1 Questão Curta: S'ana

Escrito por Heitor Chaves

O evento Sana 2025, que é focado no público geek e em cosplays de animes e desenhos animados, acontecerá em Fortaleza nos dias 24, 25 e 26 de janeiro. Considerando o referencial S (referencial da Terra), temos dois eventos: o primeiro ocorre em $t_0 = 0\ s$ e $x_0 = 0\ m$, enquanto o segundo ocorre em $t_f = 3,6 \cdot 10^{-6}\ s$ e $x_f = 4$ km. Nesse referencial, a velocidade é de $0,6c$ em relação a um referencial S'. Qual é a variação de espaço nesse referencial S'?

Solução:

Com as informações dadas, é necessário utilizar a transformação de Lorentz, que varia de acordo com o referencial. Assim, temos as equações:

$$\Delta x = \gamma(\Delta x' + vt')$$
$$\Delta x' = \gamma(\Delta x - vt)$$

Sabemos que a segunda equação deve ser utilizada, pois a questão pede a variação de espaço no referencial S', que só pode ser obtida a partir da última equação, uma vez que não temos o tempo $\Delta t'$. Substituindo os valores, obtemos:

$$\Delta x' = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{(0,6c)^2}{c^2}}} \left(4 \cdot 10^3 - 0,6 \cdot 3 \cdot 10^8 \cdot 3,6 \cdot 10^{-6}\right)$$

Simplificando:

$$\Delta x' = \frac{3352}{0,8}$$
$$\boxed{\Delta x' = 4190 \text{ m}}$$

2 Questão Média: Capacitores dielétricos

Escrito por Tiago Rocha

Materiais dielétricos são aqueles que não podem ser aproximados como vácuo, ou seja, a permissividade desse meio é diferente de ϵ_0. Neste problema, vamos explorar os efeitos de materiais dielétricos em capacitores.

Considere um capacitor de placas paralelas localizado no vácuo, com carga Q, diferença de potencial V e campo elétrico E. Agora, suponha que ele seja preenchido por um material com permissividade relativa ϵ_r.

a) Encontre os novos valores para Q, V, E, a capacitância C e a energia armazenada W no capacitor.

b) Considere agora um capacitor esférico composto por partes de esferas concêntricas. Determine a diferença de potencial entre a superfície externa e o centro das esferas, considerando a mesma adição de material dielétrico. Use que o raio interno é a, o raio externo é b, a carga é Q, e expresse sua resposta também em função de ϵ_0.

c) Para um capacitor formado por partes de cilindros concêntricos muito longos, determine a diferença de potencial entre a superfície externa e o centro dos cilindros, considerando a mesma adição de material dielétrico. Use que o raio interno é a, o raio externo é b, a densidade linear de carga é λ, e expresse sua resposta também em função de ϵ_0.

Solução:

a) Como a carga elétrica sempre se conserva, temos que a nova carga também é $Q' = Q$. Contudo, como o campo é proporcional a $1/\epsilon$, temos:

$$\boxed{E' = \frac{E}{\epsilon_r}}$$

Já que $\epsilon_r \epsilon_0 = \epsilon$. Como o potencial elétrico é diretamente proporcional ao campo, temos:

$$\boxed{V' = \frac{V}{\epsilon_r}}$$

Usando a definição de capacitância, temos:

$$\boxed{C' = \frac{Q'}{V'} = \frac{Q\epsilon_r}{V} = C\epsilon_r}$$

E utilizando a fórmula da energia de um capacitor:

$$\boxed{W' = \frac{Q'^2}{2C'} = \frac{W}{\epsilon_r}}$$

b) Usando o resultado do item anterior, sabemos que basta calcular a diferença de potencial no vácuo e dividi-la por ϵ_r. No caso do capacitor esférico:

$$\boxed{V_R = -\int_{\infty}^{R} \frac{kQ}{r^2} dr = \frac{kQ}{R}}$$

Logo:

$$V = \frac{kQ}{R} \to \Delta V = kQ\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)$$

Substituindo k e usando o resultado do item a):

$$\boxed{\Delta V = \frac{Q}{4\pi\epsilon_r\epsilon_0}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)}$$

O que é coerente, já que $\epsilon_r\epsilon_0 = \epsilon$.

c) Usaremos o mesmo raciocínio do item b). No caso de um cilindro:

$$V_R = -\int_{b}^{a} \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0 r} dr = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_0} \ln(b/a)$$

Logo:

$$\boxed{\Delta V = \frac{\lambda}{2\pi\epsilon_r\epsilon_0} \ln(b/a)}$$

O que é coerente, já que $\epsilon_r\epsilon_0 = \epsilon$.

