

Olympic Birds

Física



Potencial Elétrico

Autores: Alefe Ryan, Lucas Cavalcante, Pedro Saldanha e
Tiago Rocha



Olympic Birds
Potencial Elétrico
Física

Conteúdo

1	Introdução	2
2	O potencial eletrostático	2
2.1	Revisando	2
2.2	Definindo potencial	3
2.3	Como calcular o potencial elétrico	4
3	Energia eletrostática	7
3.1	Energia em função do potencial	7
3.2	Energia em função do campo	10
4	Método das imagens	11
4.1	Introduzindo o método	11
5	O que é um capacitor?	14
5.1	Definindo capacitância	14
5.2	Definição de capacitor	15
5.3	Calculando alguns casos clássicos	16
5.4	Energia armazenada em um capacitor	18
5.5	Associação de capacitores	19
	Apêndice A: Solução da Equação de Laplace	20
5	Problemas	24
6	Gabarito	28

1 Introdução

Após o material “*Matemática para Eletrostática*”, no qual você aprendeu a base matemática necessária para resolver questões de eletrostática e magnetismo, damos continuidade com “*Potencial Elétrico*”. Neste novo material, você explorará os principais conceitos e fenômenos relacionados a essa importante grandeza física.

Iniciamos com o conceito de potencial eletrostático, explicando sua definição, aplicações e métodos de cálculo. Em seguida, discutimos a energia eletrostática em sistemas, aprofundando a compreensão dessa interação. Também apresentamos o *método das imagens*, uma técnica poderosa para calcular o campo elétrico em situações que envolvem a indução de cargas elétricas em corpos metálicos. Por fim, exploramos os capacitores, detalhando sua função, aplicações práticas e a relação com os conceitos de energia e potencial elétrico abordados ao longo do material.

Como complemento, incluímos um apêndice que apresenta um tratamento matemático mais avançado, utilizando as equações de Poisson e Laplace para o cálculo do potencial elétrico. Para consolidar o aprendizado, o material encerra com uma seção de questões de diferentes níveis, permitindo revisar os conteúdos, aprofundar a compreensão e treinar aplicações práticas.

2 O potencial eletrostático

2.1 Revisando

Supomos que você já conheça o campo elétrico, essencial para entendermos o potencial elétrico. Caso tenha perdido, no material anterior *Matemática para Eletrostática* apresentamos conceitos importantes no estudo de eletrostática, que serão aproveitados aqui. Por isso, nesta seção faremos uma breve revisão.

Mostramos que o campo elétrico pode ser descrito pela seguinte expressão:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_{\tau} \frac{\rho(\mathbf{r}') d\tau' \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2} \quad (2.1)$$

Aqui, $\rho(\mathbf{r}')$ é a densidade volumétrica de carga, e \mathbf{r} é o vetor deslocamento entre o ponto onde estamos medindo o campo e a posição da carga (geralmente escolhemos um sistema de coordenadas com origem nesse ponto, fazendo \mathbf{r} ser o próprio vetor posição). Neste material, utilizaremos o símbolo τ para representar o volume, evitando confusões com o potencial elétrico V .

Embora a Equação (2.1) seja geral para qualquer campo eletrostático, às vezes é mais conveniente expressá-la em função da densidade superficial ou linear de carga. Para esses casos, temos:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma(\mathbf{r}') dA' \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(\mathbf{r}') dl' \hat{\mathbf{r}}}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^2}$$

Nas equações, $\sigma(\mathbf{r}')$ e $\lambda(\mathbf{r}')$ representam, respectivamente, a densidade superficial e a densidade linear de carga. Estas expressões serão úteis mais adiante.

Além disso, no material anterior, apresentamos os diversos usos do operador nabla (∇), que será amplamente utilizado neste estudo para enriquecer a teoria. Revisaremos algumas de suas propriedades conforme necessário, mas é recomendável que você já tenha estudado previamente esse conteúdo.

Por fim, destacamos o regime que será abordado neste material: o eletrostático.

Regime eletrostático: aquele em que estudamos cargas estáticas, sem considerar efeitos magnéticos causados pelo movimento das cargas.

Essa delimitação é crucial, pois utilizaremos este fato ao longo de todo o material. A análise de conceitos em regimes não eletrostáticos será abordada em um material futuro.

