1 Questão: Octcubo

Escrito por Kauan Emanuel

Considere um cubo de lado l e um octaedro regular, com os vértices presentes no centro de cada face do cubo. Ao repetir a situação na parte interna do octaedro, um cubo contendo um octeadro, por uma grande quantidade de vezes e considerando S a soma dos volumes de todos os cubos, o valor de S é:

a) $l^3 \times \frac{12+2\sqrt{3}}{13}$

b) $l^3 \times \frac{8+\sqrt{3}}{14}$

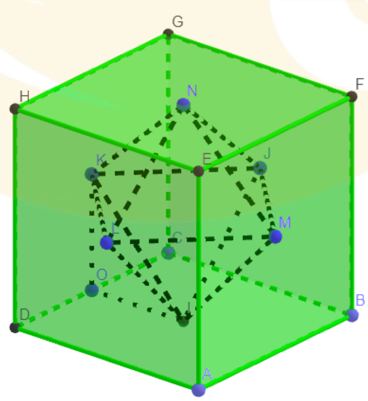
c) $l^3 \times \frac{\sqrt{3}}{13}$

d) $l^3 \times \frac{7+2\sqrt{3}}{15}$

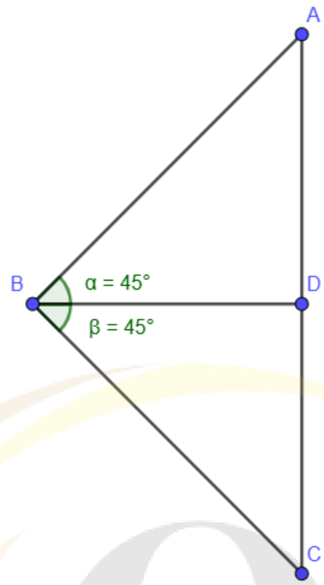
e) NDA

Solução:

Representando a situação inicial:



Perceba que $KO = OI = \frac{l}{2}$. Por pitágoras no triângulo ΔOKI, descobrimos que o lado do octaedro regular vale $\frac{l\sqrt{2}}{2}$. Sendo assim, ao tentar colocar outro cubo dentro do octaedro, teremos a seguinte situação:



Sabe-se que os triãngulos no octaedro regular são equiláteros, então $AB = \frac{l\sqrt{2}}{2} \times \frac{\sqrt{3}}{6}$. Mulplicando por $2cos45$, obtemos o lado do novo cubo construido, visto que $AD = DC$. Logo, o lado do novo cubo é: $\frac{l\sqrt{3}}{6}$.

Fazendo mesmo processo várias vezes, você obtém uma PG infinita de razão $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Tomando o volume do cubo como l^3, tem-se que:

$S = V_1 + V_2 + V_3 + ... = l^3 + (\frac{l\sqrt{3}}{6})^3 + (\frac{l\sqrt{3}^2}{6^2})^3 + ... \rightarrow S = l^3 \times \frac{1}{1-\frac{\sqrt{3}}{6}}$

$$\boxed{S = l^3 \times \frac{12 + 2\sqrt{3}}{13}}$$

Resposta: (a)

2 Questão: Funções e teoria dos números

Escrito por Kauan Emanuel

Considere uma função $f : R \to R$, tal que $f(f(x^2) + f(y)) = xf(x) + y$. Seja N a soma dos números das afirmativas corretas, o valor do algarismo da unidade de N^{2024} é:

1. $f(0) = 0$
2. f é injetora
3. f é sobrejetora
4. $f(x) \equiv 0$ é uma solução
5. f é uma função crescente

a) 0
b) 2
c) 5
d) 6
e) NDA

Solução:

Primeiramente, vamos verificar se a função é injetora. Para isso, tome $x = 0$:

$$f(f(x^2) + f(y)) = xf(x) + y \to f(f(0) + f(y)) = y$$

Condição para f ser injetora: se $f(a) = f(b)$, então $a = b$.

$$f(a) = f(b) \to f(0) + f(a) = f(0) + f(b)$$

Aplicando f em ambos os lados da equação acima:

$$f(f(0) + f(a)) = f(f(0) + f(b)) \therefore a = b$$

Logo, f é injetora, o que torna o item 2 verdadeiro.

Fazendo $x = y = 0$, temos que

$$f(f(0)) = 0 \therefore f(0) = 0$$

Logo o item 1 é verdadeiro.

Nesse momento, você deve pensar quais funções satisfazem a equação funcional da questão. No caso, é fácil notar que $f(x) \equiv x$ e $f(x) \equiv -x$ é uma solução possível. Sendo assim, o item 3 torna-se verdade, pois a função $f(x) = x$ e $f(x) = -x$ é sobrejetora, bem como o domínio da função não possui nenhuma restrição. Em decorrência desse fato, conclui-se que os itens 4 e 5 são falsos, pois $f(x) = 0$ não é

injetiva e $f(x) = -x$ é decrescente.
$N = 1 + 2 + 3 = 6$ Verficando os restos na divisão por 10 das potências de 6, percebe-se que o único resto possível é o próprio número 6. Logo, o algarismo da unidade de N^{2024} é 6.

Resposta: (d)

3 Questão: Rotas curvas no plano xy

Escrito por Kauan Emanuel

Considere duas curvas no plano xy, $C_1 : x^2 - 2x + y^2 - 10y = 10$ e $C_2 : 16x^2 - 96x + y^2 - 2y = -1$. Determine:
a) A excentricidade dessas curvas;
b) As tangentes a curva 2 pelo ponto $K(0, 1 + 3\sqrt{7})$;
c) O lugar geométrico dos pontos $P(x, y)$ tal que o ângulo formado pelas retas do centro das curvas ao ponto P seja de 60°.

