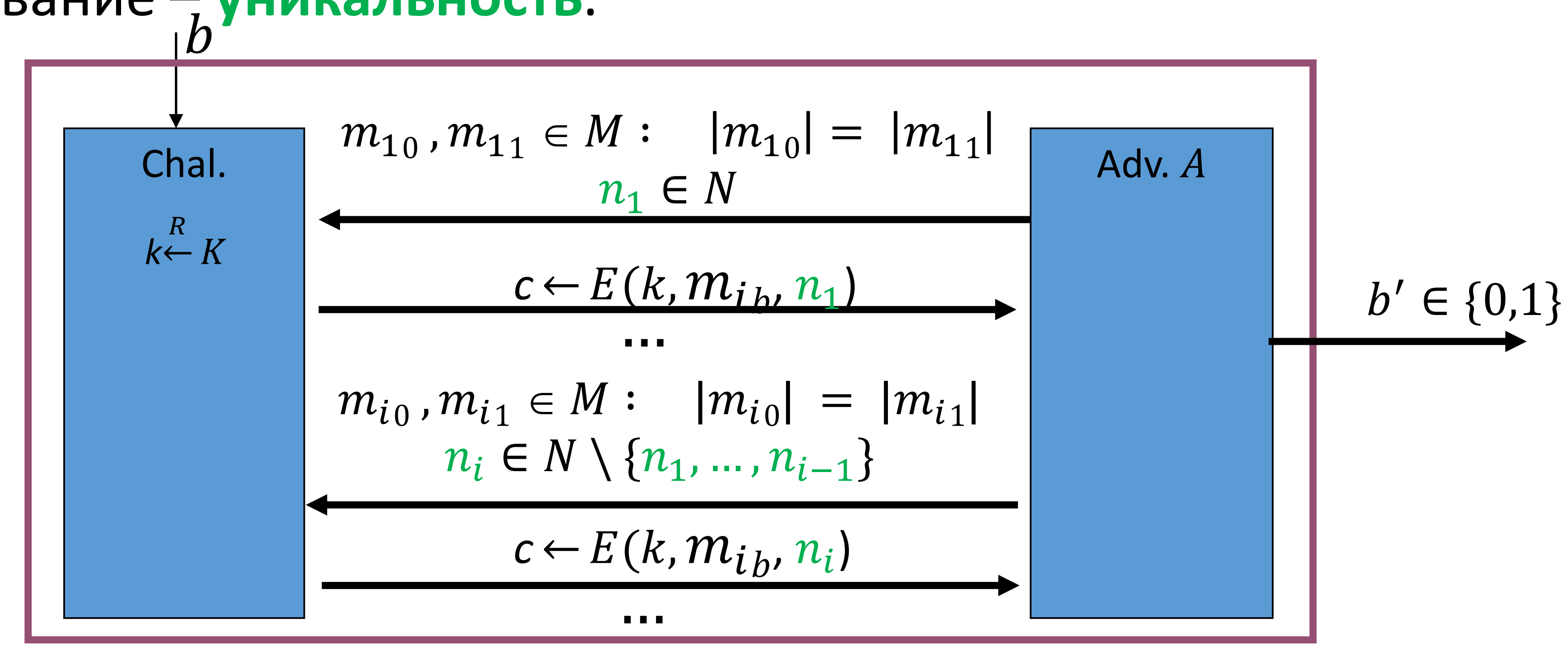
Nonce based encryption

Для $k \in K, m \in M, c \in C, n \in N$ шифром на основе nonce называется пара алгоритмов $\mathrm{E} = (E, D)$ на (K, M, C, N):

- Зашифрование $c = E(k, m, n)$
- Расшифрование $m = D(k, c, n)$
- Корректность $D(k, (E(k, m, n), n) = m$

Nonce based CPA

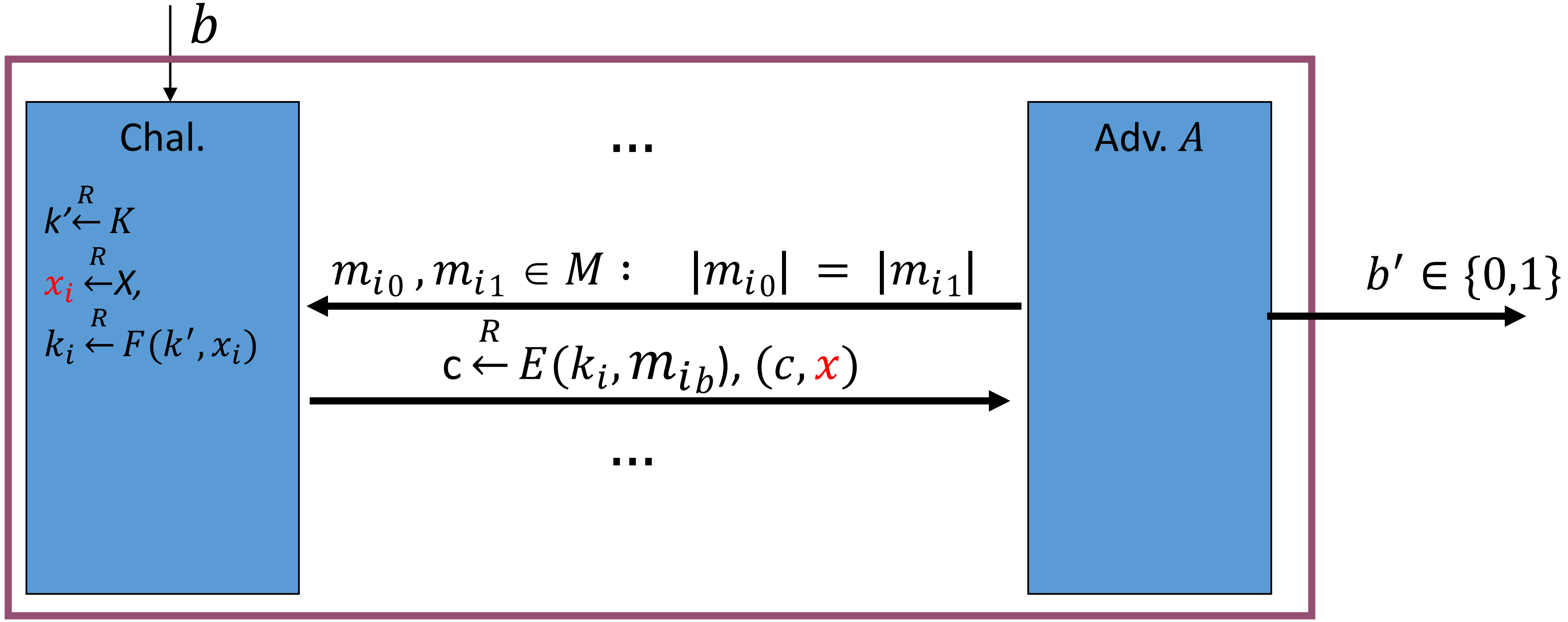
- Шифр на основе nonce называется nCPA стойким, если для любого противника A величина $nCPA_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| \leq \epsilon, \epsilon$ – пренебрежимо малая величина.
- Заметим, что противник полностью выбирает nonce. Единственное требование – **уникальность**.