3 Questão Longa: Óptica Diferente

Escrito por Lucas Cavalcante

No decorrer desta questão, será apresentada uma ferramenta extremamente útil para a ótica geométrica, especialmente quando se tem dificuldades com geometria ou ao lidar com sistemas mais complexos formados pela associação de vários sistemas óticos simples, como lentes e espelhos dispostos em sequência: a ótica matricial. Com essa abordagem, será possível resolver esses tipos de problemas por meio de um produto entre matrizes que relacionam o ângulo e a altura de incidência com o ângulo e a altura que a luz terá ao sair do sistema.

Este problema é dividido em três partes: **A**, **B** e **C**. A primeira parte aborda como representar os fenômenos principais da ótica por meio de matrizes, incluindo reflexão, refração e o deslocamento retilíneo da luz. Em seguida, trabalharemos com sistemas óticos mais simples, envolvendo lentes, formação de imagens em lentes e telescópios. Por fim, analisaremos sistemas óticos formados por superfícies circulares, deduzindo expressões para a reflexão em espelhos esféricos, dioptros esféricos e encontrando a equação dos fabricantes de lentes.

Caso encontre dificuldades para avançar no problema, consulte a solução no gabarito e tente resolver o restante da questão sem auxílio.

Parte A

a) Sabendo que, quando o ângulo entre a horizontal e uma reta está abaixo da horizontal, ele pode ser considerado negativo, e assumindo ângulos pequenos, encontre a expressão que relaciona a altura do feixe de luz logo antes de atingir um espelho plano e sua altura logo depois, bem como o ângulo que o raio de luz forma com a horizontal antes e após a reflexão.

b) Esse resultado pode ser expresso na forma de uma matriz como:

$$\begin{bmatrix} Y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i \\ \theta_i \end{bmatrix}$$

onde o índice e indica o raio de luz que sofre alteração pela reflexão, e o índice i indica o raio de luz incidente no espelho. A partir do resultado anterior, determine os termos M_{11}, M_{12}, M_{21} e M_{22}. Durante a resolução da questão, adote essa notação matricial para as expressões encontradas.

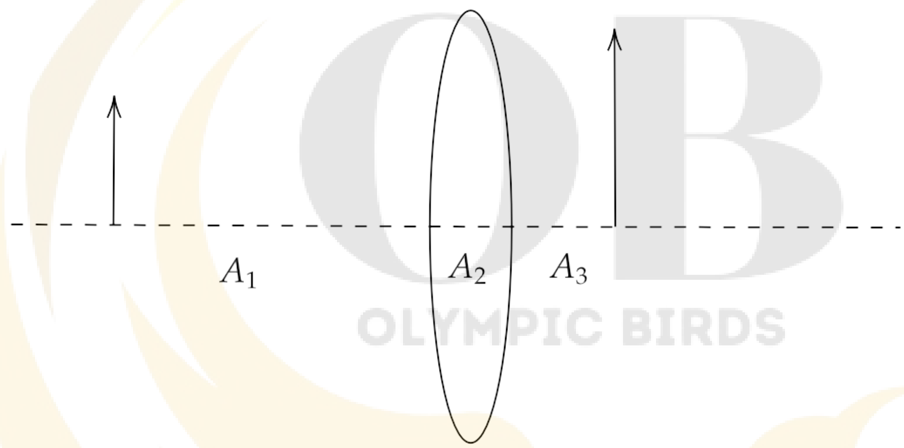
c) Mantendo as mesmas condições dos itens anteriores, considere agora o raio de luz atravessando o limite entre dois meios, saindo de um meio de índice de refração n_1 e indo para outro de índice n_2. Encontre a matriz que relaciona a altura e o ângulo do raio que atinge o limite com a altura e o ângulo do raio que atravessa esse limite.

d) Por fim, para esta parte da questão, determine a matriz que representa o estado do raio luminoso após percorrer uma distância horizontal d a partir do ponto inicial, ou seja, a matriz que, ao multiplicar a altura e ângulo iniciais, determina o ângulo e a altura após percorrer a distância d do ponto original.

