Aula 12

Mecânica Celeste

Exercícios para a P3

1) (P3 2022 - Adaptada) Considere uma galáxia cuja linha espectral no $H\alpha$ é $\lambda = 676\,nm$. Sabendo que a linha $H\alpha$ mede $\lambda_0 = 656{,}3\,nm$ em laboratório e que $H_0 = 72\,km\,s^{-1}\,Mpc^{-1}$, calcule:

a) A sua velocidade.

b) A sua distância, em Mpc.

Solução:

a)

Pelo redshift da galáxia:

$$z = \frac{V}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0} \therefore V = \frac{c\Delta\lambda}{\lambda_0} \therefore V = c\left(\frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0}\right)$$

$$V = c\left(\frac{\lambda}{\lambda_0} - 1\right) \therefore \boxed{V \simeq 9000\,km/s}$$

b) Pela lei de Hubble:

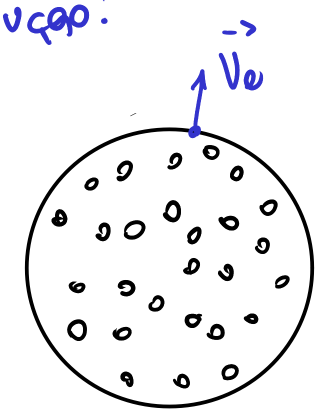
$$V = H_0 d \therefore d = \frac{V}{H_0}$$

Para $H_0 = 72 \, km \, s^{-1} Mpc^{-1}$:

$$\boxed{d \simeq 125 \, Mpc}$$

1) Considere um aglomerado estelar de raio igual a 20pc, cuja velocidade de escape é $V_e = 15 \, km/s$. Sabendo que o aglomerado é composto por estrelas semelhantes ao Sol, calcule o número de estrelas no aglomerado.

Solução:



Como o aglomerado é composto somente por estrelas iguais ao Sol, a sua massa M é:

$M = n M_\odot$, onde n é o nº de estrelas.

A velocidade de escape é dada por:

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}} \therefore \frac{2GM}{r} = V_e^2 \therefore M = \frac{V_e^2 r}{2G}$$

$$M = nM_\odot \therefore \quad nM_\odot = \frac{V_e^2 r}{2G} \therefore n = \frac{V_e^2 r}{2GM_\odot}$$

$$\boxed{\therefore n \cong 5{,}2 \cdot 10^5 \text{ estrelas}}$$

3) (P3 2018) Calcule a densidade de um buraco negro com 10^7 massas solares.

Podemos calcular o raio do buraco negro pelo raio de Schwarzchild:

$$R_S = \frac{2GM}{c^2}$$

$$M = 10^7 M_\odot \therefore R_S \cong 2{,}95 \cdot 10^{10} \, m$$

A densidade é dada por:

$$\rho = \frac{M}{V} \therefore \rho = \frac{M}{\frac{4\pi}{3} R^3}$$

$$\therefore \rho \cong 1{,}85 \cdot 10^5 \, kg/m^3$$

4) (P3 2016 - Adaptada) A estrela Achernar tem uma velocidade de rotação tão alta que ela tende a expulsar sua matéria. Sabendo que a massa é expelida ao atingir uma velocidade $V = \frac{V_e}{\sqrt{2}}$, onde V_e é a velocidade de escape da estrela, calcule uma expressão para V em função da sua massa M e seu raio R.

Solução:

A expressão da velocidade de escape é:

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

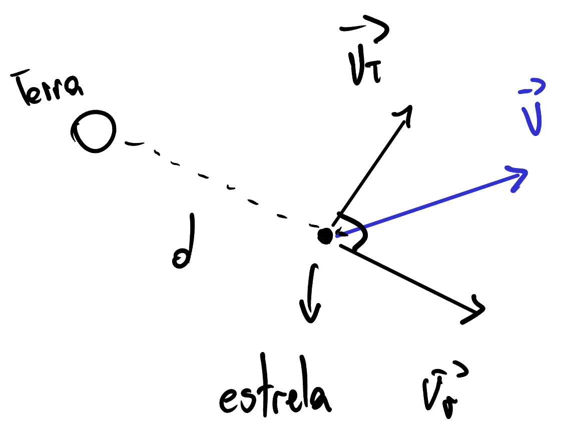
$$V = \frac{V_e}{\sqrt{2}} \therefore V = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

$$V = \sqrt{\frac{2GM}{2R}} \therefore V = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

5) Uma estrela que se move no espaço a uma velocidade $V = 700\ km/s$, possui movimento aparente $\mu = 15''/ano$ e está a 12 pc de distância da Terra. Sabendo que a estrela está se afastando, calcule o comprimento de onda da linha $H\alpha$ emitida pela estrela. Considere que a linha $H\alpha$ tem comprimento de onda $\lambda_0 = 656\ nm$ em laboratório.

Solução:

Esquematizando as componentes da velocidade da estrela:



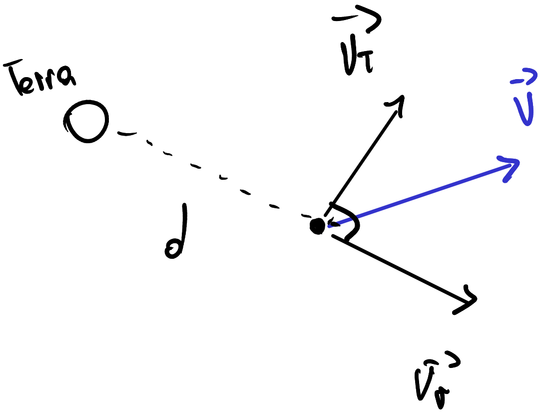
Onde $\vec{V_T}$ e $\vec{V_r}$ são as componentes tangencial e radial da velocidade, respectivamente.

Podemos calcular $\vec{V_T}$ a partir do movimento próprio.

$$V_T = \mu \cdot d$$

Fazendo as conversões de unidade, temos:

$V_T \approx 568,9$ km/s



Pela figura ao lado:

$$\vec{V} = \vec{V_T} + \vec{V_r}$$

$$\therefore V^2 = V_T^2 + V_r^2$$

$$\therefore V_r = \sqrt{V^2 - V_T^2}$$

$$\therefore V_r \approx 902 \text{ km/s}$$

Por fim, pelo redshift:

$$z = \frac{V_r}{c} = \frac{\Delta\lambda}{\lambda_0}$$

$$\therefore \frac{\lambda - \lambda_0}{\lambda_0} = \frac{V_r}{c} \therefore \frac{\lambda}{\lambda_0} - 1 = \frac{V_r}{c}$$

$$\frac{\lambda}{\lambda_0} = \frac{V_r}{c} + 1 \quad \therefore \quad \lambda = \lambda_0 \left(\frac{V_r}{c} + 1 \right)$$

$$\lambda_0 = 656 \text{ nm} \quad \therefore \quad \boxed{\lambda \approx 658 \text{ nm}}$$