Вспоминаем гибридную конструкцию

- Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – семантически стойкий шифр на (K, M, C). Попробуем построить CPA стойкий шифр E' на $(K', M, X \times C)$ используя PRF F на (K', X, K).
- Ключом k' для E' будет ключ для PRF F. Для шифрования сообщения m выбирается случайный вход для PRF - x. Далее вычисляется ключ для E $k \leftarrow F(k', x)$. Затем m шифруется с использование ключа k: $c \leftarrow E(k, m)$. Шифртекстом является пара $\mathrm{c}' = (c, x)$.
- $E(k', m) = [x \leftarrow^R X, k \leftarrow F(k', x), c \leftarrow E(k, m), \mathrm{output}\ c' = (x, c)]$
- $D(k', c') = [k \leftarrow F(k', x), m \leftarrow D(k, c), \mathrm{output}\ m]$
- Называется – **гибридная конструкция**.

Игра на CPA стойкость гибридной конструкции



Стойкость гибридной конструкции

Теорема 7.1. Если F – стойкая PRF, E – семантически стойкий шифр, $N = |X|$ - сверхполиномиальная, то введённый ранее шифр E' - CPA стойкий шифр. В частности для любого противника в CPA игре, делающим не более Q запросов к претенденту существует противник B_F в игре на стойкость PRF и противник B_E в игре на семантическую стойкость, причём

$$CPA_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq \frac{Q^2}{N} + 2 * PRF_{adv}[B_F, F] + Q * SS_{adv}[B_E, \mathrm{E}]$$

Гибридная конструкция на основе nonce

Модифицируем гибридную конструкцию, заменив случайный элемент $x \in X$ на nonce.

Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – семантически стойкий шифр на (K, M, C).

Для ключа $k' \in K, m \in M, c \in C$ $x \in X$ определим $E'(k', m, x) = E(k, m), k = F(k', x)$

- $E(k', m) = [x \leftarrow X, k \leftarrow F(k', x), c \leftarrow E(k, m), \text{output } (x, c)]$
- $D(k', c') = [k \leftarrow F(k', x), m \leftarrow D(k, c), \text{output } m]$

Детерминированная гибридная конструкция

Теорема 8.1. Если F – стойкая PRF, E – семантически стойкий шифр, $N = |X|$ - сверхполиномиальная, то введённый ранее шифр E' - nCPA стойкий шифр. В частности для любого противника в nCPA игре, делающим не более Q запросов к претенденту существует противник B_F в игре на стойкость PRF и противник B_E в игре на семантическую стойкость, причём

$$nCPA_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq 2 * PRF_{adv}[B_F, F] + Q * SS_{adv}[B_E, \mathrm{E}]$$

⊳Аналогично **Теореме 7.1**, без необходимости добавления слагаемого Q^2/N, т.к. коллизии не возможно из за требования уникальности nonce⊲

Вспоминаем рандомизированный CTR режим

Рассмотрим ещё один способ построения – на основе CTR режима.

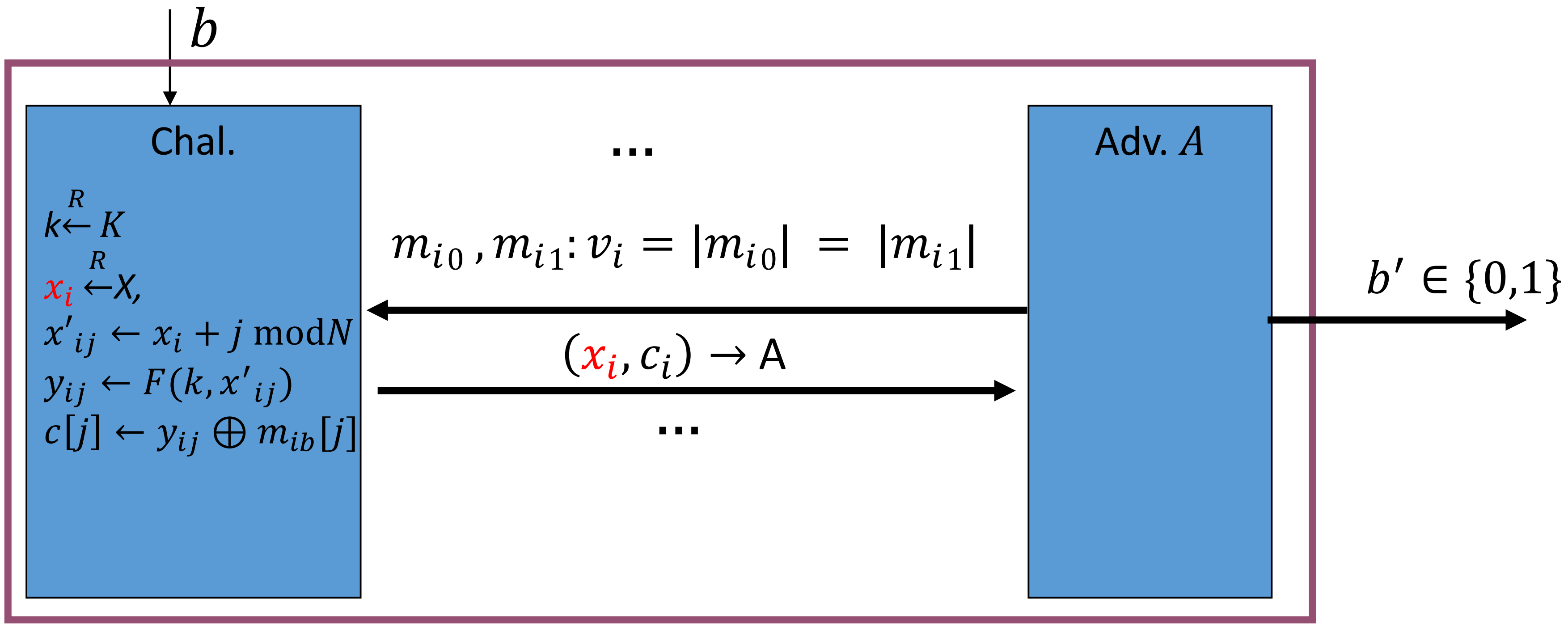
Пусть F PRF на (K, X, Y). Пусть $X = \{0, \ldots N-1\}$, $Y = \{0,1\}^n$. Для полиномиально ограниченной величины $l \geq 1$ определим шифр $\mathrm{E} = (E, D)$ на $(K, Y^{\leq l}, X \times Y^{\leq l})$ следующим образом:

Для $k \in K, m \in Y^{\leq l}, v = |m| = |\mathrm{c}|$, $\quad c' = (x, c) \in X \times Y^{\leq l}$

$E(k, m) :=$
- $x \xleftarrow{R} \mathcal{X}$
- compute $c \in \mathcal{Y}^v$ as follows:
  - for $j \leftarrow 0$ to $v-1$ do
    - $c[j] \leftarrow F(k, x + j \bmod N) \oplus m[j]$
- output (x, c);

$D(k, c') :=$
- compute $m \in \mathcal{Y}^v$ as follows:
  - for $j \leftarrow 0$ to $v-1$ do
    - $m[j] \leftarrow F(k, x + j \bmod N) \oplus c[j]$
- output m.