2.2 Definindo potencial

”O que é o potencial elétrico? Por que ele existe?”

Esse tipo de pergunta pode surgir ao estudar o potencial pela primeira vez. Normalmente, aprendemos que o potencial de uma carga 1 devido a uma carga 2 pode ser escrito como:

$$V(r) = \frac{kq_2}{r}$$

Aqui, r é a distância entre as cargas, e q_2 é a carga de 2. Contudo, essa fórmula apresenta uma série de limitações, que podem ser resumidas como:

1. A expressão é válida apenas para cargas pontuais. Usando um raciocínio similar ao aplicado ao campo elétrico, podemos expandi-la para uma integral envolvendo a densidade de carga.
2. A fórmula assume um referencial específico, o infinito. Esse potencial representa a diferença de potencial entre a carga 1 e o infinito, assumindo $V_\infty = 0$. Apesar disso, temos liberdade para escolher qualquer referencial para definir o zero de potencial.
3. O que é V ? Sabemos calculá-lo, mas qual é o significado físico? Já temos razões claras para calcular o campo, então por que não trabalhar apenas com ele?

Agora, vamos resolver a terceira limitação. Sabemos, pelo material anterior, que o rotacional de um campo eletrostático é nulo:

$$\boxed{\nabla \times \mathbf{E} = 0} \quad (2.2)$$

Aqui, o operador nabla (∇) é dado por:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y} \hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z} \hat{\mathbf{k}}$$

Esse fato decorre da dependência do campo com $\hat{\mathbf{r}}/r^2$, o que faz o campo "apontar radialmente". Como o rotacional atua sobre "componentes tangenciais", ele deve ser nulo (pode-se demonstrar isso matematicamente). Por um raciocínio similar, também sabemos que:

$$\boxed{\nabla \times (\nabla \phi) = 0} \quad (2.3)$$

Aqui, ϕ é uma função escalar qualquer. Comparando as equações (2.2) e (2.3), vemos que o campo elétrico pode ser escrito como o gradiente de um escalar. Este ajuste não viola nenhuma lei anterior. Assim, podemos escrever o campo como:

$$\boxed{\mathbf{E} = -\nabla V} \quad (2.4)$$

Chamamos V de potencial elétrico, definido como $V = -\phi$. Essa equação é a base para tudo que exploraremos sobre potencial: qualquer resultado futuro será uma consequência direta dessa definição.

Mas por que usar o potencial? A Equação (2.4) mostra que, conhecendo o potencial em todo o espaço, podemos determinar o campo elétrico aplicando o gradiente. Como o potencial é um escalar, somar potenciais é muito mais simples do que somar vetores. Assim, embora o potencial não traga novas informações além das que já estão no campo, ele simplifica cálculos e a análise de fenômenos, como nos circuitos elétricos. Aplicações práticas desse conceito serão exploradas ao longo do material.

2.3 Como calcular o potencial elétrico

Primeiramente, é bom explicarmos o porquê podemos escolher um "potencial referência". Vamos supor um potencial $V_r = f(\mathbf{r})$, onde $f(\mathbf{r})$ é uma função que depende da posição. Sabemos que, mantendo o resto constante, o potencial depende apenas da posição, então, por enquanto, tudo está certo. Se o potencial final fosse $V = C + V_r$, onde C é uma constante, ao tirarmos o gradiente de V , vemos que a presença de C não faz diferença. Ou seja, temos o calibre para escolher C como quisermos, ele é a nossa referência. Normalmente, queremos que $C = 0$, pois carregar uma constante na expressão do potencial não é algo muito eficiente. Como o potencial é nulo no infinito (já que $r \rightarrow \infty$),

normalmente escolhemos C como sendo o potencial no infinito. O que podemos tirar de fisicamente interessante daqui é que apenas $V - C$, a diferença de potencial, é realmente relevante, e não o potencial em si. Você vai perceber isso mais vezes ao longo do material.