Parte B

e) Agora analisaremos a matriz que representa a transformação ocasionada por um dos principais dispositivos óticos: as lentes. Existem duas formas principais de encontrar essa matriz. Uma envolve uma abordagem puramente matemática, sem o uso de conceitos físicos, e será apresentada na solução como complemento. A outra forma utiliza a equação de Gauss e conceitos de geometria, considerando ângulos pequenos. Utilizando este método, determine a matriz que representa a transformação sofrida pelo raio luminoso ao passar por uma lente de foco f.

f) A utilidade da ótica matricial torna-se mais evidente ao associar fenômenos que possuem representação matricial, como deslocamento, reflexão e lentes. A matriz resultante será o produto das matrizes de cada elemento, seguindo a ordem de multiplicação da esquerda para a direita, começando pelo primeiro sistema ótico que a luz atravessa até o último. Por exemplo, representando o caso de um objeto formando a imagem a partir de uma lente:



onde A_i representa a matriz que transforma o ângulo e a altura no trecho i. A matriz que representa a transformação de todo o processo é:

$$A_t = A_3 A_2 A_1$$

Dado esse resultado, qual é a matriz que representa o sistema ótico mostrado na imagem, considerando que a distância entre o objeto e a lente é d_1, entre a lente e a imagem é d_2, e o foco da lente é f?

g) A partir da matriz encontrada anteriormente, é possível deduzir alguns resultados físicos importantes. Sabendo que, para a formação da imagem, sua altura não pode depender do ângulo de incidência, o que podemos concluir sobre o termo M_{12} da matriz? Além disso, qual o significado físico dos termos M_{11} e M_{22}, considerando o resultado encontrado para M_{12}?

h) Agora, utilizando o mesmo procedimento do item f, encontre a matriz que representa a transformação causada pelo raio luminoso ao passar por duas lentes, com focos f_1 e f_2, e que possuem uma distância d entre si. Qual é o foco equivalente desse sistema ótico?

Parte C

i) Nesta parte, vamos trabalhar com outros sistemas óticos importantes, derivando fórmulas famosas e analisando sistemas formados por superfícies circulares. Primeiro, determine a matriz para a reflexão em uma superfície circular de raio R.

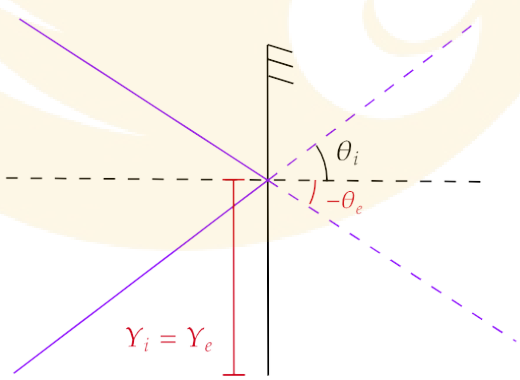
j) Encontre agora a matriz para um dioptro esférico com raio R, na situação em que a luz passa de um meio com índice de refração n_1 para um meio com índice de refração n_2.

k) Com base na matriz para um dioptro esférico, determine a matriz para dois dioptros colados, formando uma lente com faces de raios R_1 e R_2. Considere que a luz passa de um meio com índice de refração n_1, atravessa a lente de índice n e depois passa para um meio de índice n_2. Qual é o foco equivalente desse sistema? Qual o resultado para $n_1 = n_2$?

l) Utilizando o mesmo procedimento do item f, mas agora com uma lente imersa em dois meios de índices de refração diferentes, qual o novo resultado obtido ao considerar que a altura do feixe não pode depender do ângulo de incidência? Expresse sua resposta em termos de f_{eq}, d_1, d_2, n_1 e n_2.

