Прикладная Криптография: Симметричные криптосистемы Блочные шифры

Макаров Артём

МИФИ 2024

Блочный шифр

Блочный шифр – детерминированный шифр $\mathrm{E} = (E, D)$ определённый на (K, X); $E: K \times X \to X$.

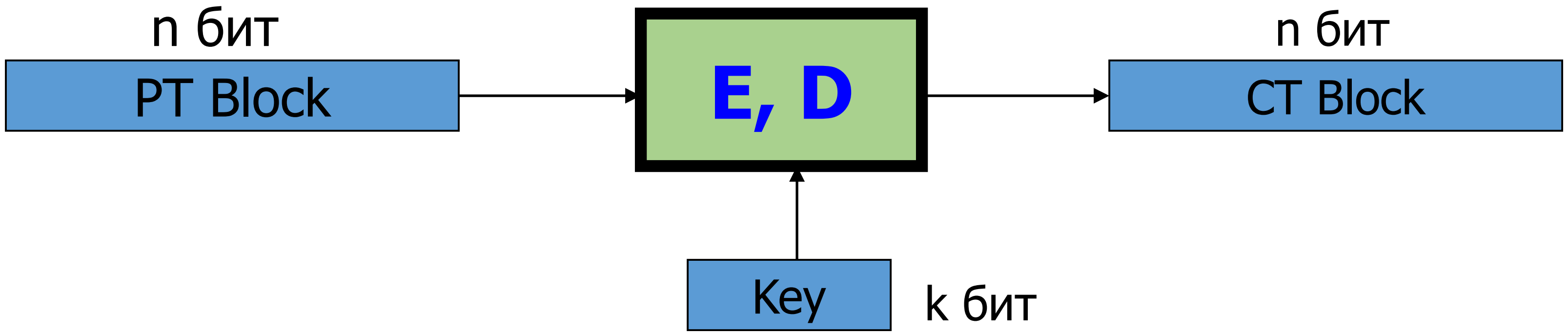
$x \in X$ – блок данных, X – множество блоков, K – множество ключей блочного шифра.

Для ключа $k \in K$ определим функцию $f_k: X \to X: f_k = E(k,*)$. $f_k^{-1}: X \to X: f_k^{-1} = D(k,*)$.

Из свойства корректности имеем f_k, f_k^{-1} - подстановки на множестве X, $f_k f_k^{-1} = e$, где e – тождественная подстановка на X.

Блочный шифр

- Блочные шифры является основным криптографическим примитивом для построения симметричных криптосистем.
- Могут быть использованы для как схем шифрования (в схемах шифрования), так и для обеспечения аутентичности (в кодах аутентичности сообщений.



Понятие стойкости блочного шифры

Для блочных шифров требуют более строгое требование, чем семантическая стойкость: для случайно выбранного ключа $k \in_R K$ перестановка $E_k(*) = f_k$ должна быть псевдослучайной, т.е. выглядеть вычислительно неотличимой от случайной подстановки из $S(X)$.

Идея игры – противник эффективный противник имеет доступ к оракулу, который выбирает функцию f либо случайно, либо использует псевдослучайную функцию на случайном ключе. Противник может получить произвольное число образов функции f на указанных им входах. Задача – различить эксперименты описанной игры.

PRP и PRF

Пусть функция $F: K \times X \to Y$ определена на (K, X, Y).

Тогда F – **псевдослучайная функция (PRF)**, если существует эффективный алгоритм, вычисляющий $F(k, x), k \in K, x \in X$.

Пусть функция $E: K \times X \to X$ определена на (K, X).

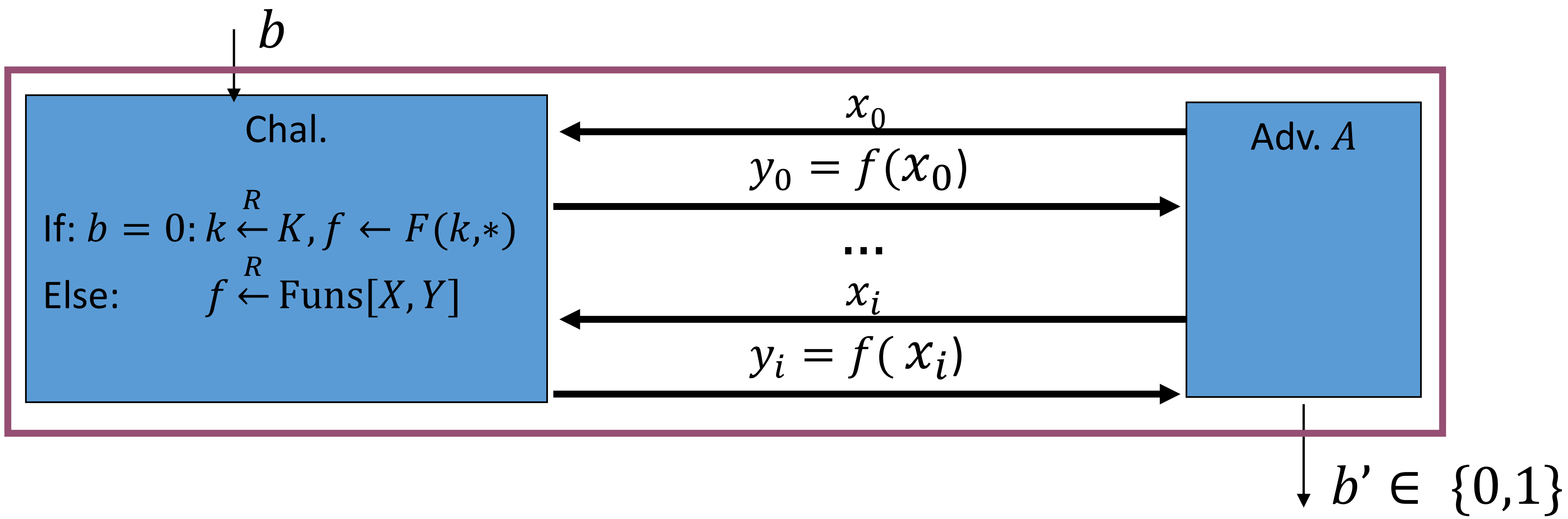
Тогда E – **псевдослучайная подстановка (PRP)**, если

- Существует эффективный алгоритм вычисляющий $E(k, x). k \in K, x \in X$
- Функция $f_k = E(k,*)$ – подстановка.

Игра на стойкость PRF

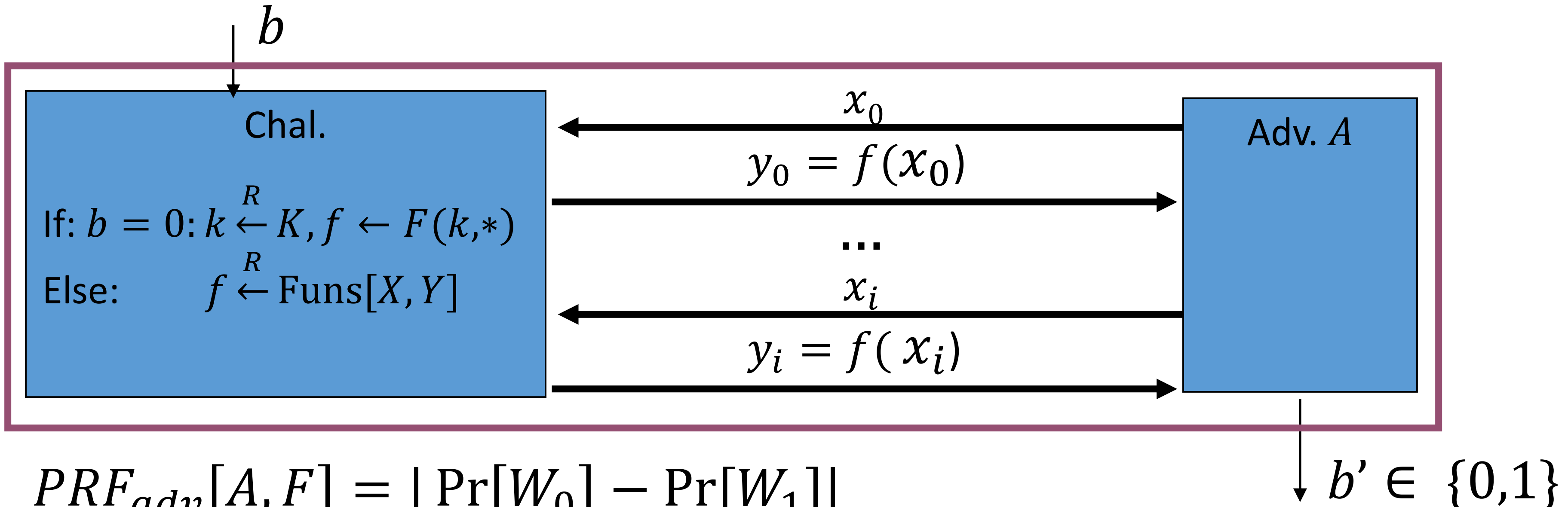
Для $b \in \{0,1\}$ пусть W_b событие того, что b'=1 в эксперименте b.

Тогда преимуществом алгоритма A против псевдослучайной функции F называется величина $PRF_{adv}[A, F\,] = |\,\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$.



Стойкая PRF

PRF F, определённая на (K, X, Y), называется стойкой PRF, если $\forall A$: A – эффективный алгоритм в игре на стойкость PRF величина $PRF_{adv}[A, F] \leq \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая величина.

