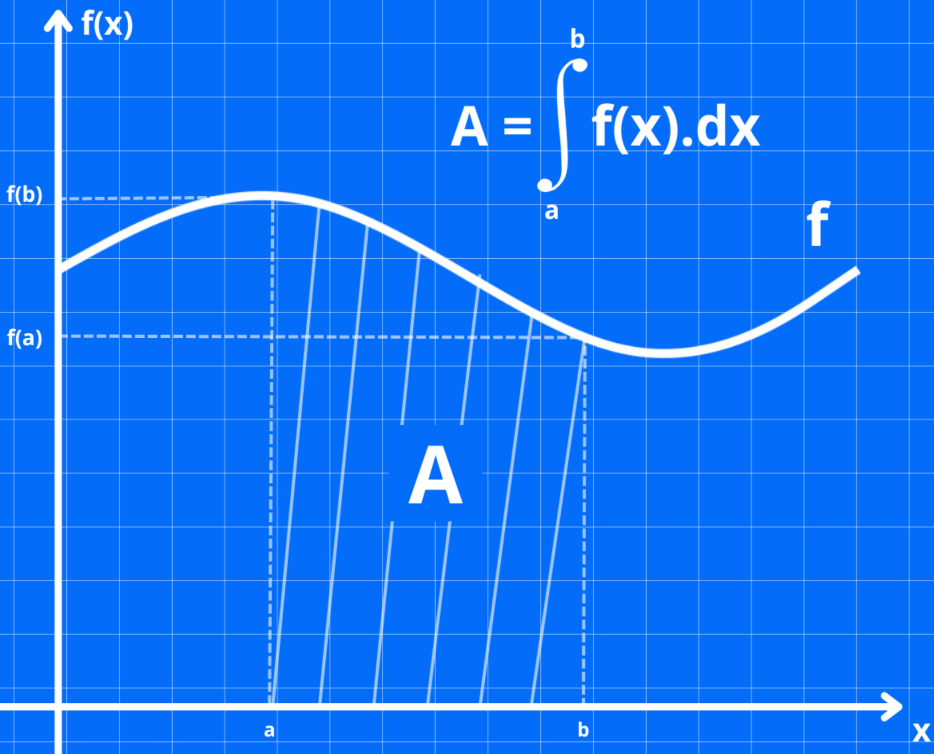
Cálculo I para OLÍMPIADAS

- Felipe Mota Mendes Oliveira -



Material educacional
produzido pelo Olympic Birds

Sumário

PREFÁCIO

É com grande prazer que apresento a você, leitor, este volume dedicado ao Cálculo 1 em parceria com o **@olympicbirds**. Este livro nasceu da convicção de que o estudo do cálculo é uma porta aberta para a compreensão mais profunda dos fenômenos que moldam nosso mundo.

Nos capítulos, você encontrará uma abordagem acessível dos conceitos fundamentais do cálculo 1. A minha intenção é guiá-lo através da beleza da matemática, proporcionando não apenas ferramentas úteis para a resolução de problemas, mas também uma apreciação pela elegância dos métodos e das aplicações.

O cálculo é mais do que um conjunto de técnicas; é uma linguagem universal que descreve e revela padrões no caos aparente. Através dos exemplos e exercícios, espero despertar a sua curiosidade e a confiança necessárias para explorar este campo desafiador.

Agradeço por escolher este livro como seu companheiro de estudo e desejo que sua jornada pelo cálculo seja inspiradora e gratificante.

Com apreço,

Felipe Mota.

Janeiro de 2025.

CAPÍTULO 1

LIMITE

1.1 Introdução

Newton, a partir de um ponto inicial, forneceu um acréscimo não nulo à variável. Em seguida, "forçava a barra" fazendo acréscimos **(não nulos)** serem iguais a zero, a fim de obter uma taxa de variação instantânea.

Introduziu-se assim a definição de **limites** de funções, para bem definir o Cálculo desenvolvido por **Newton** e **Leibniz**.

1.2 Entorno de um Ponto

Considera-se $\delta > 0$. Seja x_0 um número real qualquer. Denomina-se **vizinhança** de x_0, um intervalo de centro x_0 e raio δ, da forma:

$$V_\delta(x_0) = (x_0 - \delta, x_0 + \delta) - \{x_0\}$$

Naturalmente, afirmar que um real x pertence a uma vizinhança V_δ de x_0 equivale a:

$$\boxed{x \in V_\delta(x_0) \Longleftrightarrow 0 < \left|x - x_0\right| < \delta}$$

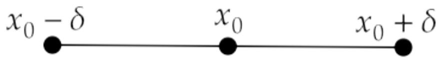


Figura 1.1: Representação do limite

1.2.1 Limites Laterais

Um **limite lateral à direita** de x_0 será um intervalo positivo da forma $V_\delta^+(x_0) = (x_0, x_0 + \delta)$. Já um **limite lateral à esquerda** de x_0 será um intervalo negativo da forma $V_\delta^-(x_0) = (x_0 - \delta, x_0)$.

1.3 Análise Gráfica

Observa-se o gráfico de uma função $f : \Re - \{-2\} \to \Re$, em que $y = f(x)$.

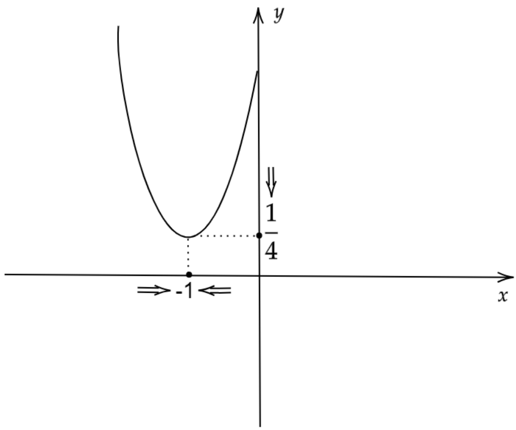


Figura 1.2: Gráfico da função

Imagine-se um ponto de abscissa x_i "deslocando-se" sobre o eixo x. Ao aproximar-se de x_0 = -1, nota-se que as imagens tendem a "concentrar-se" em torno de $L_0 = \frac{1}{4}$, ainda que todas estejam "acima" e sejam diferentes de $\frac{1}{4}$.

A ideia é: quanto **menor** for a vizinhança em torno de x_i , **melhor** a aproximação observada nas imagens.

Diz-se que o **limite de $f(x)$ quando x tende a -1 é igual a $\frac{1}{4}$**. Indica-se tal fato pela simbologia:

$$\lim_{x \to -1} f(x) = \frac{1}{4}$$

Uma função jamais pode possuir dois limites diferentes, para uma mesma tendência. Desta forma, a ideia de **limites laterais** é fundamental. Por exemplo, **quando x tende a -3 pela esquerda**, as imagens de $f(x)$ aglomeram-se em torno de 2. E que **quando x tende a -3 pela direita**, $f(x)$ tendem a 4.

Indicam-se pela simbologia:

$$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 2 \text{ e } \lim_{x \to -3^+} f(x) = 4$$

Como esses limites laterais são distintos, pode-se afirmar que $\lim_{x \to -3} f(x)$ **não existe**.

Quando as imagens de $f(x)$ conseguem ser maiores do que qualquer número real pré estabelecido, indicam-se casos como este pela simbologia:

$$\lim_{x \to -2} f(x) = +\infty$$

O símbolo $+\infty$ **não representa número real algum**, ele indica que em vizinhanças suficientemente pequenas em torno de -2, as imagens conseguem ser tão grandes quanto se deseja.

1.4 Resultados Notáveis

Em todos os resultados seguintes f, g, h serão funções reais de variável real, definidas em algum subconjunto $X \subset R$, sendo que o valor **a** não necessariamente pertence a X.

1.4.1 Unicidade do Limite

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L_1$ e $\lim_{x \to a} f(x) = L_2$, então $L_1 = L_2$.

Este teorema afirma que, uma mesma função não pode ter dois limites distintos num mesmo ponto.

1.4.2 Limite de uma Função Constante

Sendo $f : \Re \to \Re$, dada por $f(x) = k$ $(\in \Re)$, tem-se que $\lim_{x \to a} f(x) = k, \forall x \in \Re$.

1.4.3 Existência do Limite

Uma função possui limite num ponto **a** se, e somente se, os limites laterais existem e são iguais.

1.4.4 Limite como Conceito Local

Se existe algum $\delta > 0$, tal que $f(x) = g(x)$, $\forall x \in V_\delta\ (a)$ e $\lim_{x \to a} g(x) = L$, então $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

Este teorema ensina que, caso duas funções tenham mesmas imagens em alguma vizinhança de **a**, **mas não necessariamente em a**, então a existência do limite em **a** para uma delas implica a existência do mesmo limite para a outra.

1.4.5 Operações com Limites

Caso os limites existam, o limite de uma operaçao algébrica é igual à operação algébrica com os respectivos limites, **desde que o resultado desta seja real**. É como se o símbolo pudesse ser "distribuído" em relação a operações aritméticas.

1.4.6 Limites Infinitos

Se $\lim_{x \to a} f(x) = L \neq 0$ e $\lim_{x \to a} g(x) = 0$, onde uma vizinhança $V_\delta\ (a)$, tal que $\forall x \in V_\delta\ (a)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} > 0$, então $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = +\infty$. No caso em que $\forall x \in V_\delta\ (a)$, $\dfrac{f(x)}{g(x)} < 0$, então $\lim_{x \to a} \dfrac{f(x)}{g(x)} = -\infty$.

Trata-se de um resultado suficiente para que as imagens de uma função "explodam", ou seja, para que ocorra um limite infinito.

1.4.7 Limites no Infinito

Valem as seguintes propriedades básicas de limites:

1. $\lim_{x \to \infty} k = k,\ \forall k \in \Re$.
2. $\lim_{x \to +\infty} x^n = +\infty,\ \forall n \in N^*$.
3. $\lim_{x \to \infty} \dfrac{k}{x^n} = 0,\ \forall k \in \Re$.
4. $(-\infty)^n = +\infty$, se n é par, e $-\infty$, se n é ímpar.
5. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty$ e $(-\infty) + (-\infty) = -\infty$.

1.5 Limites do Tipo 0/0

Sabe-se que $\frac{0}{0}$ é uma indeterminação, mas, esses limites podem ser calculados. Usando técnicas que vamos aprender no capítulo de derivada, por exemplo, a **regra de L'Hôpital**.

1.6 Teorema do Confronto

Sejam **f**, **g** e **h** funções que satisfazem $g(x) \leq f(x) \leq h(x)$ para todo **x real** numa vizinhança do número real **a**. Se $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} g(x) = L$ então $\lim_{x \to a} f(x) = L$.

1.7 Limite Exponencial Fundamental

Esse limite define o número de **Euler**.

$$\boxed{e = \lim_{n \to +\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n}$$

1.8 Funções Contínuas

Continuidade é um dos principais conceitos no estudo das funções. Uma função é dita **não contínua** quando ela dá um salto em determinado número do domínio. Por exemplo, a função cujo gráfico está ilustrado abaixo é não contínua, uma vez que o gráfico $f(x)$ dá um salto.

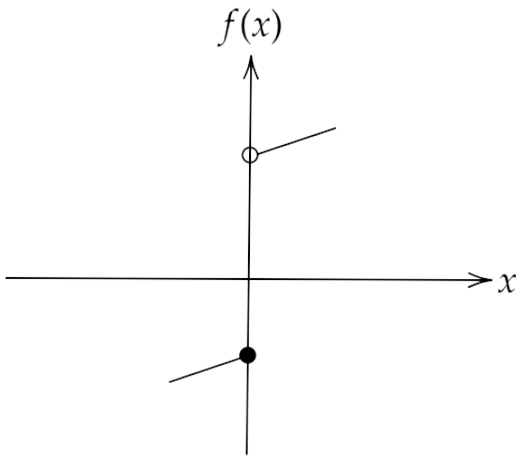


Figura 1.3: Função não contínua

Para que a função seja **contínua** não podem ocorrer saltos como o indicado no gráfico acima, ou seja, numa função contínua uma pequena variação de x implica numa pequena variação de $f(x)$.

Formalmente, temos:

Definição: Uma função é dita contínua em todo seu domínio D(f) se, para todo real a $\in$ D(f) , $f(a) = \lim_{x \to a} f(x)$.

