1 Questão Curta: Aterramento de placa deformada

Escrito por Guilherme Rodrigues

Considere uma placa aterrada com uma deformidade no formato de uma calota de raio R, a uma distância a ortogonalmente acima do plano da placa e da calota se encontra uma partícula de carga q positiva. Determine a força que a carga sente da placa.

OBS: Tome como referencial forças atrativas como positivas.

Solução:

I. Usando o método das imagens considera-se o efeito de uma placa comum a particula sentirá o efeito de uma carga induzida de mesmo módulo e valor negativo a uma distância espelhada da partícula, ou seja com uma distância $2a$ entre elas:

$$F_1 = \frac{Kq^2}{4a^2}$$

II. Analisando somente a calota, devemos equacionar os potenciais da partícula e da carga induzida q_i em relação ao centro da calota e depois ao local da carga virtual a uma distância d em relação ao ponto de análise sendo a superfície da esfera mais próxima da partícula:

i)

$$\frac{Kq}{a} + \frac{Kq_i}{R} = 0$$

$$q_i = -q\frac{R}{a}$$

ii)

$$\frac{Kq}{a-R} + \frac{Kq_i}{d} = 0$$

$$\frac{Kq}{a-R} - \frac{KqR}{ad} = 0$$

$$d = \frac{R(a-R)}{a}$$

$$F_2 = \frac{Kq^2Ra}{(a^2-R^2)^2}$$

III. Por último a própria carga induzida da calota por sua vez induz uma carga na placa quando se analisa o todo, assim ela vai ter o valor igual a $-q_i$ e estará a uma distância $2D$ da carga induzida inicialmente

$$D = R - d = \frac{R^2}{a}$$

$$F_3 = -\frac{Kq^2Ra}{(a^2+R^2)^2}$$

$$F = F_1 + F_2 + F_3$$

Portanto, a resposta é:

$$\boxed{F = Kq^2\left(\frac{1}{4a^2} + \frac{Ra}{(a^2-R^2)^2} - \frac{Ra}{(a^2+R^2)^2}\right)}$$

2 Questão Média: Cubo relativo

Escrito por Heitor Chaves

Um cubo de concreto passa por um referencial R em $\Delta t = 35\ ns$. Olhando pelo referencial do cubo, o tempo do mesmo trajeto foi medido como $\Delta t = 45\ ns$. Sabendo disso, qual o volume de concreto no cubo?

Solução:

Primeiramente, usamos a fórmula do tempo próprio, que é:

$$\Delta t = \frac{\Delta t'}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Como sempre o tempo próprio é o menor tempo, substituimos, então, os dados do enunciado na equação:

$$35 \times 10^{-9} = \frac{45 \times 10^{-9}}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Quando a equação é desenvolvida, encontra-se:

$$v = \frac{4c\sqrt{2}}{7}$$

Fazendo a aproximação $\sqrt{2}$ como 1.4, temos que:

$$v = 0.8c$$

Usando a fórmula da velocidade média, encontramos o espaço percorrido, que é o lado do cubo:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t}$$

$$\Delta s = v \times \Delta t$$

$$\Delta s = 0.8 \times 3 \times 10^{8} \cdot 10^{-9}$$

$$\Delta s = 0.24m$$

Agora que sabe-se o lado do cubo só resta elevar o resultado de Δ s ao cubo para saber o volume do cubo V:

$$V = l^3 = 0.24^3 \approx \boxed{0,014m^3}$$

3 Questão Longa: Universo gelatinoso

Escrito por William Alves

Suponha que o Universo esteja cheio de alguma substância gelatinosa que gera uma força de arrasto. Uma partícula de massa m experimentará uma força de frenagem (que também chamaremos de força de arrasto)

$$F = -ka$$

onde k é uma constante positiva e a é a aceleração da partícula. Para as seguintes questões, suponha que a partícula se mova em uma única dimensão para simplificar.

a) Suponha que não haja outras forças na partícula. Descreva a posição da partícula $x(t)$ para qualquer tempo $t \geqslant 0$, assumindo velocidade inicial $v(0) = v_o$ e posição inicial $x(0) = x_o$.

b) Agora suponha que a partícula experimente uma força externa constante $F_{ext} > 0$ iniciando em $t = 0$. Descreva a posição da partícula $x(t)$ para qualquer tempo $t \geqslant 0$, assumindo velocidade inicial $v(0) = v_o$ e posição inicial $x(0) = x_o$.

c) Qual o trabalho total realizado pela partícula no intervalo de tempo $0 \leqslant t \leqslant T$ devido esta força constante aplicada ?(inclua o trabalho feito pela força aplicada e a força de arrasto.)

d) Analise a implicação física da força de arrasto F para a partícula. Em particular, descreva como essa força de arrasto difere do atrito cinético (uma força de frenagem constante) e do arrasto viscoso de baixa velocidade (uma força de frenagem proporcional à velocidade da partícula).

e) Suponha que a partícula seja lançada perto da superfície da Terra, onde há um campo gravitacional g. Quanto tempo (Δt) leva para uma partícula cair de uma altura h ?

f) É possível recuperar o mesmo resultado da parte e) para o movimento da partícula removendo força de arrasto F e substituindo g por um campo gravitacional efetivo g_{ef}, encontre este campo efetivo para um dado valor de k e m. Considere os limites que $m \longrightarrow 0$ e $m \longrightarrow \infty$. Analise se as respostas fazem sentido.