Solução:

a) Primeiro, precisamos representar a situação por meio de um desenho, mostrado a seguir:



A partir da imagem, pode-se perceber que, para o momento logo antes e logo após a reflexão, a altura não varia. Portanto:

$$\boxed{Y_e = Y_i}$$

Para o ângulo emitido, tem-se que, na reflexão, os ângulos representados na figura possuem mesmo valor. Então:

$$-\theta_e = \theta_i$$

$$\boxed{\theta_e = -\theta_i}$$

b) A partir dos resultados encontrados no item **a)**, a matriz que representa a reflexão será:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}}$$

Portanto, os valores de M_{11}, M_{12}, M_{21} e M_{22} serão:

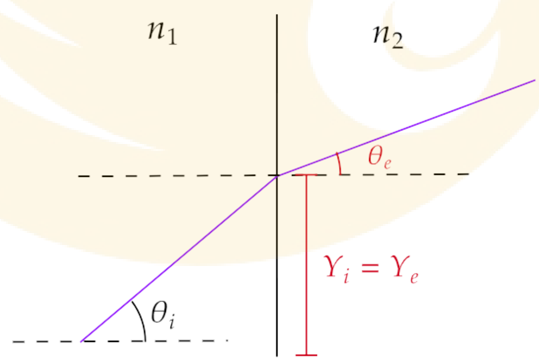
$$\boxed{M_{11} = 1}$$

$$\boxed{M_{12} = 0}$$

$$\boxed{M_{21} = 0}$$

$$\boxed{M_{22} = -1}$$

c) Agora, para a refração, iremos utilizar a mesma abordagem do item *a*). O desenho para esse caso será:



Pela imagem, temos a relação entre as alturas:

$$Y_e = Y_i$$

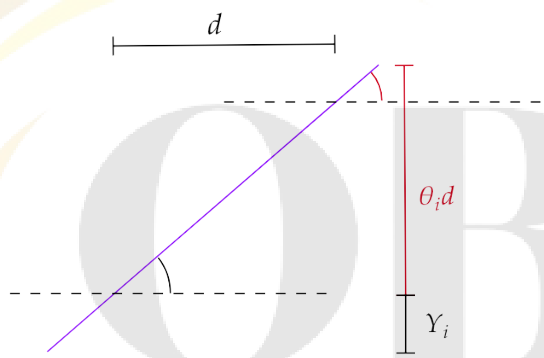
Agora, para encontrar a relação entre os ângulos, deve-se utilizar a lei de snell para pequenos ângulos. Resultando em:

$$n_1\theta_i = n_2\theta_e$$
$$\theta_e = \frac{n_1}{n_2}\theta_i$$

Portanto, a matriz de refração será:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \dfrac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}}$$

d) Para o deslocamento em linha reta, o diagrama será:



Pela geometria da situação, pode-se concluir que:

$$\theta_e = \theta_i$$
$$Y_e = Y_i + d\theta_i$$

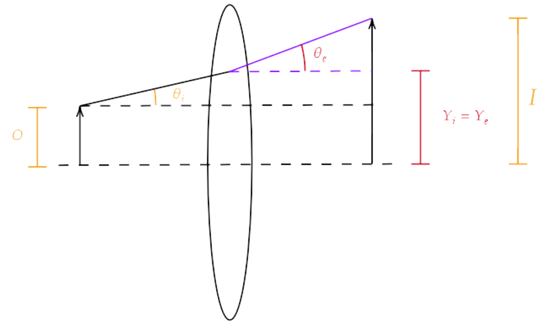
Logo, a matriz para o deslocamento do raio luminoso por uma distância d será:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}$$

e) Para encontrar a matriz que representa a lente, iremos utilizar uma abordagem que necessita da lei de gauss:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$$

No entanto, ao final da solução será mostrada uma abordagem mais matemática que utiliza de dois raios notáveis para encontrar uma relação entre Y e θ. Agora, desenhando a situação que será utilizada para encontrar essa matriz:



A relação entre as alturas pode ser encontrada diretamente pela imagem, como:

$$Y_e = Y_i$$

Agora para encontrar uma relação entre os ângulos, pode-se escrever expressões que relacionam a altura do objeto e da imagem com a distância. Então, pela geometria da situação:

$$Y_i + \theta_e d_2 = I$$
$$Y_i - \theta_i d_1 = O$$

Isolando o θ_e na primeira equação, dividindo a segunda equação por d_1 e somando as duas:

$$\theta_e = \frac{I}{d_2} - Y_i\left(\frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}\right) + \frac{I}{d_2} + \frac{O}{d_1}$$

Substituindo a equação de Gauss e a relação das alturas:

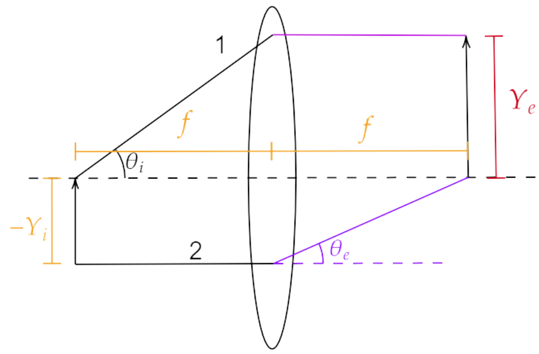
$$\frac{1}{f} = \frac{1}{d_1} + \frac{1}{d_2}$$
$$\frac{I}{O} = -\frac{d_2}{d_1}$$
$$\theta_e = \theta_i - \frac{Y_i}{f}$$

Por fim, escrevendo as equações resultantes em uma matriz:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}}$$

Método sem o uso da equação de Gauss

Agora, para esse método de resolução iremos analisar dois raios luminosos notáveis. O primeiro, sairá da parte de cima da seta com um ângulo θ_i e, ao passar pela lente ficará paralelo com a horizontal. Enquanto que o segundo raio sairá da parte de baixo da seta paralelo à horizontal e chegará à imagem com um ângulo θ_e



Então, escrevendo as equações em função dos termos da matriz:

$$Y_i = M_{11}Y_i + M_{12}\frac{Y_i}{f}$$

$$0 = M_{21}Y_i + M_{22}\frac{Y_i}{f}$$

Para o segundo raio, as equações são:

$$-Y_i = -M_{11}Y_i$$
$$\frac{Y_i}{f} = -M_{21}Y_i$$

Com as quatro equações, pode-se resolver o sistema, encontrando:

$$\boxed{M_{11} = 1}$$

$$\boxed{M_{12} = 0}$$

$$\boxed{M_{21} = -\frac{1}{f}}$$

$$\boxed{M_{22} = 1}$$

Resultando na mesma matriz:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{bmatrix}}$$

f) Como explicado no enunciado da questão, a matriz resultante será a multiplicação entre as matrizes de cada parte do sistema ótico. Então, a expressão resultante será:

$$A_t = \begin{bmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simplicando a expressão, para apenas uma matriz:

$$\boxed{A_t = \begin{bmatrix} 1 - \dfrac{d_2}{f} & d_1 - \dfrac{d_1 d_2}{f} + d_2 \\ -\dfrac{1}{f} & 1 - \dfrac{d_1}{f} \end{bmatrix}}$$

g) Como, para a formação da imagem, a altura do raio luminoso não pode depender do ângulo de emissão, o termo M_{12} deve ser nulo. Logo:

$$d_1 - \frac{d_1 d_2}{f} + d_2 = 0$$

$$\frac{1}{d_2} - \frac{1}{f} + \frac{1}{d_1} = 0$$

$$\boxed{\frac{1}{f} = \frac{1}{d_2} + \frac{1}{d_1}}$$

Essa expressão é a famosa equação de Gauss dos pontos conjugados.

Agora, escrevendo a expressão que relaciona a altura do objeto com a imagem, cosiderando a expressão encontrada anteriormente:

$$Y_e = \left(1 - \frac{d_2}{f}\right) Y_i$$

$$\frac{Y_e}{Y_i} = 1 - \frac{d_2}{f}$$

Como do lado esquerdo da equação temos a razão entre as alturas da imagem e do objeto, o termo M_{11} representa o **aumento do sistema ótico** (A).

Pode-se chegar na expressão comumente utilizada substituindo f da equação de Gauss encontrada:

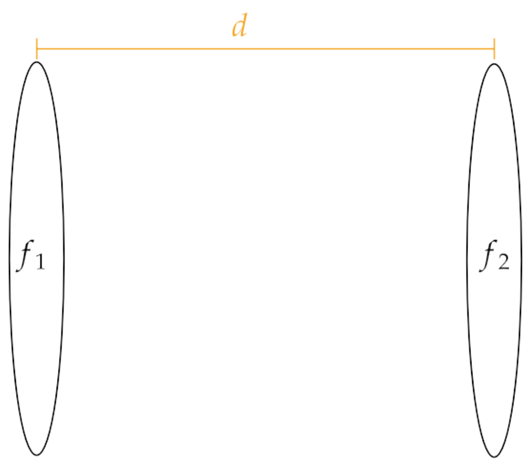
$$A = 1 - 1 - \frac{d_2}{d_1} = -\frac{d_2}{d_1}$$

