

Lugar Geométrico com Números Complexos

Leon Luca de Araujo Calheira - Olympic Birds

16 de Julho de 2024

1 Introdução

Hoje aprenderemos como aplicar números complexos na geometria analítica, proporcionando uma perspectiva que pode reduzir cálculos e tempo de prova.

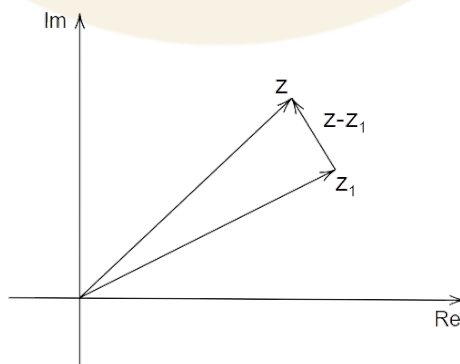
O truque está em tratar um número complexo z , definido como um ponto no plano de Argand-Gauss, também como um vetor que liga esse ponto à origem, com seu módulo equivalente ao valor absoluto desse vetor.

2 Definições

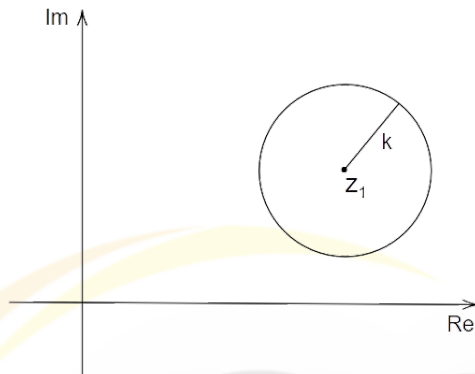
2.1 Circunferência

$$|z - z_1| = k$$

Interpretação: A distância entre um ponto variável z e um ponto fixo z_1 é igual a um valor constante k .



Como o valor de $|z - z_1|$ é constante, o tamanho do vetor não se altera, mudando apenas a direção, o que caracteriza uma circunferência. Assim:

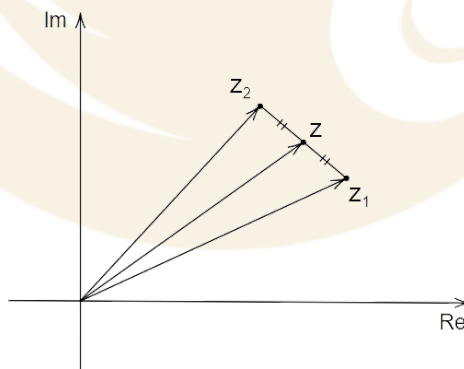


Lugar Geométrico de z : Circunferência de raio igual a k centrada em z_1 .

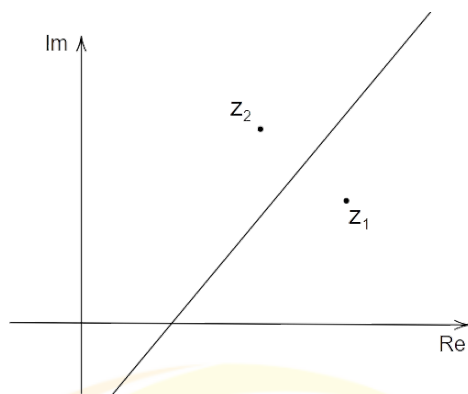
2.2 Mediatrix

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

Interpretação: A distância entre um ponto variável z e um ponto fixo z_1 é igual à distância entre esse mesmo ponto z e outro ponto fixo z_2 .



Como o ponto médio de $\overline{z_1 z_2}$ satisfaz a equação, deve-se traçar uma reta que passe por esse ponto médio e que seja perpendicular ao segmento $\overline{z_1 z_2}$, assim mantendo a igualdade das distâncias por semelhança. Dessa forma:

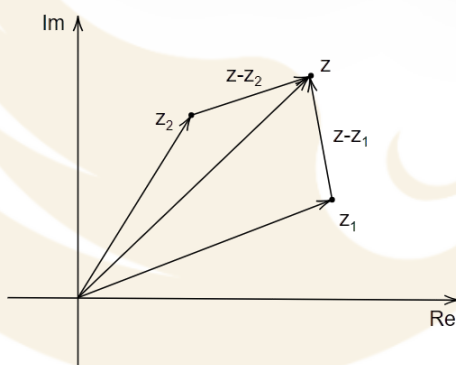


Lugar Geométrico de z : Mediatriz entre os pontos z_1 e z_2 .

