Solucionário OMpD 2024 1ªFase

Pedro Duailibe - Olympic Birds

23 de agosto de 2024

Isso é uma coleção de soluções da 1ª fase da Olimpíada Matemáticos por Diversão 2024, da lenda Davi Lópes. A maioria das soluções está bem direta e pode até pular algumas etapas, mas qualquer solução que passar essa impressão os passos omitidos podem ser completados pelo leitor. Como a prova é objetiva, acabei não ligando tanto pra isso em todas as soluções. Bom estudo!

Figura 1: A lenda.

Conteúdo

§0 Problemas

1. Seja f a funcão real definida por $f(x) = 3x - 1$, para todo x real. Por exemplo, $f(0) = 3 \cdot 0 - 1 = -1$ e $f(f(0)) = f(-1) = 3 \cdot (-1) - 1 = -4$. Qual é o valor de $f(f(f(f(f(2)))))$? Note que f foi aplicada 5 vezes.

(A) 41 (B) 122 (C) 365 (D) 1094 (E) 3281

2. Um matemático desleixado não lavou as mãos direito e acabou ficando gripado. Para se curar, ele teve que tomar os 15 comprimidos de uma cartela de remédio antigripal. A recomendação médica é de que, em cada dia, ele tome 2 ou 3 comprimidos. Supondo que o matemático tomou vergonha na cara e agora vai cuidar bem da sua saúde e seguir a risca o que o médico diz, de quantas maneiras ele pode consumir os 15 omprimidos?

(A) 21 (B) 28 (C) 36 (D) 45 (E) 55

3. Qual é o algarismo das unidades do número

$$2024 + 202^4 + 20^{24} + 2^{204}?$$

(A) 0 (B) 2 (C) 4 (D) 6 (E) 8

4. Na figura a seguir, os pontos A, B, C, D, E, F, G estão no plano, de modo que A, B, E, F estão sobre uma mesma reta, bem como C, D, G, F, e

$$AB = BC = CA = BD = DE = EF = GF.$$

Qual a medida do ângulo $\angle AFC$?

(A) 11° (B) 12° (C) 13° (D) 14° (E) 15°

5. Os quatro cantos de um tabuleiro de xadrez 8 x 8 são deletados. Quantas maneiras existem de colocar 8 torres iguais nas 60 casas restantes, de modo que não haja duas torres na mesma linha, nem na mesma coluna?

(A) 7200 (B) 10800 (C) 12000 (D) 14400 (E) 21600

6. Ribamar escreve vários números reais distintos em um quadro. Sabe-se que, para quaisquer três números reais distintos a, b, c no quadro, ao menos um dentre os números $a + b$, $b + c$, $c + a$ também é um número escrito no quadro. Qual é a maior quantidade possível de números escritos no quadro por Ribamar?

(A) 4 (B) 5 (C) 6 (D) 7 (E) 8

7. Seja $ABCD$ um quadrado de lado 1. São escolhidos pontos P sobre o lado $\overline{BC}$ e Q sobre o lado $\overline{CD}$ de modo que $PC + CQ$ mede metade do lado do quadrado. Assim, o menor valor possível para a área do triângulo APQ é:

(A) $\frac{7}{32}$ (B) $\frac{1}{4}$ (C) $\frac{9}{32}$ (D) $\frac{5}{16}$ (E) $\frac{3}{8}$

8. Sejam a e b inteiros positivos cujo mínimo múltiplo comum é igual a 2024. Qual é o menor valor possível de $a + b$?

(A) 90 (B) 111 (C) 156 (D) 195 (E) 261

9. Seja $ABCD$ um trapézio com $\overline{AD}$ paralelo a $\overline{BC}$, $AD = 20$ cm, $AB = 30$ cm e $CD = 40$ cm. Sabe-se que as bissetrizes internas dos ângulos $\angle BAD$ e $\angle ADC$ intersectam-se num ponto E sobre o lado $\overline{BC}$. Qual é a área de $ABCD$?

