1 Questão Curta: Túnel para as Filipinas

Escrito por Daniela Emília

Em um clássico cenário hipotético, sem dissipações energéticas, a Terra é um planeta completamente esférico de raio R e homogêneo de massa M. É possível construir um túnel de espessura desprezível, este permite a travessia de um ponto material pelo diâmetro da Terra. Prove a periodicidade do movimento e calcule esse período de oscilação, em termos da constante universal da gravitação.

Solução:

Em determinada casca, a uma distância x do centro da esfera maciça, equaciona-se a única força atuante sobre a massa pontual:

$$F_r = F_g = \frac{GM'(x)m}{x^2}$$

Antes, note que:

$$\frac{M'}{M} = \frac{x^3}{R^3} \Rightarrow M' = \left(\frac{x^3}{R^3}\right) M$$

Logo, encontra-se:

$$ma = \frac{GMm}{R^3}x$$

$$\therefore ma = Kx$$

$$\Rightarrow a - \left(\frac{K}{m}\right) x = 0$$

Eis a Equação Característica do Movimento Harmônico Simples:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{K}}$$

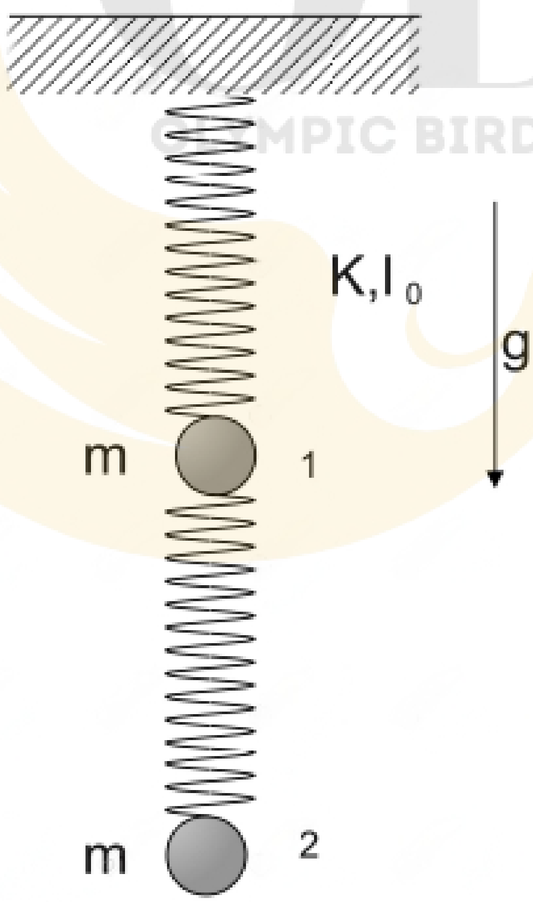
Portanto:

$$\therefore \boxed{T = 2\pi R\sqrt{\frac{R}{GM}}}$$

2 Questão Média: Osciladores Acoplados

Escrito por Pedro Saldanha

Considere que um sistema massa-mola foi acoplado a outro sistema massa-mola, como mostrado na imagem abaixo. Sabendo que o valor de cada massa é m, que o valor da constante elástica das molas é K, e que o comprimento relaxado das molas é l_o, responda o que se pede.



(a) Escreva as equações de movimento para as massas 1 e 2.

(b) Para quais valores de ω^2 os blocos irão oscilar com a mesma frequência (ou seja, quais são os modos normais)?

Solução:

(a) Para descobrir as equações de movimento, basta analisar as forças que atuam em cada massa e igualá-las a $m\ddot{x}$, de acordo com a 2ª Lei de Newton (aqui, $\ddot{x}$ representa a segunda derivada da posição, ou seja, a aceleração).

Vamos definir como origem da trajetória o suporte da mola 1, com o sentido positivo para baixo. As forças que atuam na massa 1 são: a força gravitacional mg, a força restauradora da mola 1 $-k(x_1 - l_0)$, e a força restauradora da mola 2, que é $k(x_2 - x_1 - l_0)$.