Agora, para o termo M_{22}, podemos, novamente, substituir a expressão para f:

$$M_{22} = 1 - 1 - \frac{d_1}{d_2}$$

$$\boxed{M_{22} = -\frac{d_1}{d_2} = \frac{1}{A}}$$

h) Primeiro, representando a situação descrita visualmente:



Então, para o sistema ótico mostrado, pode-se utilizar, novamente, a multiplicação de matrizes para cada parte do sistema. A expressão resultante será:

$$A_{t,2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_2} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f_1} & 1 \end{bmatrix}$$

Realizando as multiplicações de matrizes, chega-se na expressão:

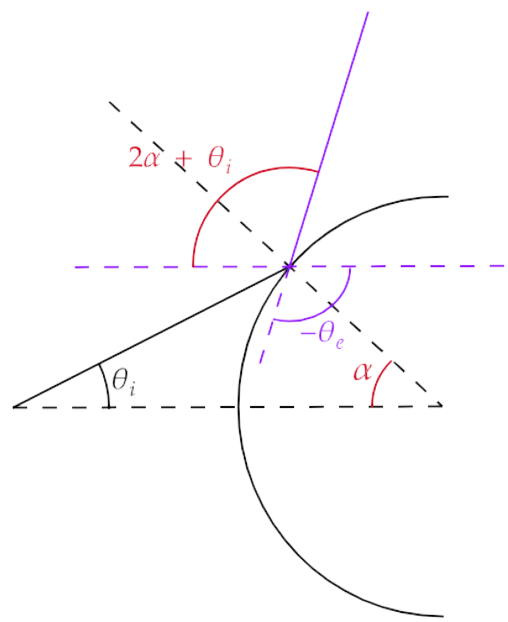
$$\boxed{A_{t,2} = \begin{bmatrix} 1 - \frac{d_2}{f} & d_1 - \frac{d_1 d_2}{f} + d_2 \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d_1}{f} \end{bmatrix}}$$

Por fim, para encontrar o foco equivalente desse sistema, pode-se relacionar a matriz resultante com a matriz que representa uma lente. Desse modo, conclui-se que o termo M_{21} é igual a $-\frac{1}{f_{eq}}$:

$$-\frac{1}{f_{eq}} = -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_1} + \frac{d}{f_1 f_2}$$

$$\boxed{\frac{1}{f_{eq}} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_1} - \frac{d}{f_1 f_2}}$$

i) Desenhando a situação da reflexão por um espelho esférico:



A expressão para a altura de um raio luminoso logo antes e logo depois da reflexão será:

$$Y_e = Y_i$$

Agora, para a relação entre os ângulos, deve-se utilizar as relações geométricas fornecidas pela imagem:

$$\alpha = \frac{Y_i}{R}$$

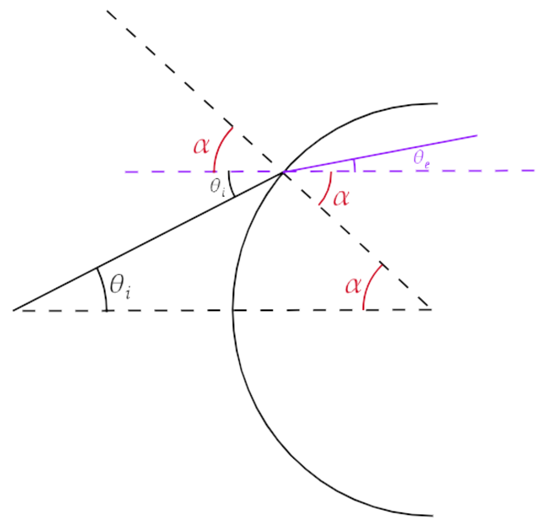
$$2\alpha + \theta_i = -\theta_e$$

$$\theta_e = -\theta_i - \frac{2Y_i}{R}$$

Portanto, a matriz que representa esse fenômeno, será:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{R} & -1 \end{bmatrix}}$$

j) Utilizando o mesmo processo dos itens anteriores, a representação da situação será:



Pela imagem, conclui-se uma relação entre as alturas antes e após a refração:

$$Y_e = Y_i$$

Agora, para a relação entre os ângulos, pode-se utilizar a geometria do problema e a lei de snell, encontrando:

$$\alpha = \frac{Y_i}{R}$$

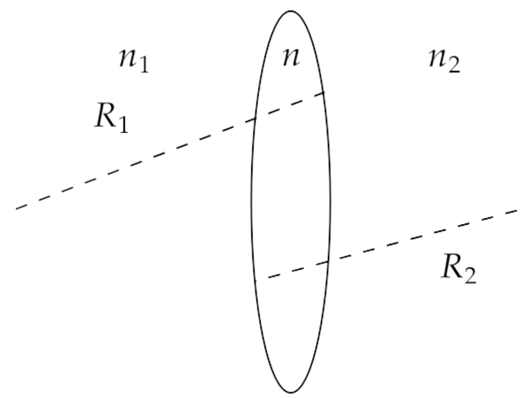
$$n_1(\theta_i + \alpha) = n_2(\theta_e + \alpha)$$

$$\theta_e = \frac{Y_i}{R}\left(\frac{n_1}{n_2} - 1\right) + \frac{n_1}{n_2}\theta_i$$

Portanto, a matriz resultante será:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{R}\left(1 - \dfrac{n_1}{n_2}\right) & \dfrac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}}$$

k) Agora, para encontrar a matriz para dois dioptros esféricos colados, pode-se utilizar do mesmo método do item f). Representando visualmente a situação:



Então, para encontrar a matriz desse sistema, pode-se multiplicar a matriz da primeira passagem pela da segunda. Encontrando:

$$A_{t,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_2}(1-\frac{n}{n_2}) & \frac{n}{n_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{R_1}(1-\frac{n_1}{n}) & \frac{n_1}{n} \end{bmatrix}$$

$$\boxed{A_{t,3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{n}{n_2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{n_2}\left(\frac{n_1}{R_1}-\frac{n_2}{R_2}\right) & \frac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}}$$

Comparando essa matriz com a matriz da lente, o termo M_{21} é igual a $-\frac{1}{f_{eq}}$. Portanto:

$$-\frac{1}{f_{eq}} = -\frac{n}{n_2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)+\frac{1}{n_2}\left(\frac{n_1}{R_1}-\frac{n_2}{R_2}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{f_{eq}} = \frac{n}{n_2}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)-\frac{1}{n_2}\left(\frac{n_1}{R_1}-\frac{n_2}{R_2}\right)}$$

Então, considerando $n_1 = n_2$, a expressão se reduz para:

$$\frac{1}{f_{eq}} = \frac{n}{n_1}\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)-\frac{1}{n_1}\left(\frac{n_1}{R_1}-\frac{n_1}{R_2}\right)$$

$$\boxed{\frac{1}{f_{eq}} = \left(\frac{n}{n_1}-1\right)\left(\frac{1}{R_1}-\frac{1}{R_2}\right)}$$

A expressão encontrada é a famosa equação dos fabricantes de lentes, utilizando a convenção de que ambos os raios são positivos na configuração da situação.

l) Substituindo a expresão para o foco equivalente na matriz encontrada no item anterior, a matriz resultante é:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_{eq}} & \dfrac{n_1}{n_2} \end{bmatrix}$$

Como no item f), é preciso multiplicar a matriz da lente pelas matrizes das distâncias do objeto e da imagem, resultando na seguinte expressão:

$$\begin{bmatrix} 1 & d_2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -\dfrac{1}{f_{eq}} & \dfrac{n_1}{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Simplificando a expressão:

$$\boxed{\begin{bmatrix} 1 - \dfrac{d_2}{f_{eq}} & d_1 - \dfrac{d_1 d_2}{f_{eq}} + d_2 \dfrac{n_1}{n_2} \\ -\dfrac{1}{f_{eq}} & \dfrac{n_1}{n_2} - \dfrac{d_1}{f_{eq}} \end{bmatrix}}$$

Aplicando a condição que a altura não pode depender de θ_i:

$$d_1 - \frac{d_1 d_2}{f_{eq}} + d_2 \frac{n_1}{n_2} = 0$$

$$\boxed{\frac{n_1}{d_1} + \frac{n_2}{d_2} = \frac{n_2}{f_{eq}}}$$

O resultado encontrado é muito semelhante a equação de Gauss dos pontos conjugados encontrada anteriormente.