(A) 810 (B) 840 (C) 1080 (D) 1620 (E) 2160

10. "Faz o L" é um jogo num tabuleiro 5×5 onde queremos descobrir em qual das 25 casinhas unitárias está escondida uma joia. Para tanto, devemos colocar nesse tabuleiro uma ficha branca em formato de L (na figura abaixo, vemos as quatro possíveis fichas), de modo que ela ocupe exatamente 3 casinhas. Caso a joia esteja numa das 3 casinhas da ficha, o L ficará vermelho, e caso ela não esteja numa das 3 casinhas da ficha, o L permanecerá branco.

Qual é o número mínimo de fichas que devemos ter para termos erteza em que casa está a joia, independente da posição que ela esteja?

(A) 6 (B) 7 (C) 8 (D) 9 (E) 10

11. A sequência $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ satisfaz $a_0 = 1$, $a_1 = 2024$ e, para todo inteiro ≥ 2, $a_n = 2a_{n-1} + a_{n-2}$. Seja ainda:

$$S = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{k-1}}{a_k^2 - a_{k-1}^2} = \frac{a_0}{a_1^2 - a_0^2} + \frac{a_1}{a_2^2 - a_1^2} + \frac{a_2}{a_3^2 - a_2^2} + ...$$

Qual é o valor de $\frac{1}{S}$?

(A) 4046 (B) 4044 (C) 2023 (D) 2022 (E) 2021

12. Para cada inteiro positivo n, seja $s(n)$ a soma dos algarismos de n. Por exemplo, $s(54321) = 5 + 4 + 3 + 2 + 1 = 15$. Quantos inteiros positivos n existem tais que $s(n) + 4s(2n) = 2n + 2$?

(A) 1 (B) 2 (C) 3 (D) 4 (E) 5

13. Sejam a, b, c as três raízes do polinômio $P(x) = x^3 - \frac{1}{2}x^2 + x - 2024$. O polinômio, em x, $Q(x) = x^3 + ux^2 + vx + w$, possui raízes distintas $bc - a^2$, $ca - b^2$ e $ab - c^2$. Qual é o valor da soma dos coeficientes de $Q(x)$?

(A) 4 (B) 126 (C) 253 (D) 1012 (E) 2024

14. A pirâmide ABCDM possui como base o quadrado $ABCD$, de lado 13 cm. As arestas laterais AM e BM também medem 13 cm cada, e as arestas laterais CT e DT medem 10 cm cada. Sobre a face CDM, onstruímos a pirâmide $CDMN$, onde as arestas laterais CN, DN e MN medem 13 cm cada. Qual é a distância entre as retas AD e MN?

(A) $\frac{15}{13}$ (B) $\frac{30}{13}$ (C) $\frac{60}{13}$ (D) $\frac{120}{13}$ (E) $\frac{240}{13}$

15. Sejam a e b inteiros positivos tais que a e b são menores que 20 e que a^2, ao ser escrito na base b, é igual a $(144)_b$. Se a e b são lados de um triângulo retângulo com todos os seus três lados de medidas inteiras, e se S é a soma de todos os possíveis valores de a, qual é o valor numérico de S?

(A) 23 (B) 27 (C) 32 (D) 35 (E) 40

16. Num certo dia, as três amigas internautas Ana, Banana e Cana planejam se encontrar num Maid Café em algum horário entre 12h e 13h. Ana e Banana chegarão, cada uma, num horário aleatório entre as 12h e as 13h, e esperarão 10 minutos ou até as 13h para que as três amigas apareçam, indo embora caso isso não aconteça. Cana hegará no Maid Café ao meio dia e sairá às 12h45. Se a probabilidade de as três amigas se encontrarem é p/q, com p e q são inteiros positivos primos entre si, qual é o resto de $p + q$ por 5?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

