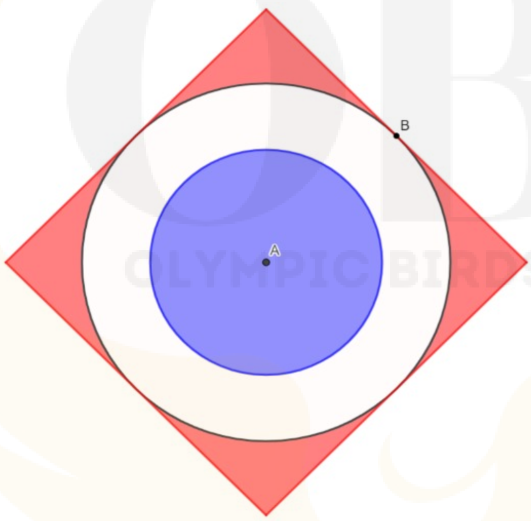
Itabirana de Matemática

Gabarito extra oficial

Nível 3

1. Em uma competição de tiro ao alvo, em cada disparo o competidor pode obter as seguintes pontuações:

   - 1 ponto, caso acerte a região mais externa, em vermelho;
   - 1,5 pontos, caso acerte a região em branco, representada pela coroa circular;
   - 2 pontos, caso acerte a região do círculo central, em azul.



O alvo é composto por três figuras sobrepostas, um quadrado e dois círculos concêntricos, conforme a figura. A e B são, nessa ordem, centro dos círculos e ponto de tangência. Se $\overline{AB} = 3\sqrt{2}cm$ qual a probabilidade de um competidor fazer ponto ao dar um único tiro?

(a) $\frac{6-\pi}{8}$

(b) $\frac{4-\pi}{4}$

(c) $\frac{\pi}{10}$

(d) $\frac{4-\pi}{3}$

(e) $\frac{6-\pi}{4}$

Solução:

A área total ($A_{\square}$) é a área de um quadrado com lado $2\overline{AB}$, isto é:

$$A_{\square} = (2 \times 3 \times \sqrt{2})^2 = (6\sqrt{2})^2 = 72\text{cm}^2$$

Enquanto a área vermelha A_r é área total $A_{\square}$ menos a área do circulo maior $A_{\odot}$, isto é:

$$A_r = A_{\square} - A_{\odot}$$

Assim, a probabilidade P de um competidor fazer 1 ponto está relacionada com a razão entre a área vermelha A_r, que pontua 1, e a área total $A_{\square}$.

$$P = \frac{A_{\square} - A_{\odot}}{A_{\square}} = 1 - \frac{A_{\odot}}{A_{\square}}$$

A área do círculo maior é $\pi \times (3\sqrt{2})^2 = 18 \times \pi$

Logo,

$$P = 1 - \frac{18\pi}{72} = 1 - \frac{\pi}{4}$$

$$\boxed{P = \frac{4 - \pi}{4}}$$

Resposta: (b)

2. A sequência de Fibonacci é uma sucessão infinita de números que obedecem a um padrão. Os dois primeiros termos são unitários e, a partir do terceiro, cada termo é obtido pela soma dos dois anteriores. Sabendo disso, qual é a soma dos restos da divisão por 4 dos 24 termos anteriores ao 2024º termo pertencente a essa sequência?

   (a) 30

   (b) 33

   (c) 32

   (d) 34

   (e) 24

Solução:

Após fazer a sequência de restos por 4 dos números de fibonacci, percebe-se um padrão que se repete de 6 em 6, como mostrado a seguir:

1123101123101...

Desejamos encontrar a soma dos restos do termo 2000 até o termo 2023 da sequência de Fibonacci. Sabendo que 2000 é congruente a 2 módulo 6, então a soma desejada é:

$$1 + 2 + 3 + 1 + 0 + ... + 1 + 0 + 1 = 32$$

Resposta: (c)

3. As redes sociais estão presentes em nosso cotidiano e são utilizadas para diferentes fins, como compartilhar fotos, vídeos e notícias. Quatro estudantes utilizam aparelhos eletrônicos distintos para acessar apenas a sua rede social preferida, por um determinado tempo diário. Sabe-se que:

• Maria Clara utiliza sua rede social preferida durante um sexto do dia, e quem utiliza o Twitter navega duas horas e meia por dia.

• Quem faz uso do smartphone para acessar sua rede social não utiliza o WhatsApp.

• Quem navega na internet pelo notebook é o que navega por mais tempo.