Игра на CPA стойкость рандомизированного CTR режима



Стойкость рандомизированного CTR режима

Теорема 7.2. Если F – стойкая PRF, N - сверхполиномиальная, l – полиномиально ограниченная, то введённый ранее шифр E' - CPA стойкий шифр. В частности для любого противника в CPA игре, делающим не более Q запросов к претенденту существует противник B в игре на стойкость PRF причём

$$CPA_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq \frac{4Q^2 l}{N} + 2 * PRF_{adv}[B, F]$$

Nonce based CTR

- Можно ли построить CTR режим, заменив случайный элемент на nonce?
- Нет! В отличии от гибридной конструкции, где нам была важна уникальность nonce, здесь нам важна не только уникальность «начальных состояний», но и уникальность «отрезков». (См **лемму** из **Теоремы 7.2**).
- Иными словами, если заменить $x_i \in X$ на nonce, то противник может выбрать такие $x_i \neq x_{i'}$: $\{x_i, \dots, x_i + l - 1\} \cap \{x_{i'}, \dots, x_{i'} + l - 1\} \neq \emptyset$, т.е. могут совпасть счётчики на каком то блоке для различных сообщений => имеем двухразовый блокнот.

Nonce based CTR

- Введём nonce по другому. Пусть $l|N$. Пусть $n \in \{0, \dots, N\backslash l - 1\}$ – nonce, $x = nl$. Т.е. на вход PRF подаётся не nonce, а nonce умноженная на максимально допустимую длину сообщения в блоках.
- Т.е. два различных nonce n_1 и n_2 дают два входа для PRF $x_1 = n_1 l, x_2 = n_2 l$ в интервалах $\{x_1, \dots, x_1 + l - 1\}$ и $\{x_2, \dots, x_2 + l - 1\}$, которые не пересекаются.

Nonce based CTR

Теорема 8.2. Если F – стойкая PRF, N - сверхполиномиальная, l – полиномиально ограниченная, то введённый ранее шифр E' - CPA стойкий шифр. В частности для любого противника в nCPA игре, делающим не более Q запросов к претенденту существует противник B в игре на стойкость PRF причём

$$nCPA_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq 2 * PRF_{adv}[B, F]$$

⊳Аналогично **Теореме 7.2**, без необходимости добавления слагаемого $\frac{4Q^2 l}{N}$, т.к. коллизии не возможно из за требования уникальности nonce⊲

CBC

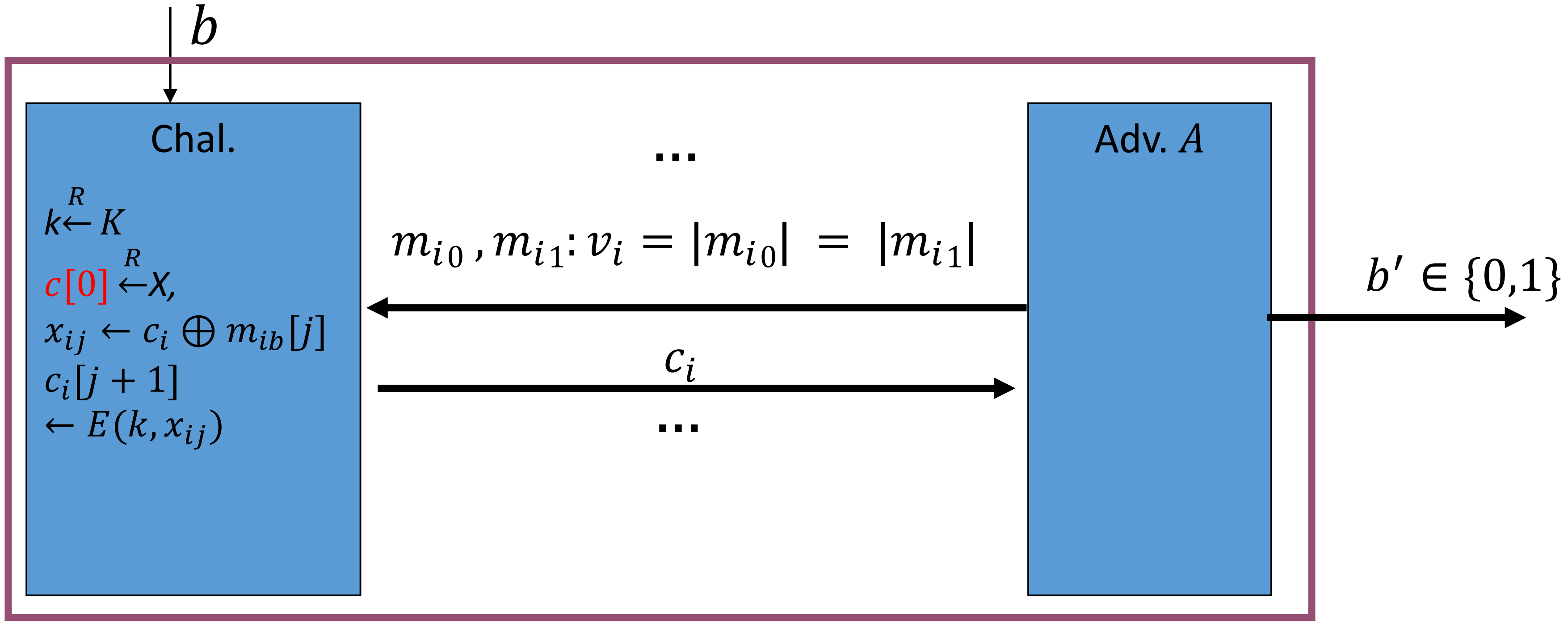
Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ блочный шифр на (K, X) где $X = \{0,1\}^n, N = |X| = 2^n$. Для полиномиально ограниченной величины $l \geq 1$ определим шифр $\mathrm{E} = (E', D')$ на $(K, X^{\leq l}, X^{\leq l+1} \backslash \mathrm{X}^0)$. Зашифрование и расшифрование определены следующим образом:

Для $k \in K, m \in M, v = |m| = |c| - 1$

$E'(k, m) :=$
  compute $c \in \mathcal{X}^{v+1}$ as follows:
    $c[0] \xleftarrow{\mathrm{R}} \mathcal{X}$
    for $j \leftarrow 0$ to $v - 1$ do
      $c[j+1] \leftarrow E(k,\ c[j] \oplus m[j])$
  output c;

$D'(k, c) :=$
  compute $m \in \mathcal{X}^v$ as follows:
    for $j \leftarrow 0$ to $v - 1$ do
      $m[j] \leftarrow D(k,\ c[j+1]) \oplus c[j]$
  output m.

Игра на CPA стойкость CBC



CBC

Теорема 7.3. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – семантически стойкий шифр на (K, C), $N = |X|$ – сверхполиномиальная, $l \geq 1$ – полиномиально ограниченная. Тогда введенный ранее CBC шифр является CPA стойким, причём для любого противника A в игре на CPA стойкость, делающим не более Q запросов к оракулу, существует противник B в игре на стойкость блочных шифров, при чём

$$CPA_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq \frac{2Q^2l^2}{N} + 2 * BC_{adv}[B, \mathrm{E}]$$

Nonce based CBC

- Можно ли построить CBC режим, заменив случайный элемент на nonce?
- Нет! Противник может сделать 2 запроса(m_{10}, m_{11}, n_1), (m_{20}, m_{21}, n_2): $m_{10} = n_1 \neq n_2 = m_{20}, m_{11} = m_{21}$. В эксперименте 0 шифртексты будут одинаковые, в эксперименте 1 – разными.

Nonce based CBC

- Идея – заменить случайный IV на псевдослучайный, полученный из nonce с помощью PRF.
- Пусть F – PRF на (K', N', X), где X – множество блоков блочного шифра $\mathrm{E} = (E, D)$, отпрядённого на (K, X).
- Ключом является элемент из множества $K \times K'$, алгоритм зашифрования и расшифрования отличаются от CBC только в получении $n[0] = F(k', n)$.

