1 Questão: O rebanho de Zaratustra

Escrito por Pedro Henrique de Abreu Duailibe

Zaratustra tem um rebanho com 1000 ovelhas, todas com peso diferente de zero (ainda bem). Prove que é possível remover uma ovelha do rebanho de Zaratustra tal que as 999 ovelhas restantes não possam ser particionadas em dois conjuntos com pesos totais (soma dos pesos das ovelhas em cada conjunto) iguais.

Nota: uma partição de um conjunto A é um conjunto $\{A_1, \ldots, A_n\}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ e $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todos $i \neq j$.

Solução:

Nós provamos por contradição! Considere um vetor $v \in \mathbb{R}^{1000}$ tal que suas entradas são os pesos de cada uma das 1000 ovelhas. Se não existir uma tal ovelha como no enunciado, então podemos afirmar que existe uma matriz M com zero na diagonal principal e ± 1 em suas outras entradas tal que

$$Mv = 0.$$

Isto é,

$$\begin{bmatrix} 0 & \pm 1 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \pm 1 & 0 & \pm 1 & \cdots & \pm 1 \\ \pm 1 & \pm 1 & 0 & \cdots & \pm 1 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pm 1 & \pm 1 & \pm 1 & \cdots & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_{1000} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Cheque que isso equivale à condição do enunciado não ser verdadeira.

No entanto, analisando o $\det M$, temos

$$\det M = \sum_{\sigma \in S_n} (-1)^{\mathrm{inv}(\sigma)} a_{1,\sigma(1)} a_{2,\sigma(2)} \cdots a_{n,\sigma(n)},$$

onde a_{ij} são as entradas de M, S_n é o conjunto de permutações de $\{1, \ldots, 1000\}$ e $\mathrm{inv}(\sigma)$ é o número de inversões da permutação σ, ou seja, o número de pares (i, j) tal que $i < j$ e $\sigma(i) > \sigma(j)$ (determinante de Leibniz).

Note que toda permutação com uma entrada fixa, isto é, um i tal que $\sigma(i) = i$, contribui com zero na soma do determinante. Dessa forma, $\det M \pmod 2$ é igual ao número de permutações caóticas D_{1000} do conjunto $\{1, \ldots, 1000\}$ (uma permutação caótica é tal que $\sigma(i) \neq i$, para todo i).

Sabemos que

$$D_n = n! \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right),$$

e pode-se facilmente checar que D_n segue a recorrência

$$D_n = \begin{cases} 1 & \text{se } n = 0, \\ n \cdot D_{n-1} + (-1)^n & \text{se } n > 0, \end{cases}$$

de onde segue que $D_n \equiv 1 \pmod 2$ para todo $n \equiv 0 \pmod 2$.

Isso implica que $\det M \equiv 1 \pmod 2$, ou seja, M é invertível. Logo, $Mv = 0 \implies v = 0$, uma contradição.

2 Questão: Um monge preguiçoso

Escrito por Marcos Vinicius Burdzinski

Um jovem menino chega até um monge preguiçoso, porém sábio, e pede para que o monge ensine para ele todo o seu conhecimento. O monge, com preguiça de ensinar o menino, diz para ele "Ó pequeno menino, das montanhas mais íngrimes, escale a mais íngrime e traga um pedaço do topo dela para mim, assim você será digno de receber a minha sabedoria". O menino entusiasmado, fez o que o monge pediu e, 1 ano depois, voltou para o monge e entregou uma pedra do topo da montanha mais íngrime da região. O monge assustado, disse para o menino: "Ó pequeno menino, provaste a sua dedicação e força. Agora, para receber a minha sabedoria, deverá provar que és inteligente e paciente o suficiente. Para isso, lhe proponho o seguinte problema: Seja $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$, k, e M inteiros positivos de tal modo que: $\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + ... + \frac{1}{X_n} = k$ e $X_1 X_2 X_3 ... X_n = M$. Considere o polinômio

$$P(x) = M(x+1)^k - (x + X_1)(x + X_2) \cdots (x + X_N)$$

Teste, em $P(x)$ todos os inteiros positivos em ordem crescente, até encontrar uma raíz da equação. Quando encontrar esse número, traga um papel com esse número escrito até mim. Então, poderei ensinar a minha sabedoria a você". Prove que tal polinômio não apresenta soluções nos reais positivos. Isto é, o monge passou a perna no menino para não ter que ensiná-lo.