• Julia prefere o Instagram. Thúlio utiliza seu tablet para navegar na internet metade do tempo de quem mais navega.

• Leonardo passa duas horas e meia por dia em sua rede social preferida.

• Quem navega por mais tempo é mulher e não é Julia.

• Thúlio acessa o Facebook ou o Twitter.

• Quem faz uso do computador é um homem, e quem prefere o Instagram utiliza-o três horas por dia.

É possível concluir que todas as afirmativas a seguir são verdadeiras, EXCETO:

(a) Maria Clara tem acesso a uma rede social durante 4 horas por dia.

(b) Diariamente, Júlia conecta-se a uma rede social por 3 horas.

(c) Thúlio utiliza o smartphone.

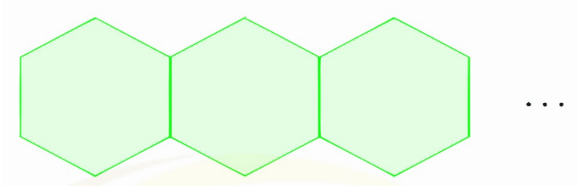
(d) A rede social preferida de Júlia é o Instagram.

(e) Leonardo acessa o Twitter.

Solução:

De acordo com o enunciado, Thúlio usa seu Tablet.
Resposta: (c)

4. Tauan, aluno do Ensino Fundamental da Escola OIM, brinca de desenhar hexágonos regulares, conforme a figura a seguir:



Sendo a_n o número de segmentos que são utilizados para desenhar n hexágonos, é correto afirmar que:

(a) $a_{2024} = 13101$

(b) $a_n = 7n-1, n \geqslant 1$

(c) $a_{2024} = a_{2025} - 7$

(d) $a_{2024} = a_{2026} - 10$

(e) Todos os valores a_n são pares

Solução:

Para desenhar o primeiro hexágono, precisamos de 6 linhas, logo temos $a_1 = 6$. Para adicionar mais hexágonos, basta desenhar 5 linhas, pois aproveitamos uma linha do hexágono anterior. Assim, $a_2 = a_1 + 5 = 11$. Este padrão se repete, pois, a partir do segundo hexágono, para desenhar cada novo hexágono, basta adicionar 5 linhas. Portanto, a sequência formada pelo número de segmentos utilizados para desenhar n hexágonos é uma progressão aritmética (P.A.) de razão 5. Desse modo, temos a seguinte lei de formação $a_n = a_{n-1} + 5$

A única resposta que respeita este raciocínio é a letra D, visto que:

$$a_{2026} = a_{2025} + 5$$

$$a_{2025} = a_{2024} + 5$$

Somando as equações anteriores, temos:

$$a_{2026} = a_{2024} + 10$$

Portanto,

$$\boxed{a_{2024} = a_{2026} - 10}$$

Resposta: (d)

5. Em um trabalho de pesquisa em laboratório, estudantes de Engenharia Civil precisavam testar um número x de corpos de prova de concreto. O teste realizado foi o de compressão, que consiste em utilizar um equipamento apropriado para medir a tensão máxima que esses corpos de prova suportam antes de se romperem. Esse parâmetro é expresso em MPa (Mega Pascal). O objetivo do teste era verificar se a resistência dos corpos de prova variava dentro do intervalo esperado, de 20 a 50 MPa. Após realizar os testes, os estudantes calcularam a média aritmética da resistência de todos os corpos de prova, que foi de 35 MPa. No entanto, conforme a norma técnica aplicada, os corpos de prova que atingiam a resistência máxima esperada deveriam ser descartados. Após descartar esses corpos de prova, a nova média das resistências caiu para 34 MPa. Sabendo que apenas cinco corpos de prova atingiram a resistência máxima, determine o número total de corpos de prova testados.

   (a) 75

   (b) 80

   (c) 30

   (d) 40

   (e) 70

Solução:

Seja Ai a resistência em Mega Pascal do i-ésimo corpo de prova. Então:

$$\frac{A_1 + A_2 + A_3 + ... + A_x}{x} = 35 \Rightarrow A_1 + ... + A_x = 35x$$

Agora, vamos fazer uma espécie de ”contagem dupla”. Suponha, spg, que:

$$A_1 = A_2 = A_3 = A_4 = A_5 = 50$$

Então:

$$A_1 + ... + A_x = 35x \Rightarrow A_6 + A_7 + ... + A_x = 35x - 250$$

$$\frac{A_6 + ... + A_x}{x - 5} = 34 \Rightarrow A_6 + ... + A_x = 34\,(x - 5)$$

Assim,

$$35x - 250 = 34\,(x-4)$$

$$\boxed{x = 80}$$

Resposta: (b)