1.9 Exercícios Resolvidos

Questão 1. Demonstre o limite exponencial fundamental.

Ao calcularmos o valor de $\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ para valores crescentes de n, observamos que o valor se aproxima da constante de Euler.

$n = 1: \left(1+\frac{1}{1}\right)^1 = 2$

$n = 2: \left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 2,25$

$n = 10: \left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 2,59$

$n = 1000: \left(1+\frac{1}{1000}\right)^{1000} = 2,71$

Conforme $n \to \infty$, o valor converge para 2,71.

Questão 2. Resolva $\lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2}$

Lembrando do produto notável $X^3 - Y^3$, temos:

$x^3 - 8 = (x-2)(x^2+2x+2^2) \Longrightarrow \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} \therefore 2^2 + 2\cdot 2 + 4 = 12$

Questão 3. Resolva $\lim_{x\to+\infty} \frac{2x-5}{x+8}$

O limite acima pode ser simplificado para:

$\lim_{x\to+\infty} \frac{2x}{x} = \lim_{x\to+\infty} 2 = 2$

Questão 4. Resolva $\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3-3x+5}{4x^5-2}$

O limite acima pode ser simplificado para:

$\lim_{x\to-\infty} \frac{2x^3}{4x^5} = \lim_{x\to-\infty} \frac{1}{2x^2} = 0$

Questão 5. Resolva $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+2x)}{x}$

$\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{x}\cdot \ln(1+2x) = \lim\limits_{x\to 0} \ln(1+2x)^{1/x} = \ln[\lim\limits_{x\to 0}(1+2x)^{1/x}]$

Se $x \to 0$, então $x \to \infty$.

$$\ln\left[\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{2x}\right] = \ln\left[\overbrace{\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}^{e}\right]^2 = \log_e e^2 = 2\log_e e = 2\cdot 1 = 2$$

1.10 Exercícios Propostos

Questão 1. O valor de $\lim\limits_{x\to+\infty} \sqrt{2+2\sqrt{x}} - \sqrt{x}$ **é :**

A) $-\infty$ B) -1 C) 0 D) 1 E) $+\infty$

Questão 2. O valor de $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2}{1-x^3}$ **é :**

A) 0 B) 2 C) $+\infty$ D) $-\infty$ E) $\nexists$

Questão 3. O valor de $\lim\limits_{x\to -1^-} \dfrac{x}{x^2-1}$ **é :**

A) 0 B) 1 C) -1 D) ∞ E) $-\infty$

Questão 4. Calcule $\lim\limits_{x\to\pi} \dfrac{\operatorname{sen} x - \operatorname{sen} \pi}{x-\pi}$

–

Questão 5. O valor de $\lim\limits_{x \to +\infty} \log(x+1) - \log(x)$ é :

A) $+\infty$ B) 0 C) 1 D) -1 E) $-\infty$

Questão 6. O valor de $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$ é :

A) -1/4 B) -1/2 C) 0 D) 1/4 E) 1/2

Questão 7. Calcule $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^4+x^2-2}{x^5+2x^2-3}$

–

Questão 8. Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} \left(1+\dfrac{3}{4}\right)^x$

–

Questão 9. Calcule $\lim\limits_{x \to \infty} \left(\dfrac{x-1}{x+1}\right)^x$

–

Questão 10. Calcule $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} 3x}{2x}$

–

Questão 11. Calcule $\lim\limits_{x \to 1^+} \dfrac{x-\sqrt{x}}{\sqrt{x^2-1}}$

–

Questão 12. Calcule $\lim_{x\to+\infty}(\sqrt{x}-x)$

–

Questão 13. O valor do limite $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+2x+3}-x)$ é:

A) 0 B) $+\infty$ C) $-\infty$ D) 2 E) 1

Questão 14. O valor do $\lim_{x\to 0}\dfrac{1-\cos x}{x^2}$ é:

A) -1 B) 0 C) 1/2 D) 2/3 E) NDA

Questão 15. Calcule $\lim_{x\to 0^+} x\cdot e^{\frac{1}{x}}$

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{\text{e}}$ D) e E) ∞

Questão 16. O $\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x^2+x+1}-\sqrt{x^2-x+1})$ é:

A) 0 B) 1 C) 2 D) 3 E) ∞

Questão 17. Calcule $\lim_{x\to -4}\dfrac{x^6-4096}{x+4}$

–

Questão 18. Calcule $\lim_{x\to 1^-}\dfrac{1-\sqrt[4]{x}}{\sqrt{1-x}}$

–

Questão 19. Calcule $\lim_{x\to\infty} \dfrac{\sqrt{x^4+1}}{x-1}$

—

Questão 20. Calcule $\lim_{x\to 2^+} \sqrt{\dfrac{x^2-4}{x-2}}$

—

Questão 21. Calcule $\lim_{x\to 0^+} \dfrac{x}{\sqrt{x}-\sqrt[3]{x}}$

—

Questão 22. Calcule $\lim_{x\to -1} \dfrac{\sqrt[3]{x+2}+\sqrt[3]{x}}{x+1}$

—

Questão 23. Calcule $\lim_{x\to 0^-} \dfrac{x^3+x}{|x^3-x|}$

—

Questão 24. Calcule $\lim_{x\to -\infty} (\sqrt{|x|}-x)$

—

Questão 25. Calcule $\lim_{x\to 3^+} \dfrac{1-x}{(3-x)^2}$

—

Questão 26. Calcule $\lim\limits_{x\to-1}\left(\dfrac{1}{x+1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

–

Questão 27. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}(\sqrt{x^2+1}-x)$

–

Questão 28. Calcule $\lim\limits_{x\to-\infty}\dfrac{1+\sqrt[7]{x}}{1-\sqrt[7]{x}}$

–

Questão 29. Calcule $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\sqrt{x+b}+\sqrt{x+a}-\sqrt{b}-\sqrt{a}}{x}$

–

Questão 30. Calcule $\lim\limits_{x\to+\infty}\dfrac{x^{\frac{3}{2}}+1}{x-2}$

–

CAPÍTULO 2
DERIVADA

2.1 Introdução

Nó século XVII, Fermat, após estudar sobre o "**problema da reta tangente**", criou o conceito de derivada aproximando a reta PQ da reta tangente ao gráfico no ponto P. Por isso, **Fermat** é considerado o inventor do cálculo diferencial.

2.2 O Problema da Reta Tangente

Suponha que f(x) é uma função contínua e P(x_0, $f(x_0)$) é um ponto sobre seu gráfico. Adote outro ponto Q do gráfico de f(x) e que **s** é a reta passando pelos pontos P e Q. Com a geometria analítica sabe-se que a inclinação da reta **s** é:

$$m_s = \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

Fazendo o ponto Q se aproximar do ponto P, a reta s se aproxima da reta tangente ao gráfico de f(x) em P. Ou seja:

$$m = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}$$

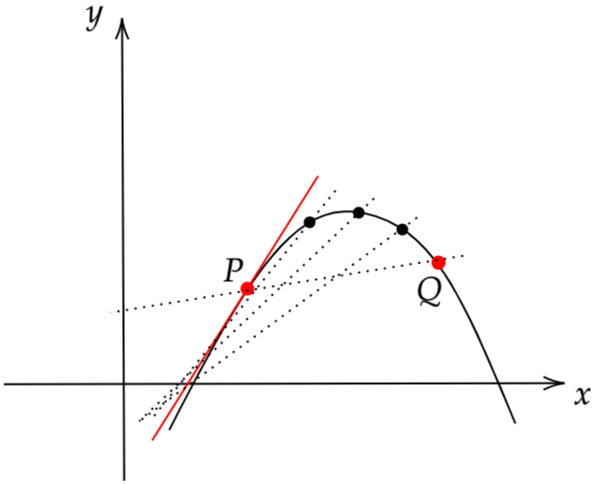


Figura 2.1: Reta tangente

Caso esse limite exista, existe a reta tangente ao gráfico de f em P. Entretanto, há funções que, **apesar de serem contínuas**, não apresentam reta tangente em determinado ponto do seu gráfico. Por exemplo, a função $f : \Re \to \Re$, dada por f(x) = $|x|$.

2.3 Derivada de uma Função num Ponto

Definição: Uma função $f : A \to B$ é chamada de derivável ou diferenciável num ponto $x_0 \in A$ se existe e é finito o limite

$$\boxed{f'(x_0) = \lim_{x_1 \to x_0} \frac{f(x_1) - f(x_0)}{x_1 - x_0}}$$

Nesse caso, $f'(x_0)$ é a derivada da função $f(x)$ no ponto x_0. Repare que o limite que define uma derivada leva a uma indeterminação do tipo 0/0. Desta forma, para calcular a derivada de uma função num ponto é necessário aplicar os conhecimentos do capítulo anterior.

Exemplo, suponha que se deseja calculcar a derivada de $f(x) = x^3$ no ponto x = 2. Usando o limite:

$$f'(2) = \lim_{x\to 2} \frac{f(x)-f(2)}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{x^3-8}{x-2} = \lim_{x\to 2} \frac{(x-2)(x^2+2x+4)}{x-2} = \lim_{x\to 2} x^2 + 2x + 4 = 12$$

2.4 A Função Derivada

Definição: Considere uma função $f : A \to B$. A função f', denominada de função derivada de f, é definida como:

$$\boxed{f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}}$$

Outra notação para f', criada por Leibniz, é $\dfrac{df}{dx}$.

Por exemplo, qual seria a derivada de $f(x) = x^3$? Usando a definição, temos:

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{(x+h)^3-x^3}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{x^3+3x^2h+3xh^2+h^3-x^3}{h} =$$

$$\lim_{h\to 0} \frac{(3x^2+3xh+h^2)}{h} = \lim_{h\to 0} 3x^2+3xh+h^2 = 3x^2.$$

2.5 Regras de Derivação

Em todas as regras adote que **k** é um número real fixo não nulo, **n** é um inteiro positivo, **x** é uma variável real, **f(x)**, **g(x)** e **h(x)** são funções deriváveis em todo seu domínio.

1. Se $g(x) = k \cdot f(x)$ então $g'(x) = k \cdot f'(x)$.
2. Se $h(x) = f(x) + g(x)$ então $h'(x) = f'(x) + g'(x)$.
3. Se $h(x) = f(x) \cdot g(x)$ então $h'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$.
4. Se $f(x) = \dfrac{g(x)}{h(x)}$ então $f'(x) = \dfrac{g'(x) \cdot h(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$.
5. Se $f(x) = h(g(x))$ então $f'(x) = h'(g(x)) \cdot g'(x)$.
6. Se $g(x) = f^{-1}$ então $g'(x) = \dfrac{1}{f'(f^{-1}(x))}$.

Dica

Para calcular as derivadas das funções trigonométricas, basta derivar no sentido horário.

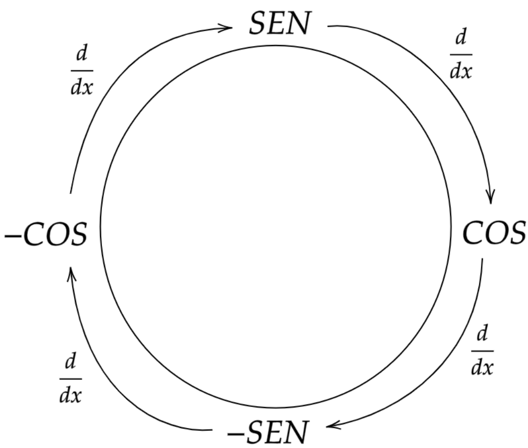


Figura 2.2: Ciclo trigonométrico

2.6 Derivadas Elementares

2.6.1 Constante

Se $f(x) = k \Longrightarrow f'(x) = 0$.

2.6.2 Parcela Binomial

Se $f(x) = x^n \Longrightarrow f'(x) = nx^{n-1}$.

Demonstração: Com a definição de derivada, temos:

$f'(x) = \lim_{h \to 0} \dfrac{(x+h)^n - x^n}{h}$ e expandindo binomialmente $(x+h)^n$, temos:

$(x+h)^n = x^n + nx^{n-1} + O(h^2)$, onde $O(h^2)$ representa os termos h^2, h^3, etc, que serão irrelevantes. Substituindo na definição e simplificando:

$f'(x) = \lim_{h\to 0} \dfrac{nx^{n-1}h + O(h^2)}{h}$ e ao dividir cada termo por h e tomar o limite quando $h \to 0$, teremos que: $f'(x) = nx^{n-1}$.