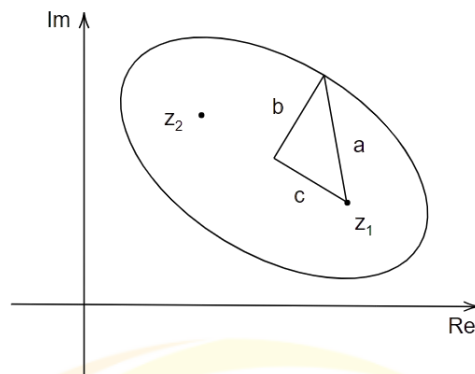
2.3 Elipse

$$|z - z_1| + |z - z_2| = k$$

Interpretação: A distância entre um ponto variável z e um ponto fixo z_1 , somada com a distância entre esse ponto z e outro ponto fixo z_2 , é igual a um valor constante k .



Neste caso, apesar de tanto as direções quanto os valores dos vetores mudarem, é fácil perceber que o lugar geométrico formado será uma elipse, tendo z_1 e z_2 como focos. Nesse sentido, $c = \frac{|z_1 - z_2|}{2}$, $a = \frac{k}{2}$ e $b = \sqrt{a^2 - c^2} = \frac{\sqrt{k^2 - |z_1 - z_2|^2}}{2}$.

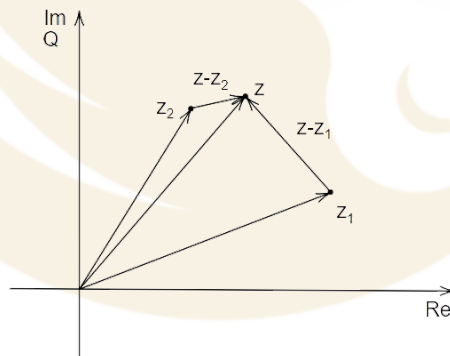


Lugar Geométrico de z : Elipse com focos z_1 e z_2 , semi-eixo maior igual a $\frac{k}{2}$, semi-eixo menor igual a $\frac{\sqrt{k^2 - |z_1 - z_2|^2}}{2}$ e excentricidade igual a $\frac{|z_1 - z_2|}{k}$.

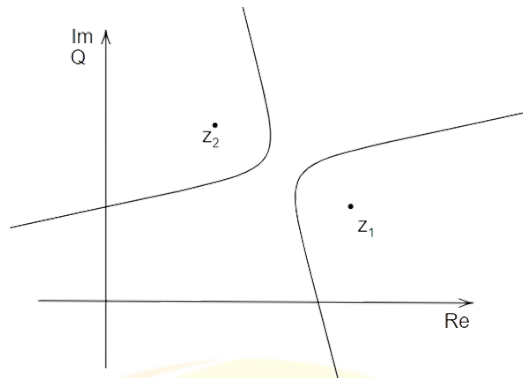
2.4 Hipérbole

$$||z - z_1| - |z - z_2|| = k$$

Interpretação: A diferença da distância entre um ponto variável z e um ponto fixo z_1 e da distância entre esse ponto z e outro ponto fixo z_2 é igual, em módulo, a um valor constante k .



Aqui, o raciocínio é semelhante à elipse, com a diferença de que é a subtração das distâncias, e não a soma. Deve-se levar em conta que o segundo módulo é posto para incluir os dois "lados" da hipérbole: se o valor fosse $+k$, só consideraria um deles, enquanto se fosse $-k$, consideraria o outro.

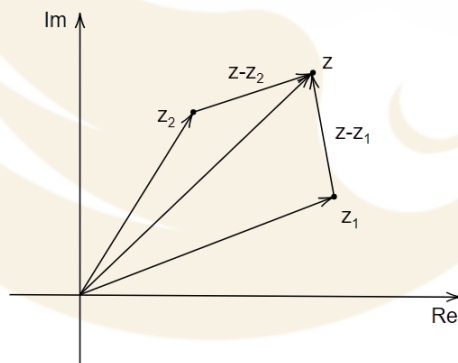


Lugar Geométrico de z : Hipérbole com focos z_1 e z_2 , semi-eixo maior igual a $\frac{k}{2}$, semi-eixo menor igual a $\frac{\sqrt{|z_1 - z_2|^2 - k^2}}{2}$ e excentricidade igual a $\frac{|z_1 - z_2|}{k}$.

