1 Questão Curta: Mesa com atrito

Escrito por Gabriel Mendes Freitas

Sobre o centro de uma mesa quadrada de lado L, encontra-se um bloco de massa M e dimensões desprezíveis. O bloco é lançado perpendicularmente a um dos lados da mesa com velocidade V. Desprezando outras formas de dissipação de energia, calcule o coeficiente de atrito mínimo entre o bloco e a mesa para que o bloco não saia dela.

Solução:

Conservação de energia: Primeiro, perceba que a energia cinética do bloco deverá ser totalmente dissipada pelo atrito. Com isso:

$$E_{cin} = T_{fat}$$

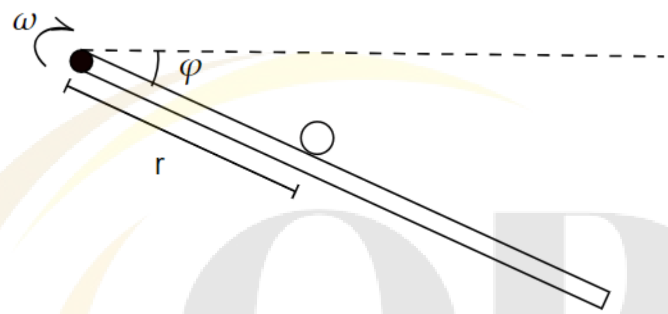
$$\frac{MV^2}{2} = \frac{F_{fat}L}{2}$$

$$MV^2 = \mu M g L \therefore \boxed{\mu = \frac{V^2}{gL}}$$

2 Questão média: Não-inercial ?

Escrito por William Alves

William recebeu uma barra uniforme de massa 3m e comprimento 2a. A barra é articulada livremente em uma extremidade e mantida pela outra extremidade na posição horizontal. Uma partícula, de tamanho desprezível e massa m, desliza sobre a barra a uma distância r de sua articulação em qualquer instante t. O coeficiente de atrito entre a superfície da haste e a partícula é constante $\mu = 0,5$.



Parte A : Rotação quase trivial

Inicialmente iremos tratar o sistema de modo que a partícula não deslize na barra, começando na posição $r = a$, desse modo, podemos considerar o sistema como um único corpo rígido.

a) Encontre o centro de massa e o momento de inércia do sistema.

b) Prove que em $r = a$, quando o sistema é liberado, desde $t = 0$s até que a partícula comece a deslizar sobre a barra, o ângulo de inclinação dela em relação à horizontal satisfaz a equação:

$$5a\omega^2 = 8g\,\mathrm{sen}(\varphi)$$

c) Em que ângulo a partícula começa a deslizar na barra?

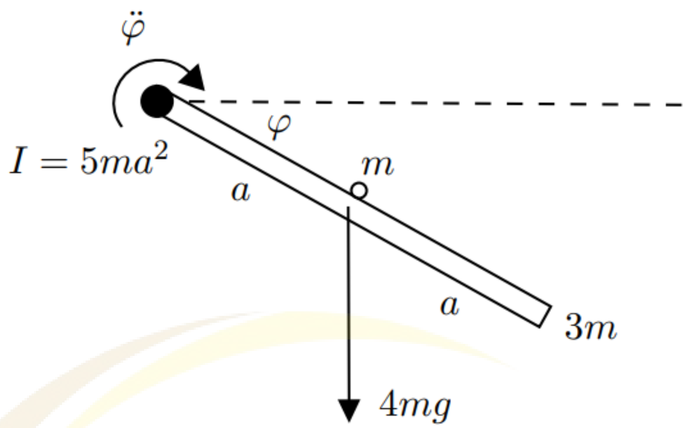
Parte B : Rotação não trivial

Agora, a partícula inicialmente é colocada em $r = 0$m.

d) Encontre uma equação que possa descrever o movimento do sistema.

e) Até que momento a força exercida pela barra sobre a partícula é máxima?(Encontre um intervalo para o ângulo que a barra faz com a horizontal)

Solução:



;

a) Até que a partícula comece a escorregar, a haste + partícula pode ser considerada um corpo rígido. Para este corpo rígido, o seu centro de massa está localizado a uma distância de $\dfrac{ma + 3ma}{4m} = a$ da extremidade articulada da haste.