2.6.3 Polinomial

Se $f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + a_{n-2}x^{n-2} + \ldots + a_2x^2 + a_1x + a_0$.
$\Longrightarrow f'(x) = a_n nx^{n-1} + a_{n-1}(n-1)x^{n-2} + \ldots + 2a_2x + a_1$.

Demonstração: Análoga a demonstração anterior.

2.6.4 Inversa

Se $f(x) = \dfrac{1}{x^n} \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{n}{x^{n+1}}$.

2.6.5 Exponencial Neperiano

Se $f(x) = e^x \Longrightarrow f'(x) = e^x$.

2.6.6 Exponencial

Se $f(x) = a^x \Longrightarrow f'(x) = a^x \cdot \ln a$.

2.6.7 Logarítmica Neperiano

Se $f(x) = \ln x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x}$.

2.6.8 Logarítmica

Se $f(x) = \log_a x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{x} \cdot \log_a e$.

2.6.9 Seno

Se $f(x) = \operatorname{sen} x \Longrightarrow f'(x) = \cos x$.

Demonstração: Substituir $f(x) = \operatorname{sen} x$ na definição de derivada:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x+h) - \operatorname{sen} x}{h}$ e usando a soma de ângulos, temos:

$f'(x) = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} x \cos h + \operatorname{sen} h \cos x - \operatorname{sen} x}{h}$. Rearranjando e separando os limites em duas partes:

$f'(x) = \operatorname{sen} x \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} + \cos x \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h}$.

Simplificando: $f'(x) = \operatorname{sen} x \cdot 0 + \cos x \cdot 1 \Longrightarrow f'(x) = \cos x$.

2.6.10 Cosseno

Se $f(x) = \cos x \Longrightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$.

Demonstração: Analogamente a demonstração anterior, teremos ao rearranjar e separar os limites em duas partes:

$f'(x) = \cos x \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\cos h - 1}{h} - \operatorname{sen} x \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\operatorname{sen} h}{h}$.

Simplificando: $f'(x) = \cos x \cdot 0 - \operatorname{sen} x \cdot 1 \Longrightarrow f'(x) = -\operatorname{sen} x$

2.6.11 Tangente

Se $f(x) = \operatorname{tg} x \Longrightarrow f'(x) = \sec^2 x$.

2.6.12 Cotangente

Se $f(x) = \operatorname{cotg} x \Longrightarrow f'(x) = -\operatorname{cossec}^2 x$.

2.6.13 Secante

Se $f(x) = \sec x \Longrightarrow f'(x) = \sec x \cdot \operatorname{tg} x$.

2.6.14 Cossecante

Se $f(x) = \operatorname{cossec} x \Longrightarrow f'(x) = -\operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x$.

2.6.15 Arco Seno

Se $f(x) = \operatorname{arcsen} x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.6.16 Arco Cosseno

Se $f(x) = \arccos x \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

2.6.17 Arco Tangente

Se $f(x) = \operatorname{arctg} x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$.

2.6.18 Arco Cotangente

Se $f(x) = \text{arccotg}\, x \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{1+x^2}$.

2.6.19 Arco Secante

Se $f(x) = \text{arcsec}\, x \Longrightarrow f'(x) = \dfrac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$.

2.6.20 Arco Cossecante

Se $f(x) = \text{cossec}\, x \Longrightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{|x|\sqrt{1-x^2}}$.

2.7 Derivadas Sucessivas

A nomenclatura para as funções derivadas obtidas, de acordo com **a ordem da derivada**, é segunda derivada, terceira derivada e assim por diante. A notação mais usada para a 2° derivada é $f''(x)$, para a 3° derivada é $f'''(x)$ e assim por diante. Mas, também é aceita a notação $\dfrac{df}{dx}$ para a derivada , $\dfrac{d^2f}{dx^2}$ para a segunda derivada e assim sucessivamente.

2.8 Derivadas Implícitas

Até o item anterior todas as funções foram apresentadas de forma explícita, ou seja, a fórmula para o cálculo de f(x) estava em função de x. Mas, nem sempre é fácil explicitar o f(x) em função do x. Para isso, a notação **f(x) = y** será útil.

2.9 Máximo e Mínimo de uma Função

2.9.1 Extremos Globais

Considere uma função $f: A \to B$, com $A \subset \Re$ e $B \subset \Re$. Um ponto $x_{max} \in A$ é um ponto de máximo global de f se $f(x_{max}) \geq f(x)$, para todo $x \in A$. Afirma-se, então, que a função $f(x)$ assume seu valor máximo em $x = x_{max}$.

Um ponto $x_{min} \in A$ é um ponto de mínimo global de f se $f(x_{min}) \leq f(x)$, para todo $x \in A$. Logo, a função $f(x)$ assume seu valor de mínimo em $x = x_{min}$.

Por exemplo, a função $f: [-1,2] \to \Re$ dada por $f(x) = x^2$ tem máximo global em $x_{max} = 2$ e mínimo global em $x_{min} = 0$.

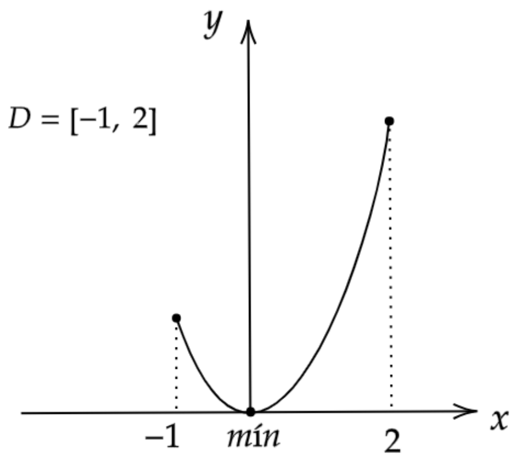


Figura 2.3: Extremo global

Há funções que, apesar de contínuas, não admitem nem máximo nem mínimo. Por exemplo, a função $f:]0,+\infty) \to \Re$ dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ não admite um máximo global nem um mínimo global.

> **Teorema:** Se f é uma função contínua com domínio em $[a,b]$, com $a < b$, então f admite um máximo global e um mínimo global em $[a,b]$.

Para determinar máximos ou mínimos de uma função é necessário compreender as condições para que a função seja crescente ou decrescente num intervalo.

Teorema: Seja f uma função derivável no intervalo $[a,b]$:

1. Se $f'(x) > 0,\ \forall x \in [a,b]$ então f é **estritamente crescente** em $[a,b]$.
2. Se $f'(x) < 0,\ \forall x \in [a,b]$ então f é **estritamente decrescente** em $[a,b]$.
3. Se $f'(x) = 0,\ \forall x \in [a,b]$ então f é **constante** em $[a,b]$.

2.9.2 Extremos Locais

Considere uma função real f de domínio D. Um ponto $a \in D$ é denominado de máximo local de f se existir um intervalo $A \subset D$, com $a \in A$, tal que $f(a) \geq f(x)$, qualquer que seja $x \in A$. Analogamente, um ponto $b \in D$ é denominado de mínimo local de f se existir um intervalo $B \subset D$, com $b \in B$, tal que $f(b) \geq f(x)$, qualquer que seja $x \in B$.

Na figura abaixo, a função apresenta um máximo global em x_1. Porém, para todo $x \in I$, ocorre $f(x_2) \geq f(x)$, caracterizando x_2 como um ponto de máximo local.

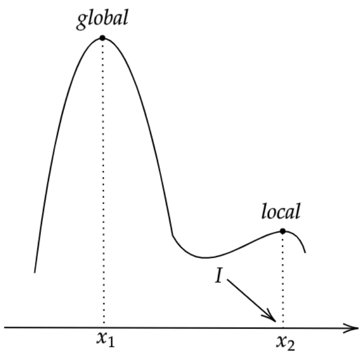


Figura 2.4: Extremo local

Note que todo ponto de máximo global também é um ponto de máximo local, mas o contrário não ocorre, necessariamente.

Teorema: Se f(x) é uma função derivável e **a** é um ponto de máximo ou mínimo local de f então $f'(a) = 0$.

2.9.3 Pontos Críticos

Considere uma função $f : A \to B$ derivável. Afirmamos que $a \in A$ é um ponto crítico de f se $f'(a) = 0$ ou $f'(a)$ não existe.

2.9.4 Teste da Primeira Derivada

Considere que f(x) é uma função contínua com um ponto crítico em $c \in (a,b)$. Caso f seja derivável em (a,c) e (c,b):

1. Se $f'(x) > 0$ para todo $x \in (a,c)$ e $f'(x) < 0$ para todo $x \in (c,b)$ então f possui um **máximo local** em c.
2. Se $f'(x) < 0$ para todo $x \in (a,c)$ e $f'(x) > 0$ para todo $x \in (c,b)$ então f possui um **mínimo local** em c.
3. Se $f'(x)$ possui um mesmo sinal em (a,c) e (c,b) então c **não é um ponto de extremo local** de f.

2.9.5 Teste da Segunda Derivada

Seja f uma função derivável duas vezes em um intervalo (a,b) e $c \in (a,b)$:

1. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) > 0 \Longrightarrow$ f tem um **mínimo local** em c.
2. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) < 0 \Longrightarrow$ f tem um **máximo local** em c.
3. Se $f'(c) = 0$ e $f''(c) = 0 \Longrightarrow$ o teste é **inconclusivo** (c pode ser máximo, mínimo ou nenhum dos dois).

2.9.6 Determinando os Extremos Globais

Teorema: Se f é uma função contínua e se L_1 é o limite de $f(x)$ quando x tende ao extremo esquerdo do domínio e se L_2 é o limite de $f(x)$ quando x tende ao extremo direito do domínio, então:

1. Se $L_1 = L_2 = +\infty \Longrightarrow$ f tem um **mínimo global** e não tem **máximo global**.
2. Se $L_1 = L_2 = -\infty \Longrightarrow$ f tem um **máximo global** e não tem **mínimo global**.
3. Se $L_1 = +\infty$ e $L_2 = -\infty \Longrightarrow$ f não tem **extremos globais**.
4. Se $L_1 = -\infty$ e $L_2 = +\infty \Longrightarrow$ f não tem **extremos globais**.

2.10 Funções Côncavas e Convexas

Definição: Seja $f : A \to \Re$ uma função, então:

1. f é uma **função convexa em A** se, para todos $x, y \in A$, tem-se: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \frac{f(x)+f(y)}{2}$.
2. f é uma **função côncava em A** se, para todos $x, y \in A$, tem-se: $f\left(\frac{x+y}{2}\right) \ge \frac{f(x)+f(y)}{2}$.

Por exemplo, de acordo com essas definições tem-se que $f(x) = x^2$ é uma função convexa.

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \left(\frac{x+y}{2}\right)^2 = \frac{x^2+2xy+y^2}{4} = \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2}-\frac{(x-y)^2}{4} \le \frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{2} = \frac{f(x)+f(y)}{2}.$$

Geometricamente, se **A** e **B** são dois pontos do gráfico de **f**, uma função **convexa** equivale ao gráfico de f estar sempre **abaixo** do segmento de reta $\overline{AB}$ e uma função **côncava** equivale ao gráfico de f estar sempre **acima** do segmento de reta $\overline{AB}$.

Exemplo de uma função convexa:

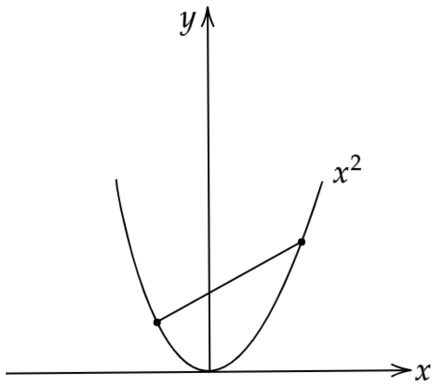


Figura 2.5: Função convexa

Exemplo de uma função côncava:

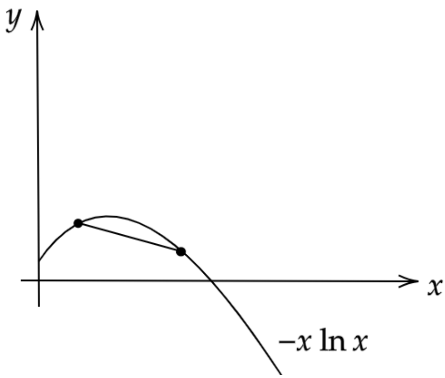


Figura 2.6: Função côncava

Algumas funções são convexas e côncavas em outro intervalo, como é o caso da função $f : \Re \to \Re$, $f(x) = x^3$.