g) No eletromagnetismo, a força de Abraham-Lorentz é uma força de frenagem que depende da derivada da aceleração da partícula:

$$F_{AL} = mq\frac{da}{dt}$$

onde q é alguma constante e m é a massa da partícula, incluída por conveniência. Incluindo uma força externa variante no tempo $F_{ext}(t)$ a equação do movimento é

$$F_{ext}(t) + mq\frac{da(t)}{dt} = ma(t)$$

Nós podemos integrar esta expressão para encontrar a solução para $a(t)$

$$a(t) = \frac{1}{mq}\int_t^{\infty} e^{-\frac{t'-t}{q}F_{ext}(t')}\,dt'$$

Suponha que uma força externa constante $F_{ext}(t) = F_{ext}$ é "ligada"em algum tempo distante $t = T > 0$ e dura para qualquer tempo $t \geqslant 0$. Qual é a aceleração $a(t)$ da partícula para $t \geqslant 0$ de acordo com a solução para $a(t)$ dada acima? O que há de estranho nessa situação?

Solução:

a) Sem a existência de outras forças externas sobre a partícula, $a = 0$. Podemos mostrar isso usando a segunda lei de Newton:

$$-ka = ma$$

Que produz $a = 0$, então,

$$x = x_o + v_o t$$

b) Novamente, usando segunda lei de Newton nós temos

$$F - ka = ma$$

que produz $a = \dfrac{F}{m+k}$. Vemos que a força de arrasto atua contribuindo com uma massa efetiva para a partícula. Prosseguindo

$$x = x_o + v_o t + \frac{1}{2}\frac{F}{(m+k)}t^2$$

c) Sabemos que a força resultante sobre a partícula é constante. Definindo a aceleração $a_o = \dfrac{F}{m+k}$ da parte b, obtemos

$$v(t) = v_o + a_o t$$

O trabalho líquido realizado é, portanto, a mudança na energia cinética durante o tempo T:

$$W = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{1}{2}.mv_o^2 = \frac{1}{2}ma_oT(a_oT + 2v_o)$$

d) O atrito cinético é uma força de frenagem constante, então em um dado intervalo de tempo Δt a partícula experimenta uma diminuição na velocidade de $\Delta v \propto -\Delta t$. Ou seja, a velocidade diminui a uma taxa constante. Para o arrasto viscoso, a força aumenta linearmente com a velocidade, então $\Delta \propto -v\Delta t$, o que implica que a velocidade diminui exponencialmente $v \sim exp(-kt)$.Ao contrário das outras forças, a força de arrasto só atua na presença de outras forças. Sozinha, ela não tem efeito no sistema. Na presença de outras forças, ela atua aumentando a massa efetiva da partícula para $m \to m + k$.

e) A força da gravidade é $F_g = mg$, onde m é a massa gravitacional da partícula. Usando a segunda lei de Newton, encontramos

$$a = -\left(\frac{m}{m+k}\right) g = -g_{ef}$$

$$\Delta h = -\frac{1}{2}\left(\frac{m}{m+k}g\right)\Delta t^2$$

$$\Delta t = \sqrt{2h\left(\frac{m+k}{mg}\right)}$$

f) É realmente possível substituir g por um campo gravitacional efetivo g_{ef}. Estudando a segunda lei de Newton nós temos

$$a = -\left(\frac{m}{m+k}\right) g = -g_{ef}$$

O que implica que dvemos definir

$$g_{ef} = \left(\frac{m}{m+k}\right) g$$

Fazendo os limites nós temos

$$\lim_{m\to 0} g_{ef} = 0$$

$$\lim_{m\to\infty} g_{ef} = g$$

Esses resultados fazem sentido. Como $m \to 0$ a partícula se torna sem massa, então ela não é mais afetada pela gravidade. Então, não importa se há um campo gravitacional ($g \neq 0$) ou não ($g_{ef} = 0$). No segundo caso, nós temos que a partícula é infinitamente massiva. Não esperamos mais que a força, que contribui com um termo constante e finito k para a massa efetiva, importe. Assim, esperamos que $g_{ef} = g$, já que a força de arrasto não contribui mais.

g) A inserção da F_{ext} produz a aceleração $a(t)$ para $T > t \geqslant 0$

$$a(t) = \frac{F_{ext}}{m} e^{-\frac{T-t}{q}}$$

Este é um resultado estranho. Primeiro, observe que como $T \to \infty$, descobrimos que $a(t) \to 0$. Isso é esperado, já que uma força aplicada em um futuro infinitamente distante não deve afetar a aceleração em nenhum tempo finito t. Agora considere a força para $t - T \equiv s \geqslant 0$. Agora, obtemos

$$a(t) = \frac{F_{ext}}{m}$$

uma aceleração que é constante no tempo (essa solução vem dos limites da integral não mais sendo T e ∞, mas sim t e ∞). Agora vamos considerar o resultado estranho. Observe que para $t - T \equiv r \geqslant 0$, obtemos

$$a(t) = \frac{F_{ext}}{m} e^{\frac{-r(t)}{q}}$$

Isso significa que a aceleração $a(t)$ para $t < T$ é finita e exponencialmente pequena, mas ainda finita. Então, uma força no futuro pode influenciar a aceleração da partícula (e, portanto, seu movimento) no passado. Obviamente, isso é não causal e não físico. A força de Abraham-Lorentz significa um colapso da mecânica clássica em conjunção com o eletromagnetismo e sugere a necessidade da física quântica.