O momento de inércia I em relação ao eixo que passa pelo ponto articulado e perpendicular ao plano é:

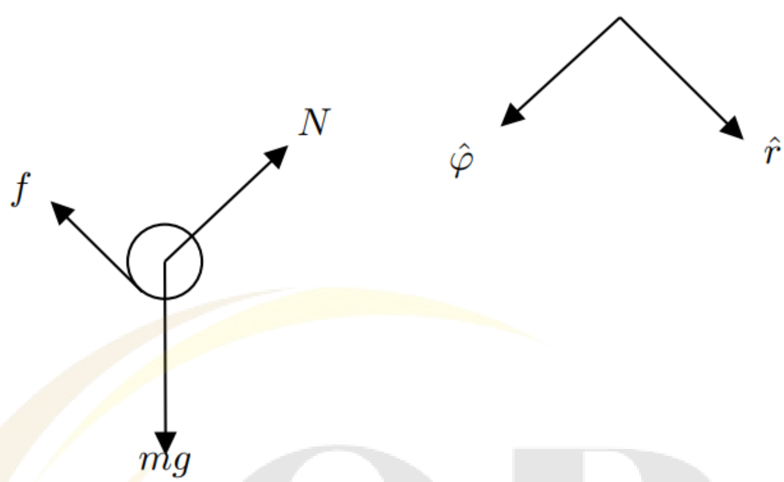
$$\boxed{I = \frac{3m(2a)^2}{3} + ma^2 = 5ma^2}$$

b) Como o trabalho realizado por todas as forças não conservativas é zero, podemos usar a conservação de energia até que a bola comece o deslizamento. Quando a barra faz um ângulo φ com a horizontal, o centro de massa cai por um sen(φ). Denotando a velocidade angular da barra + partícula como ω:

$$0 = -4mg\,\text{sen}(\varphi) + \frac{1}{2}I\omega^2 \Rightarrow 4mga\,\text{sen}(\varphi) = \frac{5}{2}ma^2\omega^2$$

$$\boxed{5a\omega^2 = 8g\,\text{sen}(\varphi)}$$

c) De acordo com o diagrama de corpo livre temos:



;

A aceleração da partícula até começar a escorregar será $\vec{a} = a\alpha\hat{\varphi} - \omega^2 a\hat{r}$. Usando a relação obtida anteriormente :

$$5a\omega^2 = 8g\,\mathrm{sen}(\varphi)$$

Difenciando esta relação dos dois lados:

$$5a\alpha = 4g\cos(\varphi)$$

Utilizando da segunda lei de Newton para a partícula,

$$mg\cos(\varphi) - N = \frac{4}{5}mg\cos(\varphi) \Rightarrow N = \frac{1}{5}mg\cos(\varphi) > 0$$

Assim, a particula não perde contato.

$$f - mg\,\mathrm{sen}(\varphi) = \frac{8}{5}mg\,\mathrm{sen}(\varphi) \Rightarrow f = \frac{13}{5}mg\,\mathrm{sen}(\varphi)$$

A partícula vai começar a deslizar quando $f > N\mu$

$$f = \frac{13}{5}mg\,\mathrm{sen}(\varphi_0) = 0.5\left(\frac{1}{5}mg\,\mathrm{sen}(\varphi_0)\right)$$

Onde φ_0 é o ângulo que indica o início do deslizamento

$$\tan(\varphi_0) = \frac{1}{26}$$

d) No caso em que $r = 0$, o centro de massa do sistema está localizado em $\frac{3ma}{4m} = \frac{3a}{4}$ da extremidade articulada. O momento de inércia nesse caso será:

$$I = \frac{3m(2a)^2}{3} = 4ma^2$$

Conservando a energia:

$$0 = -4m(\frac{3a}{4} g \operatorname{sen}(\varphi_0)) + \frac{1}{2} I\omega^2 \Rightarrow 3mga \operatorname{sen}(\varphi) = 2ma^2\omega^2$$

$$\boxed{3gsin(\varphi) = 2a\omega^2}$$

e) A partícula irá começar a deslizar quando $\tan(\varphi_1) = \mu = 0.5$.

$$\varphi_1 = \arctan(0.5)$$

Consideremos quantitativamente o movimento da partícula quando ela começa a escorregar. O torque líquido na haste será no sentido horário,então $\alpha > 0$ e então, por restrição normal, a partícula terá uma aceleração tangencial no sentido horário até que permaneça em contato com a haste. Assim:

$$mg\cos(\varphi) - N > 0 \Rightarrow N < mg\cos(\varphi) < mg\cos(\varphi_1) = \frac{2}{\sqrt{5}} mg$$