Teorema: Seja f(x) uma função contínua onde existem f'(x) e f''(x) em todo ponto de um intervalo real I:

1. Se f''(x) ≥ 0 para todo $x \in I$, então **f é convexa em I**.
2. Se f''(x) ≤ 0 para todo $x \in I$, então **f é côncava em I**.

2.11 Ponto de Inflexão

Esse é o nome que se dá ao ponto onde ocorre a **mudança da concavidade** da função. O ponto de inflexão ocorre quando f”(x) **muda de sinal**. Uma função pode **mudar sua concavidade** sem que isso ocorra num ponto de inflexão.

2.12 Taxas Relacionadas

Em determinadas situações duas ou mais variáveis variam em função de uma variável que não aparece na expressão. É possível derivar a expressão, em função dessa variável que não aparece na expressão, e obter uma relação entre as taxas de variação das incógnitas presentes.

Na maioria dos casos, essa variável que a expressão original será derivada é o **tempo**, obtendo **taxas temporais** das variáveis da expressão original.

Por exemplo, na cinemática é normal escrever as equações horárias das grandezas que caracterizam o movimento de um corpo, como espaço, velocidade e aceleração. Suponha um movimento em que $x \cdot v = k$, onde k =cte, é possível obter uma expressão que relacione esses elementos:

$$\frac{d(x \cdot v)}{dt} = \frac{d(k)}{dt} \Longrightarrow \frac{dx}{dt} \cdot v + x \cdot \frac{dv}{dt} = 0 \Longrightarrow \boxed{v^2 + x \cdot a = 0}.$$

- $v = \dfrac{dx}{dt}$.
- $a = \dfrac{dv}{dt}$.

2.13 Aplicações de Derivadas

2.13.1 Polinômios

É possível aplicar derivada em funções polinomiais, além da determinação dos máximos e mínimos da função, em situações que envolvam o estudo das raízes de uma função polinomial.

2.13.2 Somatórios

Uma conhecida aplicação de derivadas é em somatórios, principalmente se os coeficientes do somatório forem números em uma progressão aritmética.

2.13.3 Geometria

É usada para otimizar características geométricas, por exemplo, é possível determinar a área máxima de determinada figura que respeite certas condições, como estar contida numa circunferência ou a distância mínima de um ponto de uma curva a uma determinada reta.

2.14 Regra de L'Hôpital

Essa regra é usada para calcular limites **indeterminados** do tipo $\frac{0}{0}$ e $\frac{\pm\infty}{\pm\infty}$. Para conseguir calcular esses tipos de limites vamos usar uma regra que envolve derivadas.

1. Se f e g são funções deriváveis em x = a, tais que f(a) = g(a) = 0 e $\frac{f'(a)}{g'(a)}$ existe, então $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.
2. Sejam f e g funções deriváveis num intervalo I que contenha x = a, com $g(x) \neq 0$ e $g'(x) \neq 0$ para todo $x \in I$. Se $\lim_{x\to a}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ existe ou é $\pm\infty$, então $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Demonstração:

Como $f(a) = g(a) = 0$: $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{g(x)-g(a)} = \lim_{x\to a}\frac{\frac{f(x)-f(a)}{x-a}}{\frac{g(x)-g(a)}{x-a}} = \frac{f'(a)}{g'(a)}$.

Por exemplo, para calcular o **limite fundamental trigonométrico**, usamos a regra apresentada anteriormente:

$\lim_{x\to 0}\frac{senx}{x} = \frac{f'(0)}{g'(0)} = \frac{\cos 0}{1} = 1.$

2.15 Exercícios Resolvidos

Questão 6. Demonstre a derivada da tangente.

Sabemos que: $\operatorname{tg} x = \dfrac{\operatorname{sen} x}{\cos x}$

Usando a regra do quociente, temos:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \frac{\cos x \cdot \cos x - \operatorname{sen} x \cdot (-\operatorname{sen} x)}{[\cos x]^2} \Longrightarrow \frac{\cos^2 x + \operatorname{sen}^2 x}{[\cos x]^2} \Longrightarrow \frac{1}{[\cos x]^2}$$

Portanto:

$$\frac{d}{dx}\operatorname{tg} x = \sec^2 x$$

Questão 7. Encontre a inclinação da reta tangente à curva $y = 5 + x^2 - 2x^3$ no ponto onde x = 1.

Derivando:

$y = f(x) \Longrightarrow f'(x) = 2x - 2 \cdot 3x^2 \Longrightarrow f'(x) = 2x - 6x^2$

Substituindo f'(1):

$f'(1) = 2 \cdot 1 - 6 \cdot 1^2 = 2 - 6 = -4$

Questão 8. Calcule a derivada de $y = e^{\cos^4 x + 1}$

Usando a regra da cadeia, temos:

$y' = e^{\cos^4 x + 1} \cdot 4\cos^3 x \cdot (\cos x) \Longrightarrow y' = -4 \operatorname{sen} x \cdot \cos^3 x \cdot e^{\cos^4 x + 1}$

Questão 9. Encontre os valores de máximo e mínimo absolutos de f no intervalo dado: $f(x) = x^3 - 3x + 1$, (0, 3).

Temos:

$f'(x) = 3x^2 - 3 = 0 \Longrightarrow 3x^2 = 3 \Longrightarrow x^2 = 1 \Longrightarrow x = \pm 1$

Como x = -1 não pertence ao intervalo então é descartado, logo x = 1.

$f(0) = 1$

$f(1)_{mín} = -1$

$f(3)_{máx} = 19$

Questão 10. Considere a equação $x^2 + y^2 = 4$. Obtenha $\dfrac{dy}{dx}$.

$x^2 + y^2 = 4 \therefore y^2 = 4 - x^2 \Longrightarrow y = \pm\sqrt{4-x^2}$

$\dfrac{dy}{dx} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2}4-x^2}\cdot(4-x^2)' \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \pm\dfrac{(-2x)}{2\sqrt{4-x^2}} \Longrightarrow \dfrac{dy}{dx} = \mp\dfrac{x}{\sqrt{4-x^2}}$

$x^2 + y^2 = 4 \therefore \dfrac{d}{dx}(x^2+y^2) = \dfrac{d}{dx}(4) \Longrightarrow \dfrac{d(x^2)}{dx} + \dfrac{d(y^2)}{dx} = \dfrac{d}{dx}(4)$

$2x + 2y\cdot\dfrac{dy}{dx} = 0 \therefore \dfrac{dy}{dx} = -\dfrac{x}{y}$

2.16 Exercícios Propostos

Questão 31. Seja $f(x) = \text{arctg}(x-1) + x^3 + 1$ e seja g a função inversa de f. Então, g'(2) vale:

A) 4 B) 2 C) 1 D) 1/2 E) 1/4

Questão 32. A equação da reta que é tangente à curva $y = \dfrac{2x+3}{x-1}$ e que contém o ponto (3, 2) é:

A) y = -5x + 17 B) y = -4x + 14 C) y = -3x + 11 D) y = -2x + 8
E) y = -x + 5

Questão 33. Seja f uma função derivável, onde, $x^2 f(x) - f(x)^3 + x^3 = 8$. Se f(2) = -2 então, f'(2) vale:

A) -4 B) -1/2 C) 0 D) 1/2 E) 2

Questão 34. Calcule $\lim\limits_{x\to 0} x\cdot e^{1/x}$

A) 0 B) 1 C) $\sqrt{e}$ D) e E) ∞

Questão 35. Dada a função $f(x) = \dfrac{2(x - \operatorname{sen} x)}{-5x^3}$, calcule o valor de $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$.

–

Questão 36. Calcule o limite de $f(x) = \dfrac{\ln x}{\operatorname{cotg} x}$, quando x tende a zero.

–

Questão 37. Qual dos pontos abaixo é ponto de inflexão de $f(x) = \ln(4+x^2)$

A) -3 B) -2 C) 0 D) 1 E) 4

Questão 38. Seja f uma função da variável real x, definida por $f(x) = 2x^3 - 3x^2 - 3x + 4$. O máximo relativo de f vale:

A) $\dfrac{4+\sqrt{3}}{2}$ B) $\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$ C) $\dfrac{3\sqrt{3}-4}{2}$ D) $\dfrac{4+3\sqrt{3}}{2}$ E) $4 + \dfrac{3\sqrt{3}}{2}$

Questão 39. Seja L uma lata de forma cilíndrica, sem tampa, de raio da base r e altura h. Se a área da superfície de L mede $54\pi a^2 cm^2$, qual deve ser o valor de $\sqrt{r^2 + h^2}$, para que L tenha volume máximo?

–

Questão 40. Considere a equação $x^4 - 2ax^3 + 4ax^2 - 6ax + 9a = 0$. Sabendo que a é raiz dupla dessa equação e não é nulo, determine o valor de a.

A) -1 B) 1 C) 2 D) 3 E) 4

Questão 41. Ache a declividade da reta tangente à curva $y = x^2$ no ponto (-2, 4).

–

Questão 42. A derivada de $f(x) = \dfrac{2x}{\sqrt{5x+1}}$ no ponto x = 0 é:

A) -1 B) 0 C) 1 D) 2 E) 3

Questão 43. Se $f(x) = \operatorname{sen} x$, então a derivada quarta $f^4(x)$ vale:

A) $-\operatorname{sen} x$ B) $\cos x$ C) $\operatorname{sen} x$ D) $-\cos x$ E) $\operatorname{sen} x \cdot \cos x$

Questão 44. Calcule usando derivada implícita $xy = (x+y)^2$.

–

Questão 45. Se (x, y) satisfaz à equação $3x + 4y = 12$, então, o valor mínimo de $\sqrt{x^2+y^2}$ é:

A) 12 B) 4/3 C) 3 D) 4 E) 12/5

Questão 46. Se 3x + 4y = 100, qual é o valor mínimo de $\sqrt{x^2+y^2}$?

–

Questão 47. Para x > 0, o valor mínimo de x^x é obtido para x igual a:

A) 1/10 B) 1/3 C) 1/e D) 1/2 E) 1

Questão 48. Calcule usando derivada implícita $\cos(\operatorname{sen} y) - xy = 1$

–

Questão 49. Calcule a derivada de $y = \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}^2 x + \ln(\cos x)$**.**

–

Questão 50. Calcule a derivada $f'(1)$ **da função** $f(x) = \log_2 x^3$**.**

–

Questão 51. Determine o comprimento do menor caminho que liga um ponto da reta y = x - 1 a um ponto da parábola $y = x^2$**.**

–

Questão 52. Uma função f tem derivada igual a $(x+1)(x-2)^2(x+3)^3(x-4)^4$**, encontre os números em que f tem valores extremos. Quais desses valores extremos é mínimo ou máximo?**

–

Questão 53. A função $f(x) = x \cdot \mathrm{e}^{1/x}$ **é decrescente no intervalo:**

A) $]1, +\infty[$ B) $]-\infty, 1[$ C) $]-\infty, 0[$ D) $]0, +\infty[$ E) $]0, 1[$

Questão 54. Calcule a e b de modo que $f(x) = x^3 + 3ax^2 + b,\ x \in \Re$**, tenha um ponto de máximo em x = -4 e admita uma única raiz real.**

–

Questão 55. A função $f:\Re \to \Re$, tal que $f(x) = x^2 \cdot e^x$ é:

A) crescente, $\forall x \in \Re$ B) decrescente, $\forall x \leq 0$ C) crescente, $\forall x > -1$ D) crescente, $\forall x > -2$ E) decrescente, $\forall x \in \,]-2,0[$

Questão 56. O valor mínimo relativo da função f, de variável real x, definida por $f(x) = \dfrac{a^2}{\operatorname{sen}^2 x} + \dfrac{b^2}{\cos^2 x}$, onde a, b $\in \Re$, vale:

A) $(a+2|b|)^2$ B) a^2+b^2 C) $2|ab|$ D) $(|a|+|b|)^2$ E) $2(a+b)^2$

Questão 57. A função real f, de variável real, é definida por $f(x) = \ln(x^5 + x^3 + x)$. Podemos afirmar que a equação da reta normal ao gráfico da função inversa f^{-1} no ponto $(\ln 3, f^{-1}(\ln 3)$ é:

A) $y - 3x + 3\ln 3 = 1$ B) $3y - x + \ln 3 = 3$ C) $y + 3x - \ln 27 = 1$ D) $3y + x - \ln 3 = -3$ E) $y + 3x - \ln 3 = 3$

Questão 58. Considere a função real f, de variável real, definida por $f(x) = x + \ln x,\ x > 0$. Se g é a função inversa de f, então $g''(1)$ vale:

A) 1 B) 0,5 C) 0,125 D) 0,25 E) 0

Questão 59. Sejam f e g duas funções reais e deriváveis tais que $f'(x) = \operatorname{sen}(\cos\sqrt{x})$ e $g(x) = f(x^2),\ x \in \Re_+^*$. Calcule $g'(x^2)$.

