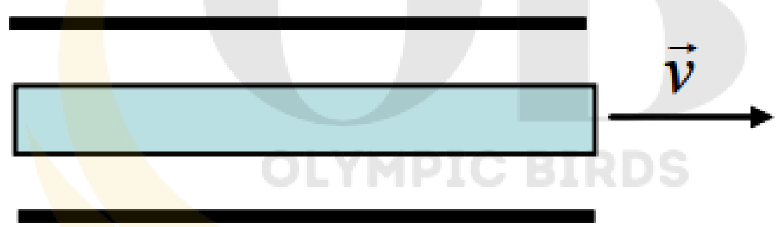
1 Questão Curta: Campo Magnético e Referenciais

Escrito por William Alves

Duas grandes placas condutoras paralelas são mantidas numa diferença de potencial V e são separadas por uma distância d. Um grande placa dielétrica de espessura $\frac{d}{3}$ e constante dielétrica ϵ é colocada no meio do espaço entre as placas e está se movendo paralelamente às placas com velocidade $\nu \ll c$.



(a) No referencial onde as placas são estacionárias, encontre o campo magnético no meio do espaço vazio superior, no meio da placa dielétrica e no meio do espaço vazio inferior.

(b) No referencial onde a placa dielétrica é estacionária, repita (a).

Solução:

(a) Do teorema de Gauss, a densidade de área da carga livre nas superfícies do condutor placas é : $\sigma_f = D$ No espaço com ar, $E_1 = E_3 = \frac{D}{\epsilon_o}$ enquanto que no dielétrico $E_2 = \frac{D}{\epsilon\epsilon_o}$, onde os índices 1, 2 e 3 referem-se respectivamente ao espaço vazio superior, à placa dielétrica e ao espaço vazio inferior.

$$\rightarrow V = \frac{d}{3}E_1 + \frac{d}{3}E_2 + \frac{d}{3}E_3 = \frac{dD}{3\epsilon_o}(2 + \frac{1}{\epsilon}) = \frac{d\sigma_f}{3\epsilon_o}(2 + \frac{1}{\epsilon})$$

$$\rightarrow \sigma_f = \frac{V}{d}\frac{3\epsilon_0\epsilon}{2\epsilon + 1}$$

A carga vinculada à placa e um dos espaços vazios é $\sigma_b = \pm\epsilon_o(E_1 - E_2) = \pm\frac{3V}{d}\frac{\epsilon_o(\epsilon-1)}{2\epsilon+1}$.

Quando a placa se move com velocidade v, as correntes elétricas em ambos os lados são $K = \pm\sigma_b\nu$. Da lei de Ampére, $B_1 = B_3 = 0$.

Dentro da placa dielétrica o campo magnético é

$$\rightarrow B_2 = \mu_o K = \mu o \sigma_b \nu = \mu_o \nu \frac{3V}{d}\frac{\epsilon_0(\epsilon-1)}{2\epsilon+1}$$

(b) Quando as placas condutoras paralelas se movem com velocidade $-\nu$, as correntes elétricas nas duas placas são $K' = \pm\sigma_f\nu = \pm\nu\frac{V}{d}\frac{3\epsilon_o\epsilon}{2\epsilon+1}$. Da lei de Ampere, $B_1 = B_2 = B_3 = -\mu_o\sigma_f\nu$

$$\boxed{B = -\mu_o\nu\frac{V}{d}\frac{3\epsilon_o\epsilon}{2\epsilon+1}}$$

.

2 Questão Média: Analogia Eletrostática

Escrito por Guilherme Rodrigues

Considere uma fonte puntiforme de água que libera, isotropicamente, água numa vazão ϕ dentro de um enorme recipiente, preenchido por um líquido incompressível de densidade ρ, a uma distância d de uma parede. Considere, para efeitos de conta, que esse sistema se encontra nas coordenadas cartesianas onde o plano da parede é paralelo ao plano YZ, perpendicular ao eixo X e que a origem do sistema se encontra no plano da parede, além disso a fonte se encontra no eixo X.

a) Explique as condições de contorno e a analogia que pode ser feito com a eletrostática.

b) Calcule a velocidade do fluxo em termos das coordenadas (X, Y, Z) e na forma vetorial.

c) Calcule a velocidade do fluido ao longo da parede.

Solução:

a) A fonte de água pode ser interpretada como uma carga e a velocidade da água como seu campo, isso fica mais evidente ao pegar a equação da continuidade $\nabla \cdot v\rho = 0$, onde a densidade sendo constante temos $\nabla \cdot v = 0$, se aplicarmos o divergente nas coordenadas esféricas, usando análise espacial podemos interpretar as linhas de fluxo do escoamento como linhas de campo, se elas saem isotropicamente de forma uniforme podemos podemos descartar as diferenciais nas coordenadas angulares sobrando somente a radial que é definida como $\dfrac{d(r^2v)}{r^2dr} = 0$, isso é possível se $v = 0$

ou $v = cte\frac{1}{r^2}$. Além disso, podemos enxergar a vazão ϕ como o equivalente a carga, já que ela origina as linhas de fluxo, se ela fosse zero não haveria linhas de fluxo, com isso o ρ seria equivalente ao ϵ_0 já que ele é uma propriedade do espaço onde se encontra a "carga". Por fim, há a questão das condições de contorno, pois, na eletrostática, se fosse uma carga, as linhas de campo entrariam perpendicularmente na parede como se formassem um sistema de carga positiva (a que gera o campo) e negativa (a carga induzida), mas esse não é o caso da hidrodinâmica, o fluido não entra na parede, ele contorna a parede, logo para atender essa condição na eletrostática deveríamos adicionar uma carga de mesmo sinal igualmente espaçada da parede como uma analogia inversa ao tradicional método das imagens.