Além disso, como a partícula agora está escorregando $f = \mu N = 0.5N$ A força resultante sobre a partícula exercida pela barra é

$$R = \sqrt{f^2 + N^2} = \frac{\sqrt{5}}{2} N < \frac{\sqrt{5}}{2} \frac{2}{\sqrt{5}} mg$$

$$\Rightarrow R < mg$$

Mas, quando a partícula não está deslizando, $R = mg$ Então a partícula sente uma força máxima exercida pela barra num intervalo de

$$\boxed{0 < \varphi_0 < \varphi_1}$$

3 Questão Longa: Entendendo a entropia

Escrito por Tiago Rocha

A entropia é frequentemente referida como o grau de desorganização de um sistema. Embora essa afirmação tenha algum fundamento, não é a definição mais formal de entropia. Na verdade, a entropia está relacionada ao número de maneiras pelas quais um sistema pode ser organizado de forma coerente. Dessa forma, a segunda lei da termodinâmica estabelece que a variação da entropia S é tal que:

$$\Delta S \geqslant 0 \tag{1}$$

Quando pensamos em processos "globais", a variação da entropia pode ser negativa em uma parte do processo, desde que seja compensada por uma variação positiva em outra parte, respeitando assim a segunda lei da termodinâmica.

Dados:

Na matemática, se temos um sistema em que cada um dos n pontos possui a característica A ou B, o número de configurações possíveis com p pontos apresentando a característica A é dado por:

$$\binom{n}{p} = \frac{n!}{p!(n-p)!} \tag{2}$$

Parte A: Sentido estatístico

a) Considere um sistema com 100 bolinhas, onde cada uma pode ser azul ou preta. Calcule o número de configurações possíveis em que temos exatamente 60 bolinhas azuis (o que chamamos de número de microestados). Deixe sua resposta em função de um produto.

b) No mesmo sistema do item (a), calcule o número de configurações em que temos exatamente 50 bolinhas azuis. Note que essa condição possui o maior número de configurações possíveis. Deixe sua resposta na forma de um produto.

c) Com base em seus conhecimentos e no que foi explicado no enunciado, qual desses dois sistemas teria maior entropia?

d) Através das definições mostradas, explique porque entropia não é sinônimo de desordem, pelo menos não no sentido literal da palavra.

Parte B: Sentido termodinâmico

Na Termodinâmica, normalmente definimos a entropia da seguinte forma:

$$\Delta S = \frac{\Delta Q_{rev}}{T} \tag{3}$$

Onde T é a temperatura e ΔQ_{rev} o calor trocado durante uma transformação reversível.

e) Sabendo que o calor latente da transformação água-gelo vale $80,0$cal/g, calcule a variação de entropia desse processo, para uma massa de 10g. Analise o sinal da sua resposta. Dado: 1cal $= 4,2$J

f) Suponha que 2 corpos que possuam temperaturas T_1 e T_2 passam por um processo até ambos chegarem a uma mesma temperatura T_f. Sabendo que a entropia pode ser escrita como $S = S_0 + \ln(T)$, determine a temperatura T_f para que a variação de entropia do processo seja mínima. Esse processo será, então, reversível. Essa expressão para a entropia deve ser usada apenas se não existir mudança em massa e/ou volume durante o processo.

g) Explique, por meio de argumentos físicos, porque esse sistema possui o maior trabalho W que pode ser retirado.

h) Sabendo que a energia interna U pode ser escrita como $U = U_0 + aTa$, escreva o trabalho W retirado do sistema anterior. Comente o sinal da sua resposta e o caso em que o trabalho é nulo.

i) Calcule o valor numérico do item anterior, sabendo que $T_1 = 250$K, $T_2 = 360$K e $a = 1,0$cal/K

Solução:

a) Devemos escolher 100 bolas de forma que 60 sejam azuis. Então, aplicando a equação 2, o número de microestados requerido será de:

$$\binom{100}{60} = \frac{100!}{60!(100-60)!} = \frac{100!}{60!40!}$$

b) Usando o mesmo raciocínio do item anterior:

$$\binom{100}{50} = \frac{100!}{50!(100-50)!} = \frac{100!}{50!50!}$$

c) Como o número de microestados em b) é maior do que o número de microestados em a), há mais maneiras diferentes de organizar o sistema b) do que o sistema a). Logo, resgatando do enunciado o fato que a entropia é solidária ao número de maneiras de como podemos organizar um sistema, o sistema do item b) possui maior entropia do que o sistema do item b).

d) Entendemos durante essa parte que é a entropia é solidária ao número de configurações que um sistema pode assumir, mantendo uma característica. Ou seja, o número de microestados possíveis dentro de um macroestado. Esse é um conceito bem diferente de desorganização. Tendo 50 bolas azuis e 50 bolas pretas, esse macroestado vai possuir o mesmo número de microestados(e consequentemente a mesma entropia) independentemente de como você organiza as bolinhas.

