Примеры задач

Яцулевич Владимир Владимирович

1. MAXCUT

Пусть задан неориентированный граф $G = (V, E)$. Необходимо найти подмножество вершин $W \subset V$, такое что количество рёбер между подмножеством W и его дополнением $\overline{W}$ было максимальным.

Задачу можно переформулировать следующим образом. Определить множество вершин W — это тоже самое, что определить какие вершины принадлежат этому множеству, а какие нет. То есть каждой вершине v_i можно поставить в соответствие бинарную переменную x_i, которая равна 1, если вершина будет принадлежать множеству W, и 0 в противном случае.

Теперь нужно определить целевую функцию $f(x_1, x_2, \dots x_n)$, где $n = |V|$, которая бы решала исходную задачу. Необходимо максимизировать количество рёбер, у которых концевые вершины принадлежат разным классам (то есть $x_i \neq x_j$).

$$f(x_i, x_j) = x_i \oplus x_j. \tag{1}$$

Такая функция будет давать 0, если классы одинаковые, и 1, если классы разные. Представим XOR в виде произведения и суммы, тогда получим

$$f(x_i, x_j) = x_i + x_j - 2x_i x_j. \tag{2}$$

Тогда задача поиска максимального разреза сведётся к следующей оптимизационной задаче

$$\max \sum_{(i,j)\in E} (x_i + x_j - 2x_i x_j), \tag{3}$$

или что соответствует задаче минимазации

$$\min \sum_{(i,j)\in E} (-x_i - x_j + 2x_i x_j). \tag{4}$$

Рассмотрим конкретный пример графа. Пусть задан граф

Составим для этого графа целевой функционал.

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}) = &- x_1 - x_2 + 2x_1x_2 - x_2 - x_3 + 2x_2x_3 - x_3 - x_4 + 2x_3x_4 - \\ &- x_4 - x_5 + 2x_4x_5 - x_1 - x_5 + 2x_1x_5 - x_2 - x_5 + 2x_2x_5 = \\ = &- 2x_1 - 3x_2 - 2x_3 - 2x_4 - 3x_5 + \\ &+ 2x_1x_2 + 2x_2x_3 + 2x_3x_4 + 2x_4x_5 + 2x_1x_5 + 2x_2x_5 \end{aligned} \tag{5}$$

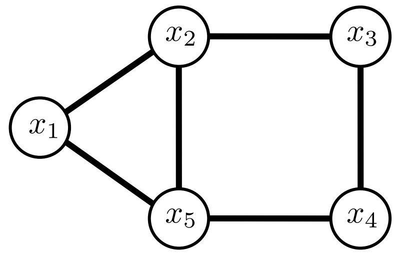

Рис. 1. Пример графа

Теперь имея целевой функционал можно построить матрицу симметричную Q.

$$Q = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & -3 \end{pmatrix} \tag{6}$$

Решая поставленную оптимимзационную задачу получим следующий ответ.

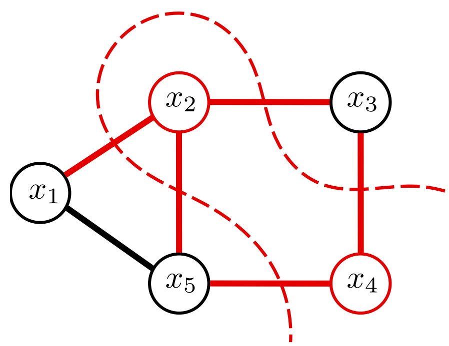

Рис. 2. Решение задачи Max-Cut

2. АКЦИОННЫЙ ПОРТФЕЛЬ

Рассмотрим пример реальной прикладной задачи экономического сектора. Пусть имеется некоторая биржа. На этой бирже через равные промежутки времени можно покупать акции разных компаний в разном количестве. Пусть имеется N различных акций, T — кол-во временных промежутков, а K — это сумма, которую может вложить акционер на каждом шаге.

Введём матрицу ω размером $N \times T$, содержащую неотрицательные целые числа. Элемент матрицы ω_{nt} обозначает кол-во вложений в акцию под номером $n \in \{1, \ldots, N\}$ в промежуток времени под номером $t \in \{1, \ldots, T\}$. Через ω_t обозначим t-ый столбец матрицы ω, описывающий все вложения в промежуток времени под номером t.

Далее опишем все финансовые процессы, происходящие с акциями. И на основе этого описания, представим функционал, который необходимо будет минимизировать. С течением времени ожидаемая прибыль от каждой акции меняется. Обозначим через $\mu_t \in \mathbb{R}^N$ вектор, содержащий среднюю прибыль от каждой акции в момент времени t. Соответственно ожидаемую прибыль при определённых вложениях в момент времени t можно вычислить как $\mu_t^T \omega_t$.

Теперь введём коэффициент $\gamma \in \mathbb{R}$, характеризующий склонность к рискам. Суть в том, что часто стоимость одной акции может зависеть от стоимости другой. Зависимость не обязательно должна быть линейной. Достаточно наличия некоторых корреляций. И этот фактор тоже влияет на итоговую стоимость акционного портфеля. Пусть $\Sigma_t \in \mathbb{R}^{N \times N}$ — корреляционная матрица зависимости стоимостей акций. Тогда её влияние в момент времени t можно описать слагаемым $\frac{\gamma}{2}\omega_t^T \Sigma_t \omega_t$.