Solução:

Essa questão sai de maneira belíssima por $MA \geqslant MG$! Vamos aplicar essa desigualdade da seguinte maneira:

$$\frac{x+X_1}{X_1} = \frac{(x+1)+1+1+\cdots+1}{X_1} \geqslant (x+1)^{\frac{1}{X_1}}.$$

Então,

$$(x+X_1) \geqslant X_1(x+1)^{\frac{1}{X_1}}.$$

Da mesma forma,

$$(x+X_i) \geqslant X_i(x+1)^{\frac{1}{X_i}}.$$

Portanto,

$$(x+X_1)(x+X_2)\cdots(x+X_N) \geqslant X_1X_2X_3\cdots X_n(x+1)^{\frac{1}{X_1}+\frac{1}{X_2}+\frac{1}{X_3}+\cdots+\frac{1}{X_n}} = M(x+1)^k.$$

Logo, $P(x) \leqslant 0, \forall x \geqslant 0$, com igualdade se dando quando $x+1=1 \implies x=0$. Ou seja, $P(x)$ não tem raízes positivas, como queríamos demonstrar.

3 Questão: Sequência de somas de k-ésimas potências

Escrito por Julia Leguiza

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos e seja $S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$.

(a) Dado que $S_1 < S_2$, mostre que $S_1, S_2, S_3, \ldots$ é estritamente crescente.

(b) Prove que existe um inteiro positivo n e reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tal que $S_1 > S_2$ e $S_1, S_2, S_3, \ldots$ não é estritamente decrescente.

Solução:

a) **Lema:** $\dfrac{S_{k+2}}{S_{k+1}} > \dfrac{S_{k+1}}{S_k}, \forall k \in \mathbb{Z}_+^*$

Prova: Vamos provar por indução em k.

(i) Casos iniciais: $k=1$: $\dfrac{S_3}{S_2} > \dfrac{S_2}{S_1} \iff S_3 \cdot S_1 > S_2^2 \iff$

$(X_1+X_2+\cdots+X_n)(X_1^3+X_2^3+\cdots+X_n^3) > (X_1^2+X_2^2+\cdots+X_n^2)^2.$

Que é verdade, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz!

(ii) Hipótese de Indução: Assuma que o lema é válido para todo $m \leqslant k$, ou seja, $\dfrac{S_{k+2}}{S_{k+1}} > \dfrac{S_{k+1}}{S_k} > \dfrac{S_k}{S_{k-1}} > \cdots > \dfrac{S_2}{S_1}.$

(iii) Passo indutivo: Provaremos que também é válido para $(k+1)$.

Queremos: $\dfrac{S_{k+3}}{S_{k+2}} > \dfrac{S_{k+2}}{S_{k+1}} \iff S_{k+3} \cdot S_{k+1} > S_{k+2}^2 \iff$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^{k+3} \cdot \sum_{i=1}^{n} X_i^{k+1} > \left(\sum_{i=1}^{n} X_i^{k+2}\right)^2 \iff \sum_{i=1}^{n} X_i^{2k+4} + \sum_{i \neq j} X_i^{k+3} X_j^{k+1} >$$

$$\sum_{i=1}^{n} X_i^{2k+4} + 2 \cdot \sum_{i \neq j} X_i^{k+2} X_j^{k+2} \iff \sum X_i^{k+1} X_j^{k+1}(X_i^2 + X_j^2) > 2 \cdot \sum X_i^{k+2} X_j^{k+2}$$

.

Por MA$\geqslant$ MG, acabamos.

Portanto, em particular, temos que $\dfrac{S_{k+2}}{S_{k+1}} > \dfrac{S_2}{S_1} > 1 \implies S_{k+2} > S_{k+1}, \forall k$.

b) Escolha $n = 3$, $X_1 = \dfrac{5}{4}$, $X_2 = X_3 = \dfrac{1}{4}$. Daí, $S_1 = \dfrac{7}{4}$, $S_2 = \dfrac{27}{16}$, $S_3 = \dfrac{127}{64}$. Então: $S_1 = \dfrac{7}{4} > \dfrac{27}{16} = S_2$, $S_2 = \dfrac{27}{16} < \dfrac{127}{64} = S_3$.

Motivação para escolher esses números: Note que se todos os números são < 1, então a sequência seria estritamente decrescente (pois $X^k < X^{k-1}$). Então, vamos escolher algo maior que 1. Seja $X_1 = 1 + \epsilon$. Daí, pensando simples, será que $X_2 = \epsilon$ funciona com n=2? Queremos $S_1 > S_2$, então teríamos:

$$1 + 2\epsilon > (1+\epsilon)^2 + \epsilon^2 \implies 1 + 2\epsilon > 1 + 2\epsilon + 2\epsilon^2 \implies 2\epsilon^2 < 0$$

Isso é impossível... mas e se escolheremos $X_3 = \epsilon$ com n=3? Vejamos:

$$1 + 3\epsilon > (1+\epsilon)^2 + 2\epsilon^2 \implies 1 + 3\epsilon > 1 + 2\epsilon + 3\epsilon^2 \implies 3\epsilon^2 < \epsilon \implies \epsilon < \frac{1}{3}$$

Agora, finalmente, algo realmente possível! Escolhendo $\epsilon = \dfrac{1}{4}$, conseguimos que $S_2 < S_3$.