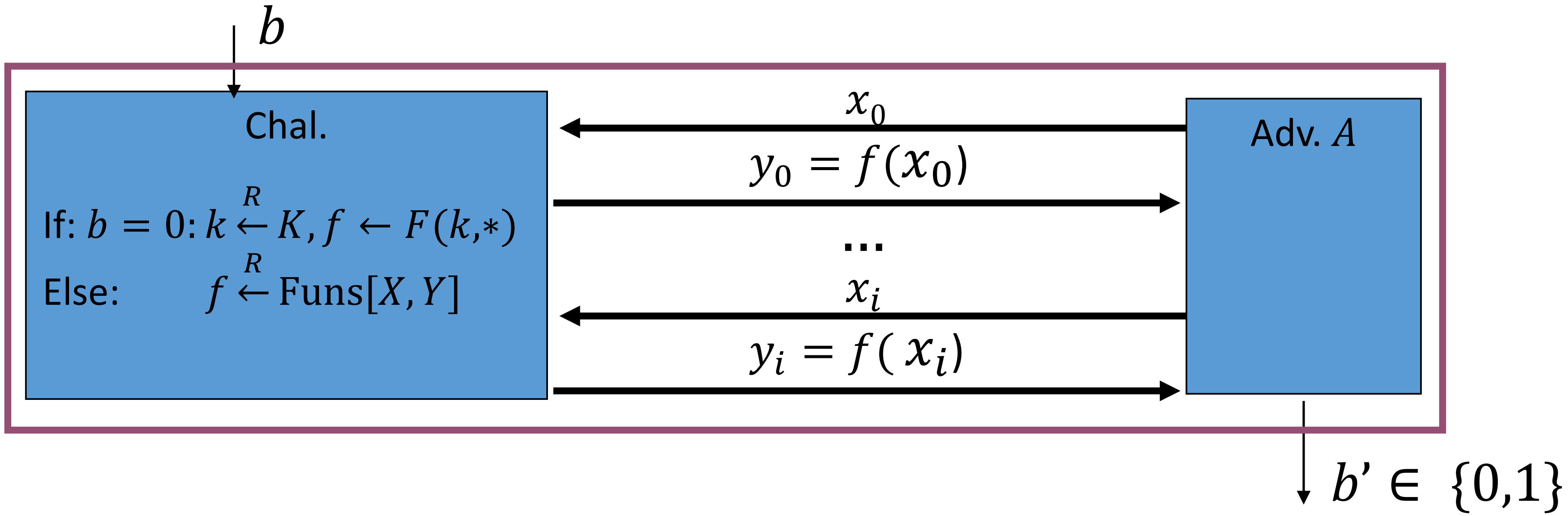


$$PRF_{adv}[A, F] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$$

Игра на стойкость PRF

Альтернативное определение: рассмотри игру на угадывание бита (см лекцию 1) для противника A против PRF F. Определим $PRF^*_{adv}[A,F] = |\Pr[b' = b] - 1/2|$. Тогда F – стойкая PRF, если $\forall A$: A – эффективный алгоритм в игре на угадывание бита в игре на стойкость PRF величина $PRF^*_{adv}[A,F] \le \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая величина.

$PRF_{adv}[A,F] = 2 * PRF^*_{adv}[A,F]$. (см лекцию 1)



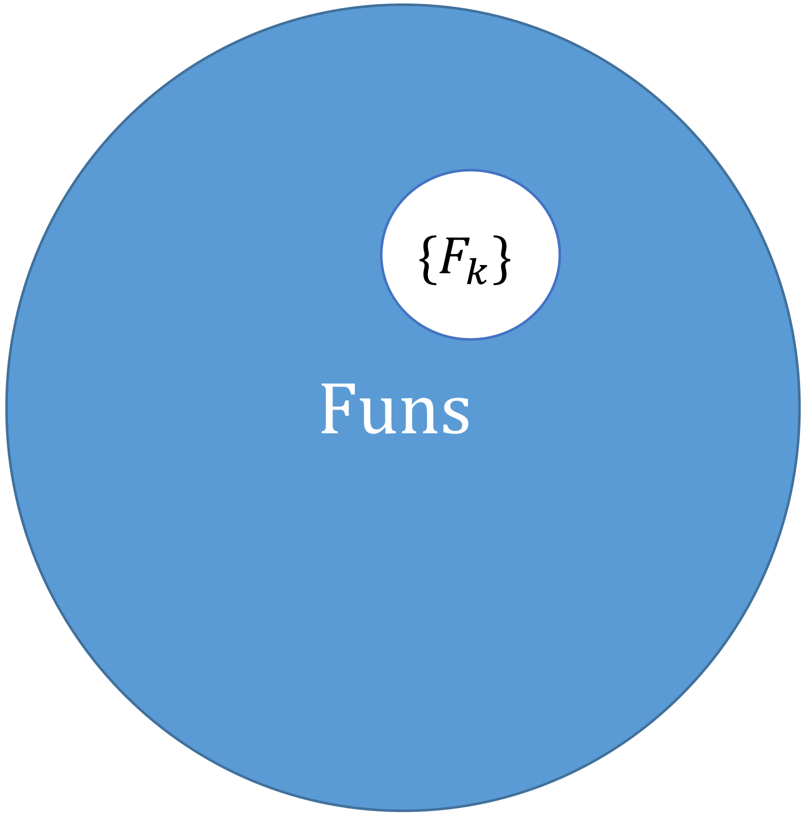
Вычислительная неразличимость

Пусть F – PRF на (K, X, Y)

Рассмотрим множество возможных значений $\{F_k\} \subset \mathrm{Funs}[\mathrm{X}, \mathrm{Y}] = \{f : X \to Y\}$.

Тогда если F – стойкая PRF, то эффективный Противник не может имея доступ к оракулу отличить $\{F_k\}$ от Funs.

$|\{F_k\}| = |K|$, $|\mathrm{Funs}| = |Y|^{|X|}$



Пример

Пусть $F: K \times X \rightarrow \{0,1\}^{128}$ стойкая PRF.

Является $G: K \times X \rightarrow \{0,1\}^{128}$ли стойкой PRF?

$$G(k,x) = \begin{cases} 0^{128}, x = 0 \\ F(k,x), x \neq 0 \end{cases}$$

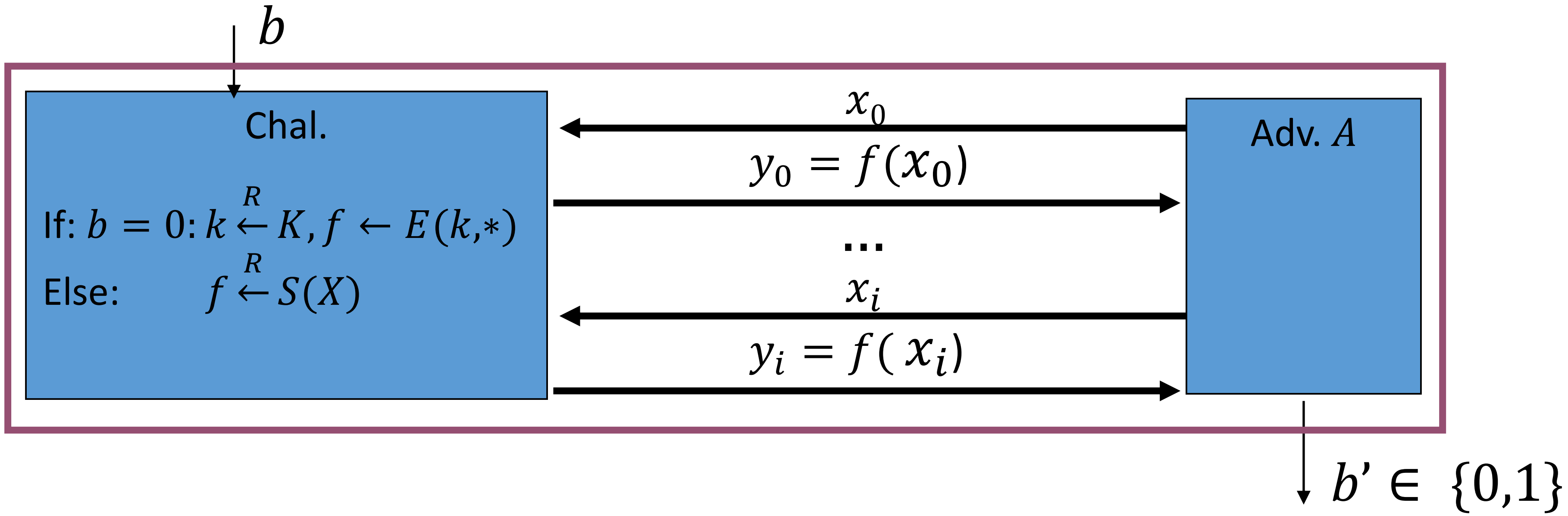
Нет, не является. A: передаёт сообщение $x = 0$, возвращает 0, если ответ претендента 0^{128}, иначе 1. $PRF_{adv}[A,G] = |1 - 2^{-128}| > 1/2$

Игра на стойкость PRP

Строится аналогично игре на PRF, но для подстановок.

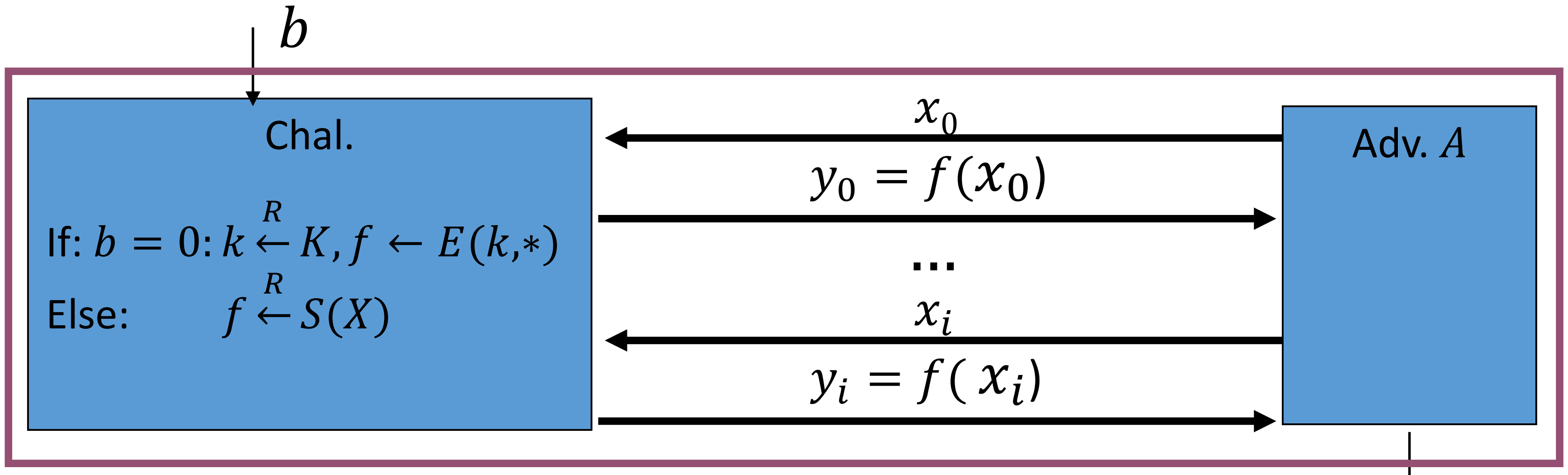
Для $b \in \{0,1\}$ пусть W_b событие того, что b'=1 в эксперименте b.

Тогда преимуществом алгоритма A против псевдослучайной подстановки E называется величина $PRP_{adv}[A, E] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$.



Стойкая PRP

PRP E, определённая на (K, X), называется стойкой PRP, если $\forall A$: A – эффективный алгоритм в игре на стойкость PRP величина $PRP_{adv}[A, \mathrm{E}] \leq \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая величина.