17. Para cada inteiro positivo n, seja $\varphi(n)$ o número de inteiros positivos $k \in \{1, ..., n\}$ tais que $\text{mdc}(k, n) = 1$ e seja $n!$ o produto dos primeiros n inteiros positivos. Por exemplo, para $n = 6$, temos que $6! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 6$ e que $\varphi(6) = 2$, pois dentre 1,2,3,4,5,6 apenas 1 e 5 possuem mdc igual a 1 com 6. Sabendo que

$$\frac{\varphi(2!)}{\varphi(1!)} + \frac{\varphi(3!)}{\varphi(2!)} + \frac{\varphi(4!)}{\varphi(3!)} + ... + \frac{\varphi(101!)}{\varphi(100!)} = \frac{p}{q},$$

onde p e q são inteiros positivos primos entre si, qual é o resto de $p + q$ por 5?

(A) 0 (B) 1 (C) 2 (D) 3 (E) 4

18. Sejam a, b, c, x, y, z números reais positivos tais que $x > b, c$; $y > c, a$; $z > a, b$ e

$$x + y + z = 5$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 11$$

$$\sqrt{y - a} + \sqrt{z - a} = \sqrt{z - b} + \sqrt{x - b} = \sqrt{x - c} + \sqrt{y - c} = 2.$$

Qual o valor de $\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c}$?

(A) 1 (B) $\sqrt{2}$ (C) $\sqrt{3}$ (D) 2 (E) 3

19. Seja ABC um triângulo com $\angle A = 80°$ e $\angle C = 70°$. D é o pé da bissetriz interna de $\angle A$. Sejam P e Q pontos em BC tais que $\angle PAB = \angle QAD$ e $DP = DQ$, com $BP < DB$. Seja também L um ponto em BC tal que $CL/LB = CQ/BP$. Denote por E um ponto na reta AP tal que $\angle BEA = \angle DQA$ e F um ponto na reta AQ tal que $\angle AFC = \angle DPA$. Seja T o encontro de FB e EC. Se LT intersecta a mediatriz de BC em X, qual é o valor do ângulo $\angle XCA$?

(A) 70° (B) 80° (C) 90° (D) 100° (E) 110°

20. As linhas de um tabuleiro 7×7 são numeradas 1,2,...,7, de cima para baixo, e as colunas desse tabuleiro são numeradas 1,2,...,7, da esquerda para a direita. De quantas maneiras podemos escolher 8 casas deste tabuleiro de modo que, para quaisquer duas casas escolhidas X e Y, se X está na linha L_X e na coluna C_X, e se Y está na linha L_Y e na coluna C_Y, então $L_X - L_Y \geq 3$ ou $C_X - C_Y \geq 3$?

(A) 27 (B) 51 (C) 54 (D) 60 (E) 81

§1 Soluções

§1.1 Problema 1

Basta aplicar a função iterativamente com valor inicial 2 cinco vezes.

$$2 \mapsto 5 \mapsto 14 \mapsto 41 \mapsto 122 \mapsto 365.$$

GABARITO: C

§1.2 Problema 2

Seja x a quantidade de vezes que ele toma dois comprimidos em um dia e y a quantidade de vezes que ele toma 3 comprimidos em um dia. Nós temos obviamente que

$$2x + 3y = 15.$$

Os pares solução (x, y) dessa equação diofantina são $(0, 5)$, $(3, 3)$ e $(6, 1)$.

- Solução $(0, 5)$: Há apenas 1 maneira de tomar os remédios dessa forma.
- Solução $(3, 3)$: Há $\binom{6}{3} = 20$ maneiras de tomar os remédios dessa forma.
- Solução $(6, 1)$: Há $\binom{7}{1} = 7$ maneiras de tomar os remédios dessa forma.

Logo, a quantidade pedida no enunciado é $1 + 20 + 7 = 28$.
GABARITO: B.

§1.3 Problema 3

$$4 + 6 + 0 + 6 \equiv 6 \pmod{10}$$

GABARITO: D.

