1 Questão Curta: Fio infinito?

Escrito por Tiago Rocha

Nesse problema, considere um fio infinito de densidade linear de carga λ. Vamos investigar essa configuração.

Dados: Você pode deixar suas respostas em função de π e ϵ_0 (permissividade do vácuo).

a) Usando a Lei de Gauss, calcule o campo elétrico a uma distância s do fio.

b) Nessa configuração, infelizmente, não podemos usar o infinito como referencial para calcular o potencial elétrico. Sabendo que a expressão para o potencial elétrico a uma distância s do fio vale:

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{s}{a}, \tag{1}$$

independentemente da referência (onde a é um parâmetro que iremos discutir depois), explique matematicamente por que não podemos usar o infinito como referência.

c) Calcule a diferença de potencial entre uma carga localizada em r e outra em $2r$.

d) Então, o que significa o parâmetro a?

Solução:

a) Formalmente, podemos escrever a Lei de Gauss:

$$\oint \mathbf{E}\cdot\mathbf{dA} = \frac{q}{\epsilon_0} \tag{2}$$

Mas, a integral fechada do primeiro termo resultará simplesmente no produto entre o campo elétrico e a área da gaussiana. Como o fio é um cilindro, faz sentido usarmos uma gaussiana cilíndrica, cuja área lateral vale $2\pi ls$ (onde l

é o comprimento do cilindro). Logo, como $\frac{q}{l} = \lambda$:

$$E = \frac{q}{A\epsilon_0} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0 ls} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 s} \tag{3}$$

b) Usando a equação dada, o potencial no infinito valerá mais ou menos infinito (dependendo do sinal da carga do fio). Logo, ao calcular a diferença de potencial entre um ponto qualquer e o infinito, o resultado também será mais ou menos infinito. Assim, perde-se a utilidade física do potencial, já que todos eles teriam valores infinitos.

c) Usando a equação dada:

$$V = V(r) - V(2r) = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\left(\ln\frac{r}{a} - \ln\frac{2r}{a}\right)$$

Podemos utilizar a propriedade dos logaritmos de que a diferença entre dois logaritmos é a razão entre os logaritmandos, além da identidade $\ln x^n = n\ln x$:

$$V = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{r}{2r} = -\frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln\frac{1}{2} = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0}\ln 2$$

d) Com o resultado do item a), vemos que a diferença de potencial entre dois pontos não depende de a. Logo, o parâmetro a significa apenas a referência escolhida para calcular potenciais individuais, uma forma de substituir o fato de que não podemos usar o infinito como referência.

2 Questão Média: Apenas uma cicloide...

Escrito por Tiago Rocha

A roda é definitivamente uma das invenções mais importantes da humanidade. A partir dela, os humanos conseguiram criar uma enorme diversidade de dispositivos, sendo a maioria deles usados para facilitar a locomoção. Nesse problema, vamos investigar o funcionamento de uma roda. Para esses fins, imagine que estamos analisando a roda de um carro que está se movendo em linha reta.

a) A partir do que foi dito, calcule as velocidades dos pontos superior e inferior na situação da figura acima. Sabe-se que a roda se move sem deslizar e a velocidade do centro vale 30,0 km/h.

b) Se marcarmos com um pincel o ponto da roda que está em contato com o chão, ele realizará um movimento bem interessante. Esquematize como seria a trajetória desse ponto no referencial terrestre e justifique.

c) Esse movimento é o que chamamos de cicloide. Sendo assim, determine o raio de curvatura do ponto marcado no item b) quando ele se localiza no topo da trajetória, no referencial da Terra (esse é o que chamamos de raio de curvatura da cicloide). Calcule seu valor numérico sabendo que o raio da roda possui 28,0 cm.

Dicas/observações:

- **Dica 1:** Sabe-se que a velocidade em um ponto qualquer de uma roda em movimento é dada por $\mathbf{v} = \mathbf{v_c} + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}$, onde $\mathbf{v_c}$ é a velocidade do centro da roda, $\boldsymbol{\omega}$ é a velocidade angular da roda e $\mathbf{r}$ é o vetor posição entre o centro da roda e o ponto escolhido.
- **Dica 2:** O módulo de um produto vetorial $\mathbf{A} = \mathbf{B} \times \mathbf{C}$ é dado por $BC \operatorname{sen}\theta$, onde θ é o ângulo entre os vetores $\mathbf{B}$ e $\mathbf{C}$.
- **Dica 3:** Se a circunferência está em um plano xy, $\boldsymbol{\omega}$ apontará na direção z.