6. Considerando que m não é um número inteiro e que sen(x) = $\frac{m-4}{4m}$ e cos(x) = $\frac{m+4}{2m}$, o valor de tg(x) é:

   (a) -$\frac{4}{3}$

   (b) $\frac{4}{3}$

   (c) -$\frac{1}{2}$

   (d) $\frac{20}{11}$

   (e) -$\frac{20}{11}$

Solução:

Utilizando a relação fundamental da trigonometria, temos:

$$\text{sen}^2(x) + \cos^2(x) = 1 \Rightarrow \frac{(m-4)^2}{16m^2} + \frac{(m+4)^2}{4m^2} = 1$$

Assim,

$$\frac{5m^2 + 24m + 80}{16m^2} = 1 \Rightarrow 11m^2 - 24m - 80 = 0$$

As soluções dessa equação são da forma:

$$m = \frac{24 \pm \sqrt{(-24)^2 - 4 \cdot 11 \cdot (-80)}}{2 \cdot 11} \Rightarrow m = \left\{4, -\frac{20}{11}\right\}$$

Logo, como $m \notin \mathbb{Z}$, $m = -\frac{20}{11}$, o que nos leva a:

$$\tan(x) = \frac{\text{sen}(x)}{\cos(x)} = \frac{(m-4)}{4m} \cdot \frac{2m}{(m+4)} = -\frac{64}{48}$$

$$\boxed{\tan(x) = -\frac{4}{3}}$$

Resposta: (a)

7. A figura a seguir é formada por sete círculos que se intersectam em um mesmo ponto. Considere que o raio do menor círculo mede r. Determine a área da região preta, sabendo que o raio de cada círculo imediatamente maior aumenta uma unidade.

(a) A = π(r^2 + 4r + 21) **u.a**

(b) A = π(r^2 + 4r + 11) **u.a**

(c) A = π(r^2 + 6r + 21) **u.a**

(d) A = π(r^2 + 6r + 7) **u.a**

(e) A = π(r^2 + 4r + 7) **u.a**

Solução:

A área do menor círculo preto é πr^2. A área do segundo menor círculo preto é $\pi(r+2)^2$. No entanto, ao adicionar a área de um círculo preto devemos subtrair a área do círculo branco anterior, ou seja, devemos subtrair $\pi(r+1)^2$. Portanto, a área total até agora é:

$$\pi r^2 + \pi(r+2)^2 - \pi(r+1)^2$$

Assim, a área da região preta é:

$$\pi\left[r^2 - (r+1)^2 + (r+2)^2 - (r+3)^2 + (r+4)^2 - (r+5)^2 + (r+6)^2\right]$$

Expandindo os produtos notáveis:

$$\pi[r^2-(r^2+2r+1)+(r^2+4r+4)-(r^2+6r+9)+(r^2+8r+16)-(r^2+10r+25)$$
$$+(r^2+12r+36)$$

Simplificando, temos que a área da região preta é:

$$\boxed{A=\pi(r^2+6r+21)}$$

Resposta: (c)

8. Dois números foram escolhidos entre cinco números naturais quaisquer. Qual é a probabilidade de o produto desses números ser ímpar?
   (a) $\frac{1}{2}$
   (b) $\frac{1}{3}$
   (c) $\frac{3}{5}$
   (d) $\frac{2}{5}$
   (e) $\frac{1}{4}$

Solução:

Temos 6 possibilidades de paridades para esses 5 número naturais, onde cada um deles tem probabilidade igual a $\frac{1}{6}$:

(a) $PPPPP$
(b) $PPPPI$
(c) $PPPII$
(d) $PPIII$
(e) $PIIII$
(f) $IIIII$

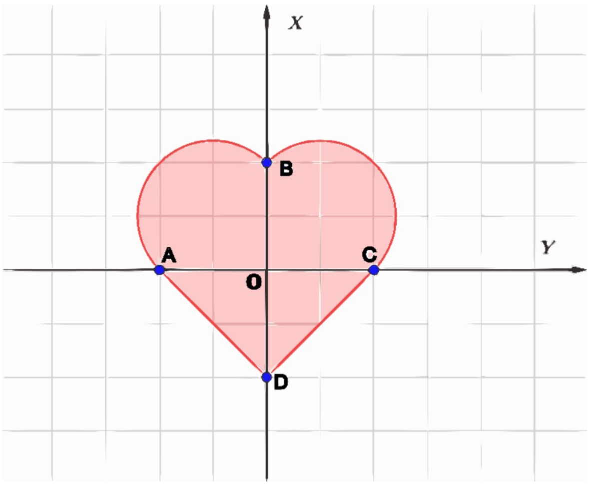
Em cada caso, a probabilidade do produto de 2 números ser ímpar é a razão do número de casos favoráveis pelo total de possibilidades de escolhermos 2 números dente os 5. Portanto, a probabilidade é:

$$\frac{1}{6}\left(\frac{0}{\binom{5}{2}}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{0}{\binom{5}{2}}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\binom{3}{2}}{\binom{5}{2}}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\binom{4}{2}}{\binom{5}{2}}\right)+\frac{1}{6}\left(\frac{\binom{5}{2}}{\binom{5}{2}}\right)=\frac{1}{3}$$

Resposta: (b)

9. Carlos, um aluno do Ensino Médio da escola OIM, pretende construir um "Coração Perfeito". Para tanto, ele faz os seguintes passos:

1. Marcam-se no plano cartesiano XY os pontos A, B e C, de modo que $\overline{AO} \equiv \overline{BO} \equiv \overline{CO}$, sendo O a origem do plano;
2. Traçam-se dois semicírculos com diâmetros em $\overline{AB}$ e $\overline{BC}$;
3. Por fim, constroem-se os segmentos congruentes $\overline{AD}$ e $\overline{CD}$, de modo que $\overline{AD} = \overline{AO}\sqrt{2}$



Se a área do "Coração Perfeito" for $6(\frac{\pi}{4}+1)$, então a coordenada do ponto A é dada por:

(a) $(-\sqrt{3}, 0)$

(b) $(-\sqrt{\frac{7}{2}}, 0)$

(c) $(-2, 0)$

(d) $(-3\sqrt{3}, 0)$

(e) $(-\sqrt{5}, 0)$

Solução:

Denote por x o tamanho $\overline{AO}$. Assim, a área $[ABCD] = 2x^2$. A área somada dos dois semicírculos será a área do círculo de raio $\frac{x\sqrt{2}}{2}$, que é $\frac{\pi x^2}{2}$.Assim, temos a relação:

$$2x^2 + \frac{\pi x^2}{2} = 6\left(\frac{\pi}{4}+1\right) \Rightarrow 2x^2\left(\frac{\pi}{4}+1\right) = 6\left(\frac{\pi}{4}+1\right) \Rightarrow x = \sqrt{3}.$$

O resultado segue.
Resposta: (a)

Nota: Na imagem, o eixo X e o eixo Y não se encontram nas suas posições padrões, o que implicaria no ponto A ter coordenadas $A = (0, -\sqrt{3})$.

10. Considere a equação $3ax - 81p^5 = 0$, em que x é uma incógnita e p é um número primo diferente de 3. Quantos são os valores de a tais que a equação admite solução inteira?

 (a) 30

 (b) 15

 (c) 42

 (d) 24

 (e) 48

Solução:

A partir da equação $3ax - 81p^5 = 0$, podemos simplificar para $ax = 27p^5 = 3^3p^5$

O número de valores inteiros de a que satisfazem a equação é igual ao número de divisores de 3^3p^5. Isso pode ser determinado multiplicando os sucessores dos expoentes na fatoração em números primos. Ou seja, $(3+1) \times (5+1) = 4 \times 6 = 24$.

Como o enunciado se refere aos números inteiros, devemos considerar também os números negativos. Pela simetria, se a tem 24 soluções positivas, ele também terá 24 soluções negativas. Por exemplo, se $a = -3^2p^5$, então $x = -3$. Portanto, o total de soluções é 24 positivas mais 24 negativas, resultando em **48 soluções**.

Resposta: (e)

11. Uma caixa aberta em formato de paralelepípedo, sem tampa, será construída. O metro quadrado do material utilizado nas faces laterais custa metade do valor do metro quadrado do material usado na base, que possui comprimento a e largura b. A caixa deve ter uma altura de $1,5m$ e volume de $4m^3$. Qual é a equação que descreve a razão R entre o custo total e o custo do metro quadrado da base dessa caixa, em função do comprimento a?