§1.4 Problema 4

Seja $\angle AFC = x$. Como $\triangle ABC$ é equilátero, nós temos:

$$\angle BCD = 60^\circ - x \Rightarrow \angle DBE = 60^\circ - 2x \Rightarrow \angle EDG = 60^\circ - 3x \Rightarrow \angle GEF = 60^\circ - 4x$$

.

$$60^\circ - 4x = x \Rightarrow x = 12^\circ.$$

GABARITO: B

§1.5 Problema 5

Note que para atender a condição do problema, sempre deve ter quatro torres no subtabuleiro 6 x 6 do meio, então para começar a contagem, escolhemos dentre as 6 colunas do tabuleiro 6 x 6 quatro delas. Depois precisamos escolher a casa de cada torre. Após isso, escolhemos as posições das torres dos extremos do tabuleiro, em que há duas opções de configuração para os dois pares de extremos. Dessa forma, o número que ficamos com é

$$\binom{6}{4} \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 2 = 21600.$$

GABARITO: E.

§1.6 Problema 6

[Marcos Burdzinski] Nós começamos escrevendo 0, porque o zero é o elemento neutro da adição então será um número adicional a nossa sequência. Nós também temos o seguinte lema:

Lema 1.1

Não é possível existir 4 números positivos ou mais no quadro.

Demonstração. Seja a, b, c, d os quatro maiores números escritos por Ribamar, com $a < b < c < d$. Analisando a tripla b, c, d, $b + d$ e $c + d$ não podem existir no quadro $\Rightarrow b + c = d$.

Agora, analise a tripla a, c, d. Nós temos que $a + c \neq d$, pois $a \neq b$ e $b + c = d$. Também temos que $a + d$ e $c + d$ não podmem estar no quadro, o que invalida a sequência. □

O lema vale igualmente para 4 números negativos, então sabemos que possuem no máximo 3 números positivos e 3 números negativos. Agora note que a sequência

$$\{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$$

é válida. Logo, o número máximo de números é 7.

GABARITO: D.

§1.7 Problema 7

Por "simetria", é de se esperar que o valor mínimo da área será quando $PC = CQ = \frac{1}{4}$. Mas nós podemos provar isso da seguinte forma legal: Seja $f(x)$ a área $[ABCD] - [APQ]$, onde x é a distância do ponto médio de BC e P. Nós temos que

$$f(x) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} + x\right) + \frac{1}{2}(1 - x) + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2} - x\right)x$$

$$\Rightarrow f(x) = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{4}x + \frac{3}{4}, \quad x \in \left[0, \frac{1}{2}\right].$$

Essa função atinge o máximo em seu ponto de inflexão x_0, onde $f'(x_0) = 0$. Logo,

$$f'(x) = -\frac{1}{4}x + \frac{1}{4} \Rightarrow x_0 = \frac{1}{4}.$$

Dessa forma, temos que

$$f\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{25}{32} \Rightarrow [APQ] = 1 - \frac{25}{32} = \frac{7}{32}.$$

GABARITO: A.

§1.8 Problema 8

Primeiramente, note que $2024 = 2^3 \cdot 11 \cdot 23$. Se escolhermos os divisores 88 e 23 de 2024 como a e b, minimizamos a soma $a + b$. Logo,

$$a + b = 88 + 23 = 111.$$

GABARITO: B.

§1.9 Problema 9

Note que os triângulos ABE e ECD são isósceles, pois $\angle BAE = \angle BEA$ e $\angle CDE = \angle CED$. Logo, $BC = 30 + 40 = 70$. Isso nos deixa com o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x^2 + h^2 = 40^2 \\ y^2 + h^2 = 30^2 \\ x + y = 50. \end{cases}$$

Subtraindo as duas primeiras equações, temos

$$(x+y)(x-y) = 50(2x-50) = 700 \Rightarrow x = 32 \Rightarrow h^2 = 576 \Rightarrow h = 24.$$

Assim,

$$[ABCD] = \frac{(20+70)\cdot 24}{2} = 1080.$$

GABARITO: C.