A equação de movimento para a massa 1 é, então:

$$\boxed{m\ddot{x}_1 = mg - k(x_1 - l_0) + k(x_2 - x_1 - l_0)}$$

Para a massa 2, as forças que atuam são a força gravitacional e a força da mola 2. Sua equação de movimento é:

$$\boxed{m\ddot{x}_2 = mg - k(x_2 - x_1 - l_0)}$$

(b) Dizemos que um oscilador está acoplado (como no caso da questão) quando a dinâmica de um oscilador afeta diretamente a dinâmica do outro. Perceba que a equação de movimento da massa 1 depende do movimento da massa 2 e vice-versa. O objetivo é desacoplar as equações, tornando-as independentes. Assim, conseguiremos obter soluções nas quais as duas massas oscilem com a mesma frequência, embora possam ter fases e/ou amplitudes diferentes.

Vamos reescrever as equações de movimento, dividindo cada lado pela massa e simplificando onde for possível. Para a massa 1:

$$\frac{m\ddot{x}_1}{m} = \frac{mg}{m} - \frac{kx_1}{m} + \frac{kl_o}{m} + \frac{k}{m}(x_2 - x_1 - l_0)$$

$$\Rightarrow \ddot{x}_1 = \frac{k}{m}(x_2 - 2x_1) + g$$

Para a massa 2:

$$\ddot{x}_2 = \frac{k}{m}(x_1 - x_2) + g$$

Agora, vamos reescrever o sistema em forma matricial:

$$\ddot{\vec{X}} = M\vec{X} + K$$

Essa equação é semelhante à equação de um MHS ($\ddot{x} = -\omega^2 x + c$), mas agora cada termo é uma matriz. X representa os deslocamentos, K representa as constantes, e M as frequências. Ficará mais claro ao escrevermos:

$$\begin{bmatrix} \ddot{x}_1 \\ \ddot{x}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{-2k}{m} & \frac{k}{m} \\ \frac{k}{m} & \frac{-k}{m} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} g \\ g + \frac{kl_0}{m} \end{bmatrix}$$

Verifique que essas matrizes representam as equações que obtivemos.

A solução geral para um MHS tem a forma $\vec{X} = e^{i\omega t}\vec{X}_0$. Derivando duas vezes para obter $\ddot{\vec{X}}$:

$$\dot{\vec{X}} = (i\omega)e^{i\omega t}\vec{X}_0$$

$$\ddot{\vec{X}} = -\omega^2 e^{i\omega t}\vec{X}_0 = -\omega^2\vec{X}$$

Substituindo na equação anterior:

$$-\omega^2\vec{X} = M\vec{X} + K$$

Para calcular os modos normais, desprezamos a constante K, pois ela não altera as relações fundamentais entre as frequências e os modos de vibração:

$$-\omega^2\vec{X} = M\vec{X}$$

Multiplicamos $-\omega^2$ pela matriz identidade I:

$$-I\omega^2\vec{X} = M\vec{X}$$

$$(M + I\omega^2)\vec{X} = 0$$

Os valores de ω que são modos normais satisfazem: $\det(M + I\omega^2) = 0$.

Resolvendo o determinante, encontramos os modos normais:

$$\boxed{\omega_1^2 = \frac{(-3 + \sqrt{5})}{2}\frac{k}{m}}$$

e

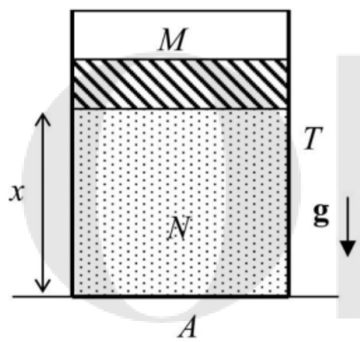
$$\boxed{\omega_2^2 = \frac{(-3 - \sqrt{5})}{2}\frac{k}{m}}$$

OBS: Para calcular os modos normais, essencialmente encontramos os autovalores da matriz M.