 (a) $R = 3a + \frac{8}{a} + \frac{16}{3}$

 (b) $R = 3a + \frac{8}{a} + \frac{8}{3}$

 (c) $R = 6a + \frac{16}{a} + \frac{32}{3}$

 (d) $R = \frac{3}{2}a + \frac{4}{a} + \frac{8}{3}$

 (e) $R = 6a + \frac{8}{a} + \frac{16}{3}$

Solução:

Tendo o volume do cubo em mãos, encontramos o valor de b em função de a:

$$ab \times \frac{3}{2} = 4m^3 \Rightarrow b = \frac{8}{3a}$$

Ademais, o custo de uma face é dada pelo produto preço do metro quadrado x área da face. Assim, considerando que o valor do metro quadrado do material utilizado na base vale x, o custo total dividido pelo valor do metro quadrado é:

$$\frac{abx + 2a(\frac{3}{2})(\frac{x}{2}) + 2b(\frac{3}{2})(\frac{x}{2})}{x} = \frac{8}{3} + \frac{3a}{2} + \frac{4}{a}$$

Resposta: (d)

12. Você sabia que é possível medir a temperatura ambiente a partir da quantidade de vezes que um grilo faz “cri-cri” a cada intervalo de tempo? Isso somente é possível para temperaturas acima de 12ºC, pois temperaturas menores não despertam nos bichinhos a vontade de acasalar. Sabendo disso, durante uma aula de Física, a professora Rayandra propôs aos estudantes o desafio de determinar qual é a função que relaciona o número de “cri-cris” de grilo em relação à temperatura, em graus Celsius. Os estudantes chegaram à seguinte relação:

“cri-cris”	Temperatura (ºC)
inaudível	abaixo de 12ºC
37	30ºC
28	20ºC
19	15ºC

Qual das alternativas corresponde à função que modela a situação proposta pela professora Rayandra?

(a) $f(x) = \frac{5x+40}{9}, D_f = \{x \in \mathbb{N}/x \geqslant 14\}$

(b) $f(x) = x + 40, D_f = \{x \in \mathbb{N}/x \geqslant 54\}$

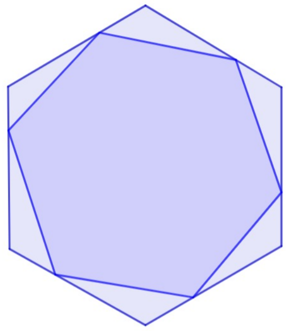
(c) $f(x) = x + 40, D_f = \{x \in \mathbb{N}/x \geqslant 12\}$

(d) $f(x) = \frac{5x-32}{9}, D_f = \{x \in \mathbb{N}/x \geqslant 12\}$

(e) $f(x) = \frac{5x+40}{9}, D_f = \{x \in \mathbb{N}/x \geqslant 12\}$

> **Solução:**
>
> Não existe uma função linear que satisfaça as relações da tabela.
> **Resposta: Anulada**

13. A medalha da OIM é formada por três hexágonos regulares, em que dois deles são congruentes. Ao analisar dois desses hexágonos, sabe-se que o vértice do hexágono menor intersecta o lado do hexágono maior, dividindo-o na proporção 2 para 1. Supondo que a medida do lado do hexágono maior seja $5cm$, determine a medida do lado do hexágono menor, em centímetros.



(a) $\frac{5\sqrt{7}}{3}$

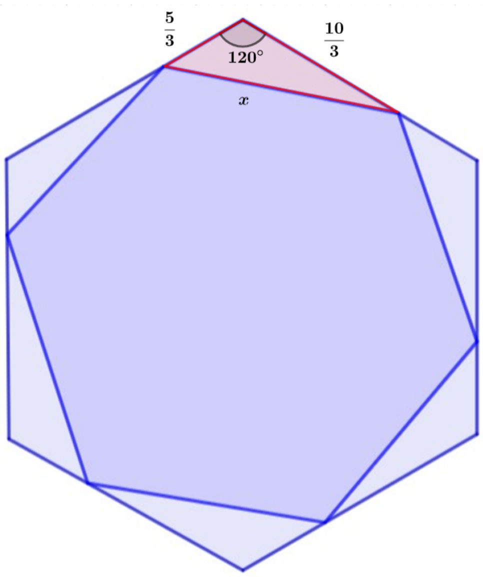
(b) $\frac{5\sqrt{7}}{9}$

(c) $\frac{25}{9}$

(d) $\frac{175}{9}$

(e) $\frac{7\sqrt{5}}{3}$

> **Solução:**
>
> A partir das informações do enunciado, podemos montar o seguinte triângulo, sendo que x é o lado do hexagóno menor.