§1.10 Problema 10

Note que podemos cobrir 24 das 25 casas do tabuleiro com 8 peças sem sobreposição. Quando colocamos a última peça, ela estará sobrepondo duas outras peças em uma casa só. A peça que iluminará junto com a nona peça do tabuleiros determina a localização da joia.

GABARITO: D.

§1.11 Problema 11

A ideia nesse tipo de problema normalmente é encontrar ou uma PG ou uma soma telescópica. Vamos analisar o nosso somando:

$$\frac{a_k}{a_{k+1}^2 - a_k^2} = \frac{a_k}{(a_{k+1}+a_k)(a_{k+1}-a_k)} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{a_{k+1}-a_k} - \frac{1}{a_{k+1}+a_k}\right).$$

Isso vai gerar uma soma telescópica, i.e

$$S = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{1}{a_{k+1}-a_k} - \frac{1}{a_{k+1}+a_k}\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2023} + 0 + 0 + \dots\right).$$

Logo, $\frac{1}{S} = 4046$.

GABARITO: A.

§1.12 Problema 12

A primeira coisa a notar nesse problema é que n não pode ser muito grande, pois $s(n)$ obviamente cresce muito mais lentamente que n. Nós também temos que $s(n) \leq n$, mas normalmente $s(n)$ é bem menor que n, a não ser se n seja muito pequeno. Olhando para a equação, temos que $s(n)$ tem que ser par. Além disso, $s(n) \equiv n \pmod 9$. Analisando o lado esquerdo modulo 9, temos

$$s(n) + 4s(2n) \equiv n + 4\cdot 2n \equiv 0 \pmod 9,$$

Ou seja, $2(n+1) \equiv 0 \pmod 9 \Rightarrow n \equiv -1 \pmod 9$. Obviamente $n = 8$ não funciona, mas testando $n = 17$ chegamos em

$$s(17) + 4s(2 \cdot 17) = 36 = 2(17+1),$$

que satisfaz a equação. Para $n = 26$ entre outros, você pode argumentar que o lado esquerdo é sempre menor que o lado direito. Logo, existe somente uma solução.

GABARITO: A.

§1.13 Problema 13

Nós usamos as Relações de Girard. Usando o fato que a, b, c são raízes de $P(x)$, temos que

$$\begin{cases} a+b+c = \frac{1}{2} \\ ab+bc+ca = 1 \\ abc = 2024. \end{cases}$$

Aplicando Girard em $Q(x)$, temos que

$$\begin{cases} -u = ab+bc+ca-a^2-b^2-c^2 \\ v = abc(a+b+c) - a^3(b+c) - b^3(c+a) - c^3(a+b) + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \\ -w = -abc(a^3+b^3+c^3) + a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3. \end{cases}$$

Nós podemos facilmente achar u, pois

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+bc+ca) \Rightarrow a^2+b^2+c^2 = -\frac{7}{4}.$$

Logo, $u = -\frac{7}{4} - 1 = -\frac{11}{4}$.

Para achar v, considere

$$(a^2+b^2+c^2)(ab+bc+ca) = a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) + abc(a+b+c).$$

Logo,

$$a^3(b+c) + b^3(c+a) + c^3(a+b) = -\frac{4055}{4}.$$

Nós também temos

$$(ab+bc+ca)^2 = a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 + 2abc(a+b+c) \Rightarrow a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 = -2023.$$

Assim, chegamos em

$$v = 1012 + \frac{4055}{4} - 2023 = \frac{11}{4}.$$

Para achar w, considere

$$a^3+b^3+c^3-3abc = (a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca) \Rightarrow a^3+b^3+c^3 = \frac{48565}{8}.$$

Também temos

$$a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 - 3a^2b^2c^2 = (ab+bc+ca)(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2 - abc(a+b+c))$$
$$\Rightarrow a^3b^3 + b^3c^3 + c^3a^3 = 12286693.$$

Assim, chegamos em

$$w = 2024 \cdot \frac{48565}{8} - 12286693 = 252$$

Finalmente, a soma dos coeficientes é

$$1 - \frac{11}{4} + \frac{11}{4} + 252 = 253.$$

GABARITO: C.