–

Questão 60. O cone circular reto, de volume mínimo, circunscrito a um hemisfério de raio R e apoiado no plano diametral, tem por volume o número real:

A) $\dfrac{\pi}{3}R^3$ B) $\dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi R^3$ C) πR^3 D) $\dfrac{\sqrt{2}}{3}\pi R^3$ E) $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi R^3$

CAPÍTULO 3

INTEGRAL

3.1 Introdução

Newton e **Leibniz** inventaram um método que permite calcular a **área** de qualquer superfície e o **volume** de qualquer sólido, desde que exista uma função que caracterize essa geometria.

Suponha que $f(x)$ é uma **função contínua** e **positiva** e se deseja calcular a área do gráfico da função e o eixo x, x = a e x = b, conforme indicado abaixo:

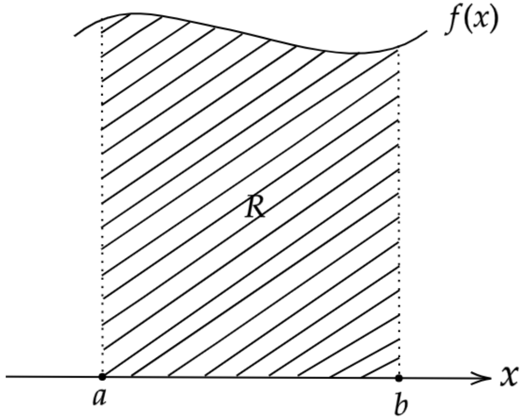


Figura 3.1: Curva qualquer

Entretanto, o objetivo é determinar um método universal para o cálculo dessa área, sem depender do formato da curva. Uma estratégia é, de forma aproximada, **particionar a área em retângulos menores**.

A área delimitada pelo gráfico de $f(x)$, pelas retas x = a e x = b e pelo eixo x pode ser aproximada pela **soma das áreas dos retângulos**:

$$I_n = f(t_1) \cdot \Delta x_1 + f(t_2) \cdot \Delta x_2 + \ldots + f(t_n) \cdot \Delta x_n$$

como indicado na figura abaixo:

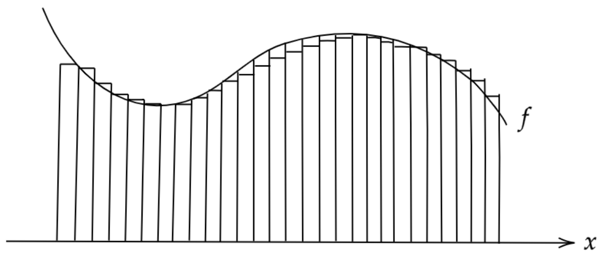


Figura 3.2: Área particionada

Se fizermos **n tender ao infinito**, o valor de I_n tende para a área compreendida entre o gráfico de f, o eixo x e as retas x = a e x = b. A esse somatório das infinitas áreas, tomando um número infinito de partições do intervalo [a, b], se chama **integral da função f**. Nesse caso, Δx_i tende a zero.

Definição: A função $f : [a, b] \to \Re$ é integrável se $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ existir independentemente dos intervalos Δx_i tomados e dos t_i escolhidos.

Quando f é integrável, $\lim\limits_{n \to +\infty} I_n$ é chamado de **integral de Riemann** no intervalo [a, b], cuja notação é:

$$\boxed{\lim_{n \to +\infty} I_n = \int_a^b f(x)\, dx}$$

Os números **a** e **b**, que são os extremos do intervalo onde a função está sendo integrada, são chamados de **limites de integração**.

Perceba a similaridade entre a notação de integral e o somatório infinito que é equivalente a integral:

$$\boxed{\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{i=1}^{\infty} f(t_i)\cdot \Delta x_i}$$

Toda integral de função contínua de uma variável pode ser interpretada como uma **área**. Assim, o símbolo $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ **sempre significa um número**, não uma função.

Além disso, é possível que uma integral dê como resultado um **número negativo**. Quando o resultado de uma integral dá negativo significa que todo o gráfico de f ou uma parte de seu gráfico está abaixo do eixo x.

Assim, convencionou-se que **áreas abaixo do eixo x** são iguais a menos a integral naquele intervalo.

$$A_1 = \int_a^b f(x)\,dx > 0 \text{ e } A_2 = -\int_b^c f(x)\,dx < 0.$$

Se: $\displaystyle\left|\int_a^b f(x)\,dx\right| < \left|\int_b^c f(x)\,dx\right|$ então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = A_1 - A_2 < 0.$

3.2 Integral Fechada

Em uma dimensão com uma variável, uma integral fechada normalmente não é definida como tal no cálculo usual, pois integrais ao longo de caminhos fechados (ou curvas fechadas) geralmente exigem pelo menos duas dimensões. Contudo, é possível interpretá-la no seguinte contexto:

Em uma **única dimensão**, o resultado da integral fechada($\oint$) será sempre 0, pois a integral de **a** a **b** e de **b** a **a** (retornando ao ponto inicial) cancela.

$$\oint f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_b^a f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx = 0$$

3.3 Propriedades da Integral

Suponha, em todas as propriedades, que $f : [a,b] \to \Re$ e $g : [a,b] \to \Re$ são funções integráveis.

1. Se $\lambda \in \Re$ é uma constante real, então λf é integrável e $\displaystyle\int_a^b \lambda f(x)\,dx = \lambda \int_a^b f(x)\,dx$.

2. $f(x) \pm g(x)$ são integráveis e $\displaystyle\int_a^b [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int_a^b f(x)\,dx \pm \int_a^b g(x)\,dx$.

3. Se a < c < b, então $\displaystyle\int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx$.

4. Se $f(x) \le g(x)$, $\forall x \in [a,b]$, então $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx$.

5. Se $f(x)$ é par, então $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 2\int_0^a f(x)\,dx$.

6. Se $f(x)$ é ímpar, então $\displaystyle\int_{-a}^a f(x)\,dx = 0$.

Teorema: Toda função contínua é integrável.

3.4 Teorema Fundamental do Cálculo

Teorema: Se $f : [a,b] \to \Re$ é uma função contínua, então a função área $I : [a,b] \to \Re$, definida por $I(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)\,dt$ é derivável para $x \in (a,b)$ e a sua derivada é igual a f: $I'(x) = f(x)$.

Definição: Se $f : A \to \Re$ é uma função de modo que exista $F : B \to \Re$ derivável tal que $F'(x) = f(x)$, então F é denominada de **primitiva** de f.

Por exemplo, se $f(x) = 3x^2$ então $F(x) = x^3$ é primitiva de $f(x)$, desde que $F'(x) = f(x)$. Mas, $G(x) = x^3 + 1$ também é primitiva de $f(x)$. Na verdade, qualquer função do tipo $H(x) = x^3 + k$, **onde k é uma constante real**, é primitiva de $f(x) = 3x^2$.

Teorema: Se $F(x)$ e $G(x)$ são primitivas de $f(x)$, então existe uma constante real **k** tal que $F(x) - G(x) = k$.

Essa constante k é conhecida como **constante de integração**. Deste modo, a primitiva de $f(x) = \cos x$ é $F(x) = \operatorname{sen} x + k$, a primitiva de $g(x) = 2x$ é $G(x) = x^2 + k$, onde todos esses k's são constantes reais.

Teorema: Se $f : [a,b] \to \Re$ é uma função contínua e F uma primitiva de f, então: $\displaystyle\int_a^b f(x)\, dx = F(x)\Big|_a^b = F(b) - F(a)$.

Por exemplo, no cálculo da integral $\displaystyle\int_{-1}^{2} 4x^3\ dx$, deve-se adotar x^4 como a primitiva de $4x^3$:

$$\int_{-1}^{2} 4x^3\ dx = x^4\Big|_{-1}^{2} = 2^4 - (-1)^4 = 16 - 1 = 15$$

Essa é a área do gráfico de $f(x) = 4x^3$? Não! Observe o gráfico de $f(x) = 4x^3$:

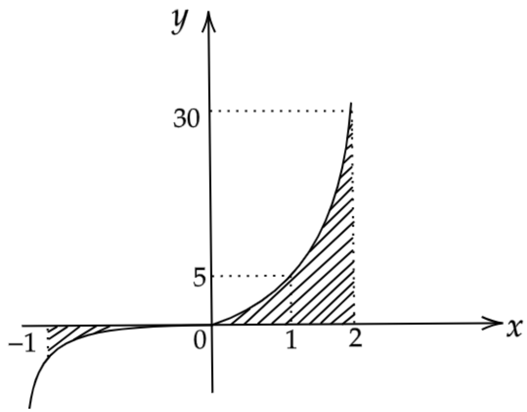


Figura 3.3: $f(x) = 4x^3$

Uma parte do gráfico de f está abaixo do eixo x e com isso a integral de -1 até 0 é negativa. Quando foi feita a integral de -1 a 2, a área de -1 a 0 foi contada como negativa, que é um absurdo. Para não cometer esse erro, é necessário separar os cálculos das integrais.

Abaixo do eixo x: $A_1 = -\int_{-1}^{0} 4x^3\ dx = -\left(x^4\Big|_{-1}^{0}\right) = -\left(0^4 - (-1)^4\right) = 1.$

Acima do eixo x: $A_2 = \int_{0}^{2} 4x^3\ dx = x^4\Big|_{0}^{2} = 2^4 - 0^4 = 16.$

Portanto, a área do gráfico de $f(x) = 4x^3$, desde x = -1 até x = 2, vale $A_1 + A_2 = 1 + 16 = 17$.

3.5 Área Comum entre Dois Gráficos

Suponha que **f** e **g** são **duas funções contínuas** cujos domínios contém o intervalo real [a, b] e, para todo $x \in [a, b]$, tem-se que $f(x) \geq g(x)$. Para calcular a área entre os gráficos de f e g basta considerar a função $h(x) = f(x) - g(x)$.

Observe o exemplo abaixo, onde $f(x) = x + 4$ e $g(x) = x^2$.

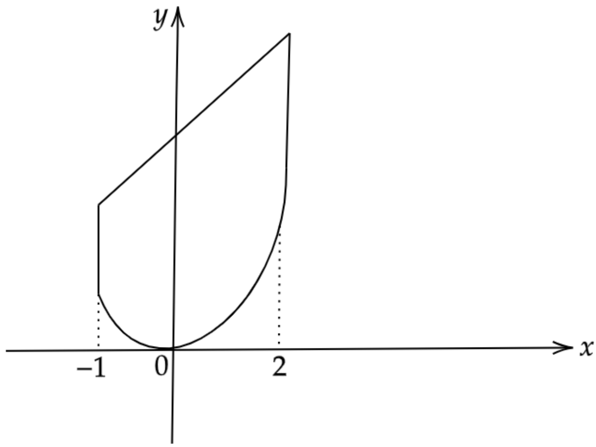


Figura 3.4: Gráfico de f(x) e g(x)

$$A = \int_{-1}^{2} f(x) - g(x)\, dx = \int_{-1}^{2} (x + 4 - x^2)\, dx = \frac{x^2}{2} + 4x - \frac{x^3}{3}\Big|_{-1}^{2} = \left(\frac{2^2}{2} + 4 \cdot 2 - \frac{2^3}{3}\right) - \left(\frac{(-1)^2}{2} + 4 \cdot (-1) - \frac{(-1)^3}{3}\right) = \frac{22}{3} - \frac{(-19)}{6} = \frac{21}{2}$$

Generalizando, a área delimitada pelos gráficos das funções contínuas **f** e **g** é igual a A = $\int_{a}^{b} f(x) - g(x)\, dx$.