CBC

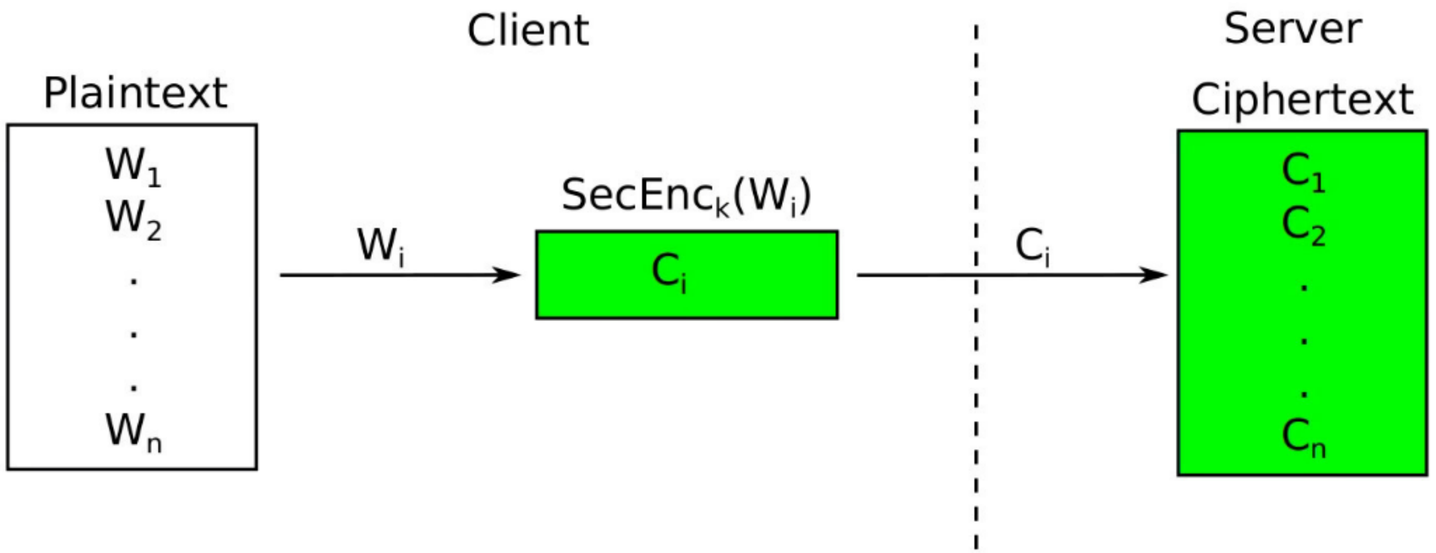
Теорема 8.3. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – семантически стойкий шифр на (K, C), $N = |X|$ - сверхполиномиальная, $l \geq 1$ – полиномиально ограниченная. Тогда введенный ранее CBC шифр является CPA стойким, причём для любого противника A в игре на nCPA стойкость, делающим не более Q запросов к оракулу, существует противник B в игре на стойкость блочных шифров, и B_F в игре на стойкость PRF, при чём

$$nCPA_{adv}[A, \mathrm{E}'] \leq \frac{2Q^2 l^2}{N} + 2 * BC_{adv}[B, \mathrm{E}] + 2 * PRF[B_F, \mathrm{E}]$$

⊳Аналогично **Теореме 7.3**, но с учётом использования не только блочного шифра, но и PRF⊲

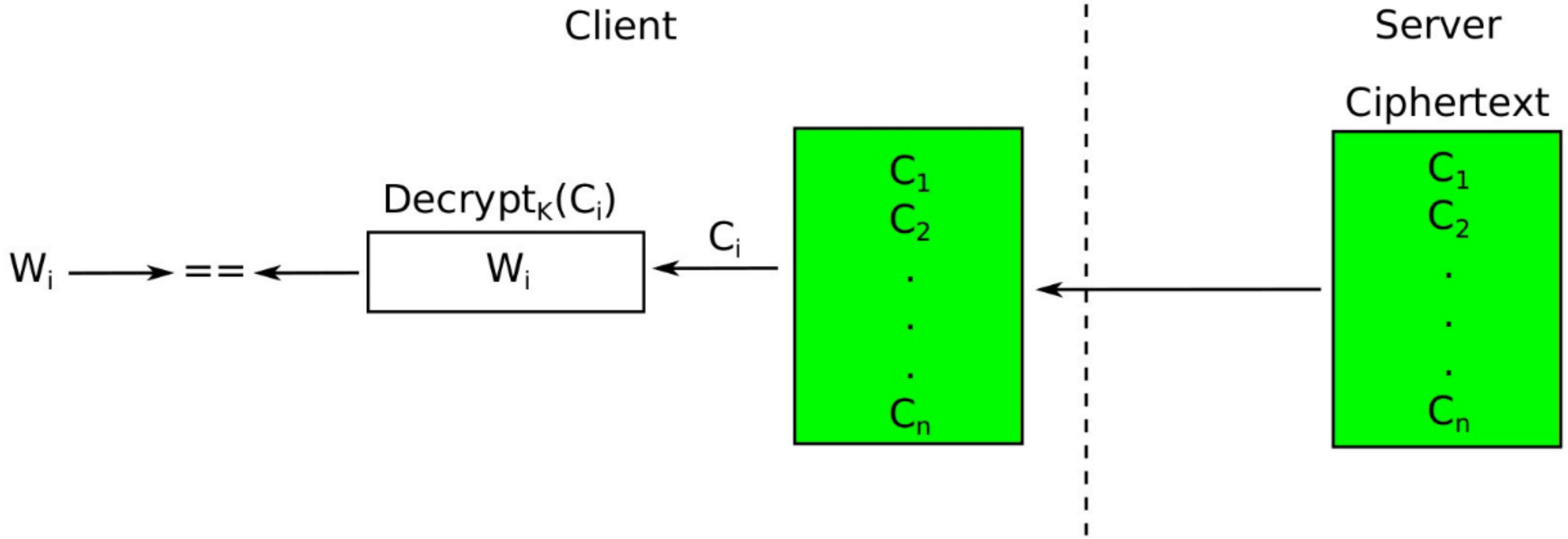
Поиск в базе данных

- Рассмотрим пример – хранение шифрованных файлов на удалённом сервере.
- При использовании CPA стойкого шифра имеем:



Поиск в базе данных

- Проблема – необходимость выкачивания всей информации для осуществления поиска (выборки)