§1.14 Problema 14

GABARITO: ?

§1.15 Problema 15

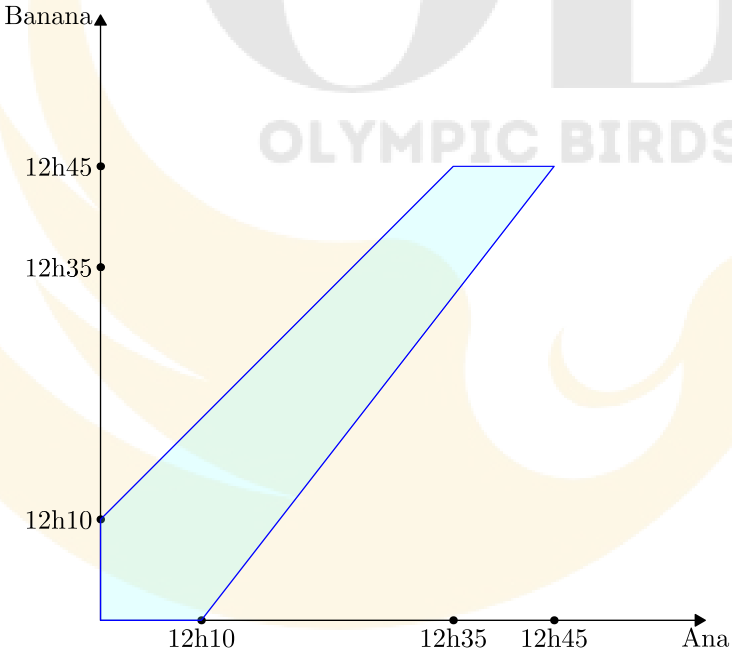
Nós temos $a^2 = 1 \cdot b^2 + 4 \cdot b + 4 = (b+2)^2 \Rightarrow a = b + 2$. Também temos a condição que $b \geq 5$, pois o algarismo 4 existe na base b. Logo, se a e b são lados de um triângulo, temos duas opções: ou ambos são catetos, ou a é hipotenusa.

- Os dois são catetos: o único par (a, b) que satisfaz as condições do enunciado é (8,6).
- A hipotenusa é a: Os pares (a, b) que satisfazem as condições são (10, 8) e (17,15).

Logo, $S = 8 + 10 + 17 = 35$.
GABRITO: D.

§1.16 Problema 16

Primeiramente, note que Ana e Banana devem chegar até 12h45, pois esse é o horário que Cana sai. Considere o seguinte diagrama onde um horário que Ana chega no eixo x é mapeado aos possíveis valores de horários que Banana poderia chegar no eixo y.



A área azul representa $\frac{1}{8}$ de todo o espaço amostral possível de posições no tempo que Ana e Banana poderiam chegar, logo

$$p + q = 1 + 8 = 9 \equiv 4 \pmod 5.$$

GABARITO: E.

§1.17 Problema 17

Nós usamos um lema bem conhecido, que diz que

$$\varphi(n) = n \prod_{p|n} \left(1 - \frac{1}{p}\right), \quad p \text{ primo}$$

.

Logo,

$$\frac{\varphi((k+1)!)}{\varphi(k!)} = \frac{(k+1)! \prod_{p|(k+1)!} \left(1 - \frac{1}{p}\right)}{k! \prod_{p|k!} \left(1 - \frac{1}{p}\right)} = \begin{cases} k, & \text{se } k+1 \text{ é primo} \\ k+1, & \text{se não.} \end{cases}$$

Dessa forma,

$$\sum_{k=1}^{100} \frac{\varphi((k+1)!)}{\varphi(k!)} = \sum_{k=1}^{100} (k+1) - \pi(101),$$

onde $\pi(x)$ conta a quantidade de primos até x.