Но это ещё не всё. Акции невозможно купить моментально. То есть имеется некоторая задержка при покупке акции. Обозначим через $c_{nt} \in \mathbb{R}$ временные транзакционные издержки. Определим матрицу Λ_t, элементы которой можно найти по формуле $\Lambda_{tnn'} = c_{nt}\delta_{nn'}$. Суть в том, что такие издержки будут влиять лишь на те акции, которые были преобретены на последнем шаге. Поэтому стоит ввести ещё одно обозначение $\Delta\omega_t \equiv \omega_t - \omega_{t-1}$. Тогда влияние издержек в момент времени t можно описать слагаемым $\Delta\omega_t^T \Lambda_t \Delta\omega_t$.

С другой стороны, некоторые акции могут давать моментальный вклад. Поэтому аналогично введём матрицу Λ_t', которая содржит информацию о моментальных вложениях. Тогда её влияние в момент времени t можно описать слагаемым $\Delta\omega_t^T \Lambda_t' \Delta\omega_t$.

В итоге, имеется четыре слагаемых, которые влияют на итоговую прибыль. Со знаком плюс отмечены слагаемые, которые увеличивают прибыль, а со знаком минус — уменьшающие прибыль.

1. Ожидаемая прибыль $\mu_t^T \omega_t$.

2. Фактор зависимости и риска $-\frac{\gamma}{2}\omega_t^T \Sigma_t \omega_t$.

3. Влияние издержек $-\Delta\omega_t^T \Lambda_t \Delta\omega_t$.

4. Моментальное влияние $\Delta\omega_t^T \Lambda_t' \Delta\omega_t$.

Теперь для составления целевого функционала останется просуммировать все факторы по всем временным промежуткам. В результате мы получим функционал вида

$$f(\omega) = \mathrm{argmax}_\omega \sum_{t=1}^{T} \left(\mu_t^T \omega_t - \frac{\gamma}{2}\omega_t^T \Sigma_t \omega_t - \Delta\omega_t^T \Lambda_t \Delta\omega_t + \Delta\omega_t^T \Lambda_t' \Delta\omega_t \right). \tag{7}$$

На этом постановка задачи ещё не закончена, поскольку ещё не учтены финансовые возможности акционера. Для этого нужно добавить ограничения

$$\forall t \in \{1, \ldots, T\} \quad \sum_{n=1}^{N} \omega_{nt} = K. \tag{8}$$

Чтобы добавить это ограничение к исходному целевому функционалу воспользуемся методикой, описанной в разделе Оптимизационные модели. Для этого введём штрафное слагаемое

$$\text{penalty}(\omega) = -M \sum_{t=1}^{T} \left(K - \sum_{n=1}^{N} \omega_{nt} \right)^2, \tag{9}$$

где M — это сила штрафного слагаемого. По сути M представляет из себя гиперпараметр. С учётом штрафного слагаемого целевой функционал примет вид

$$f(\omega) = \text{argmax}_{\omega} \sum_{t=1}^{T} \left(\mu_t^T \omega_t - \frac{\gamma}{2} \omega_t^T \Sigma_t \omega_t - \Delta\omega_t^T \Lambda_t \Delta\omega_t + \Delta\omega_t^T \Lambda_t' \Delta\omega_t \right) + \text{penalty}(\omega). \tag{10}$$

На данном этапе построена дискретная модель оптимизации. Теперь же её нужно свести к модели QUBO, то есть свести к бинарной модели. А это можно сделать с помощью способа, описанного в разделе Оптимизационные модели. Для этого каждый элемент ω_{nt} представим в виде комбинации бинарных переменных

$$\omega_{nt}(\mathbf{x}) = \sum_{d=1}^{D} a(d) x_{dnt}. \tag{11}$$

---

[1] G. Rosenberg, P. Haghnegahdar, P. Goddard, P. Carr, K. Wu, and M. L. De Prado, Solving the optimal trading trajectory problem using a quantum annealer, in *Proceedings of the 8th workshop on high performance computational finance* (2015) pp. 1–7.

[2] S. Yarkoni, E. Raponi, T. Bäck, and S. Schmitt, Quantum annealing for industry applications: Introduction and review, Reports on Progress in Physics **85**, 104001 (2022).

[3] F. Glover, G. Kochenberger, R. Hennig, and Y. Du, Quantum bridge analytics i: a tutorial on formulating and using qubo models, Annals of Operations Research **314**, 141 (2022).

[4] D-Wave, Binary quadratic models (), https://docs.ocean.dwavesys.com/en/latest/concepts/bqm.html [Дата доступа: 14.02.2025].

[5] D-Wave, Constrained quadratic models (), https://docs.ocean.dwavesys.com/en/latest/concepts/cqm.html [Дата доступа: 14.02.2025].

[6] D-Wave, Discrete quadratic models (), https://docs.ocean.dwavesys.com/en/latest/concepts/dqm.html [Дата доступа: 14.02.2025].

[7] List of qubo formulations, https://blog.xa0.de/post/List-of-QUBO-formulations/ [Дата доступа: 14.02.2025].