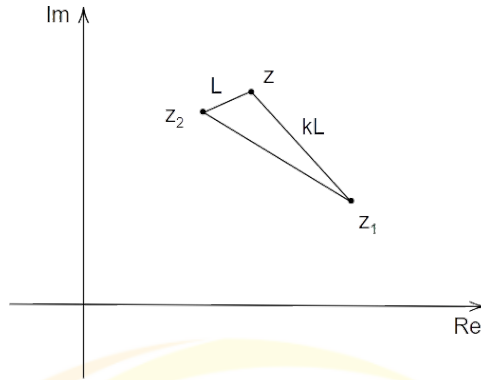
2.5 Círculo de Apolônio

$$|z - z_1| = k|z - z_2|$$

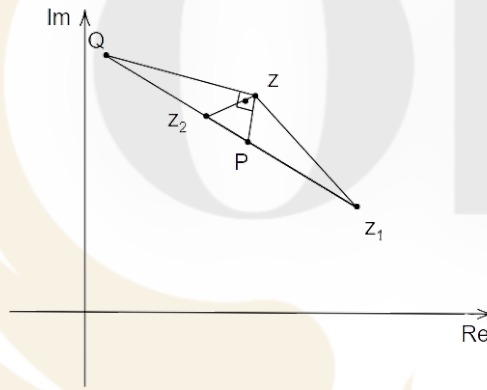
Interpretação: A distância entre um ponto variável z e um ponto fixo z_1 é igual ao produto entre um valor constante k e a distância entre esse ponto z e outro ponto fixo z_2 .



Aqui o lugar geométrico não é tão explícito como nos outros casos, então precisaremos desenvolver o desenho. Primeiramente, montaremos o triângulo zz_1z_2 e definiremos $|z - z_2|$ como L .



Agora, traçaremos as bissetrizes internas e externas relativas ao vértice z e, no caso da externa, ao vértice z_2 .



Pela propriedade das bissetrizes, $\angle PzQ = 90^\circ$, o que define o lugar geométrico como uma circunferência. Definindo $\overline{Pz_2} = x$ e $\overline{Qz_2} = y$:

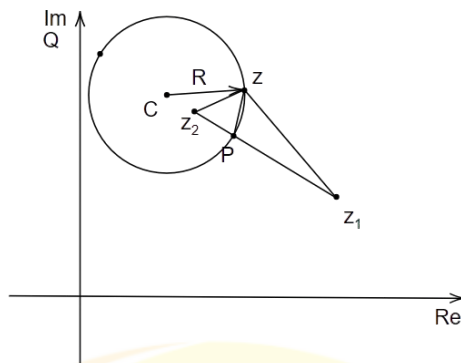
$$\overline{Pz_2} + \overline{Pz_1} = x + kx = |z_1 - z_2| \Rightarrow x = \frac{|z_1 - z_2|}{k + 1}$$

$$\frac{\overline{zz_2}}{\overline{Qz_2}} = \frac{\overline{zz_1}}{\overline{Qz_1}} \Rightarrow \frac{L}{y} = \frac{kL}{y + x(k + 1)}$$

$$y(k - 1) = x(k + 1) \Rightarrow y = \frac{|z_1 - z_2|}{k - 1}$$

Assim, sabendo que \overline{QP} é o diâmetro da circunferência:

$$R = \frac{\overline{PQ}}{2} \Rightarrow R = |z_1 - z_2| \frac{k}{k^2 - 1}$$



Lugar Geométrico de z : Circunferência de raio R igual a $|z_1 - z_2| \frac{k}{k^2 - 1}$ centrada no ponto C (exterior à $\overline{z_1 z_2}$).

3 Problemas

- Considere o conjunto dos complexos z tais que: $|z - 2 + 3i| = 1$. Determine o valor do módulo do complexo z pertencente a esse conjunto que possua:
 - Argumento mínimo
 - Módulo máximo
- (ITA) Seja Z_k um número Complexo, solução da equação: $(z+1)^5 + z^5 = 0$, $K=0,1,2,3,4$. Podemos afirmar que:
 - Todos os Z_k , $k=0,1,\dots,4$ estão sobre uma circunferencia
 - Todos os Z_k , $k=0,1,\dots,4$ estão sobre uma reta paralela ao eixo real
 - Todos os Z_k , $k=0,1,\dots,4$ estão sobre uma reta paralela ao eixo imaginário
 - A equação não admite solução
- Determine os possíveis lugares geométricos das imagens das raízes da equação em z : $u(z - a)^4 + v(z - b)^4 = 0$
- (ITA) Determine o conjunto dos números complexos z para os quais o número $w = \frac{z + \bar{z} + 2}{\sqrt{|z-1| + |z+1|} - 3}$ pertence ao conjunto dos números reais. Interprete (ou identifique) este conjunto geometricamente e faça um esboço do mesmo.

5. (IME) Considere os triângulos ABC em que $\overline{BC} = 32$ e $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}} = 3$. O maior valor possível para a altura relativa ao lado \overline{BC} é?
6. Demonstre, usando um argumento geométrico, a relação: $1 - \operatorname{cis}\theta = -2i\sin(\frac{\theta}{2})\operatorname{cis}(\frac{\theta}{2})$

4 Referências

- GUIMARÃES, Caio. Matemática Em Nível IME/ITA Volume 1: Números Complexos e Polinômios. Vestseller, 2008.