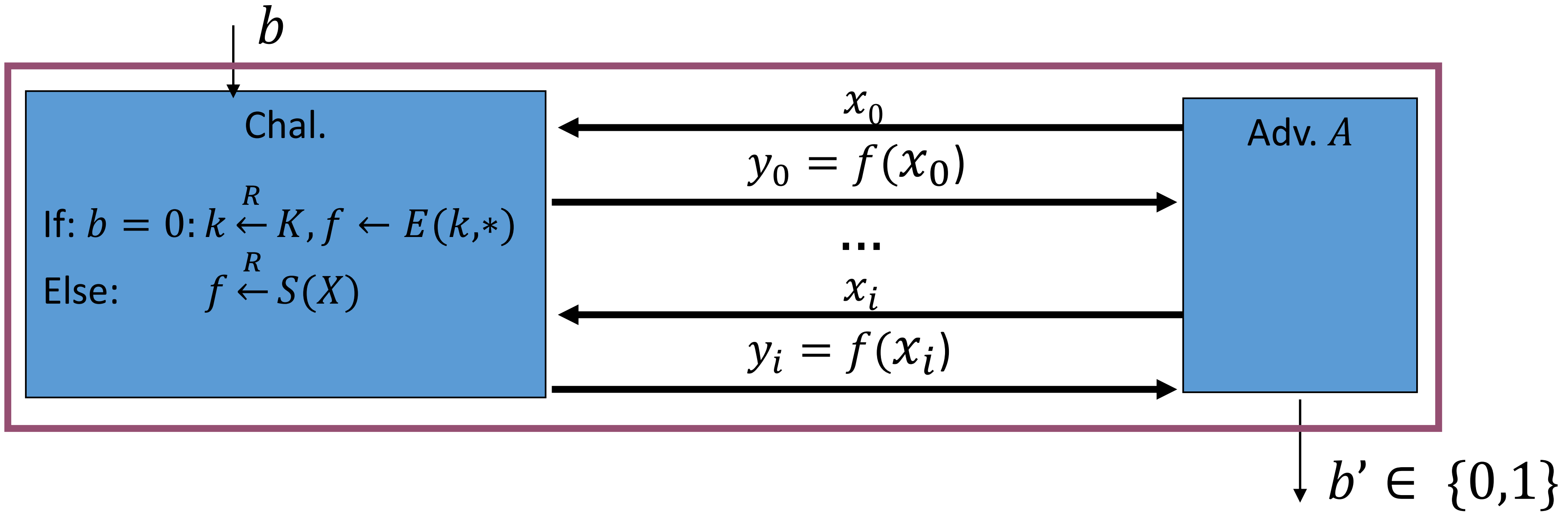


$PRP_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$ $\quad$ $b' \in \{0,1\}$

Игра на стойкость PRP

Альтернативное определение: рассмотри игру на угадывание бита (см лекцию 1) для противника A против PRP E. Определим $PRP^{*}_{adv}[A,E] = |\Pr[b' = b] - 1/2|$. Тогда E – стойкая PRP, если $\forall A$: A – эффективный алгоритм в игре на угадывание бита в игре на стойкость PRP величина $PRP^{*}_{adv}[A,E] \le \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая величина.

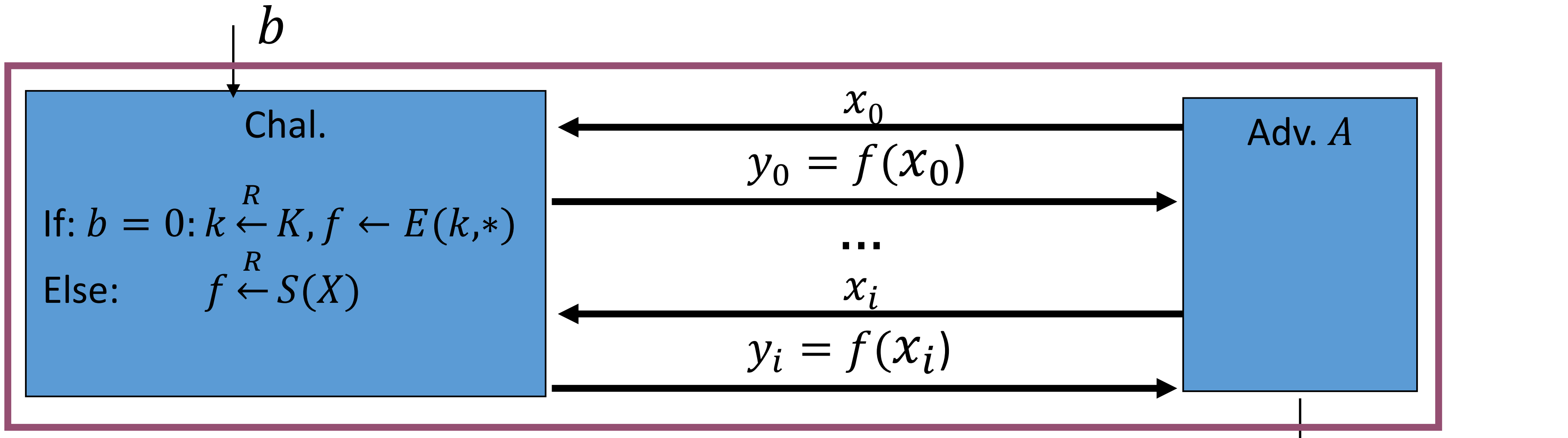
$PRP_{adv}[A,F] = 2 * PRP^{*}_{adv}[A,E]$. (см лекцию 1)



Стойкий блочный шифр

Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – блочный шифр на (K, X). Тогда E – стойкий блочный шифр, если E – стойкая псевдослучайная перестановка.

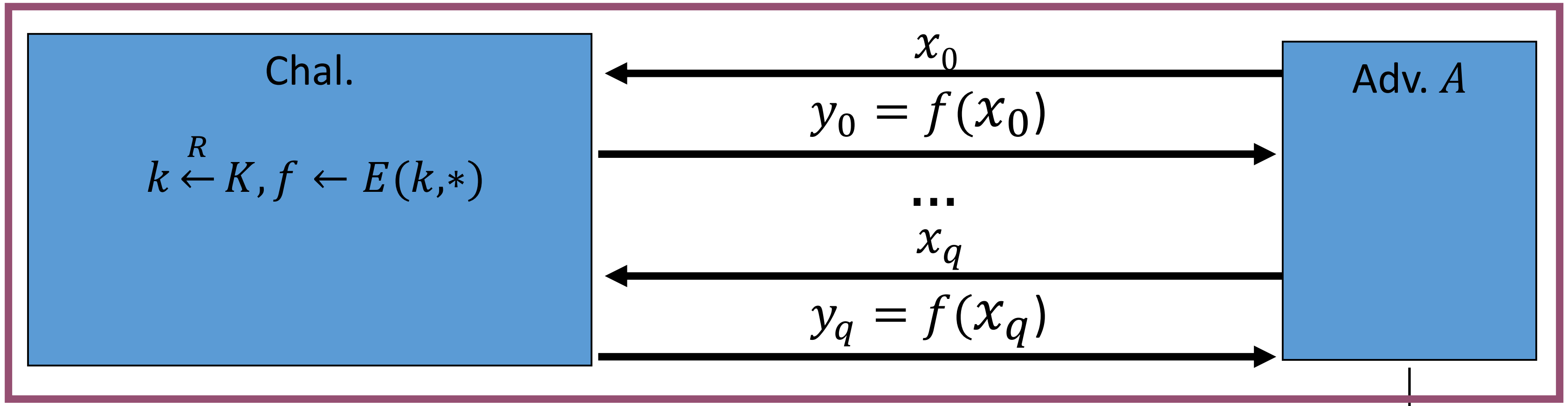
Т.е. $\forall A$: A – эффективный противник в игре на стойкость PRP величина $BC_{adv}[A, \mathrm{E}] = PRP_{adv}[A, E] \leq \epsilon$, где ϵ – пренебрежимо малая величина.



$$PRP_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]|$$

Непредсказуемость блочных шифров

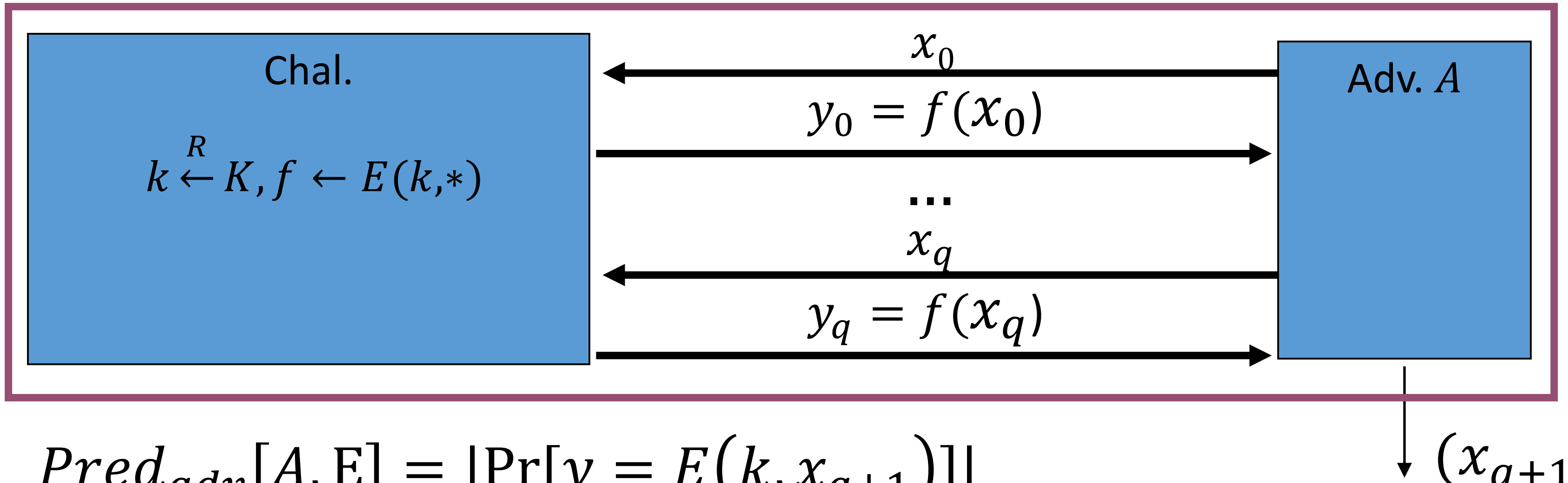
Рассмотрим игру. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – блочный шифр на (K, X). Пусть претендент выбирает случайный ключ $k \in_R K$. Противник выбирает произвольные $x_0,\ldots x_q$ и получает шифртексты $y_i = E(k, x_i)$. Задача противника получить (x_{q+1}, y): $x_{q+1} \notin \{x_0, \ldots, x_q\}, y = E(k, x_{q+1})$.



$Pred_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[y = E(k, x_{q+1})]|$

Непредсказуемость блочных шифров

Блочный шифр называется стойким непредсказуемым блочным шифром, если для всех эффективных противников A величина $Pred_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[y = E(k, x_{q+1})]| \leq \epsilon$, ϵ – пренебрежимо малая величина.