b) Primeiro podemos usar a Lei de Gauss para calcular a velocidade do fluxo ignorando a parede por ora, apenas a adaptando para a hidrostática.

$$\frac{Q}{\epsilon_0} = \int E da$$

$$\frac{\phi}{\rho} = \int V da$$

como ao longo da área da esfera gaussiana a velocidade é constante temos:

$$\frac{\phi}{\rho} = V \int da = V 4\pi R^2$$

$$\vec{V} = \frac{\phi}{4\pi\rho R^2}\hat{r}$$

onde $\hat{r}$ representa o vetor radial unitário

ainda podemos escrever

$$\vec{V} = \frac{\phi}{4\pi\rho R^3}\vec{R}$$

depois adiciona-se uma outra fonte de vazão no ponto $(-d, 0, 0)$ assim teremos dois vetores de velocidade:

fonte real:

$$\vec{V_1} = \frac{\phi}{4\pi\rho R_1^3}\vec{R_1}$$

fonte "induzida":

$$\vec{V_2} = \frac{\phi}{4\pi\rho R_2^3}\vec{R_2}$$

sendo :

$$\vec{R_1} = (X - d)\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$$

$$R_1 = ((X - d)^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$\vec{R_2} = (X + d)\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k}$$

$$R_2 = ((X + d)^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{1}{2}}$$

assim $\vec{V}$ em qualquer ponto do espaço será

$$\vec{V} = \vec{V_1} + \vec{V_2} = \frac{\phi}{4\pi\rho R_1^3}\vec{R_1} + \frac{\phi}{4\pi\rho R_2^3}\vec{R_2}$$

$$\boxed{\vec{V} = \frac{\phi((X - d)\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k})}{4\pi\rho((X - d)^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{\phi((X + d)\hat{i} + Y\hat{j} + Z\hat{k})}{4\pi\rho((X + d)^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

c) Pegaremos a mesma equação do item anterior porém o X passará a ser zero e com isso não haverá uma parcela vetorial no eixo X correspondendo a condição de contorno.

$$\boxed{\vec{V} = \frac{\phi}{2\pi\rho}[(\frac{Y}{(d^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}})\hat{j} + (\frac{Z}{(d^2 + Y^2 + Z^2)^{\frac{3}{2}}})\hat{k}]}$$

3 Questão Longa: Figura das Composições

Escrito por Heitor Chaves

Considerando as equações de dois movimentos harmônicos simples:

$$X(t) = 6 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{01}) \tag{1}$$

$$Y(t) = 6 \cdot \cos(\omega t + \varphi_{02}) \tag{2}$$

o gráfico espaço desses dois em função do tempo forma uma figura geométrica. Identifique qual é essa figura e descubra qual a área dela. Dados:

$$\varphi_{01} = 50^\circ \tag{3}$$

$$\varphi_{02} = 140^\circ \tag{4}$$

Solução:

Em uma composição de MHS, o ângulo de X(t) pode ser passado para Y(t) como uma diferença entre os ângulos, que se descreve como o ângulo entre os dois MHS's

$$X(t) = 6 \cdot \cos(\omega t) \tag{5}$$

$$Y(t) = 6 \cdot \cos(\omega t + \Delta\varphi) \tag{6}$$

Agora, usando a primeira equação, pode-se descobrir que o cosseno do ângulo inicial é X/6, podendo descobrir o seno dele utilizando a relação fundamental

$$1 = \frac{X^2}{36} + \text{sen}^2(\omega t) \tag{7}$$

Logo:

$$\text{sen}(\omega t) = \frac{\sqrt{36 - X^2}}{6} \tag{8}$$

Usando, agora, a segunda equação, obtemos uma soma de cossenos, que pode ser representada como:

$$\frac{Y}{6} = \cos(\omega t) \cdot \cos(\Delta\varphi) - \text{sen}(\omega t) \cdot \text{sen}(\Delta\varphi) \tag{9}$$

Como sabemos o cosseno e o seno do ângulo inicial, pode-se organizar a equação de tal jeito que obtemos o cosseno e o seno do ângulo entre esses movimentos em lados opostos da equação:

$$\sqrt{36 - X^2} \cdot \text{sen}(\Delta\varphi) \cdot 6 = 6 \cdot X \cdot \cos(\Delta\varphi) - Y \cdot 6 \tag{10}$$

Divindo por 6 e elevando as duas equações ao quadrado, teremos:

$$36 - X^2 \cdot \text{sen}^2(\Delta\varphi) = X^2 \cdot \cos^2(\Delta\varphi) - 2 \cdot Y \cdot X \cdot \cos(\Delta\varphi) + Y^2 \tag{11}$$

Organizando melhor essa equação, teremos:

$$\text{sen}^2(\Delta\varphi) = \frac{X^2}{36}\frac{-2 \cdot X \cdot Y \cdot \cos(\Delta\varphi)}{36} + \frac{Y^2}{36} = \tag{12}$$

Como o cosseno do ângulo entre os movimentos é 90°, o cosseno vale 0 enquanto o seno vale 1, logo:

$$X^2 + Y^2 = 36 \tag{13}$$

Agora, é possível perceber que essa equação é idêntica à uma circunferência, representada pela forma geométrica do **círculo**. Daí, sabemos que o raio da circunferência vale 6 e a fórmula da área de um círculo é:

$$A_{\text{círculo}} = \pi \cdot R^2 \tag{14}$$

Logo, a área do círculo do gráfico é $\mathbf{36\pi}$