Solução:

a) Vamos supor que a circunferência está em um plano xy. Assim, $\boldsymbol{\omega}$ estará no eixo z, como vemos pela dica 3. Agora, digamos que a velocidade $\mathbf{v_c}$ aponte para a direita. Utilizando a regra da mão direita, vemos que o termo de velocidade de rotação (vamos chamá-lo de $\mathbf{v_w}$) aponta no sentido contrário ao da velocidade do centro no ponto mais inferior da roda. Como o vetor posição está em xy e $\boldsymbol{\omega}$ em z, o ângulo entre esses vetores é 0, o que faz com que o módulo de $\mathbf{v_w}$ seja $\omega \cdot R$. Porém, como a circunferência não desliza, temos que a velocidade no ponto inferior deve ser nula:

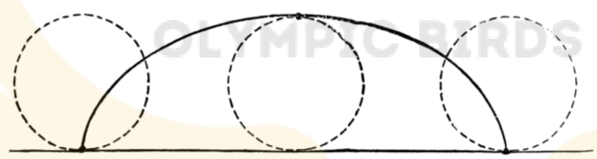
$$\mathbf{v} = 0 \rightarrow \mathbf{v_c} - \mathbf{v_w} = 0 \rightarrow \boxed{v_c = \omega \cdot R} \tag{4}$$

Analisando o ponto superior, vemos que o termo $\mathbf{v_w}$ vai apontar no mesmo sentido de $\mathbf{v_c}$:

$$\mathbf{v} = \mathbf{v_c} + \mathbf{v_w} = \mathbf{v_c} + \omega \cdot R = 2v_c \tag{5}$$

Logo, a velocidade no ponto mais inferior é nula e a do ponto mais superior vale $2v_c = 60\,\mathrm{km/h}$.

b) No referencial da roda, o ponto apenas percorre uma circunferência. Mas, na Terra, ele também possui uma velocidade $\mathbf{v_c}$ para a direita. Logo, o ponto terá que acompanhar a trajetória da circunferência para a direita, fazendo um percurso parecido com o deste desenho:



c) No referencial da roda, todos os pontos percorrem uma trajetória de rotação normal. Logo, a aceleração do ponto mais superior será dada pela aceleração centrípeta:

$$a_1 = \frac{v^2}{R} \tag{6}$$

Porém, vimos no item a) que $v = 2v_c$ no referencial da Terra. Como mudamos para o referencial da roda, devemos subtrair v_c dessa velocidade para encontrá-la no novo referencial. Logo, v $= v_c$:

$$a_1 = \frac{(v_c)^2}{R} \tag{7}$$

No referencial da terra, entretanto, a aceleração centrípeta dependerá do raio de curvatura:

$$a_2 = \frac{v^2}{R_c} = \frac{4v_c}{R_c} \tag{8}$$

Porém, de acordo com as leis da física clássica, ambas essas acelerações devem ser iguais:

$$a_1 = a_2 \Rightarrow \frac{v_c^2}{R_c} = \frac{4(v_c)^2}{R} \Rightarrow \boxed{R_c = 4R} \tag{9}$$

Substituindo o valor do raio dado no enuncidado, o raio de curvatura R_c será $4 \cdot 28\ cm = 112\ cm$.

3 Questão Longa: Canter I, em algum canto do Universo

Escrito por Daniela Emília

Parte A:

Um pequeno astro de massa m, chamado Canter I, encontra-se em órbita de um grande sol de massa M. Percorrendo uma trajetória fechada, a energia mecânica de Canter I é negativa.

a) Prove que a trajetória do astro menor é sempre uma cônica, demonstrando a seguinte equação de coordenadas polares:

$$r = \frac{A}{1 + B\cos\theta} = \frac{A}{1 + \epsilon\cos\theta};\begin{cases} A = \dfrac{L^2}{GMm^2} \\ B = \sqrt{1 + \dfrac{2E}{m}\dfrac{L^2}{(GMm)^2}} = \epsilon \end{cases} \tag{10}$$

- **Dica 1**: Escreva a energia mecânia em função de coordenadas polares.
- **Dica 2**: Use a substituição de variável u=1/r para facilitar sua resolução.

b) Demonstre que Canter I apresenta velocidade areolar constante, independente da excentricidade ϵ da órbita.

c) Encontre a constante da 3ª Lei de Kepler, ao calcular $\frac{T^2}{a^3}$, para qualquer órbita elíptica.

Parte B:

Passados vários anos-luz, uma massa de poeira cósmica encontra-se dispersa pelo sistema de Canter I e o grande sol de massa M não existe mais. A distribuição de massa é dada em função apenas da componente radial de um espaço de coordenadas esféricas, cuja origem é o centro do sistema. Desde tal ponto até uma distância limite de R_o, $\rho(r)_{poeira}$ é definida por $\frac{k}{r}$.