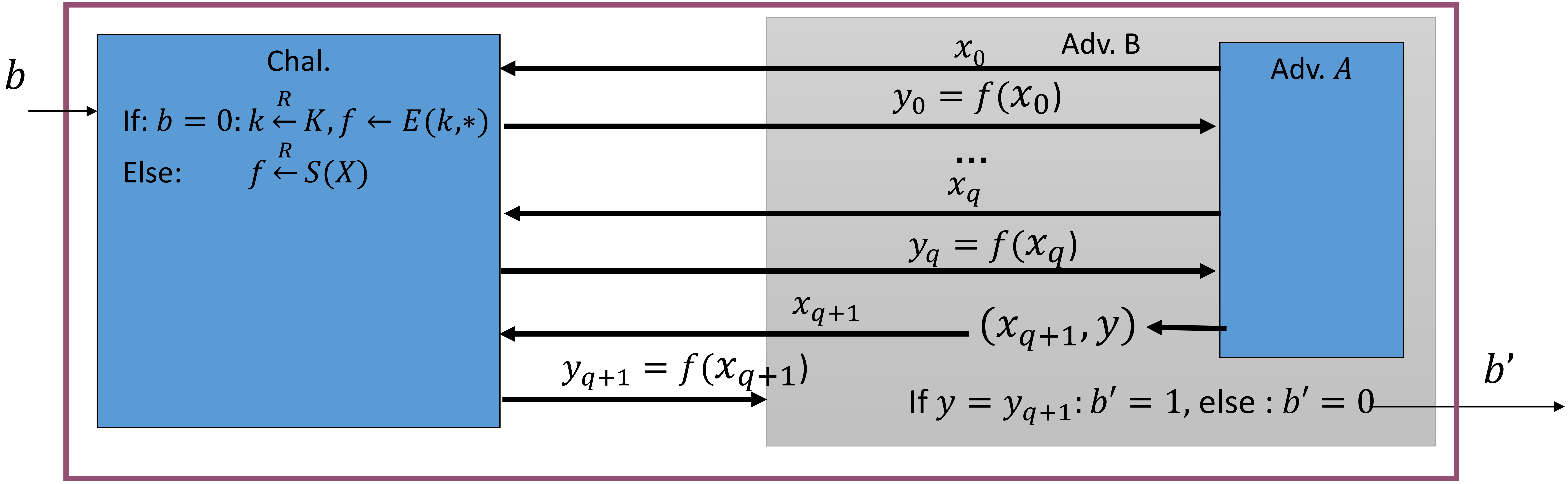


$Pred_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[y = E(k, x_{q+1})]|$

Непредсказуемость блочных шифров

Теорема 4.1. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – блочный шифр на (K, X). Тогда если E – стойкий, $|X|$ - сверх-полиномиальная, то E – непредсказуемый.

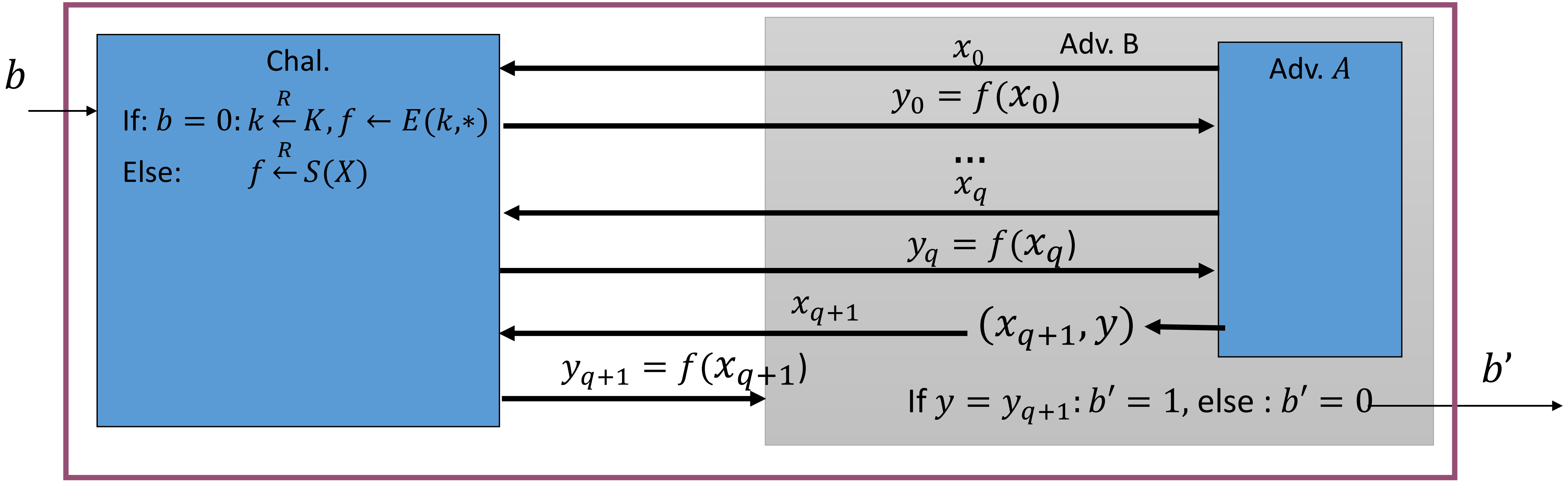
⊳Пусть E – предсказуемый. Тогда $\exists A$: $Pred[A, \mathrm{E}] = p, p$ – не пренебрежимо малая. Построим противника B следующим образом.



Непредсказуемость блочных шифров

Если $b = 0$: $\Pr[W_0] = \Pr[b' = 1 | b = 0] = Pred_{adv}[A, \mathrm{E}] = p$.

Если $b = 1$: $\Pr[W_1] = \Pr[b' = 1 | b = 1] =$
$\Pr[\text{угадать результат случайной функции}] = 1/|X|$ - пренебрежимо малая, для сверх-полиномиального значения $|X|$.



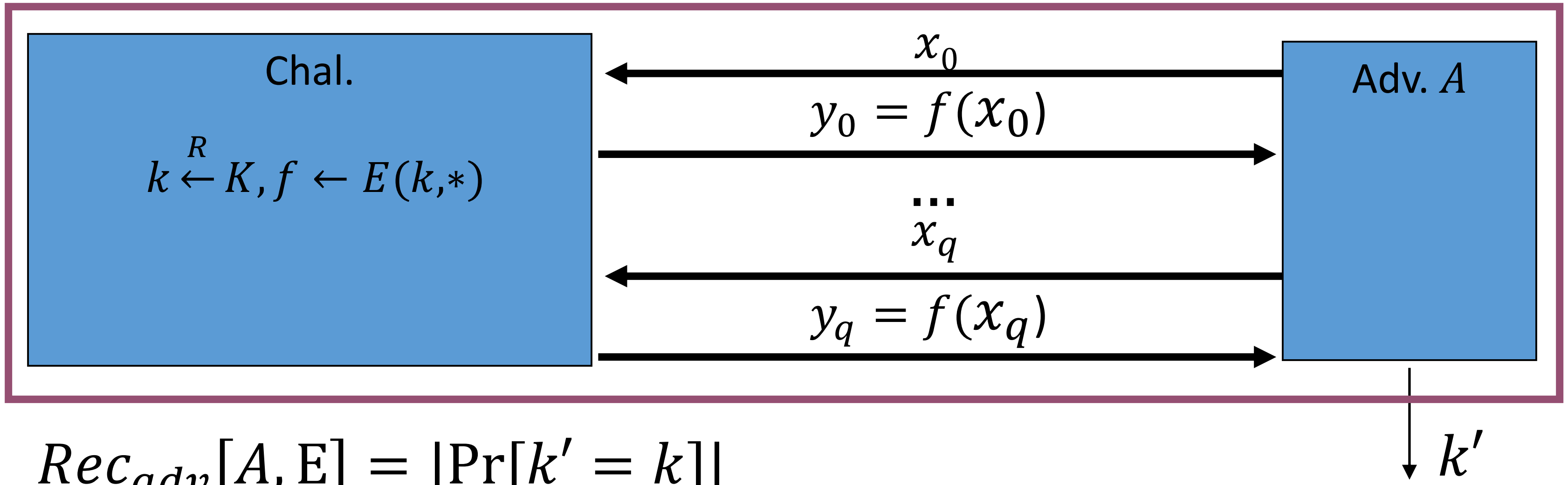
Непредсказуемость блочных шифров

Теорема 4.1. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – блочный шифр на (K, X). Тогда если E – стойкий, то E – непредсказуемый.

Тогда $PRP_{adv}[B, \mathrm{E}] = |\Pr[W_0] - \Pr[W_1]| = |p - \epsilon|$ - не пренебрежимо малая величина $\Rightarrow$ построили атаку на блочный шифр $\Rightarrow$ противоречие $\Rightarrow$ E – не предсказуемый $\Rightarrow$ теорема доказана. $\lhd$

Стойкость против восстановления ключа

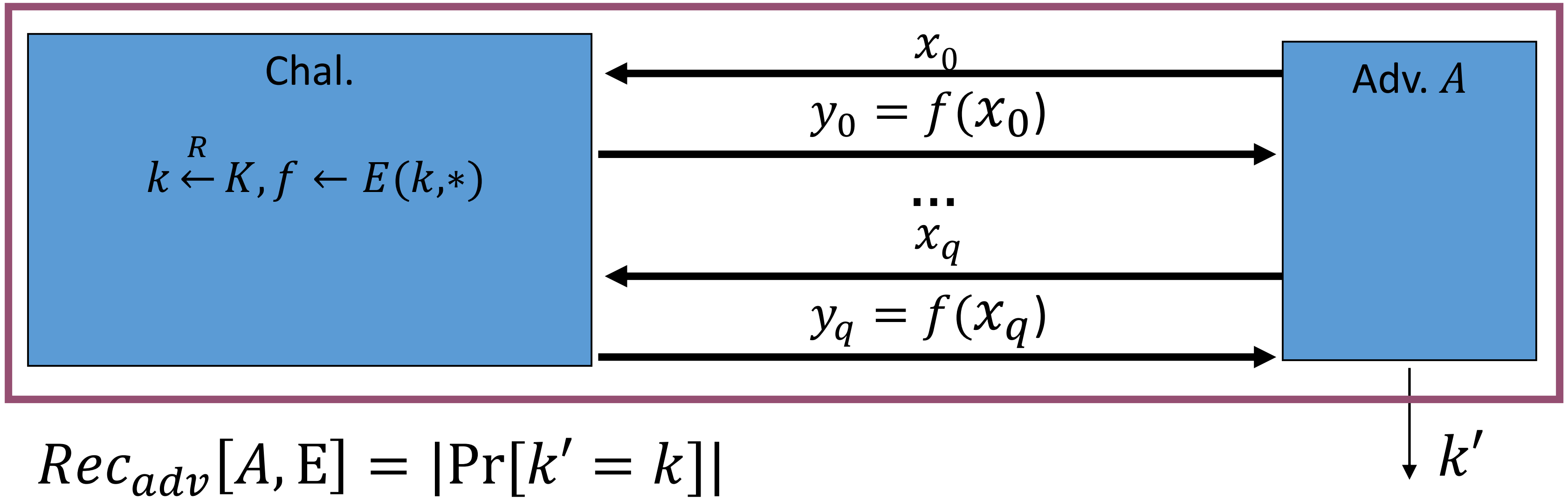
Рассмотрим игру. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – блочный шифр на (K, X). Пусть претендент выбирает случайный ключ $k \in_R K$. Противник выбирает произвольные $x_0,\dots x_q$ и получает шифртексты $y_i = E(k, x_i)$. Задача противника получить $k' \in K \colon k = k$.