3.6 Determinação de uma Primitiva

Para determinar uma primitiva de uma função f, se deve determinar uma função F de modo que sua derivada seja igual a f. O nome desse processo é **integrar f**.

Quando os limites de integração estão definidos o valor de $\int_a^b f(x)\,dx$ é um número e dá-se o nome de **integral definida**. Contudo, quando o objetivo é apenas determinar uma primitiva de f, não é preciso determinar os limites de integração.

A simbologia utilizada é F = $\int f(x)\,dx + k$ e a sua nomenclatura é **integral indefinida**, sendo k a **constante de integração**. Nesse caso, F(x) é uma função na variável x.

Como integrar na variável x é a **operação inversa** de derivar em x, pode-se afirmar que:

$$\int f'(x)\,dx = f(x) + k$$

Pode-se citar os exemplos:

$$\int x^2\,dx = \frac{x^3}{3} + k,\ \int e^x\,dx = e^x + k,\ \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + k$$

3.6.1 Propriedades da Integral Indefinida

As propriedades da integral indefinida são as mesmas para a integral definida:

1. $\int \lambda f(x)\,dx = \lambda \int f(x)\,dx, \lambda \in \Re.$
2. $\int [f(x) \pm g(x)]\,dx = \int f(x)\,dx \pm \int g(x)\,dx.$

Dica

Para calcular as integrais das funções trigonométricas, basta integrar no sentido anti-horário.

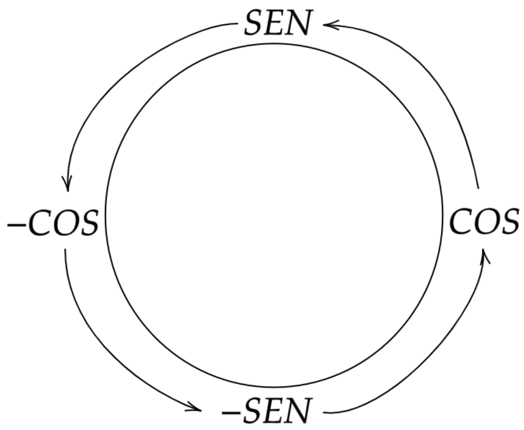


Figura 3.5: Ciclo trigonométrico

3.6.2 Integrais Indefinidas Elementares

Como os casos listados abaixo são considerados elementares a aplicação é imediata, não sendo preciso, no meio de um exercício, nenhuma demonstração.

1. $\displaystyle\int A\ dx = Ax + k,\ A \in \Re.$

2. $\displaystyle\int x^r\ dx = \frac{x^{r+1}}{r+1} + k,\ r \in \Re.$

3. $\displaystyle\int e^x\ dx = e^x + k.$

4. $\displaystyle\int a^x\ dx = \frac{a^x}{\ln a} + k.$

5. $\displaystyle\int \frac{1}{x}\ dx = \ln|x| + k.$

6. $\displaystyle\int \cos x\ dx = \operatorname{sen} x + k.$

7. $\displaystyle\int \operatorname{sen} x\ dx = -\cos x + k.$

8. $\displaystyle\int \operatorname{tg} x\ dx = \ln \sec x + k.$

9. $\displaystyle\int \sec^2 x \, dx = \operatorname{tg} x + k.$

10. $\displaystyle\int \operatorname{cossec}^2 x \, dx = -\operatorname{cotg} x + k.$

11. $\displaystyle\int \sec x \cdot \operatorname{tg} x \, dx = \sec x + k.$

12. $\displaystyle\int \operatorname{cossec} x \cdot \operatorname{cotg} x \, dx = -\operatorname{cossec} x + k.$

13. $\displaystyle\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \operatorname{arcsen} x + k.$

14. $\displaystyle\int -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \, dx = \arccos x + k.$

15. $\displaystyle\int \frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arctg} x + k.$

16. $\displaystyle\int -\frac{1}{1+x^2} \, dx = \operatorname{arccotg} x + k.$

Qualquer integral que fuja da tabela anterior deve ser demonstrada, para isso existem algumas técnicas para determinar uma primitiva não elementar.

Dica

Perceba que ao aparecer dos **dois lados da igualdade** o **"d"** da derivada, basta **integrar dos dois lados** para obter uma nova expressão. Por exemplo, vamos obter a equação de Torricelli seguindo essa estratégia.
Usando a definição de aceleração, temos:

$$a = \frac{dv}{dt} \Longrightarrow a = \frac{dv}{dx}\left(\frac{dx}{dt}\right) \Longrightarrow a = \frac{dv}{dx} \cdot v \Longrightarrow a dx = v dv$$
$$\int_{x_0}^{x} a dx = \int_{v_0}^{v} v dv \Longrightarrow \int_{v_0}^{v} v dv = a \int_{x_0}^{x} dx \Longrightarrow \frac{1}{2} \cdot (v^2 - v_0^2) = a\Delta x$$
$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Longrightarrow v^2 = v_0^2 + 2a\Delta x$$

3.6.3 Integração por Substituição

A integração por partes deve ser usada quando é possível identificar que a função a ser derivada foi obtida pela **aplicação da regra da cadeia da derivada**. Integrando os dois lados da identidade obtém-se:

$$f(g(x)) = \int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx$$

Suponha que $g(x)$ seja uma nova variável: $u = g(x)$. Derivando os dois lados:

$$\frac{du}{dx} = \frac{d(g(x))}{dx} \Longrightarrow du = g'(x)\, dx$$

Assim, a integral original se transforma em:

$$\boxed{\int f'(g(x)) \cdot g'(x)\, dx = \int f'(u)\, du = F(u) + k}$$

O mais importante é escolher $u = g(x)$, quando possível, de modo que a integral $\int f'(u)\, du$ seja uma daquelas elementares.

Por exemplo, para calcular $\int 2x \cos(x^2)\, dx$ pode-se iniciar fazendo a substituição $u = x^2$. Derivando, obtém-se $du = 2x$. Logo, o cálculo da integral fica da forma:

$$\int 2x \cos(x^2)\, dx = \int \cos u\; du = \operatorname{sen} u + k = \operatorname{sen}(x^2) + k$$

3.6.4 Integração por Partes

A integração por partes é baseada na **regra da derivada do produto** de duas funções:

$$(f \cdot g)' = f' \cdot g + f \cdot g' \Longrightarrow f \cdot g = \int f' \cdot g\, dx + \int f \cdot g'\, dx \;\Longrightarrow$$

$$\boxed{\int f' \cdot g\, dx = f \cdot g - \int f \cdot g'\, dx}$$

Trocou-se o cálculo da integral $\int f' \cdot g\, dx$, não elementar, pelo cálculo da integral $\int f \cdot g'\, dx$, teoricamente mais simples.

Por exemplo, para calcular a integral $\int \ln x \, dx$, basta chamar $f(x) = x$ e $g(x) = \ln x$:

$$\int f' \cdot g \, dx = f \cdot g - \int f \cdot g' \, dx \Longrightarrow \int 1 \cdot \ln x \, dx = x \cdot \ln x - \int x \cdot \frac{1}{x} \, dx = x \cdot \ln x - \int 1 \, dx \Longrightarrow$$

$$\int \ln x \, dx = x \cdot \ln x - x + k$$

3.6.5 Integração por Substituições Trigonométricas

Vamos aprender a como resolver determinados tipos de integrais onde a variável apareça **dentro de uma raiz quadrada**. O objetivo desse método é fazer **sumir a raiz quadrada**, facilitando o cálculo.

Relembre as identidades trigonométricas: $\operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x = 1 \Longrightarrow \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 x} = |\cos x|$ e $\sqrt{1 - \cos^2 x} = |\operatorname{sen} x|$

$\sec^2 x = 1 + \operatorname{tg}^2 x \Longrightarrow \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 x} = |\sec x|$ e $\sqrt{\sec^2 x - 1} = |\operatorname{tg} x|$

Generalizando:

1. Se a expressão for $\sqrt{a^2 - x^2}$ a substituição é $x = a \cdot \operatorname{sen}\theta$, com $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.
2. Se a expressão for $\sqrt{a^2 + x^2}$ a substituição é $x = a \cdot \operatorname{tg}\theta$, com $-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2$.
3. Se a expressão for $\sqrt{x^2 - a^2}$ a substituição é $x = a \cdot \sec\theta$, com $0 \leq u \leq \pi/2$.

Exemplo, a integral $\int \frac{x^3}{\sqrt{(4x^2+9)^3}} \, dx$. A melhor substituição seria $x = \frac{3}{2} \operatorname{tg}\theta$, onde $dx = \frac{3}{2} \sec^2\theta \, d\theta$:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(4x^2+9)^3}} \, dx = \int \frac{\frac{3}{2} \operatorname{tg}^3\theta}{27 \sec^3\theta} \cdot \frac{3}{2} \sec^2\theta \, d\theta = \frac{3}{4} \int \frac{\operatorname{sen}^3\theta}{\cos^2\theta} \, d\theta = \frac{3}{4} \int \frac{1 - \cos^2\theta}{\cos^2\theta} \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

$$= \frac{3}{4} \int \left(\frac{1}{\cos^2\theta} - 1 \right) \cdot \operatorname{sen}\theta \, d\theta$$

Fazendo $u = \cos\theta \Longrightarrow du = -\operatorname{sen}\theta \, d\theta$:

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{(4x^2+9)^3}}\,dx = \frac{3}{4}\int 1-\frac{1}{u^2}\,du = \frac{3}{4}\left(u+\frac{1}{u}\right)+k$$

Desfazendo as substituições:

$$\frac{3}{4}\left(\cos\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)+k = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sec\theta}+\sec\theta\right)+k = \frac{3}{4}\left(\frac{1}{\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}}+\sqrt{1+\operatorname{tg}^2\theta}\right)+k$$
$$= \frac{3}{4}\left(\frac{3}{\sqrt{4x^2+9}}+\frac{\sqrt{4x^2+9}}{3}\right)+k$$

Para finalizar, vamos apresentar uma aplicação de substituição trigonométrica para **calcular a área do círculo de raio R**. Sabe-se que a equação, no plano cartesiano, da circunferência centrada na origem e raio R é $x^2+y^2=R^2$. Vamos restringir ao primeiro quadrante, onde a área equivale a um quarto do círculo.

A função que representa o quarto da circunferência é $f(x)=\sqrt{R^2-x^2}$, com domínio em $[0,R]$ e contradomínio em $[0,R]$. Assim, a área do círculo é igual a quatro vezes a área delimitada pelo gráfico de f e os eixos coordenados:

$$S = 4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx$$

Fazendo $x = R\operatorname{sen}\theta \Longrightarrow dx = R\cos\theta\, d\theta$.

Perceba que para x = 0 tem-se $\theta = 0$ e para x = R tem-se $\theta = \frac{\pi}{2}$. Logo, a integral fica:

$$S = 4\int_0^R \sqrt{R^2-x^2}\,dx = 4\int_0^{\pi/2} \sqrt{R^2-R^2\operatorname{sen}^2\theta}\cdot R\cos\theta\,d\theta = 4R^2\int_0^{\pi/2}\cos^2\theta\,d\theta$$

Usando $\cos^2\theta = \dfrac{\cos 2\theta+1}{2}$:

$$S = 2R^2\int_0^{\pi/2}(\cos 2\theta+1)\,d\theta = 2R^2\left(\frac{\operatorname{sen}2\theta}{2}+\theta\Big|_0^{\pi/2}\right) = 2R^2\left(\frac{\operatorname{sen}\pi}{2}+\frac{\pi}{2}-\frac{\operatorname{sen}0}{2}-0\right)$$
$$= \pi R^2$$

3.7 Comprimento de um Arco

Suponha que f(x) é uma **função contínua** no intervalo [a, b]. Sejam A e B dois pontos **distintos** no gráfico da função.