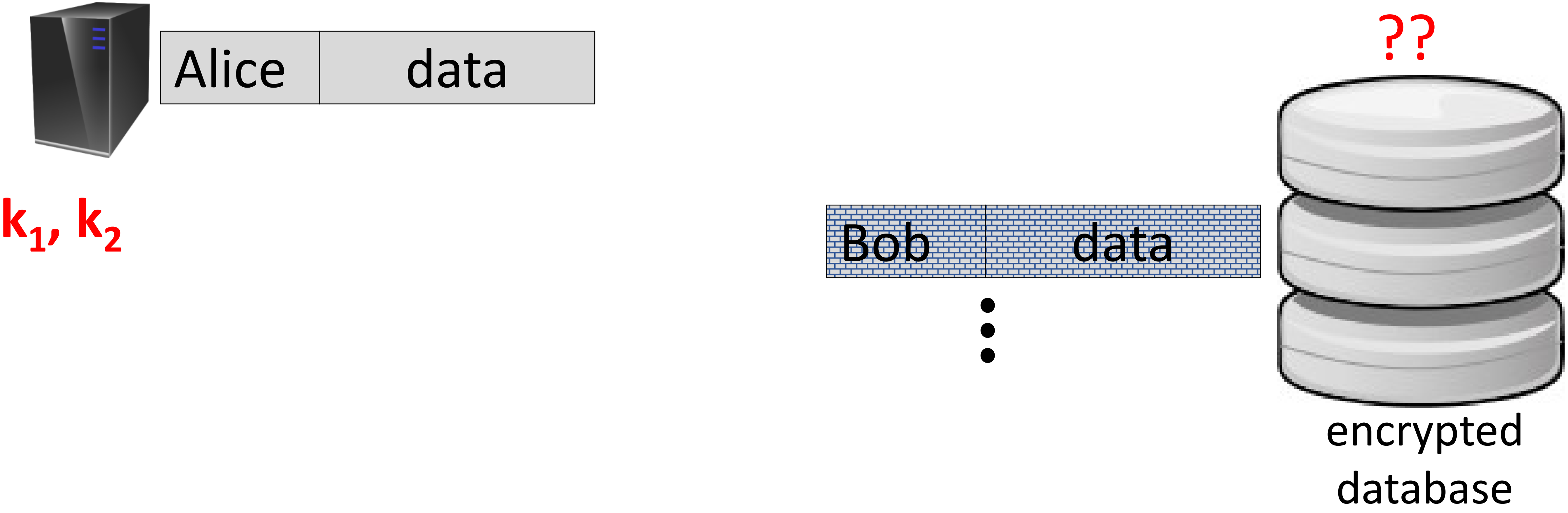
Детерминированное шифрование

Рандомизированное шифрование не позволяет искать на стороне сервера. Хотелось бы реализовать такой сценарий:

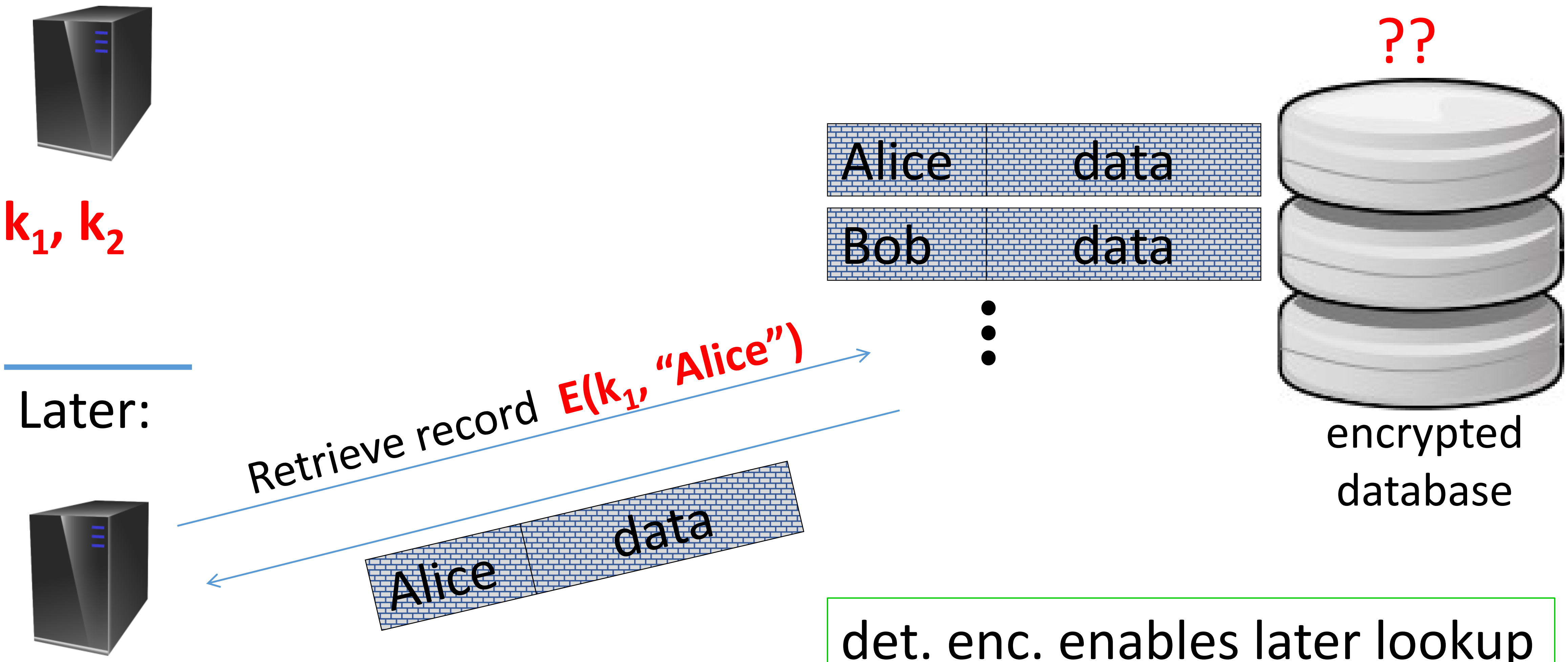
- Пользователь отправляет зашифрованный файл на сервер, приписывая заголовок. Сервер записывает шифртекст без расшифровки
- Для получения файла из базы данных пользователь отправляет зашифрованный (тем же ключом) заголовок и получает шифртекст, который потом расшифровывает.

Данная схема возможна только при детерминированном шифровании

The need for det. Encryption (no nonce)



The need for det. Encryption   (no nonce)



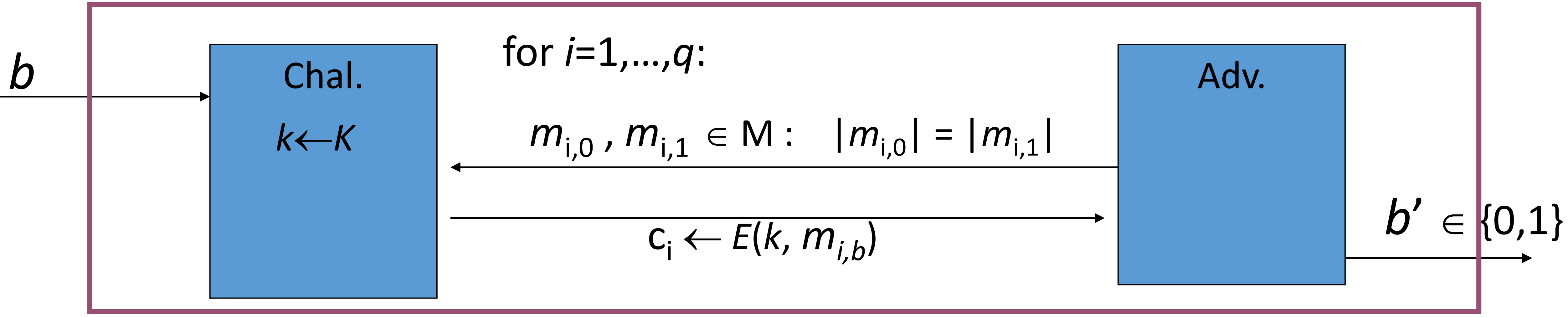
det. enc. enables later lookup

Детерминированное шифрование

- Проблема – при детерминированном шифровании противник может проверять заголовки на равенство, т.к. одинаковые заголовки дают одинаковые зашифрования заголовков.
- Аналогично для шифртекстов. Если множество шифртекстов мало (например шифруются только слова, длины не более 6 символов), и распределение неравномерное, противник может провести частотный анализ и полностью расшифровать все шифртексты.
- Нужно новое определение. Основная идея – новое требование: сообщения должны быть уникальными для фиксированного ключа.
  - Уникальный идентификаторы, которые не повторяются (номер в очереди, номер передаваемого пакета, уникальный для сессии id пользователя, индекс записи в б.д. и.т.д.)
  - Сообщения выбранные случайно из большого множества (например ключи)

Deterministic CPA security

Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ шифр на (K, M, C). Введём игру на CPA стойкость, в которой противник **запрашивает только уникальные сообщения**, т.е. $m_{1,0}, \ldots, m_{q,0}$ и $m_{1,1}, \ldots, m_{q,1}$ различны.