$Rec_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[k' = k]|$

Стойкость против восстановления ключа

Блочный шифр называется стойким к восстановлению ключа блочным шифром, если для всех эффективных противников A величина $Rec_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[k' = k]| \leq \epsilon$, ϵ – пренебрежимо малая величина.



$Rec_{adv}[A, \mathrm{E}] = |\Pr[k' = k]|$

Стойкость против восстановления ключа

Теорема 4.2. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – блочный шифр на (K, X). Тогда если E – непредсказуемый, то E – стойкий к восстановлению ключа.

⊳Доказательство аналогично теореме 4.1. Основная идея – если противник может восстановить ключ блочного шифра – то он может получить пару открытый текст – шифртекст, просто используя ключ. ⊲

Следствия стойкости

- Если E – стойкий блочный шифр, он должен быть стойким к восстановлению ключа.
- Если E – стойкий к восстановлению ключа, то $|K|$ - сверх-полиномиальная

⊳Противник всегда может выиграть игру на восстановлению ключа с преимуществом $Rec_{adv}[A, \mathrm{E}] = 1/|K|$, просто угадав ключ. Следовательно величина $1/|K|$ - должна быть пренебрежимо малой, $|K|$ - сверх-полиномиальной. ⊲

- Описанная выше атака на восстановление ключа называется exhaustive-search (полный перебор ключа, исчерпывающий поиск ключа, полная апробация). Если противник проверяет t ключей за время полиномиально ограниченное от t то вероятность совершить атаку составляет $p \approx t/|K|$. Является верхней границей стойкости.

Использование блочных шифров

Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – блочный шифр на (K, X).

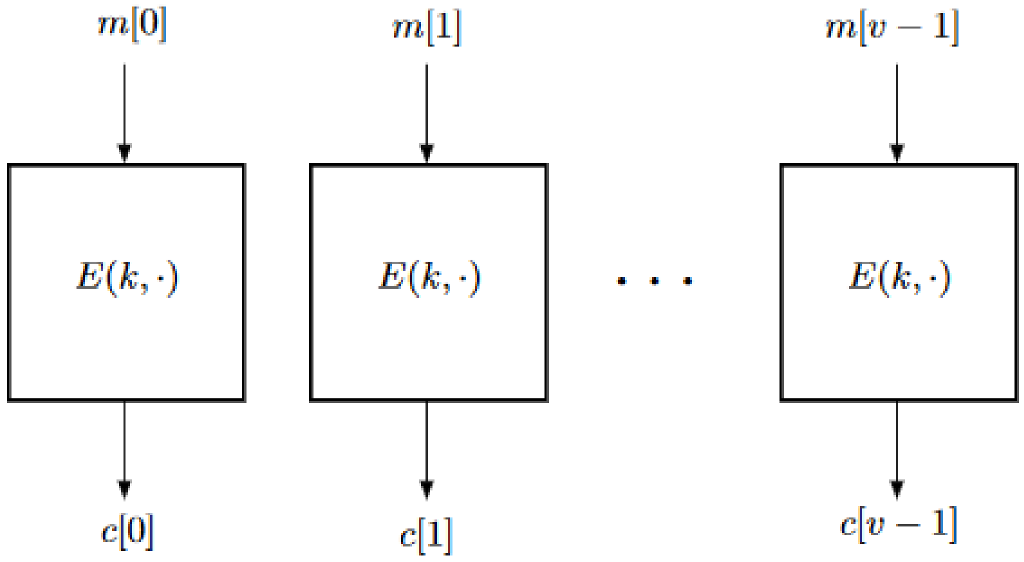
Можем ли мы использовать блочный шифр для построения семантически стойких шифров для сообщений произвольной длины?

ECB

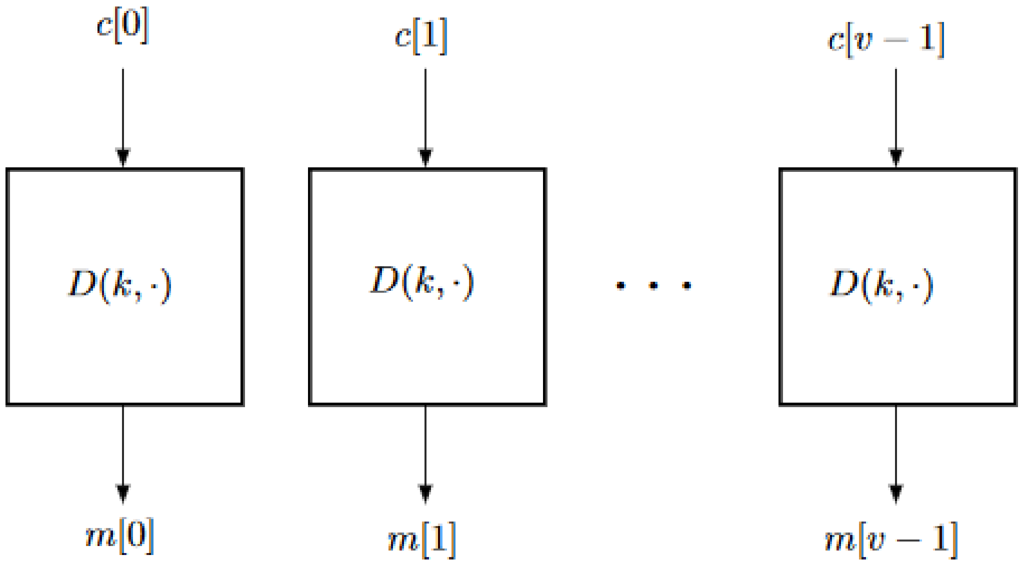
Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – блочный шифр на (K, X). Для полиномиально ограниченной величины $l \geq 1$ определим шифр $\mathrm{E}' = (E', D')$ на $(K, X^{\leq l}, X^{\leq l})$ следующим образом:

- Для $k \in K, m \in X^{\leq l}, v = |m|$ определим
$$E'(k, m) = \big(E(k, m[0]), \dots, E(k, m[v-1])\big).$$
- Для $k \in K, c \in X^{\leq l}, v = |c|$ определим
$$D'(k, c) = \big(D(k, \mathrm{c}[0]), \dots, D(k, \mathrm{c}[v-1])\big).$$

ECB



Зашифрование



Расшифрование

Стойкость ECB

Теорема 4.3. Пусть $\mathrm{E} = (E, D)$ – блочный шифр на (K, X). Для полиномиально ограниченной величины $l \geq 1$ определим ECB шифр $\mathrm{E}' = (E', D')$ на $(K, X'^{\leq l}, X'^{\leq l})$, где $X'^{\leq l}$ - сообщения, длины не более чем из l **попарно различных блоков**. Тогда если E – стойкий блочный шифр, то E' - семантически стойкий. В частности $\forall A$ в игре на семантическую стойкость против E', $\exists B$ в игре на стойкость блочного шифра, такой что

$$SS_{adv}[A, \mathrm{E}'] = 2 * BC_{adv}[B, \mathrm{E}]$$

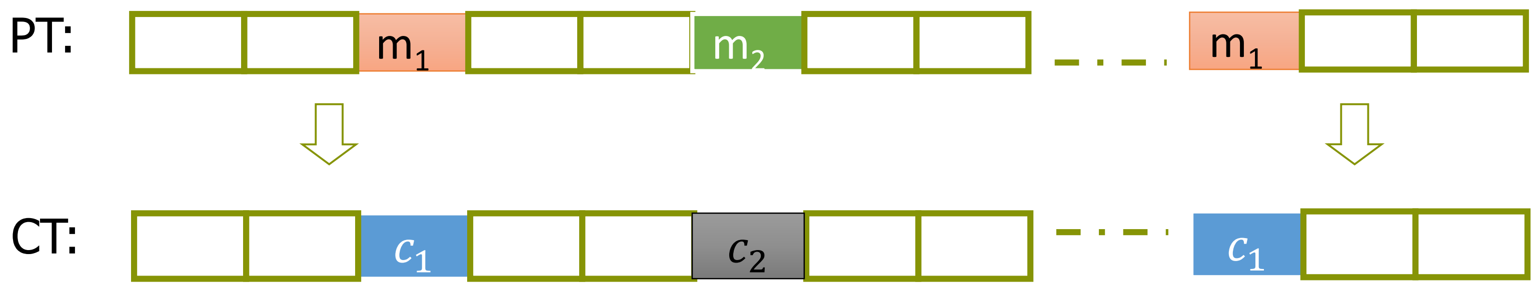
⊳Без доказательства, основная идея – для псевдослучайной подстановки противник не может отличить зашифрование уникальных блоков от случайных блоков, а значит не может отличить 2 различных зашифрования. ⊲

Стойкость ECB

- Стойкий блочный шифр в режиме ECB – семантически стойкий для
  - Сообщений, состоящих из уникальных, **попарно различных блоков** (например есть открытый текст – случайных ключ), не повторяющихся во время жизни ключа
  - Любых коротких, уникальных сообщений, длинной в один блок, не повторяющихся во время жизни ключа
- Что для произвольных сообщений произвольной длины?

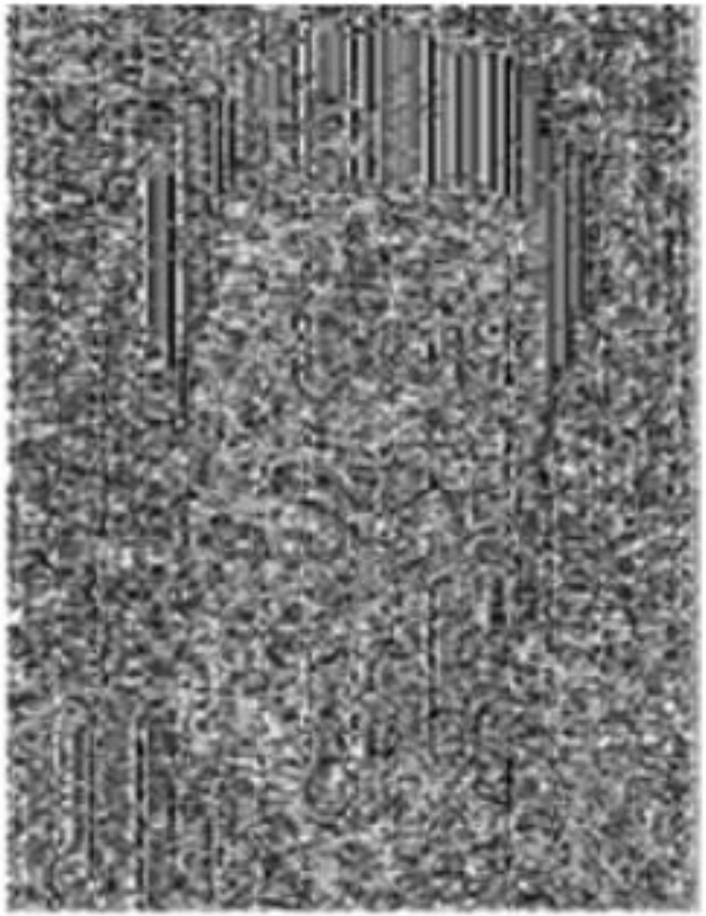
Стойкость ECB

Зашифрование в режиме ECB происходит детерминированно и поблочно, как следствие одинаковые блоки имеют одинаковый шифртекст.