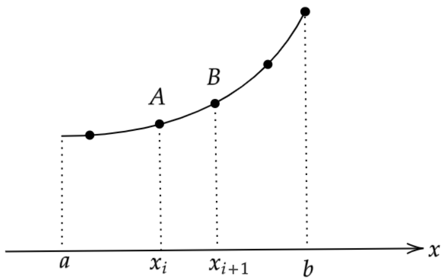


Figura 3.6: Gráfico de $f(x)$

A estratégia é fazer Δx_i tender a **zero** e **somar os infinitos valores** dos segmentos infinitesimais ligando dois pontos do gráfico. Quando Δx_i tende a 0, o comprimento L do gráfico de f é igual a:

$$L = \sum_{i=1}^{n} \sqrt{1 + f'(x_i)^2} \Delta x_i$$

Note a semelhança entre a **integral de Riemann e o somatório** indicado acima. Fazendo n tender a **infinito** e o comprimento de cada intervalo tender a **zero**, podemos interpretar como:

$$\boxed{L = \int_a^b \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx}$$

Vamos aplicar essa fórmula para **calcular o perímetro de uma circunferência de raio R**. Sabe-se que a circunferência centrada na origem e raio R, tem a equação $x^2 + y^2 = R^2$. Vamos restringir ao primeiro quadrante, onde a área equivale a um quarto do círculo.

A função que representa a um quarto da circunferência é $f(x) = \sqrt{R^2 - x^2}$, com domínio [0, R] e contradomínio [0, R]. Assim, o comprimento de toda a circunferência é:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{R^2 - x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}$$

Logo, o comprimento total da circunferência é dado por:

$$L = 4\int_0^R \sqrt{1 + f'(x)^2}\, dx = 4\int_0^R \sqrt{1 + \frac{x^2}{R^2 - x^2}}\, dx = 4\int_0^R \frac{R}{\sqrt{R^2 - x^2}}\, dx$$

Fazendo $x = Ru \Longrightarrow dx = R\ du$.

Perceba que quando x = 0 tem-se u = 0 e quando x = R tem-se u = 1. Portanto, a integral fica:

$$L = 4\int_0^1 \frac{R}{\sqrt{R^2 - R^2x^2}} R\ du = 4R\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\ du = 4R(\operatorname{arcsen} u)\Big|_0^1$$

$$= 4R(\operatorname{arcsen} 1 - \operatorname{arcsen} 0) = 4R\left(\frac{\pi}{2} - 0\right) = 2\pi R$$

3.8 Volume de Sólidos de Revolução

Um sólido é denominado de revolução quando é obtido pela **rotação de uma curva contínua sobre um eixo**.

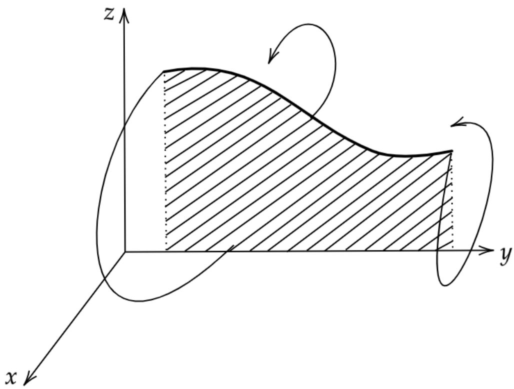


Figura 3.7: Sólido de Revolução

Considere que o sólido de revolução foi gerado pela rotação do gráfico de uma função contínua $f : [a,b] \to \Re$ em torno do eixo y. Inicialmente, vamos dividir o intervalo [a, b] em **n retângulos menores**, ao rotacionar o gráfico de f em torno do eixo y, esses retângulos rotacionados **formam fatias cilíndricas**.

Portanto, é notório que o volume de um cilindro de revolução de raio de base r e altura h é $V = \pi r^2 h$. Como a fatia cilíndrica i tem raio $f(x_i$ e altura $f(x_i$, seu volume é dado por $V_i = \pi[f(x_i)]^2 \Delta x_i$. Como o volume pode ser **aproximado** pela **soma dos volumes das fatias cilíndricas**:

$$V = \sum_{i=1}^{n} V_i = \sum_{i=1}^{n} \pi[f(x_i)]^2 \Delta x_i$$

Quando o número de retângulos tende ao **infinito‘**, o **somatório converge para a integral de Riemann**. Consequentemente, o volume do sólido de revolução é dado por:

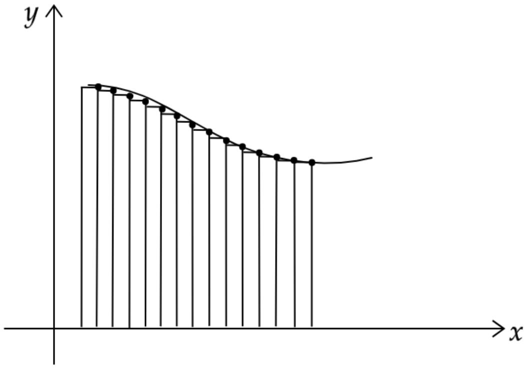


Figura 3.8: Retângulos infinitesimais

$$\boxed{V = \int_a^b \pi f(x)^2 \, dx}$$

Vamos aplicar essa fórmula para **calcular o volume de uma esfera de raio r**. Rotacionando em 360°, em torno do eixo x, uma semicircunferência de raio r centrada na origem, obtemos uma esfera.

A equação da semicircunferência é $x^2 + y^2 = r^2$, com restrição $y \geq 0$. Assim, a função é $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$, com domínio [-r, r]. O volume é dado da esfera de raio r é:

$$V = \int_{-r}^{r} \pi f(x)^2 \, dx = \pi \int_{-r}^{r} r^2 - x^2 \, dx = \pi \left(r^2 x - \frac{x^3}{3} \right) \bigg|_{-r}^{r} = \pi \left(r^3 - \frac{r^3}{3} + r^3 - \frac{r^3}{3} \right)$$

$$= \frac{4}{3} \pi r^3$$

3.9 Área de Superfícies de Revolução

Vamos apresentar um método para **calcular a superfície lateral de um sólido de revolução**. Suponha que uma função contínua $f : [a, b] \to \Re$ é rotacionada 360° em torno do eixo x, gerando a superfície de revolução. Dividindo o intervalo [a, b] em **n intervalos menores**, todos de mesmo comprimento:

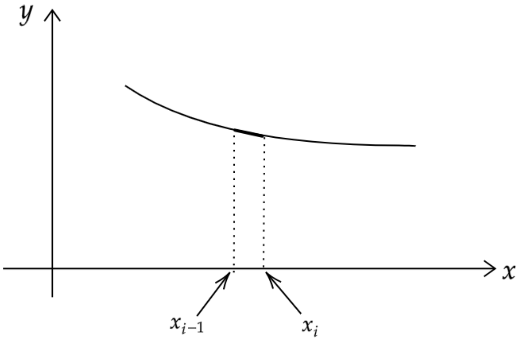


Figura 3.9: Superfície de Revolução

Tome um desses intervalos e rotacione 360° o gráfico de f pertence a esse intervalo, em torno do eixo x. Considerando que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ **tende a zero**, pode-se supor que é gerada uma superfície lateral de um **tronco de cone**.

Sabe-se que a área da superfície lateral de um tronco de cone vale $S = \pi r g(R+r)$, onde g é a geratriz, r é o raio de uma das bases e R é o raio da outra base. Fazendo **n tender ao infinito**, tem-se que Δx_i tende a **zero**, logo a área total da superfície é igual à **soma de todas as áreas** S_1, obtendo:

$$S = \sum_{i=1}^{n} S_i = \sum_{i=1}^{n} 2\pi f(x_i)\sqrt{1+f'(x_i)^2} \cdot \Delta x_i$$

Utilizando a **integral de Riemann**, conclui-se que:

$$\boxed{S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx}$$

Vamos demonstrar a **área da superfície esférica**, de raio r, vale $S = 4\pi r^2$. A superfície esférica é gerada quando se rotaciona, sobre o eixo x, uma semicircunferência de raio r.

A função cujo gráfico é uma semicircunferência de raio r e centrada na origem é $f : [-r, r]$ dada por $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$. Derivando, obtém-se:

$$f'(x) = \frac{1}{2} \cdot \frac{-2x}{\sqrt{r^2-x^2}} = -\frac{x}{\sqrt{r^2-x^2}}.$$

Substituindo na integral:

$$S = \int_a^b 2\pi f(x)\sqrt{1+f'(x)^2}\,dx = 2\pi \int_{-r}^{r} \sqrt{r^2-x^2} \cdot \sqrt{1+\frac{x^2}{r^2-x^2}}\,dx = 2\pi \int_{-r}^{r} r\,dr$$

$$S = 2\pi(rx)\Big|_{-r}^{r} = 2\pi(r^2 - (-r^2)) = 4\pi r^2.$$

3.10 Integrais Impróprias

Uma integral é classificada como imprópria quando pelo menos **um dos limites de integração** tende a $-\infty$ ou $+\infty$. Assim, são classificadas como integrais impróprias: $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$, $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx$ ou $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$, onde **a** e **b** são reais.

Repare que não é possível aplicar diretamente as **somas de Riemann** para calcular essa integral, pois em qualquer divisão que se faça no intervalo definido pelos limites de integração teremos um número **infinito de retângulos**.

A estratégia é substituir o limite de integração por um número L, calcular a integral e depois fazer L tender ao infinito na fórmula encontrada.

Definição: Seja $f : [a, +\infty) \to \Re$ uma função contínua. Se o limite

$$\boxed{\int_a^{+\infty} f(x)\,dx = \lim_{L \to +\infty} \int_a^{L} f(x)\,dx}$$

existe e é finito, então a integral imprópria **converge**. Caso contrário, ela **diverge**.

Observação: Integrais impróprias do tipo $f : (-\infty,\ b] \to \Re$ se definem da mesma maneira : $\displaystyle\int_{-\infty}^{b} f(x)\,dx = \lim_{L \to -\infty} \int_L^{b} f(x)\,dx$.

Definição: Seja $f : \Re \to \Re$ uma função contínua. Se existir $a \in \Re$ tal que as integrais $\displaystyle\int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx$ e $\displaystyle\int_a^{+\infty} f(x)\,dx$ existem, então $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx$ **converge** e seu valor é definido como

$$\boxed{\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{-\infty}^{a} f(x)\,dx + \int_a^{+\infty} f(x)\,dx}$$

Por exemplo, vamos calcular o valor de $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$.

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx = \lim_{L \to +\infty} \int_0^{L} e^{-x}\,dx = \lim_{L \to +\infty} -e^{-x}\Big|_0^{L} = \lim_{L \to +\infty} 1 - e^{-L} = 1.$$

O resultado confirma que $\int_0^{+\infty} e^{-x}\,dx$ **converge** e vale 1.