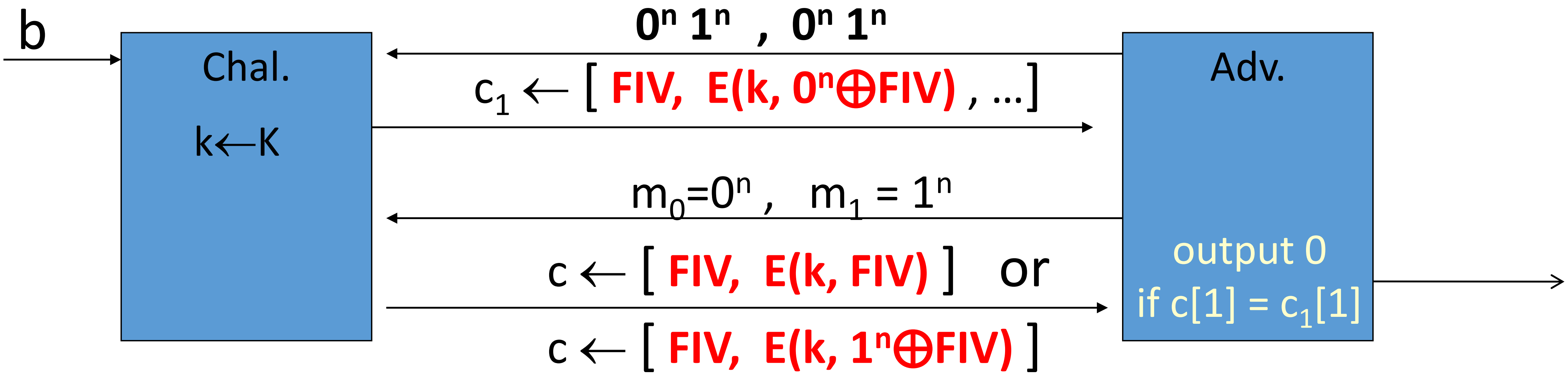


$\mathrm{E} = (E, D)$, определённый на (K, M, C), называется детерминированно CPA стойким, если $\forall A$: A – эффективный алгоритм в игре на стойкость Deterministic CPA величина $dCPA_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| \leq \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая величина.

Фиксированный IV в CBC

Фиксированный IV в CBC не даёт det-CPA стойкость!

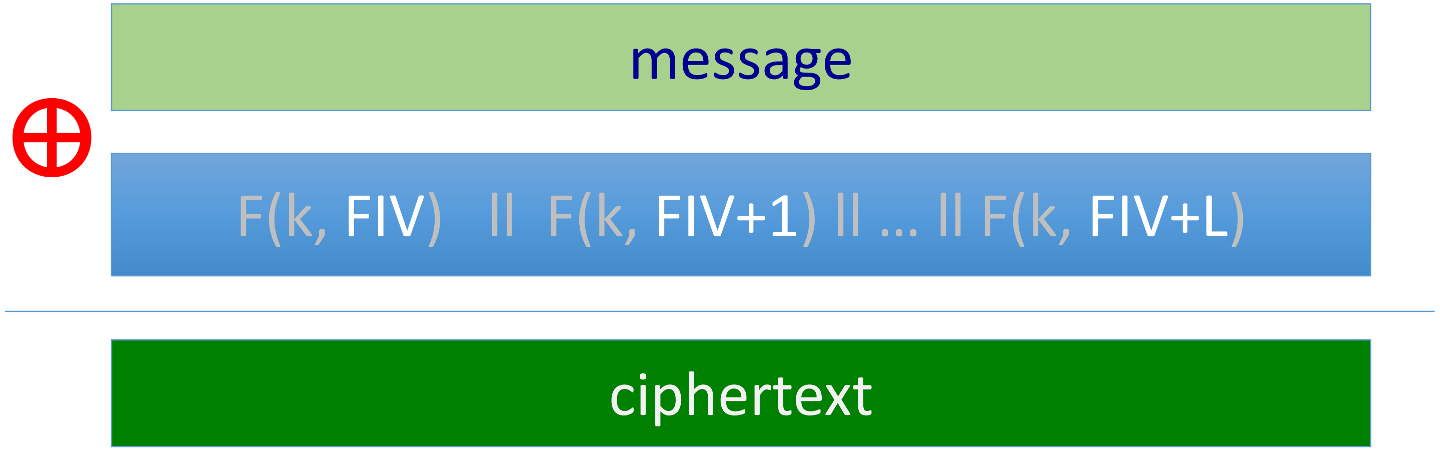
Пусть $E\colon K \times \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^n$ стойкая PRP в CBC