Solução:

a) Reorganizando as equações dadas no enunciado:

$$C_1 : x^2 - 2x + y^2 - 10y = 10 \to x^2 - 2x + 1 + y^2 - 10y + 25 = 10 + 1 + 25$$
$$(x - 1)^2 + (y - 5)^2 = 36 = 6^2$$

É uma circunferência de centro $(1, 5)$ e raio 6. Logo, a excentricidade de C_1 é 0.

$$C_2 : 16x^2 - 96x + y^2 - 2y = -1 \to 16(x^2 - 6x + 9) + (y^2 - 2y + 1) = 144$$
$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{144} = 1$$

É uma elipse de centro $(3, 1)$ Da equação, sabemos que o semieixo maior(a) mede 12 e o menor(b) mede 4.
Pela equação fundamental: $a^2 = b^2 + c^2 \to c = \sqrt{a^2 - b^2} \to e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2-b^2}}{a} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$

Resposta: 0 e $\frac{2\sqrt{2}}{3}$

b) Vamos verificar se o ponto K está contido em C_2, substituindo-o na equação.

$$\frac{(x-3)^2}{16} + \frac{(y-1)^2}{144} = 1 \to \frac{(0-3)^2}{16} + \frac{(1 + 3\sqrt{7} - 1)^2}{144} = 1$$

Então, K é um ponto na curva 2.
Através de cálculo, descobrimos uma forma de calcular as retas tangentes a uma elipse efetuando trocas de termos da equação. Usaremos aqui as seguintes trocas:

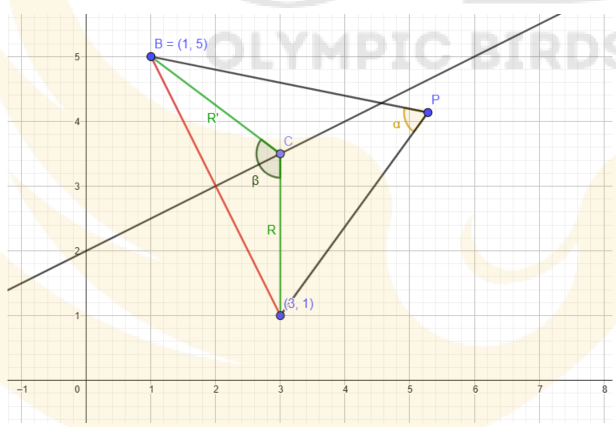
- $x^2 \to xx_o$
- $y^2 \to yy_o$
- $x \to \frac{x+x_o}{2}$
- $y \to \frac{y+y_o}{2}$

$$16x^2 - 96x + y^2 - 2y = -1$$

$$16x(0) - 96\frac{x+0}{2} + y(1+3\sqrt{7}) - 2\frac{y+1+3\sqrt{7}}{2} = -1$$

$$96x - (3\sqrt{7}-1)y + 3\sqrt{7}$$

Resposta: $96x - (3\sqrt{7}-1)y + 3\sqrt{7}$
c) Perceba que o comando diz que o ângulo entre as retas não deve havee mudanças. Então, o lugar geométrico do ponto P será uma circunferência, demoninado de arco capaz de 60°. Como o item requisitou a equação, vamos as contas.



$$d_{AB}^2 = (3-1)^2 + (1-5)^2 = 20$$

Utilizando lei dos cossenos no ΔABP, temos:

$$d_{AB}^2 = 2R^2(1 - cos\beta)$$

Note que, como o LG(P) é uma circunferência, logo $\beta = 2\alpha = 120$. Então,

$$20 = 2R^2(1 - cos120) \to R^2 = \frac{20}{3} \therefore R = \frac{2\sqrt{15}}{3}$$

Sabemos que pelo ponto médio do segmento AB passa a reta mediatriz que contém o seu centro. Sendo assim, podemos montar um sistema entre a reta que passa pelo centro da circunferência e a sua distância a reta AB. Considere (x_c, y_c) o ponto C, que corresponde ao centro arbitrário da circunferência.

$AB : \begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 5 & 1 \\ x & y & 1 \end{vmatrix} = 0 \rightarrow 2x + y - 7 = 0$

Logo, a reta perpendicular é $x - 2y + 4 = 0$

$$d_{P,AB} = \frac{|2x_c + y_c - 7|}{\sqrt{2^2 + 1^2}} = \frac{|2x_c + y_c - 7}{\sqrt{5}} = R\cos 60$$
$$x_c - 2y_c - 4 = 0$$

Resolvendo o sistema, encontramos que: $x_c = \frac{10\sqrt{3}+63}{15}$ e $y_c = \frac{10\sqrt{3}+3}{15}$ ou $x_c = \frac{63-10\sqrt{3}}{15}$ e $y_c = \frac{3-10\sqrt{3}}{15}$
Assim sendo, as possíveis equações são

$$\left(x - \frac{10\sqrt{3} + 63}{15}\right)^2 + \left(y - \frac{10\sqrt{3} + 3}{15}\right)^2 = \frac{20}{3}$$
$$\left(x - \frac{63 - 10\sqrt{3}}{15}\right)^2 + \left(y - \frac{3 - 10\sqrt{3}}{15}\right)^2 = \frac{20}{3}$$

Exceto os pontos A e B.

Resposta: $(x - \frac{10\sqrt{3}+63}{15})^2 + (y - \frac{10\sqrt{3}+3}{15})^2 = \frac{20}{3}$ **ou** $(x - \frac{63-10\sqrt{3}}{15})^2 + (y - \frac{3-10\sqrt{3}}{15})^2 = \frac{20}{3}$