3.11 Exercícios Resolvidos

Questão 11. Demonstre $\int \operatorname{tg} x\,dx$

$$\operatorname{tg} x = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x} \Longrightarrow \int \operatorname{tg} x\,dx = \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx$$

Fazendo a substituição $u = \cos x$, onde $du = -\operatorname{sen} x\,dx$:

$$\int \frac{\operatorname{sen} x}{\cos x}\,dx = \int \frac{-du}{u} = -\ln u + k$$

Voltando à variável original x:

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = -\ln \cos x + k \Longrightarrow \int \operatorname{tg} x\,dx = \ln \sec x + k$$

$$\int \operatorname{tg} x\,dx = \ln \sec x + k$$

Questão 12. Calcule $\int \frac{1}{x^2+2x+1}\,dx$

Usando produto notável:

$$\int \frac{1}{(x+1)^2}\,dx$$

Substituindo $u = x+1$, onde $du = dx$:

$$\int \frac{1}{u^2}\,du = \int u^{-2}\,dx = \frac{u^{-1}}{-1} = -u^{-1} = -\frac{1}{u} = -\frac{1}{x+1} + k$$

Questão 13. Calcule $\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx$

$$\int \frac{\sqrt{\ln x}}{x}\,dx = \int \sqrt{\ln x} \cdot \frac{1}{x}\,dx$$

Substituindo $u = \ln x$, onde $du = \frac{1}{x}\,dx$:

$$\int \sqrt{u}\,du = \int u^{1/2}\,du = \frac{u^{3/2}}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}u^{3/2} = \frac{2}{3}(\ln x)^{3/2} + k$$

Questão 14. Calcule $\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \; dx$

$$\int (\operatorname{sen} x + \cos x)^2 \; dx = \int \operatorname{sen}^2 x + \cos^2 x + 2 \operatorname{sen} x \cdot \cos x \; dx$$
$$\int 1 + \operatorname{sen} 2x \; dx = x - \frac{1}{2} \cos 2x + k$$

Questão 15. Calcule $\int \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x} \; dx$

$$\int \cos x \cdot e^{\operatorname{sen} x} \; dx = \int e^{\operatorname{sen} x} \cdot \cos x \; dx$$

Substituindo $u = \operatorname{sen} x$, onde $du = \cos x \; dx$:

$$\int e^u \; du = e^u = e^{\operatorname{sen} x} + k$$

3.12 Exercícios Propostos

Questão 61. O valor de $\int_0^1 \frac{2x}{(x^2+1)^4} \; dx$ é:

A) $4 \ln 2$ B) 1/8 C) 31/160 D) 7/24 E) 7/8

Questão 62. A área da região situada entre $f(x) = x^2$ e $g(x) = x^3$, $x \in (0,2)$:

A) 4/3 B) 3/2 C) 31/12 D) 4 E) 8

Questão 63. Sendo F uma primitiva de $f(x) = \frac{x}{(x^2+4)^2}$, então F(1) - F(0) vale:

A) 1/20 B) 1/25 C) 1/40 D) 3/125 E) 3/250

Questão 64. O valor de $\int_0^{\pi/2} 2x\cos x \, dx$ é:

A) $\pi - 3$ B) $\pi - 2$ C) $\pi - 1$ D) $\pi + 1$ E) $\pi + 2$

Questão 65. O valor da integral $\int x \cdot e^{x^2} \, dx$.

–

Questão 66. O valor de $\int_0^{\pi/2} (e^{2x} - \cos x) \, dx$.

–

Questão 67. O valor de $\int_{-1/\pi}^{2/\pi} \frac{1}{x^2} \operatorname{sen}\left(\frac{3}{x}\right) \, dx$ é:

A) $\pi/3$ B) 1 C) 1/3 D) -1/3 E) -1

Questão 68. Seja I o valor da integral $\int_0^1 (x^2+1)(x^3+3x)^4 \, dx$. O valor de 30 · I é:

A) 256 B) 528 C) 1024 D) 2048 E) 4096

Questão 69. A integral $\int \frac{\operatorname{sen} x + \cos 2x}{\cos^2 x} \, dx$ vale:

–

Questão 70. O comprimento exato da curva $y = \ln(1 - x^2),\ 0 \le x \le 0{,}5$ é:

–

Questão 71. O cálculo de $\int \dfrac{e^{2x}}{1+e^{4x}}\,dx$ é:

A) $\dfrac{\ln|1+e^{4x}|}{4}+c$ B) $2\operatorname{arctg} e^{2x}+c$ C) $\dfrac{\operatorname{arctg} e^{2x}}{4}+c$ D) $\dfrac{\ln|1+e^{4x}|}{4e^{2x}}+c$
E) $\dfrac{-\operatorname{arccotg} e^{2x}}{2}+c$

Questão 72. O valor da integral $\int 2\sqrt{2-3x}\,dx$ é:

–

Questão 73. Calcule $\int \left(\dfrac{2}{x}+\dfrac{3}{x^2}\right)\,dx$

–

Questão 74. Calcule $\int \dfrac{e^x+e^{-x}}{2}\,dx$

–

Questão 75. Calcule $\int_1^2 x^2(x-2)^{10}\,dx$

–

Questão 76. Calcule $\int e^{\sqrt{2}}\,dx$

–

Questão 77. Calcule $\int_0^{2\pi} \sqrt{1+\cos x}\, dx$

–

Questão 78. Calcule $\int \frac{\cos x + \sec x}{\cos x}\, dx$

–

Questão 79. Calcule a área do conjunto de todos os (x, y) tais que $4x^2 + y^2 \leq 1$.

–

Questão 80. Calcule $\int \operatorname{sen}^3 x\, dx$

–

Questão 81. Calcule $\int \operatorname{tg}^3 x\, dx$

–

Questão 82. Calcule $\int \frac{1}{\operatorname{sen} x + \cos x}\, dx$

–

Questão 83. Calcule $\int \frac{1}{2 + \operatorname{sen} x}\, dx$

–

Questão 84. Calcule o volume do sólido obtido pela rotação, em torno do eixo y, do conjunto de todos (x, y) tais que $0 \leq x \leq 1$ e $0 \leq y \leq x - x^3$.

–

Questão 85. Calcule a área da superfície gerada pela rotação, em torno do eixo x, do gráfico de $f(x) = \operatorname{sen} x,\ 0 \leq x \leq \pi$.

–

Questão 86. A função que tem a diferencial $(\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cotg}\theta)^2\ d\theta$ é:

A) $\operatorname{cotg}\theta - \operatorname{tg}\theta + C$ B) $\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cotg}\theta + C$ C) $\operatorname{tg}\theta - 2\operatorname{cotg}\theta + C$ D) $2\operatorname{tg}\theta + \operatorname{cotg}\theta + C$ E) $\operatorname{tg}\theta - \operatorname{cotg}\theta + C$

Questão 87. Calcule $\displaystyle\int \frac{\operatorname{sen}\left(\frac{x-1}{3}\right)}{\cos^2\left(\frac{x-1}{3}\right)}\,dx$.

–

Questão 88. Calcule $\displaystyle\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x}$.

–

Questão 89. Calcule o valor de $\displaystyle\int \frac{1 + x^2 + \sqrt{1 - x^2}}{\sqrt{(1 - x^4)(1 + x^2)}}\,dx$.

–

Questão 90. **Seja p uma constante real positiva. Calcule a integral** $\int e^{\frac{\ln(2px)}{2}}$

—

CAPÍTULO 4

GABARITO

4.1 Limite

1) D
2) E
3) E
4) -1
5) B
6) E
7) 2/3
8) e^3
9) e^{-2}
10) 3/2
11) 0
12) $-\infty$
13) E
14) C
15) E
16) B
17) $-3 \cdot 2^{11}$
18) 0
19) ∞
20) 2
21) 0
22) 2/3
23) -1

24) ∞
25) - ∞
26) $\nexists$ lim
27) 0
28) -1
29) $\dfrac{1}{2\sqrt{b}} + \dfrac{1}{2\sqrt{a}}$
30) ∞

4.2 Derivada

31) E
32) A
33) D
34) E
35) -1/15
36) 0
37) B
38) D
39) 6a cm
40) D
41) arctg(-4)
42) D
43) C
44) $-\dfrac{2x+y}{x+2y}$
45) E
46) 20
47) C
48) $-\dfrac{y}{\operatorname{sen}(\operatorname{sen} y)\cos y + x}$
49) $\operatorname{tg}^3 x$
50) $\dfrac{3}{\ln 2}$
51) $\dfrac{3\sqrt{2}}{8}$
52) – 1(mínimo); 2, – 3 e 4 (inflexão)
53) E
54) a = 2 e b < – 32 ou b > 0
55) E
56) D

57) C
58) C
59) $2x^2 \operatorname{sen}(\cos x^2)$
60) E

4.3 Integral

61) D
62) B
63) C
64) B

65) $\frac{1}{2} \cdot e^{x^2} + C$

66) $\frac{e^\pi}{2} - \frac{3}{2}$

67) C
68) D
69) $2x + \sec x - \operatorname{tg} x + C$
70) $\ln(3) - 1/2$
71) E

72) $-\frac{4}{9}(2-3x)^{3/2} + C$
73) $2\ln x - \frac{3}{x} + C$
74) $\frac{1}{2}(e^x - e^{-x}) + C$

75) $\frac{46}{429}$

76) $\frac{\sqrt{2}}{2} e^{\sqrt{2x}} + C$

77) $4\sqrt{2}$
78) $x + \operatorname{tg} x + C$

79) $\frac{\pi}{2}$

80) $\frac{-3\cos x}{4} + \frac{\cos 3x}{12} + C$

81) $\dfrac{\sec^2 x}{2}+\ln|\cos x|+C$

82) $\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ln\left|\dfrac{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1+\sqrt{2}}{\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}-1-\sqrt{2}}\right|+C$

83) $\dfrac{2}{\sqrt{3}}\operatorname{arctg}\dfrac{2\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+1}{\sqrt{3}}+C$

84) $\dfrac{4\pi}{15}$

85) $2\pi(\sqrt{2}+\ln(\sqrt{2}+1))$

86) E

87) $3\sec\dfrac{x-1}{3}+C$

88) $-\operatorname{cotg} x+C$

89) $-\arccos x+\operatorname{arctg} x+C$

90) $\dfrac{2}{3}x(2px)^{1/2}+C$

APÊNDICE

4.4 Série de Taylor

Definição: Caso se saiba o valor de uma função $f(x)$ avaliada em x = a, assim como os valores das suas n derivadas, pode-se aproximar os valores, que consiste no polinômio:

$$\boxed{f(x) = \sum_{n=0}^{k} \frac{f^{(n)} \cdot (a)}{n!} \cdot (x-a)^n}$$

Se a = 0, temos a **Série de MacLaurin**.

4.5 Fórmula de Euler

A **Fórmula de Euler** é uma das relações mais fundamentais da matemática. Vamos demonstrar essa fórmula usando a série de Taylor:

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\operatorname{sen} x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Substituindo ix na série de e^x e expandindo os primeiros termos:

$$e^{ix} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(ix)^n}{n!} \Longrightarrow e^{ix} = 1 + ix + \frac{(ix)^2}{2!} + \frac{(ix)^3}{3!} + \frac{(ix)^4}{4!} + \dots$$

Substituindo as potências de i na série:

$$e^{ix} = 1 + ix - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \dots$$

Agrupando os termos reais e imaginários:

$$e^{ix} = \left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right) + i\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$$

Comparando com as séries de $\cos x$ e $\operatorname{sen} x$:

A parte real $\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots\right)$ é a série do $\cos x$

A parte imaginária $\left(x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots\right)$ é a série do $\operatorname{sen} x$.

Finalmente, temos a Fórmula de Euler:

$$\boxed{e^{ix} = \cos x + i \operatorname{sen} x}$$

4.6 Integral de Variáveis Independentes

A integral de variáveis independentes é frequentemente associada ao conceito de integrar uma função onde as variáveis de integração são tratadas como independentes. Isso aparece, por exemplo, em situações envolvendo problemas de separação de variáveis em equações diferenciais.

Considere $f(x,y)$ com uma função de duas variáveis x e y, que são independentes. A integral de variáveis independentes pode ser resolvida tratando-as separadamente:

$$\boxed{\int f(x,y)\,dx \text{ ou } \int f(x,y)\,dy}$$

Aqui, y (ou x) é tratado como uma constante.

Suponha que temos: $\int (x^2 + y)\,dx$

Aqui, y é tratado como constante, então: $\int (x^2 + y)\,dx = \int x^2\,dx + \int y\,dx$

Resolvendo: $\int x^2\ dx = \dfrac{x^3}{3}, \int y\ dx = yx$

Logo: $\int (x^2 + y)\ dx = \dfrac{x^3}{3} + yx + k$

A integração de variáveis independentes depende do contexto, mas segue o princípio de tratar cada variável como independente da outra, seja em integrais simples ou múltiplas.

4.7 Aproximações Práticas

As seguintes aproximações serão úteis para facilitar diversos cálculos, elas surgem a partir da **Série de Taylor**.

Partindo da função polinômial de Taylor, temos:

1. $\operatorname{sen} x \approx \operatorname{tg} x \approx x$
2. $\cos x \approx 1$
3. $(1-x)^n \approx 1 - nx$
4. $\ln x \approx x - 1$

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

[1] Marcelo Rufino de Oliveira. *Elementos da Matemática 6*. Vestseller, 2024.

[2] James Stewart. *Cálculo: Volume 1*. Cengage, 2021.

[3] Hamilton Luiz Guidorizzi. *Um Curso de Cálculo: Volume 1*. LTC, 2018.

[4] Michael Spivak. *Calculus*. Cambridge University Press, 2006.

[5] João Barcelos Neto. *Cálculo para entender e usar*. Livraria da Física, 2009.

[6] Equipe Farias Brito. *Curso de Cálculo - ITA*. 2024.