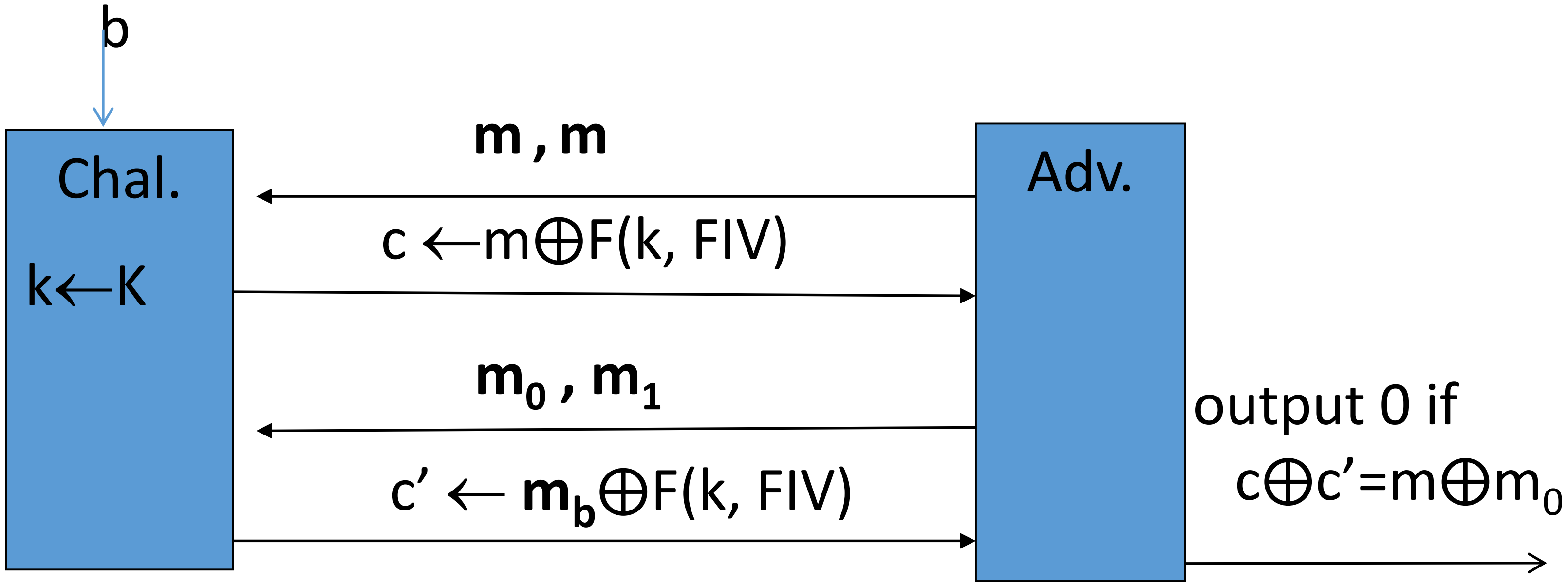


Фиксированный IV в CTR

Фиксировванный IV в CTR не даёт det-CPA стойкость!

Пусть $F\colon K \times \{0,1\}^n \longrightarrow \{0,1\}^n$ стойкая PRF в CTR





Синтетический IV

Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – CPA стойкий шифр на (K, M, C), $E = (k, m; r)$ – функция зашифрования, использующая случайный вход $r \in_R R$. Пусть F – стойкая PRF на (K', M, R). Тогда детерминированный шифр $\mathrm{E}' = (E', D')$ на $(K \times K', M, C)$:

$$E'\big((k, k'), m\big) = E\big(k, m; F(k', m)\big),$$
$$D'\big((k, k'), c\big) = D(k, c)$$

Называется детерминированным шифром, использующем синтетический IV.

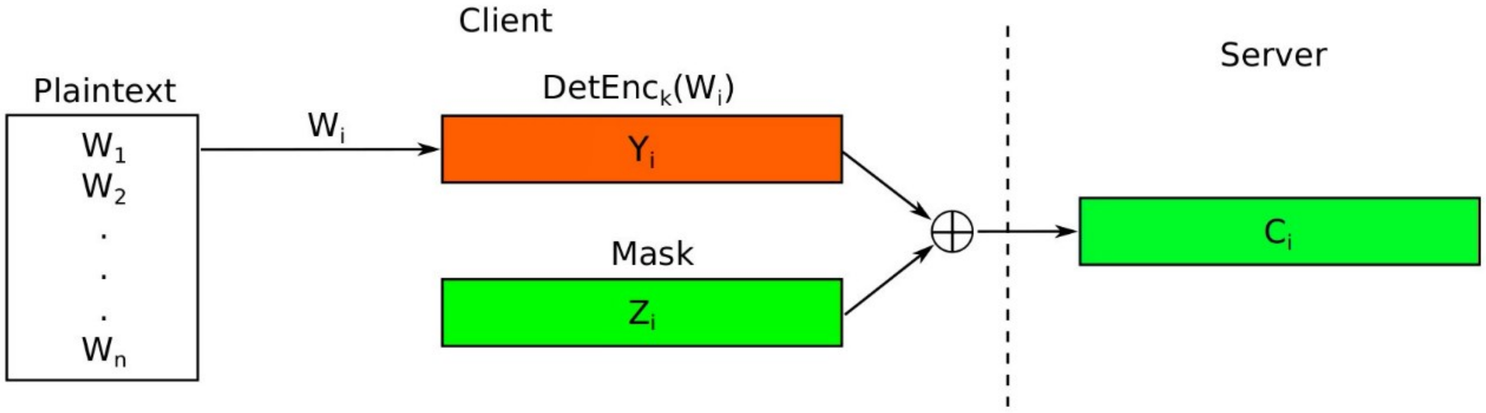
NB: конструкция похожа на использование nonce в CTR и CBC, но случайность заменяется не шифрованием уникального nonce, а шифрованием уникального сообщения (сообщения уникальны для det-CPA).

Теорема 8.4. Описанный выше шифр является det-CPA стойким.

⊳без доказательства, или доказать самим⊲

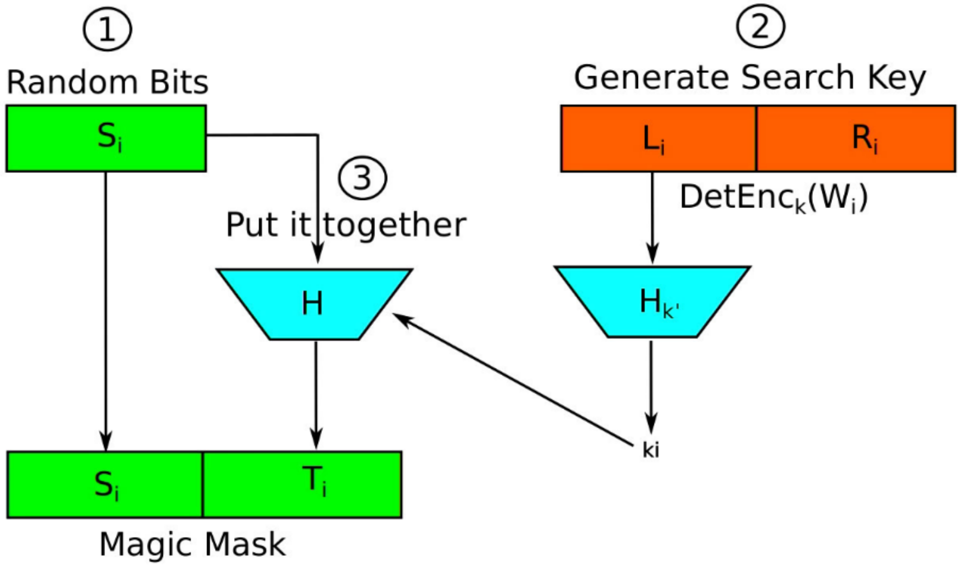
Поиск с использованием маски

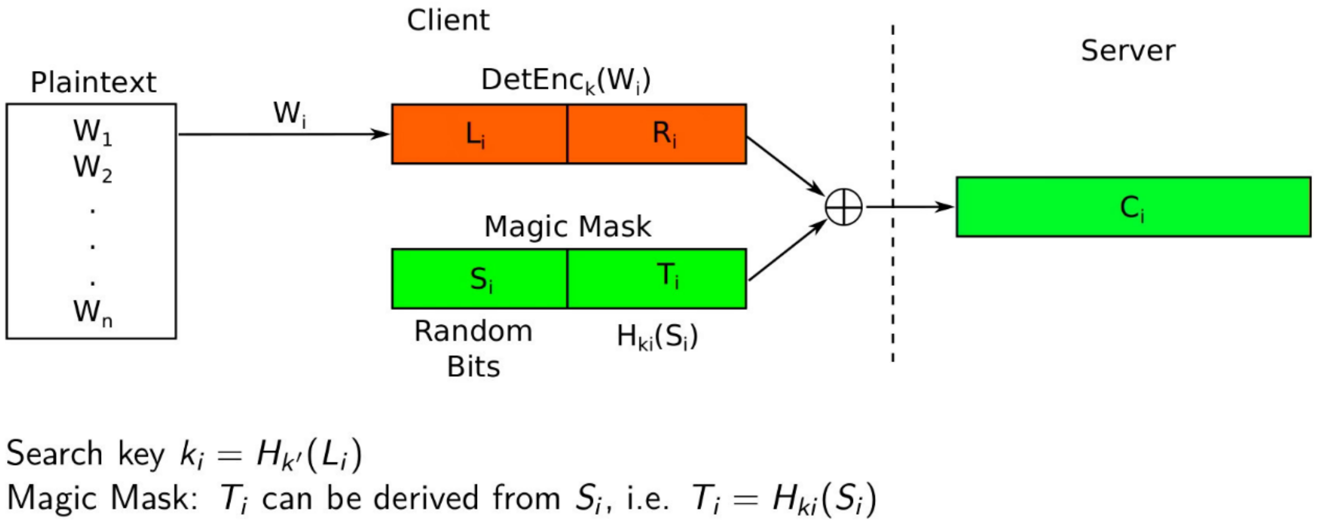
- Основания идея – после детерминированного шифрования накладывать на шифртекст некоторую маску, которая может быть использована для поиска