Como $\pi(101) = 26$, temos que a nossa soma é igual a

$$\frac{103 \cdot 100}{2} - 26 = \frac{5124}{1} \Rightarrow p + q = 5125 \equiv 0 \pmod 5.$$

GABARITO: A.

§1.18 Problema 18

Primeiramente, note que podemos achar a soma dois a dois de x, y, z:

$$(x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) \Rightarrow xy + yz + zx = 7.$$

Assinar os valores $(x, y, z) = (3, 1, 1)$ satisfaz as condições nas variáveis. Logo, para achar a temos uma equação da forma:

$$\sqrt{1-a} + \sqrt{1-a} = 2 \Rightarrow a = 0.$$

Para achar b e c, que são iguais, analisamos a equação:

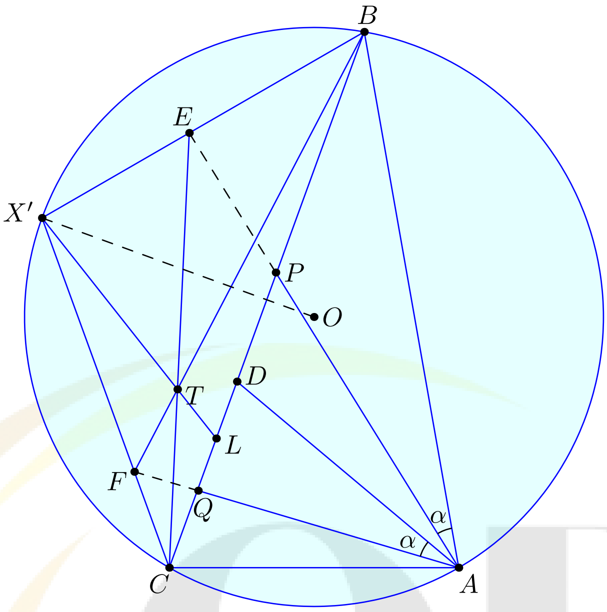
$$\sqrt{1-b} + \sqrt{3-b} = 2 \Rightarrow b = \frac{3}{4}.$$

Logo, chegamos em

$$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 0 + \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}.$$

GABARITO: C.

§1.19 Problema 19



(Pedro Costa)

Seja $X' = \overline{BE} \cap \overline{CF}$. Nós queremos mostrar que X' é o ponto médio do arco BC sem conter A, e que $X' = X$.

Note que pela condição dos ângulos dada no enunciado, quadriláteros $BEQA$ e $FCAP$ são cíclicos $\Rightarrow \angle EBQ = \angle EAQ = 40°$. Similarmente, achamos que $\angle X'CB = 40° \Rightarrow X'$ é o ponto médio do arco BC.

Agora seja T como no enunciado e defina L' como $\overline{X'T} \cap \overline{BC}$. Nós mostramos que $L' = L$.

Fazendo Ceva Qualquer no $\triangle X'BA$ com a ceviana AE, chegamos em

$$\frac{X'E}{EB} = \frac{\sin 40° - \alpha}{\sin \alpha} \cdot \frac{\sin 70°}{\sin 70°} = \frac{\sin 40° - \alpha}{\sin 40°}.$$

Similarmente, no $\triangle X'CA$, temos

$$\frac{X'F}{FC} = \frac{\sin \alpha}{\sin 40° - \alpha} \cdot \frac{\sin 110°}{\sin 30°}.$$

Agora, fazendo Ceva no $\triangle X'CB$, achamos

$$1 = \frac{BL'}{L'C} \cdot \frac{CF}{FX'} \cdot \frac{X'E}{EB} = \frac{\sin^2 40° - \alpha}{\sin^2 40°} \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 110°} \cdot \frac{BL'}{L'C}.$$