Aqui vamos à primeira forma de calcular o potencial. Vamos nos lembrar do teorema do gradiente, mostrado no material passado:

$$dA = |\nabla A| |dl| \cos \theta$$

Sendo $A = V$, podemos integrar a expressão para escrever:

$$\boxed{V = - \int \mathbf{E} \cdot d\mathbf{l}} \quad (2.5)$$

Algo interessante a se destacar aqui é que, formalmente, deveríamos colocar uma integral de linha, especificando o caminho tomado. Contudo, podemos provar que tal integral não depende do caminho. Lembrando do teorema do rotacional:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A}$$

Usando o fato de $\nabla \times \mathbf{F} = 0$ se \mathbf{F} pode ser escrito como gradiente de algo, temos que o primeiro termo da expressão anterior zera. Isso nos indica o seguinte: não importa em qual caminho escolhermos, se ele for fechado, a integral será nula. Esse resultado mostra que o potencial deve ser uma propriedade que depende apenas dos pontos iniciais e finais; já os caminhos não são mais relevantes.

Outra forma de calcular o potencial: usando o infinito como referência, podemos expandir a fórmula do potencial de forma similar ao que fizemos com o campo. Assim, temos as expressões:

$$\boxed{V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(r)d\tau}{r}} \quad (2.6)$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_A \frac{\sigma(r)dA}{r}$$

$$V(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_L \frac{\lambda(r)dl}{r}$$

Expressões que também vamos usar bastante. Contudo, por que essa está correta, para começar? Vamos resolver isso em um exemplo:

Exemplo 1: Demonstrando o básico

Demonstre 2.6. Depois, calcule o gradiente de $\frac{1}{r}$.

Solução 1

Pela equação 2.6, podemos substituir o campo para escrever:

$$V = -kq_2 \int_{\infty}^R \frac{dr}{r^2} = \frac{kq_2}{r}$$

Comparando essa expressão com a do campo elétrico, percebe-se que:

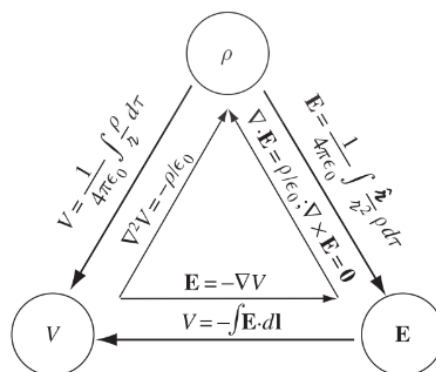
$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{1}{r^2}$$

Caso você queira um exemplo de como calcular o potencial e o campo integrando por meio das expressões 2.1, 2.6, consulte o exemplo feito no material anterior. Contudo, ainda vamos usar essas expressões depois de qualquer jeito.

Por último, aplicando $E = -\nabla V$ na Lei de Gauss diferencial (mostrada no outro material), temos a seguinte equação:

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \quad (2.7)$$

Que é chamada de Equação de Poisson. Quando $\rho = 0$, ela é chamada de Equação de Laplace. Em ambos os casos, percebe-se que resolver essa equação não é algo tão trivial. Por isso, vamos apenas comentar sobre ela de forma mais completa no apêndice. Contudo, comentamos sobre ela aqui por ser mais uma forma de encontrarmos a forma do potencial, mesmo que não tão útil como as outras. Perceba que, junto com a Lei de Gauss, temos relações entre potencial e campo, potencial e densidade, e campo e densidade, gerando um "triângulo" de transformações bem interessantes. Conhecendo uma dessas três quantidades, podemos aplicar as transformações necessárias para encontrar as outras duas.



3 Energia eletrostática

3.1 Energia em função do potencial

A energia potencial elétrica é definida como o trabalho necessário para criar o sistema de cargas. Como visto pelo nome, ela é potencial, ou seja, depende apenas da posição. Vamos provar isso daqui a pouco.

Primeiro, vamos calcular a energia de interação de duas cargas, q_1 e q_2 , separadas por uma distância r . Para trazer a primeira carga do infinito até a região de interesse, nenhum trabalho é realizado, já que não existem influências de forças. Agora, para trazer a carga q_2 do infinito para perto de q_1 , devemos considerar o trabalho da força elétrica:

$$E = W = \int F dx = kq_1q_2 \int_{\infty}^r \frac{dx}{x} = \frac{kq_1q_2}{r} \quad (3.1)$$