Eventuais colisões entre o astrozinho e a poeira celestial são desprezíveis, bem como as dimensões de Canter I. Além disso, inicialmente, Canter I encontra-se em repouso, a uma distância r ($r << R_o$) à origem.

d) Estime a trajetória de Canter I.

e) Calcule o impulso mínimo necessário para o pequeno astro escapar do campo gravitacional provocado pela extensa esfera de densidade de massa cósmica.

Solução:

a)

i) Ao conservar a energia e o momento angular da massa em órbita, equaciona-se:

$$E = -\frac{GMm}{r} + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2 r^2$$

$$L = m\dot{\theta}r^2 \Rightarrow \dot{\theta}r^2 = \frac{L}{m}$$

Adota-se $u = \frac{1}{r}$ como artifício e, daí, tem-se:

$$\left(\frac{dr}{dt}\right)^2 = \left(\frac{dr}{du}\frac{du}{dt}\right)^2 = \left(-\frac{1}{u^2}\frac{du}{dt}\right)^2 = \left(-r^2\frac{du}{dt}\right)^2$$

Logo, com (10) e (11), encontra-se:

$$E = -GMmu + \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{L^2}{mr^2}$$

$$\dot{r}^2 = r^4\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{m} + 2GMu - \frac{L^2u^2}{m^2}$$

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = \frac{2E}{mr^4} + \frac{2GMu}{r^4} - \frac{L^2u^2}{m^2r^4}$$

ii) Calcula-se uma relação, sem a variável do tempo: a de $\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2$, a partir de (10) e (12), dividindo ambos os lados por $\dot{\theta}^2$:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{\frac{2E}{mr^4}}{\frac{L^2}{m^2r^4}} + \frac{\frac{2GMu}{r^4}}{\frac{L^2}{m^2r^4}} - \frac{\frac{L^2u^2}{m^2r^4}}{\frac{L^2}{m^2r^4}}$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2Em}{L^2} + \frac{2GMm^2u}{L^2} - u^2$$

iii) Buscando uma solução trigonométrica, de (13), encontra-se:

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2Em}{L^2} + \left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2 - u^2 + \frac{2GMm^2u}{L^2} - \left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \frac{2Em}{L^2} + \left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2 - \left(u - \frac{GMm^2}{L^2}\right)^2$$

$$\therefore \left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = \left(\sqrt{\frac{2Em}{L^2} + \left(\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2}\right)^2 - \left(u - \frac{GMm^2}{L^2}\right)^2$$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 = Y^2 - X^2; \begin{cases} X = u - \frac{GMm^2}{L^2} = u - \frac{1}{A} \\ Y = \sqrt{\frac{2Em}{L^2} + \left(\frac{1}{A}\right)^2} = \sqrt{\frac{2Em}{L^2} + \left(\frac{1}{A}\right)^2} \end{cases}$$

Uma solução para essa equação diferencial é:

$$\Rightarrow X = Y\cos\theta$$

Por fim,

$$u - \frac{1}{A} = \sqrt{\frac{2Em}{L^2} + \left(\frac{1}{A}\right)^2}\cos\theta$$

$$\Rightarrow u = \frac{1}{r} = \sqrt{\frac{2Em}{L^2} + \left(\frac{1}{A}\right)^2}\cos\theta + \frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{r} = \sqrt{\left(\frac{1}{A}\right)^2 \left(\frac{\frac{2Em}{L^2}}{\left(1+\frac{GMm^2}{L^2}\right)^2}\right)} \cos\theta + \frac{1}{A} = \frac{1}{A}\left(\sqrt{1+\frac{2E}{m}\frac{L^2}{GM^2m^2}}\right)\cos\theta + \frac{1}{A}$$

$$\frac{1}{r} = \frac{\sqrt{1+\frac{2E}{m}\frac{L^2}{GM^2m^2}}\cos\theta + 1}{A} = \frac{B\cos\theta + 1}{A}$$

$$\therefore r = \frac{A}{1 + B\cos\theta}$$

b) Em um intervalo dt, calcula-se o dA varrido pela área do triângulo construído pelos vetores $\vec{r}$ e $(\vec{v}\cdot dt)$. Assim sendo, tem-se:

$$dA = \frac{1}{2}|\vec{r}||\vec{v}\cdot dt| \operatorname{sen}\theta = \frac{1}{2}|\vec{r}\times(\vec{v}\cdot dt)|$$

$$\Rightarrow \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2}|\vec{r}\times\vec{v}|$$