Fazendo Ceviana Qualquer no $\triangle BDA$ e no $\triangle CDA$, temos

$$\frac{DP}{PB} = \frac{\sin 40° - \alpha}{\sin 40°} \cdot \frac{AD}{AB}, \quad \frac{CQ}{QD} = \frac{\sin 40° - \alpha}{\sin 40°} \cdot \frac{AC}{AD}.$$

Multiplicando as duas equações, ficamos com

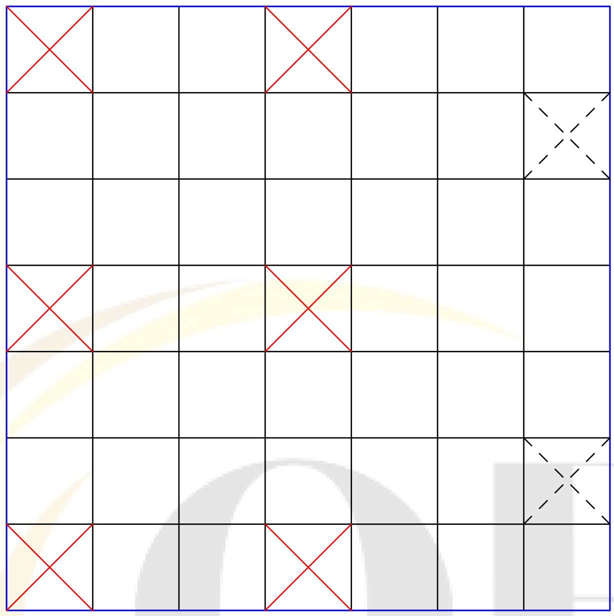
$$\frac{CQ}{PB} = \frac{\sin^2 40° - \alpha}{\sin^2 40°} \cdot \frac{\sin 30°}{\sin 70°},$$

O que mostra que $L' = L$. Logo, $X' = X \Rightarrow \angle ACX = 110°$.

GABARITO: E.

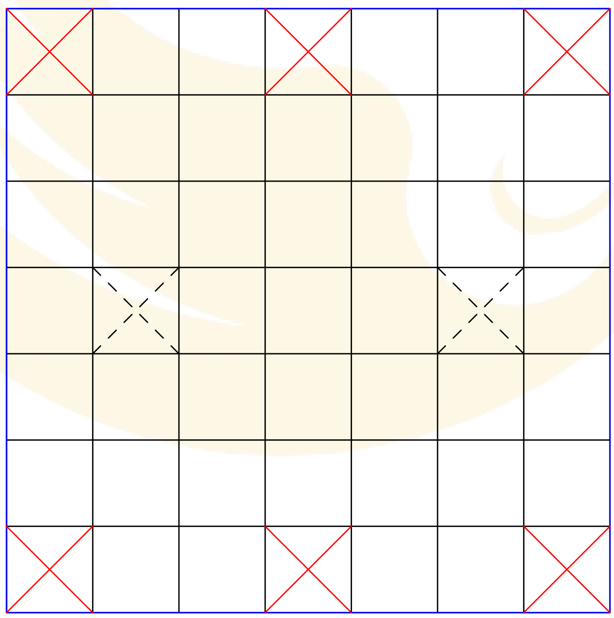
§1.20 Problema 20

Considere a seguinte configuração:



Note que podemos escolher 10 diferentes pares de casas na última coluna e teremos um tabuleiro válido. Podemos fazer isso para com as colunas 1, 4, 7 $\Rightarrow$ temos 30 possíveis configurações dessa forma.

A outra maneira de gerar configurações seria pensar horizontalmente. Considere a seguinte configuração:



Note que podemos escolher 7 diferentes pares de casas na linha 4 para gerar uma configuração válida, pois 3 dos teoricamente 10 pares possíveis já foram contados quando contamos verticalmente. Podemos fazer isso para as linhas 1,4,7 $\Rightarrow$ temos mais 21 possíveis configurações.

Portanto, o número que queremos é $30 + 21 = 51$.

GABARITO: B.