1 Equação funcional com teoria dos números

Escrito por Marcos Burdzinski

Seja $\mathbb{Z}_{>0}$ o conjunto dos inteiros positivos. Encontre todas as funções $f : \mathbb{Z}_{>0} \to \mathbb{Z}_{>0}$ tais que:

$$m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

para todos os inteiros positivos m e n.

Solução:

Fazendo $m = f(n)$, obtemos:

$$f(n)^2 + f(n) \mid f(n)f(f(n)) + n \Rightarrow f(n) \mid n \Rightarrow f(n) \leqslant n, \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

Em particular, isso implica que $f(1) = 1$.

Agora, fazendo $m = n$, temos:

$$n^2 + f(n) \mid nf(n) + n \Rightarrow n^2 + f(n) \leqslant nf(n) + n \Rightarrow n^2 - n \leqslant (n-1)f(n)$$

Portanto,

$$n \leqslant f(n), \quad \forall n \geqslant 2 \Rightarrow f(n) = n, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2 Princípio de Fermat e Equação funcional

Escrito por Marcos Burdzinski

Determine todas as funções $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ tais que:

$$(f(n))^p \equiv n \pmod{f(p)}$$

para todos $n \in \mathbb{N}$ e para todos os primos p.

Solução:

Fixe N. O teorema de Fermat nos garante que

$$f(n)^p \equiv f(n) \pmod p$$

Então, temos que

$$p \mid f(n) - n$$

Tomando p suficientemente grande para que $p > |f(n) - n|$, forçamos $f(n) = n$. Portanto, a única solução é $f(n) \equiv n$, $\forall n \in \mathbb{N}$.

3 Questão: Equação Diofantina

Escrito por Julia Leguiza

Ache todos os pares (x, y) de inteiros tais que

$$x^2 + xy + y^2 = \left(\frac{x+y}{3} + 1\right)^3$$

Solução:

Como x e y são inteiros, temos $x^2 + xy + y^2 \in \mathbb{Z}$, o que implica $\left(\frac{x+y}{3} + 1\right) \in \mathbb{Z}$, ou seja, $x + y$ é múltiplo de 3. A ideia é expressar tudo em função de $x + y$ e $x - y$. Assim, seja $x + y = 3k$, com $k \in \mathbb{Z}$, e $x - y = l$, com $l \in \mathbb{Z}$. Note que

$$x^2 + xy + y^2 = \frac{1}{4}(3(x+y)^2 + (x-y)^2)$$

Substituindo na equação original, obtemos:

$$\frac{1}{4}(3(x+y)^2 + (x-y)^2) = \left(\frac{x+y}{3} + 1\right)^3 \Rightarrow \frac{1}{4}(3(3k)^2 + l^2) = (k+1)^3$$

Assim,

$$27k^2 + l^2 = 4(k^3 + 3k^2 + 3k + 1) \Rightarrow l^2 = 4k^3 - 15k^2 + 12k + 4 = (k-2)^2(4k+1). \quad (*)$$

Portanto, $4k + 1 = \left(\frac{k-2}{l}\right)^2$. Então, $4k + 1$ é um quadrado perfeito ímpar, o que implica $4k + 1 = (2a+1)^2$, com $a \in \mathbb{Z}$. Logo,

$$4k + 1 = 4a^2 + 4a + 1 \Rightarrow k = a^2 + a$$

Substituindo $k = a^2 + a$ em $(*)$, obtemos:

$$l^2 = (a^2 + a - 2)^2(4a^2 + 4a + 1) = (a^2 + a - 2)^2(2a+1)^2 \Rightarrow l = \pm(a^2 + a - 2)(2a+1)$$

Dessa forma, temos que $l = \pm(2a^3 + 3a^2 - 3a - 2)$ e $x + y = 3k = 3a^2 + 3a$. Consideramos dois casos:

1. Caso $x + y = 3a^2 + 3a$ e $x - y = 2a^3 + 3a^2 - 3a - 2$:

$$(x, y) = (a^3 + 3a^2 - 1, -a^3 + 3a + 1)$$

2. Caso $x + y = 3a^2 + 3a$ e $x - y = -2a^3 - 3a^2 + 3a + 2$:

$$(x, y) = (-a^3 + 3a + 1, a^3 + 3a^2 - 1)$$

Portanto, as soluções para (x, y) são $(x, y) = (-a^3 + 3a + 1, a^3 + 3a^2 - 1)$ e suas permutações.