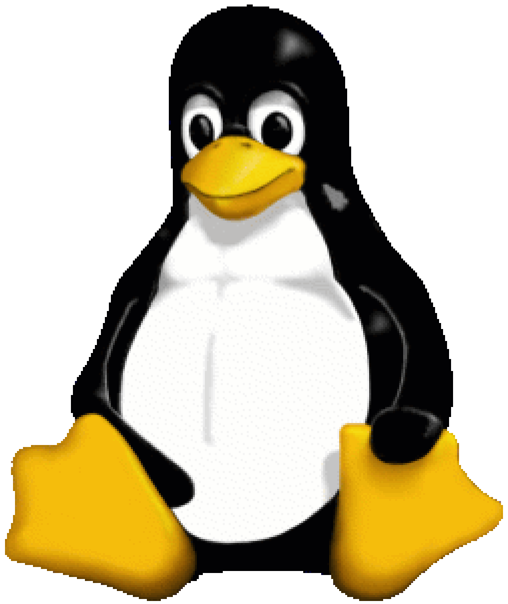
Стойкость ECB

(a) plaintext

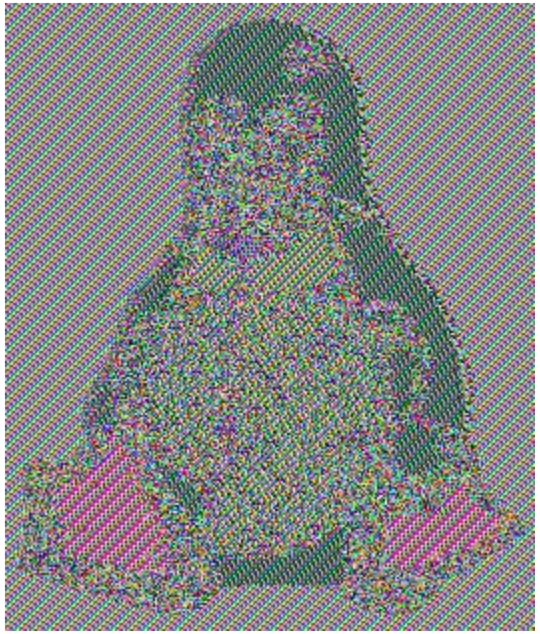


(b) plaintext encrypted in ECB mode using AES

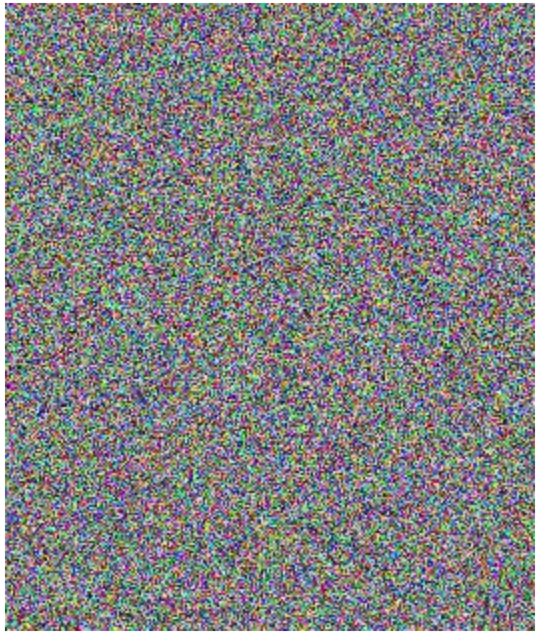
Стойкость ECB



PT



ECB



CBC

https://github.com/pakesson/diy-ecb-penguin

Стойкость ECB

Теорема 4.4. Пусть $\mathrm{E} = (E, D) -$ на (K, X^l) блочных шифр в режиме ECB для произвольных сообщений из l блоков, $\mathrm{x} \in X^l$. E – не семантически стойкий.

⊳Построим противника A. A генерирует 2 сообщения m_1, m_2: $m_1 = (x, x), m_2 = (x, y), x, y \in X$. От претендента он получает шифртекст $c = E(k, m_b)$. Тогда если $c = (c_1, c_1)$ противник возвращает $b' = 0$, иначе 1.

Преимущество противника равно 1, т.к. одинаковые блоки открытого текста переходят в одинаковые блоки шифртекста ⊲

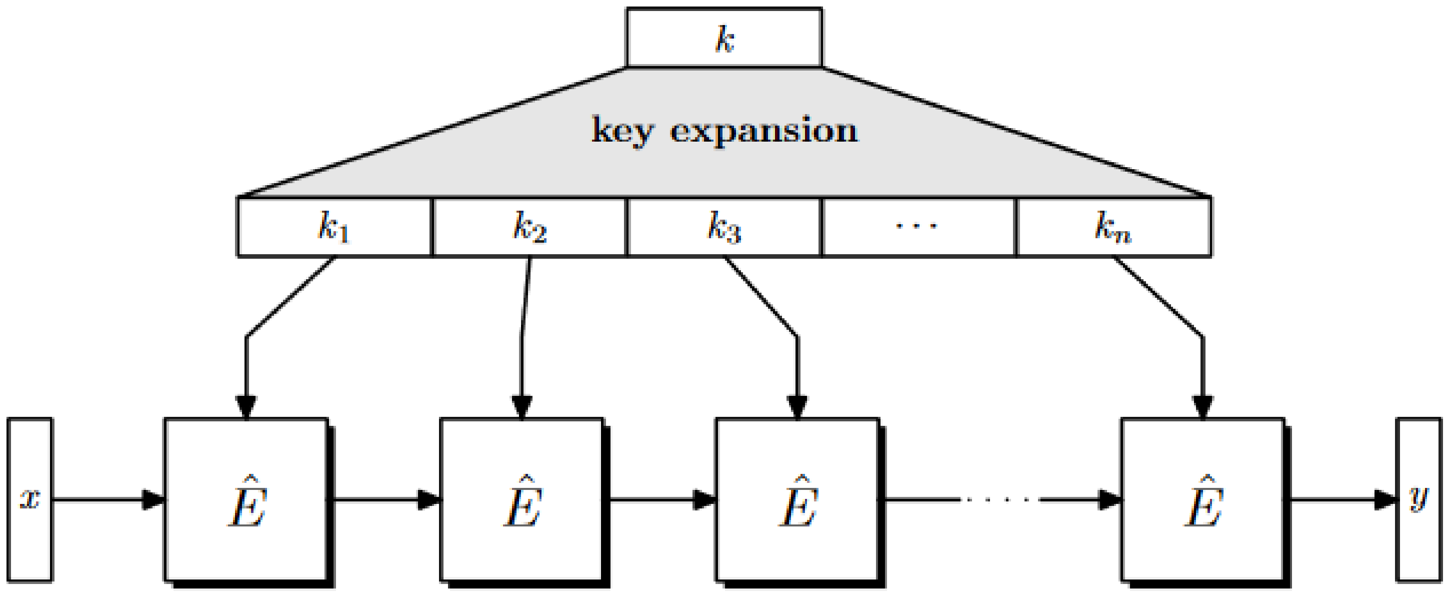
Построение блочных шифров

- Обычно блочные шифры строятся с использованием итеративных конструкций – несколько раз подряд используется некоторая функция (наз. итеративной или раундовой).
- В качестве итеративной функции выбирается простой (с точки зрения реализации) блочный шифр $\mathrm{E}' = (E', D')$, в общем случае может быть не стойкой.
- Выбирается простой (с точки зрения реализации) PRG G, используемый для расширения ключа k в d раундовых ключей $k_1, \ldots, k_d$. G называется функцией выработки раундовых ключей или функцией расширения ключа.

Построение блочных шифров

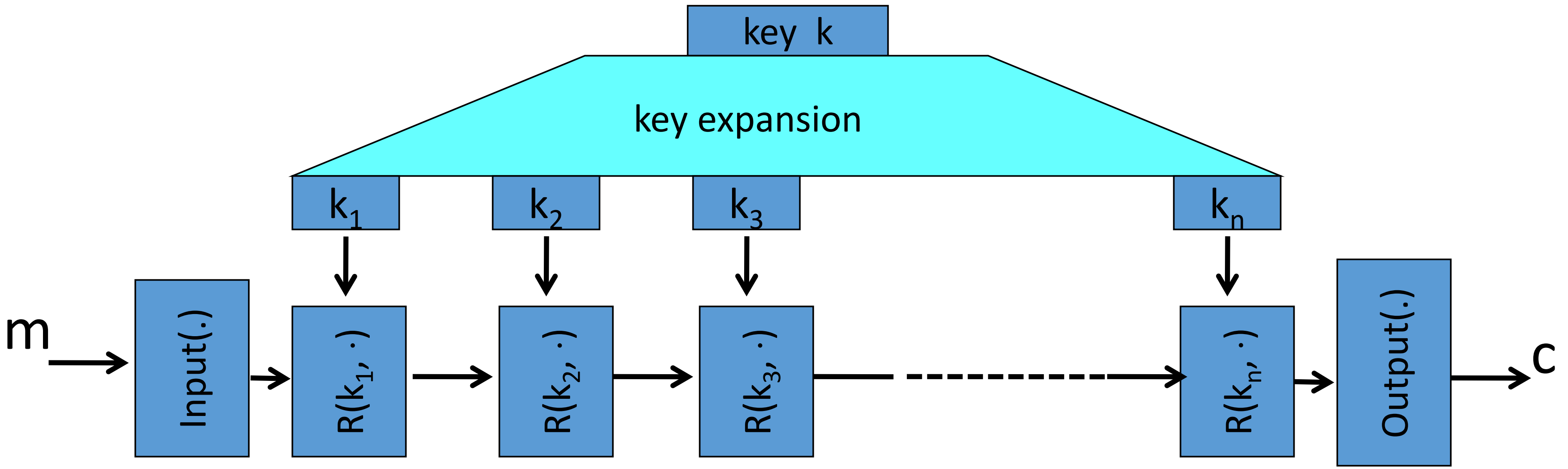
Алгоритм $E(k, x)$:

- Используя функцию G получить раундовые ключи: $(k_1, \ldots, k_d) \leftarrow G(k)$
- Для $i = 1..d$: $y \leftarrow E'(k_d, E'\big(k_{d-1}, \ldots, E'\big(k_2, E'(k_1, x)\big) \ldots)\big)$



Построение блочных шифров

- Расшифрование происходит аналогично зашифрованию, но с использованием обратной раундовой функции $D'(k, x)$, и обратным порядком следования ключей.
- Иногда также могут использоваться входные и выходные преобразования : перед шифрованием используется некоторое входное преобразование над открытым текстов, после процедуры шифрования – некоторое выходное преобразование



Построение раундовых функций

- Как строить хорошие раундовые функции? Как определить стойкость раундовой функции? Никто не знает.
- Раундовая функция должна быть сильно нелинейной от ключа, т.к. использование линейной функции (или близкой к линейной) даёт линейный блочный шифр. Пример плохой раундовой функции - $E'(k, x) = kx \bmod q$.
- Качество раундовой функции определяется возможностью практических атак на полученный шифр.
- Сколько нужно использовать раундов для фиксированной раундовой функции? Никто не знает.