Para simplificar as contas: $y = \frac{5}{3}$ Utilizando da lei dos cossenos:

$$x^2 = y^2 + 4y^2 - 2 \times 2y \times y \times cos(120°)$$

$$x^2 = y^2 + 4y^2 + 2y^2$$

$$x^2 = 7y^2$$

Portanto:

$$\boxed{x = \frac{5\sqrt{7}}{3}}$$

Resposta: (a)

14. Maria dividiu seu terreno em 3 lotes triangulares ABC, BCD e CDE, que foram dados a seus filhos Newton, Pitágoras e Tales, respectivamente. A figura mostra a divisão dos terrenos.

Sabe-se que $\overline{AE} = 45m, \overline{ED} \equiv \overline{BD}$ e as áreas dos terrenos de Newton e Pitágoras são $160m^2$ e $120m^2$, nessa ordem. Qual é o comprimento do lado do terreno de Tales que está de frente para a Rua M?

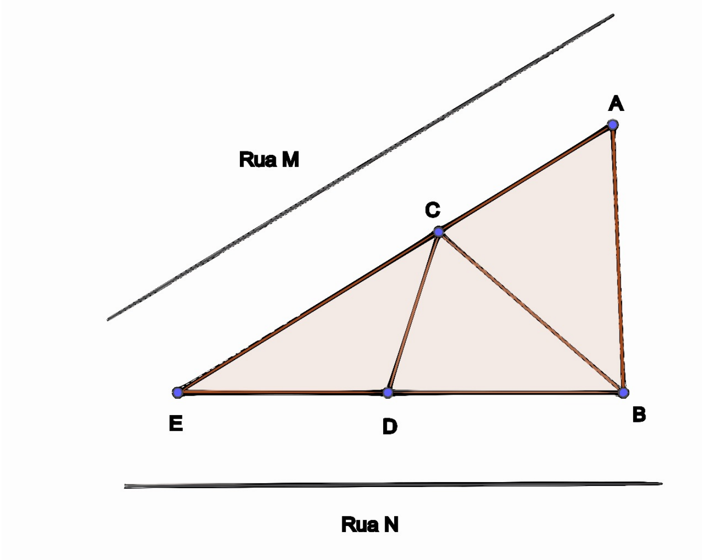
(a) 18

(b) 26

(c) 28

(d) 27

(e) 25



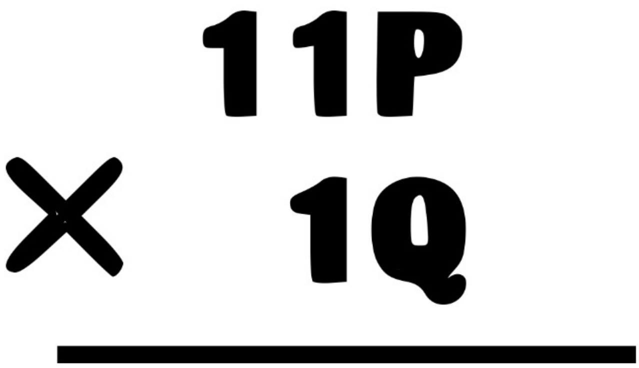
Solução:

Os triângulos DCE e BCD compartilham da mesma altura relativa ao vértice C, e também compartilham a mesma medida da base ($\overline{ED} = \overline{BD}$). Logo, os triângulos DCE e BCD tem mesma área igual a 120. A razão entre as áreas dos triângulos BCE e AEB é a razão entre os segmentos $\overline{CE}$ e $\overline{AE}$. Assim, a medida desejada é:

$$\frac{CE}{AE} = 240/400 \Rightarrow CE = \frac{3}{5} \times 45 = 27$$

Resposta: (d)

15. A imagem representa um produto em que P e Q são algarismos do sistema decimal. Quantos são os pares ordenados (P, Q) tais que o resultado desse produto é um número múltiplo de 15?



(a) 9

(b) 6

(c) 17

(d) 16

(e) 12

Solução:

É trivial que todos os pares da forma $(p, 5)$ satisfazem o enunciado, o que correspondem a 10 dos tais pares. Os outros pares são tais que o produto dos dois números tem fator 3 e 5. Os pares são:

$$(1, 0), \quad (4, 0), \quad (8, 0), \quad (0, 2), \quad (5, 2), \quad (0, 8), \quad (5, 8).$$

Resposta: (c)