3 Questão Longa: Força em um Pistão

Escrito por Alefe Ryan

Um cilindro posicionado verticalmente, cujas paredes são mantidas a uma constante temperatura T, é fechado por um pistão (ou êmbolo) de massa M. O cilindro contém N moléculas de um gás ideal. Negligencie a pressão externa e, conforme o modelo da Teoria Cinética dos Gases (TCG), desconsidere o atrito entre o pistão e as paredes do cilindro, bem como considere que todas as colisões envolvidas são elásticas. Avaliemos a seguinte situação: o êmbolo se encontra com velocidade V, quando sua altura é exatamente x em relação à base do cilindro e, conforme a movimentação das moléculas, todas podem colidir com o pistão, transmitindo-lhe momento linear e alterando sua velocidade.



a) Expresse a força $F(x,T)$ média sobre o êmbolo devido às colisões das partículas com ele, considerando que $V = 0$. Deixe sua resposta em função de N, T, x e k_B (constante de Boltzmann).

b) Na situação $V \neq 0$, calcule a força $F(x,T)$ média sobre o êmbolo. Considere que $M \gg Nm$ e que V é bastante pequeno comparado à velocidade das partículas do gás. Expresse sua resposta em função de m, M, N, T, x, k_B e V.

c) Mostre que, embora a mudança na natureza do gás modifique a formulação da energia interna, a força de oposição continua a mesma, exceto pelo valor médio da componente da velocidade, que pode ser diferente. Obtenha este resultado para um gás que obedece à seguinte equação:

$$PV = \alpha U,$$

onde U é a energia interna do gás e α é um coeficiente numérico. Por exemplo:

- Gás ideal: $\alpha = \dfrac{2}{3}$,
- Gás de fótons ou ultrarrelativístico: $\alpha = \dfrac{1}{3}$.

Solução:

a) Quando $V = 0$, a força média exercida pelas moléculas do gás ideal sobre o pistão é a pressão exercida pelo gás no êmbolo. Sabemos que, pela Teoria Cinética dos Gases, a pressão P é dada por:

$$P = \frac{Nk_bT}{V'},$$

onde $V' = Ax$ é o volume do cilindro (sendo A a área da base do cilindro).

A força $F(x,T)$ é a pressão multiplicada pela área do êmbolo:

$$F(x,T) = PA = \frac{Nk_BT}{Ax}A = \frac{Nk_BT}{x}.$$

b) Quando $V \neq 0$, além da força média devido à pressão do gás, há uma contribuição adicional proveniente das colisções das moléculas que se movem com velocidade relativa ao êmbolo. Pela Teoria Cinética dos gases:

$$P = \frac{Nm\langle v^2\rangle}{3V'}$$

Então, a força aplicada no êmbolo será:

$$F = PA = \frac{Nm\langle v^2\rangle}{3x}$$

Por causa das colisões entre as partículas e o êmbulo em movimento, a velocidade média das partículas será menor que a velocidade encontrada pela equipartição de energia e igual a:

$$v = v_M + \Delta v \therefore \langle v^2\rangle \approx \langle v_M^2\rangle + 2\langle v_M \Delta v\rangle$$

Para encontrar o Δv, pode-se conservar o momento na vertical e a energia do sistema êmbulo e partícula em uma colisão:

$$MV + mv_x = M(V + \Delta V) - m(v_x + \Delta v)$$
$$\frac{MV^2}{2} + \frac{mv_M^2}{2} = \frac{M(V + \Delta V)^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

Resolvendo esse sistema de equações e realizando aproximação binomial, encontra-se:

$$\Delta V = \frac{-m\langle v_M \rangle \Delta v}{MV}$$

$$\Delta v = \frac{-2\langle v_x \rangle V}{\langle v_M \rangle \Delta - V} \approx \frac{-2\langle v_x \rangle V}{\langle v_M \rangle}$$

Então, a velocidade quadrática média será:

$$\langle v^2 \rangle \approx \langle v_M^2 \rangle - 4\langle v_x \rangle V$$

Pela equipartição de energia:

$$\langle v_M^2 \rangle = \frac{3k_bT}{m}$$

Substituindo os resultados encontrados na expressão para a força:

$$\boxed{F = \frac{Nk_bT}{x} - \frac{4mN\langle v_x \rangle V}{3x}}$$

c) Pela expressão encontrada, percebe-se que o termo que subtrai a expessão da pressão possui uma parcela constante, $\frac{4mNV}{3x}$, e a dependência pelo valor médio do componente da velocidade $\langle v_x \rangle$.

E para um gás que obedece $PV = \alpha U$, tem-se que $PV = Nk_bT = \alpha U$. Portanto:

$$\boxed{F = \frac{\alpha U}{x} - \frac{4m\alpha U\langle v_x \rangle V}{3k_bTx}}$$