Поиск с использованием маски

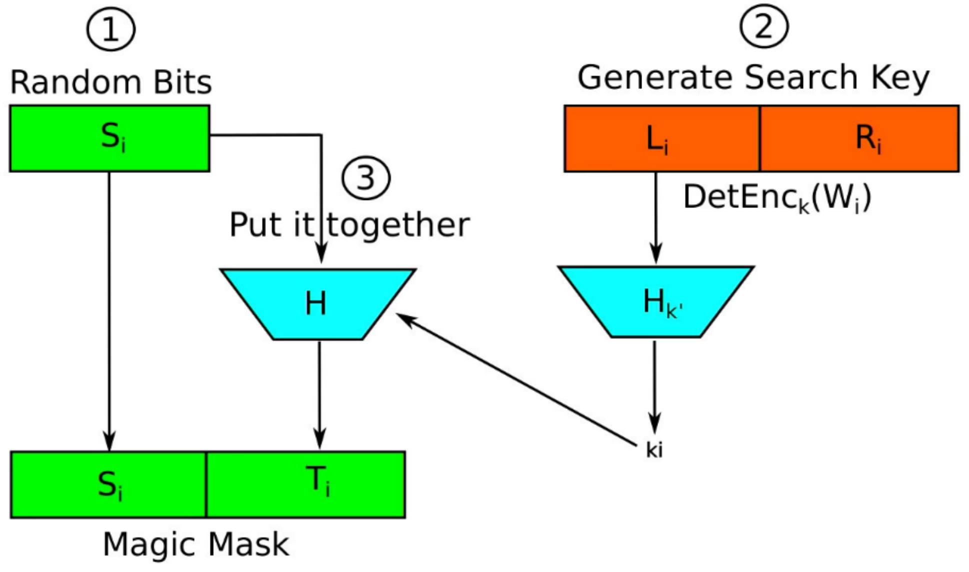
- Пример – Song, Wagner, Perrig «Practical Techniques for Searches on Encrypted Data». $H: K \times I \to O$ – PRF.

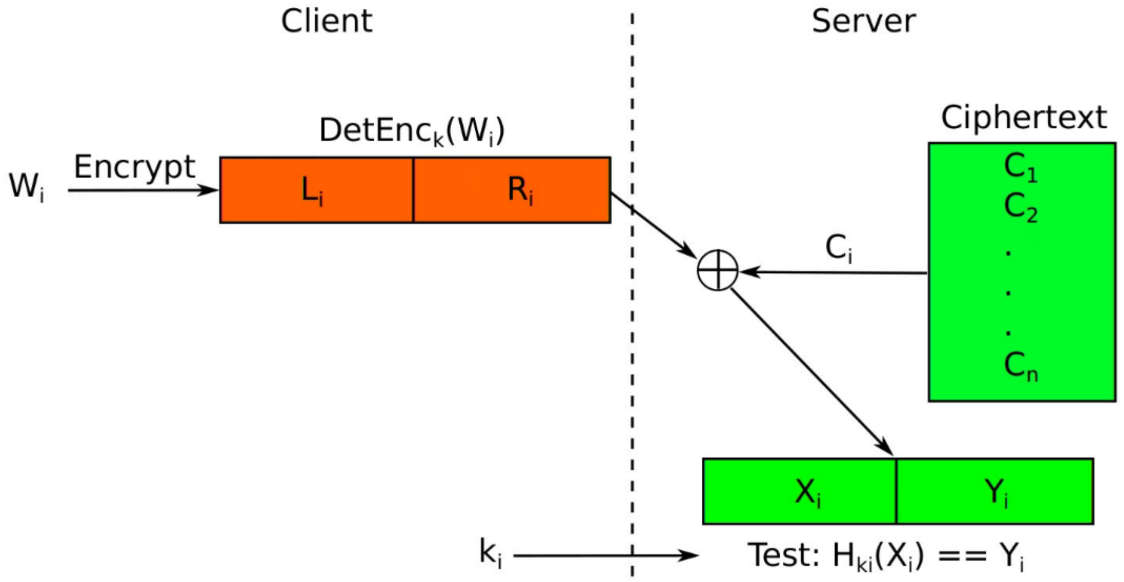




Поиск с использованием маски

- Пример – Song, Wagner, Perrig «Practical Techniques for Searches on Encrypted Data». $H: K \times I \to O$ – PRF.





Выводы

- Шифры решают задачу конфиденциальности информации при пассивном противнике (противнике не влияющем на передаваемые сообщения)
- Абсолютная стойкость – достижимая, но не удобная для построения шифров модель
- Ослабленная версия абсолютной стойкости – семантическая стойкость (одноразовая семантическая стойкость) – используется для построения и анализа шифров при однократном использовании ключа
- При шифровании нескольких сообщений используется CPA стойкость (многоразовая семантическая стойкость), позволяющая противнику получать зашифрования нескольких сообщений на одном ключе

Выводы

- Основные примитивы – псевдослучайные генераторы, поточные шифры, блочные шифры.
- Для построения семантических и CPA стойких шифров из блочных шифров используют режимы шифрования.
- При использовании режимов шифрования, требующих случайный IV, он должен быть случайным!
- Шифры не должны использоваться для обеспечения целостности или аутентичности!
- Для ряда приложений могут использоваться и другие модели стойкости шифров.

Тест.

1 – режим **CFB**, как следует выбирать ключ?
2 – режим **CBC**, как следует выбирать IV?
3 – режим **CBC**, можно ли для шифрования сообщения m_i в качестве IV использовать последний блок шт. предыдущего сообщения m_{i-1}? **Почему**?
4 – Режим **CTR**, можно ли для шифрования двух различных сообщений одинаковой длинны использовать одинаковое начальное заполнение счётчика (под счётчиком понимается вектор длинны равно размеру блок, который инкрементируется для каждого блока О.Т.)? **Почему**?

Тест.

Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – CBC шифр для сообщений **произвольной длинны**, использующий некоторый блочный шифр $E_B: K \times X \to X$ с размером блока N бит.

1. Как следует выбрать ключ для шифра E?
2. Как следует выбрать и передавать IV?
3. Какой ожидаемый размер ш.т. при шифровании сообщения размера $N/2$ бит?
4. Какой ожидаемый размер ш.т. при шифровании сообщения размера $3N$ бит?