e) Sabe-se que o módulo da variação de calor no processo vale mL, aonde L é o calor latente e m é a massa, por definição. Então, lembrando que a transformação água-gelo normalmente ocorre a 0C = 273K, devemos usar a equação 3, mas aplicando módulo em ambos os lados para depois discutirmos o sinal:

$$|\Delta S| = \frac{mL}{T} = \frac{1 \cdot 80 \cdot 4,2}{273} \approx 1,2J/K$$

Sobre o sinal, temos duas alternativas, pois não sabemos se o gelo está virando água ou a água está virando gelo. No primeiro caso, o sistema recebe calor, o que faz a variação de entropia ser positiva(pela equação 3). No segundo caso, o sistema perde calor, o que faz a variação de entropia ser negativa. Lembrando dos conceitos de entropia trazidos na parte 1, esse resultado realmente se apresenta coerente: na água as partículas estão mais agitadas do que no gelo, como normalmente aprendemos na escola. Por causa disso, o número de microestados presente na água deve ser maior do que no gelo, pois as partículas estarem mais agitadas significa que há mais possíveis configurações de velocidade de cada partícula que trazem a mesma configuração macroscópica. Logo, a entropia da água deve ser maior que a do gelo.

f) A partir da expressão para entropia mostrada, vamos calcular a variação de entropia para o corpo 1 e depois para o corpo 2, lembrando das propriedades de logaritmos:

$$\Delta S_1 = \ln(T_f) - \ln(T_1) = ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right)$$

$$\Delta S_2 = \ln(T_f) - \ln(T_2) = \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right)$$

Agora, podemos somar as duas variações para obter a varição global de entropia:

$$\Delta S = \ln\left(\frac{T_f}{T_1}\right) + \ln\left(\frac{T_f}{T_2}\right)$$

Pela equação (1), a menor variação global de entropia em um processo vale 0. Logo, para minimizarmos a entropia do processo, devemos fazer com que o logaritmo que representa a variação total de entropia seja igual 0. Como qualquer número elevado a 0 vale 1, para um logaritmo ser nulo o seu logaritmando deve ser igual a 1(vista que a base de um logaritmo elevado a este vale o logaritmando, como aprende-se na definição de logaritmo). Logo:

$$\frac{T_f^2}{T_1 T_2} = 1 \rightarrow T_f = \sqrt{T_1 T_2}$$

g) O fato de que o trabalho máximo retirado de um sistema ocorre quando o processo é revérsivel é um conceito bem famoso na física. Sendo assim, há várias maneiras diferentes de se mostrar esse fato. Para combinar com o resto do problema, decidi trazer uma demonstração envolvendo entropia. Vimos no item e) que a entropia está relacionada à particulas mais agitadas, sendo assim consequentemente relacionada à energia. Logo, para encontramos o trabalho máximo, devemos minimizar a variação de entropia, visto que uma variação maior que 0 representaria maior desperdício de energia. Como, no item anterior, nós falamos que a variação de entropia mínima ocorre em processos reversíveis, logo é nesses processos aonde o trabalho retirado é máximo.

h) Como as trocas de calores são internas ao sistema, então a variação de energia interna do sistema como um todo será igual ao trabalho fornecido. Sabendo que a energia interna do sistema é a soma das energias internas de cada corpo, encontremos o seu valor inicial U_i:

$$U_i = U_0 + aT_1 + U_0 + aT_2 = 2U_0 + a(T_1 + T_2)$$

E energia final U_f:

$$U_f = U_0 + aT_f + U_0 + aT_f = 2U_0 + 2aT_f$$

Agora, podemos calcular o trabalho fornecido subtraindo as equações:

$$W = U_f - U_i = 2U_0 + 2aT_f - 2U_0 - a(T_1 + T_2) = a(2T_f - T_1 - T_2) \tag{4}$$

Substituindo T_f:

$$W = 2a(\sqrt{T_1T_2} - \frac{T_1 + T_2}{2})$$

Pela desigualdade envolvendo as média artimética(MA) e geométrica(MG), o trabalho é sempre menor ou igual a 0. Já esperávamos esse resultado, pois o trabalho está sendo fornecido pelo sistema. Sabemos que, na matemática, MA=MG apenas se todos os termos forem iguais. Analisando a expressão do trabalhamo, vemos que o trabalho é nulo se $T_1 = T_2$, o que faz sentido, pois dessa maneira não haveria nenhuma troca de calor ocorrendo a igualdade.

i) Vamos substituir os valores:

$$W = 2 \cdot 1,0 \cdot 4,2(\sqrt{250 \cdot 360} - \frac{360 + 250}{2}) \approx -105\text{J}$$