Использование блочных шифров

- Никогда не строить собственных блочных шифров
- Использовать AES, ГОСТ Р 34.12-2015 (Магма (ex ГОСТ 28147-89), Кузнечик)

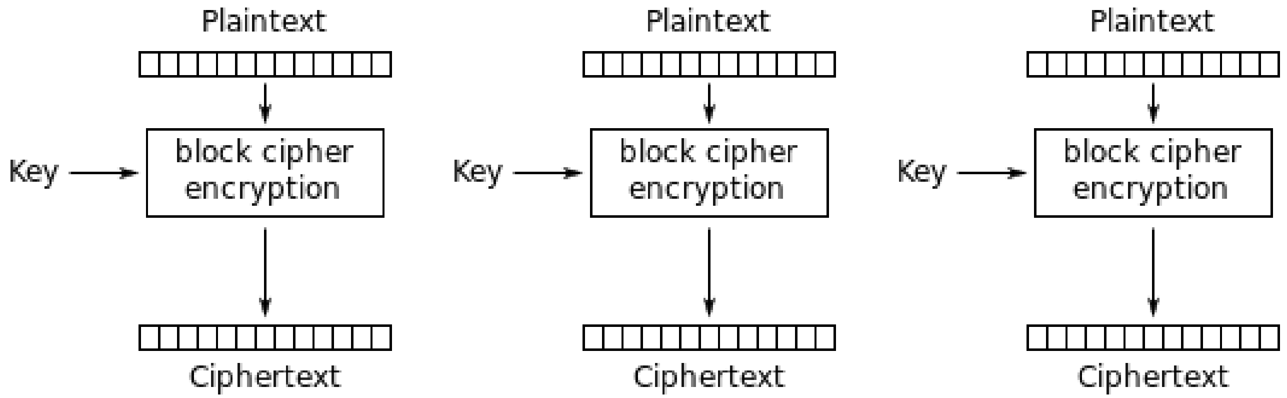
Вопросы для достижения дзена в режимах шифрования

На сколько битов, в каких блоках и каким образов влияет

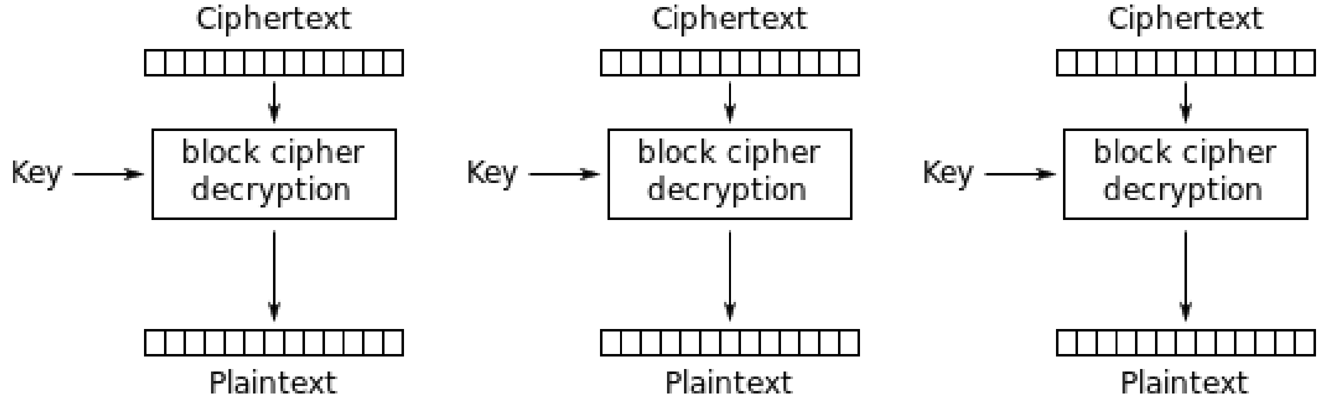
- Изменение одного бита открытого текста на шифртекст
- Изменение одного бита шифртекста на расшифрованный открытый текст

Можно ли контролируемо изменить определённый бит расшифрованного открытого текста, изменив биты шифртекста, как?