Note que, a respeito do momento angular, em um cenário de aplicação apenas de força central, calcula-se:

$$\vec{L} = m(\vec{r}\times\vec{v}) \Rightarrow \frac{\vec{L}}{m} = \vec{r}\times\vec{v}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = m(\vec{v}\times\vec{v}) + \vec{r}\times(m\cdot\vec{a}) = m|\vec{v}||\vec{v}| \operatorname{sen} 0 + |\vec{r}||\vec{F}| \operatorname{sen} 0 = 0$$

$$\therefore \vec{L} = cte$$

Então, conforme (8) e (9),

$$\frac{dA}{dt} = \frac{L}{2m} = cte$$

c)

i) Tendo em vista as propriedades da elipse, esta como trajetória da órbita periódica, equaciona-se:

$$2a = r_{maior} + r_{menor} = r_{\text{afélio}} + r_{\text{perifélio}}$$

$$2a = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1+\epsilon} + \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1-\epsilon} = \frac{L^2}{GMm^2}\frac{2}{(1-\epsilon^2)}$$

$$a = \frac{L^2}{GMm^2}\frac{a^2}{b^2}$$

$$\therefore L^2 = GMm^2\frac{b^2}{a}$$

ii) Além disso, mediante a 2ª Lei de Kepler e lembrando que a área da elipse é dada por πab (onde a e b são os semi-eixos da elipse), equaciona-se:

$$\frac{A}{T} = \frac{dA}{dt} \Rightarrow \frac{\pi ab}{T} = \frac{L}{2m}$$

Portanto,

$$T = \frac{2\pi ab}{\frac{L}{2m}} = \frac{2\pi mab}{L}$$

Substituindo a expressão de L em termos de a e b derivada anteriormente:

$$L^2 = GMm^2\frac{b^2}{a}$$

$$L = m\sqrt{\frac{GMb^2}{a}}$$

Agora substituímos na expressão de T:

$$T = \frac{2\pi mab}{m\sqrt{\frac{GMb^2}{a}}} = \frac{2\pi ab\sqrt{a}}{\sqrt{GMb^2}} = \frac{2\pi a^{3/2}}{\sqrt{GM}}$$

Assim, obtém-se a conhecida forma da 3ª Lei de Kepler:

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM}a^3$$

Esta equação relaciona o período orbital T com o semi-eixo maior a da elipse, mostrando que T^2 é proporcional a a^3.

d)

i) Calcula-se o campo gravitacional da poeira cósmica, aquele que, em primeira instância, interage com Canter I:

$$g = \int_0^r \frac{G\,dm}{r^2} = \frac{G}{r^2}\int_0^r \rho(v)\,dv = \frac{G}{r^2}\int_0^r \frac{k}{r}\,4\pi r^2\,dr$$

Ao resolver essa integral, obtém-se:

$$g = \frac{G}{r^2}\cdot 2\pi k r^2 = 2G\pi k$$

ii) Logo, no que diz respeito à força gravitacional atuante em Canter I, determina-se $mg = m{\cdot}2G\pi k = 2Gm\pi k$, como uma força central. Essa $\vec{F_g}$ realiza trabalho sobre o pequeno astro parado, fazendo-o percorrer um movimento retilíneo uniformemente variado, em direção ao centro do sistema.

e) Faz-se uma abordagem intermediária para as condições de r a R_o e para as a partir de R_o.

i) Ainda em um contexto dentro da massa gravitacional da nuvem, tem-se uma análise energética para Canter I:

$$\tau_g = F_g\,d = \Delta E_c$$

$$\therefore 2Gm\pi k(R_o - r) = \frac{1}{2}mv_1^2 \Rightarrow v_1 = 2\sqrt{G\pi k(R_o - r)}$$

ii) Agora em um contexto de velocidade de escape, ao partir da superfície da massa de interação gravitacional, tem-se mais uma perspectiva de conservação de energia:

$$E = 0 = \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{G}{R_o}\int_0^{R_o} \rho(v)\,dv \Rightarrow \frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{G}{R_o}\int_0^{R_o} \rho(v)\,dv$$

Resolvendo essa integral, obtemos:

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = 2G\pi k R_o \Rightarrow v_2 = 2\sqrt{\frac{G\pi k R_o}{m}}$$

iii) Portanto, determina-se o impulso total, aplicando (15) e (16):

$$I = I_1 + I_2 = m(v_1 - 0) + m(v_2 - 0) = mv_1 + mv_2$$

Substituindo os valores de v_1 e v_2, temos:

$$I = 2m\sqrt{G\pi k(R_o - r)} + 2m\sqrt{\frac{G\pi k R_o}{m}}$$

Simplificando:

$$I = 2m\sqrt{G\pi k R_o}\left[\left(1 - \frac{r}{R_o}\right)^{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{1}{m}}\right]$$

Finalmente, o impulso é dado por:

$$\therefore I = 2m\sqrt{G\pi k R_o}\left(1 - \frac{r}{2R_o} + \sqrt{\frac{1}{m}}\right)$$