1 Questão: Polinômios sequenciados

Escrito por Kauan Emanuel
Considere o polinômio $P(x) = x^3 - 12x^2 + 36x + k$, com $k \in \mathbb{R}$. Sabe-se que as raízes de $P(x)$ formam uma progressão geométrica. Seja $Q(x)$ um polinômio formado pelos 3 primeiros termos de uma progressão aritmética, de primeiro termo $|\frac{k}{3}|$, cuja soma de seus 10 primeiros termos é 270. Assinale a alternativa que corresponde à soma dos coeficientes de $Q(x)$, tomando o coeficiente líder igual a -1.

a) 1536
b) 1256
c) 4032
d) 3235
e) 2840

Solução:

Vamos adotar a PG do enunciado como sendo $\frac{a}{q}$, a e aq:

$-(-12) = \frac{a}{q} + a + aq = a\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right)$

$36 = \frac{a}{q}a + \frac{a}{q}aq + aaq = a^2\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right) = a\left[a\left(\frac{1}{q} + 1 + q\right)\right] \rightarrow 12a = 36 \therefore a = 3$

Logo, $-k = \frac{a}{q}aaq \rightarrow k = -a^3 \therefore k = -27$

Calculando a razão da PA:

$S_n = \frac{[2a_1 + (n-1)r]n}{2} \rightarrow 270 = \frac{[2\frac{27}{3} + (10-1)r]10}{2} \therefore r = 4$

Então, $Q(x) = -1(x-9)(x-13)(x-17)$. Sabendo que para $x = 1$ obtemos a soma dos coeficientes. Sendo assim, a resposta é 1536.
Resposta: (a)

2 Questão: Giro de raízes

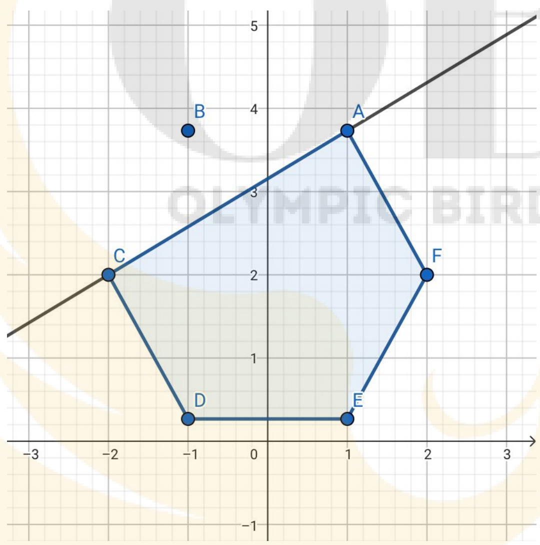
Escrito por Kauan Emanuel
Dadas as equações $z = x + yi / z^6 - 12z^5 i - 60z^4 + 160z^3 i + 240z^2 - 192zi - 128 \leqslant 0$ e $\sqrt{3}x - 3y + 2\sqrt{3} + 6 \geqslant 0$, com $x, y \in \mathbb{R}$, calcule o volume do sólido de revolução gerado pela intersecção dessas equações no plano xy em torno da segunda equação.

Solução:

$z^6 - 12z^5 i - 60z^4 + 160z^3 i + 240z^2 - 192zi - 128 \leqslant 0 \rightarrow z^6 - 12z^5 i - 60z^4 + 160z^3 i + 240z^2 - 192zi - 64 \leqslant 64 \therefore (z - 2i)^6 \leqslant 64$

Pela 2° Lei de Moivre: $z - 2i = 2\text{cis}(\theta + \frac{2k\pi}{6})$, com $k \in [0, 5]$ e $\theta = 0$

Colocando as equações no plano de Argand-Gauss:



Note que, ao fazer o giro em torno da segunda equação, o sólido gerado é a junção de dois troncos de cone idênticos. Calculando a distância do ponto $(2, 2)$ e $(1, 2 - \sqrt{3})$, obtêm-se os raios das bases menor e maior do tronco de cone que são, respectivamente, $r = 2$ e $R = 3$. Além disso, sabe-se, pela figura, que a distância dos pontos A e C é duas vezes o valor da altura do tronco de cone, ou seja, $h = \frac{\sqrt{[1-(-2)]^2 + [2+\sqrt{3}-2]^2}}{2} = \frac{2\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$.

Então, $V_s = 2V_{\text{tronco}} = 2 \times \frac{h\pi}{3}(R^2 + r^2 + Rr) \therefore \boxed{V_s = \frac{38\sqrt{3}\pi}{3}}$

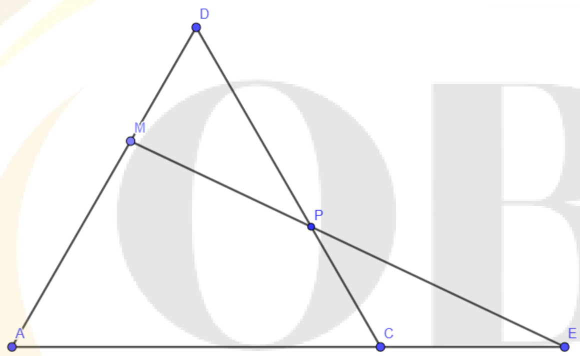
3 Questão: Esquema da Pirâmide

Escrito por Kauan Emanuel

Considere um tetraedro regular $ABCD$, e os pontos M, N e P estão sobre os segmentos AD, BD e CD, tal que $\frac{AM}{MD} = 2$, $\frac{BN}{ND} = 3$ e $\frac{DP}{PC} = 5$. Traçam-se os prolongamentos das retas suportes AC e BC até E e G. Calcule a razão entre o volume da pirâmide $EGCD$ e $ABCD$, tendo em vista que M, P e E, bem como N, P e G são colineares.

Solução:

Analisando a figura no plano ACD:



Pelo Teorema de Menelaus:

$\frac{AM}{MD} \cdot \frac{DP}{PC} \cdot \frac{CE}{AE} = 1 \rightarrow 2 \cdot 5 \cdot \frac{x}{l+x} = 1 \therefore x = \frac{l}{9}$

A figura no plano BCD se repete de maneira semelhante ao plano ACD. Logo:

$\frac{BN}{CN} \cdot \frac{DP}{PC} \cdot \frac{CG}{BG} = 1 \rightarrow 3 \cdot 5 \cdot \frac{y}{l+y} = 1 \therefore y = \frac{l}{14}$

Pelo Princípio de Cavalieri, $V = Sh$, em que S corresponde à área e h à altura. Sabemos que a altura será a mesma para as duas pirâmides, logo a razão entre os volumes é numericamente igual à razão entre as áreas. Então:

$$\frac{V_{EGCD}}{V_{ABCD}} = \frac{S_{EGCD}}{S_{ABCD}} = \frac{\frac{x \cdot y \cdot \text{sen}\, 60^\circ}{2}}{\frac{l \cdot l \cdot \text{sen}\, 60^\circ}{2}} \therefore \boxed{\frac{V_{EGCD}}{V_{ABCD}} = \frac{1}{126}}$$