ECB

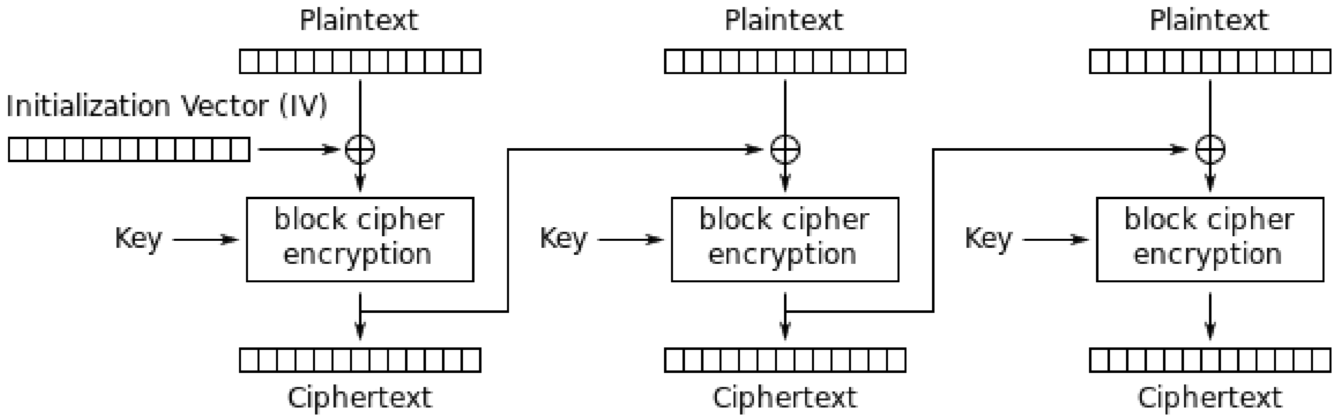


Electronic Codebook (ECB) mode encryption

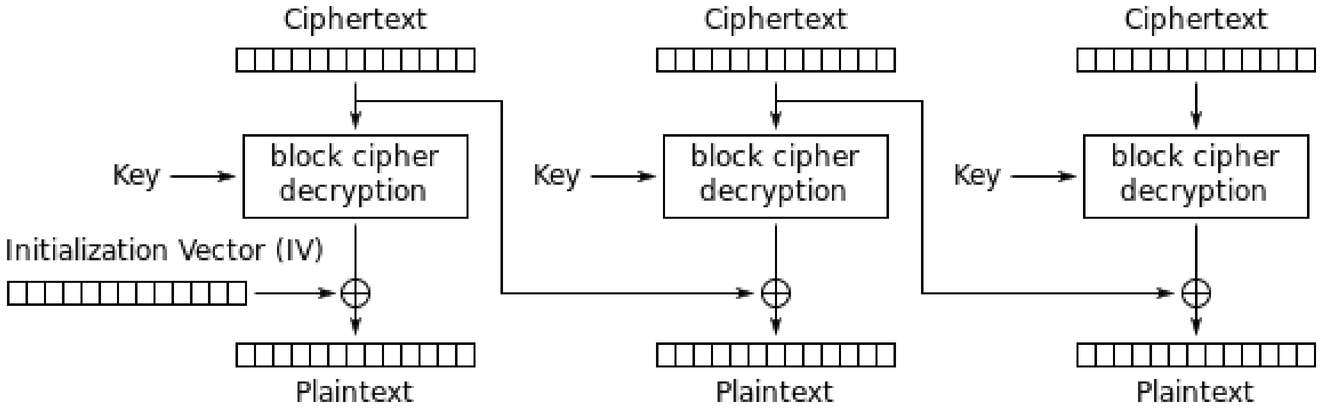


Electronic Codebook (ECB) mode decryption

CBC

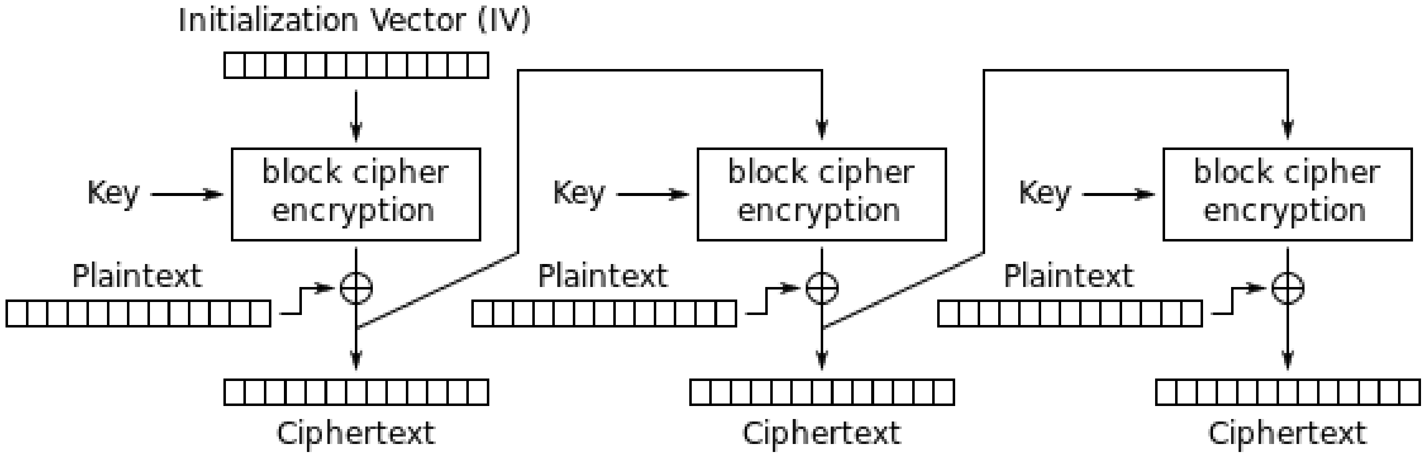


Cipher Block Chaining (CBC) mode encryption

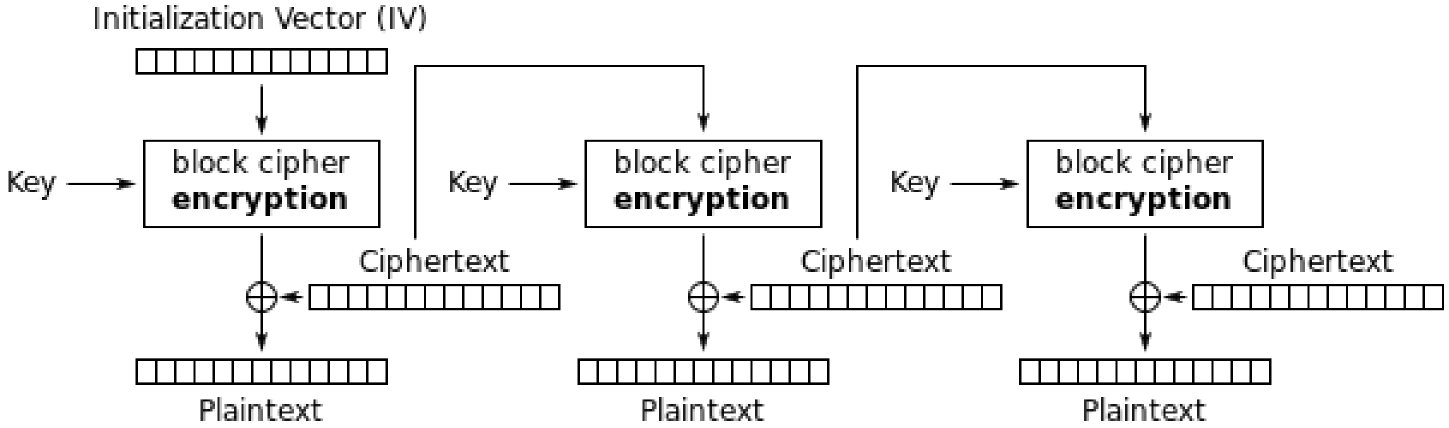


Cipher Block Chaining (CBC) mode decryption

CFB

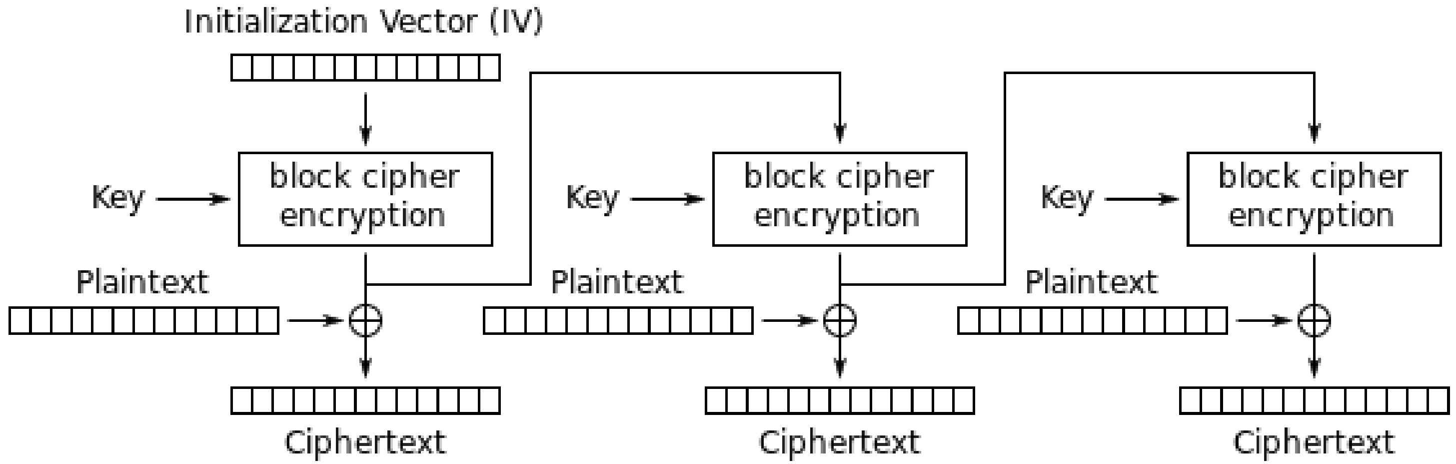


Cipher Feedback (CFB) mode encryption

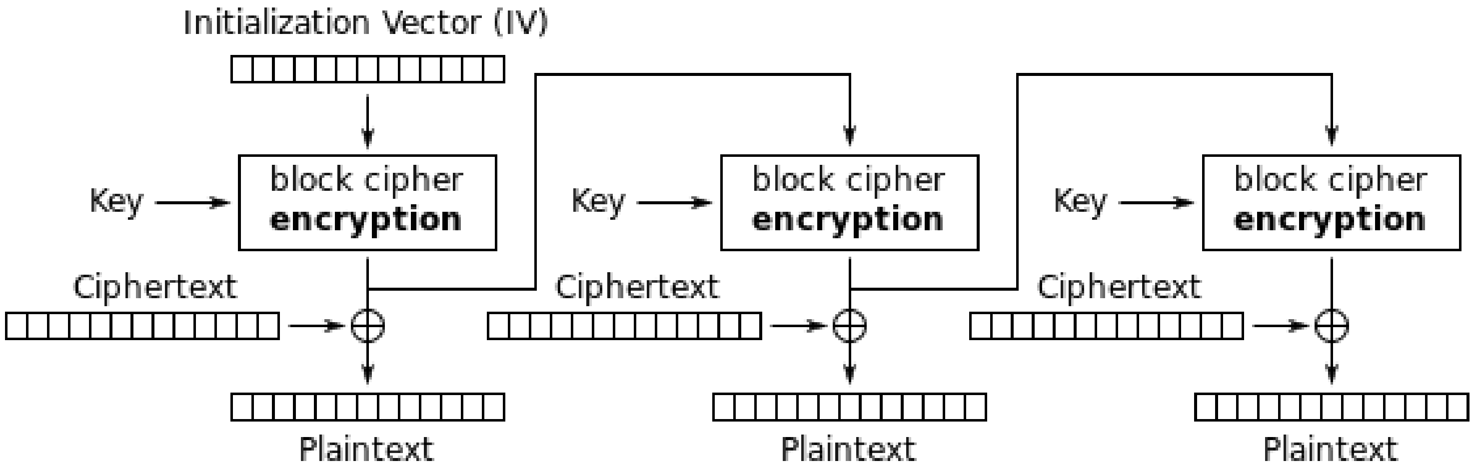


Cipher Feedback (CFB) mode decryption

OFB

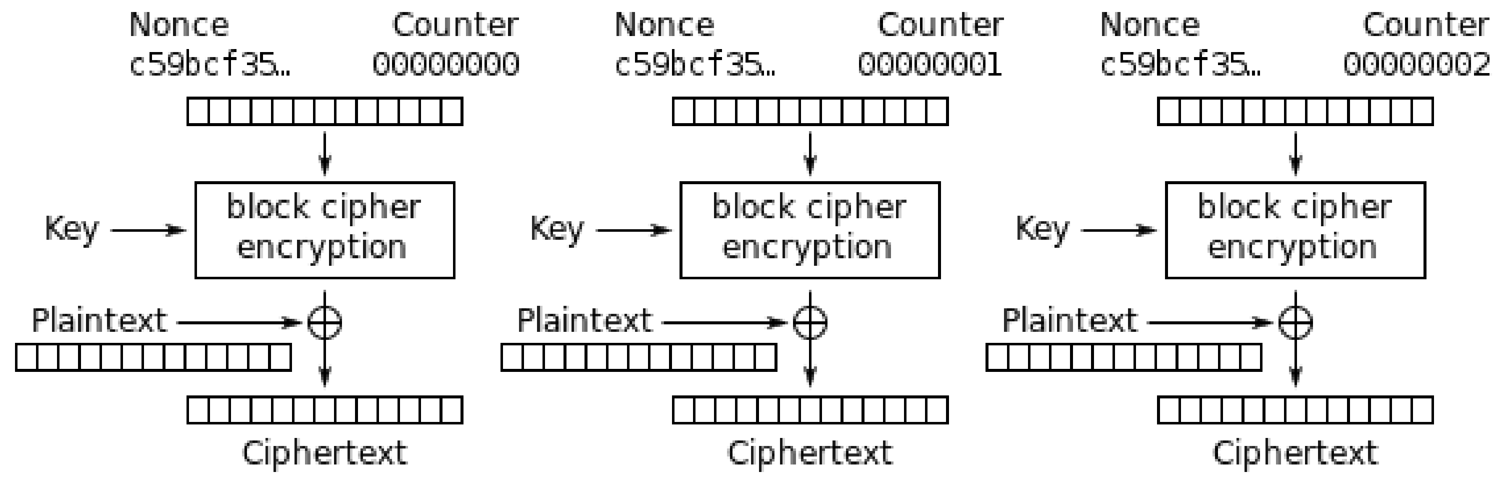


Output Feedback (OFB) mode encryption

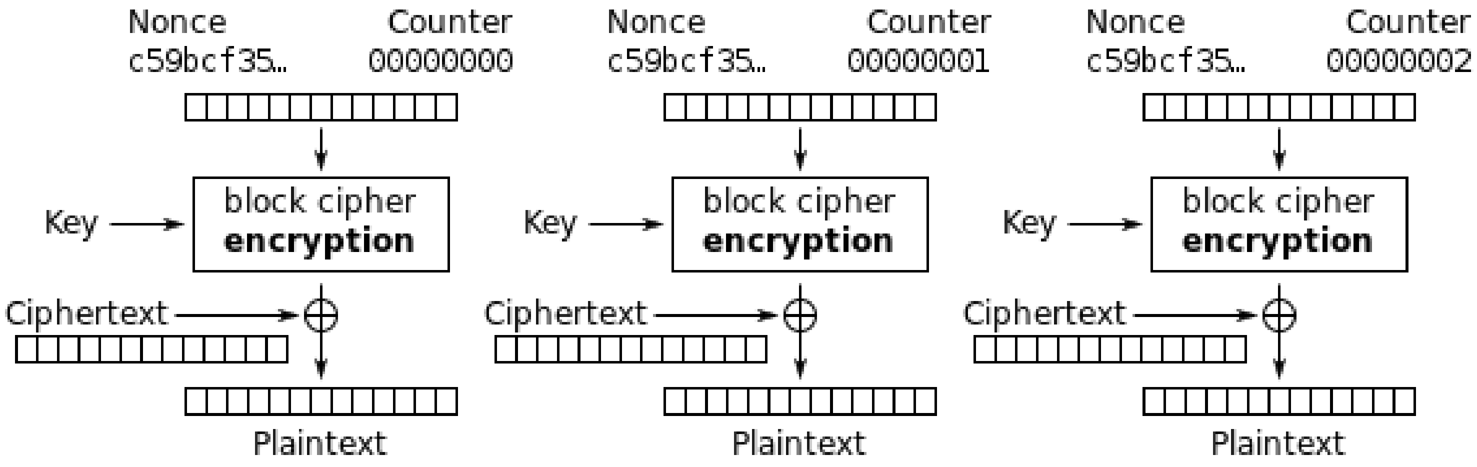


Output Feedback (OFB) mode decryption

CTR



Counter (CTR) mode encryption



Counter (CTR) mode decryption