Tenha cuidado para não confundir a energia E com o campo. Agora, como computamos a energia de um sistema de 3 cargas? Bem, devemos somar a interação de 1 com 2, 1 com 3 e 2 com 3. Sendo r_{ij} a distância entre as cargas i e j , podemos então escrever:

$$E = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}$$

Usando esse raciocínio, podemos generalizar a expressão. Devemos ter um somatório de interações entre cargas i e j , com $i \neq j$. Contudo, temos que ter cuidado para não contar uma interação duas vezes, já que a interação i com j e j com i é a mesma. Fazendo essa correção, podemos escrever para n cargas:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n \frac{kq_iq_j}{r_{ij}} \quad (3.2)$$

Contudo, usando o que aprendemos anteriormente, podemos reescrever essa expressão em função do potencial de cada carga (com respeito ao infinito), já que $V = \frac{kq}{r}$. Fazendo isso, temos:

$$E = \frac{1}{2} \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^n \sum_{j=1}^n q_i V_j \quad (3.3)$$

Essa expressão mostra o porquê a energia é potencial: ela vem diretamente do potencial elétrico, que sabemos que depende apenas da posição e não do caminho escolhido.

Contudo, sabemos que todo sistema contínuo pode ser construído a partir de várias cargas pontuais. Assim, podemos expandir a última fórmula para o caso contínuo:

$$E = \frac{1}{2} \int V dq \quad (3.4)$$

Vamos fazer alguns exemplos para aplicar essas expressões:

Exemplo 2: Autoenergia

Determine a autoenergia de uma esfera de raio R uniformemente preenchida com carga Q , sabendo que essa é a energia necessária para criar o sistema.

Solução 2

A energia total será a soma de todas as energias de interação entre uma carga q e outra dq . Para calcular tal soma, vamos usar muitas das técnicas para calcular o campo elétrico apresentadas no material "Matemática para Eletrostática", envolvendo elementos em coordenadas esféricas e integração em diferentes variáveis. Assim, precisamos primeiro escrever um elemento de volume na esfera.

$$dV = r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi \quad (3.5)$$

Já que estamos multiplicando as 3 componentes do deslocamento em coordenadas esféricas. Então, podemos escrever:

$$dq = \rho dV = \rho r^2 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

Onde a densidade volumétrica de cargas ρ é simplesmente a carga total dividida pelo volume da esfera. Então, podemos também escrever:

$$q = \rho V = \rho \frac{4\pi r^3}{3}$$

Agora podemos somar todas as interações por meio de uma integral:

$$E = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \frac{q dq}{r} = \frac{Q\rho^2}{3\epsilon_0} \int r^4 dr \sin \theta d\theta d\phi$$

Podemos então dividir essa integral na multiplicação de 3: uma em r , outra em θ e outra em ϕ . Aplicando os limites, a integral em ϕ resulta em 2π , enquanto a em θ resulta em 2 (lembrando que θ varia de 0 a π). A integral em r ficará:

$$\int_0^R r^4 dr = \frac{R^5}{5}$$

Então, substituindo os valores encontrados e a densidade de carga ρ , encontramos:

$$E = \frac{3Q^2}{5R \cdot 4\pi\epsilon_0} = \frac{3}{5} \frac{k_0 Q^2}{R}$$

O que é um resultado bem interessante, pois é bem parecido com a autoenergia de um planeta de massa M e raio R :

$$E = -\frac{3}{5} \frac{GM^2}{R}$$

Coincidência? Na verdade, não. O comportamento das forças gravitacionais e eletrostáticas são bem semelhantes, já que ambas são bem parecidas:

$$\mathbf{F}_e = \frac{k_0 q_1 q_2 \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

$$\mathbf{F}_g = \frac{-Gm_1 m_2 \hat{\mathbf{r}}}{r^2}$$

Então, muitos resultados dos dois conteúdos são compartilhados, como a Lei de Gauss e a formulação da energia. Contudo, temos sempre que ter o cuidado de lembrar que, como não existem massas negativas, a força gravitacional é sempre atrativa, o que é uma grande diferença em relação à força elétrica.

Exemplo 3: Energia de um capacitor

Sabemos que a capacitância é definida como a razão entre carga e diferença de potencial. Sabendo que, em um capacitor, a carga é transportada de uma região a outra com uma capacitância C constante, através de uma diferença de potencial. Determine a energia de um capacitor com carga acumulada Q .

Solução 3

Vamos multiplicar a expressão por C/C para tirar o potencial da integração e deixar apenas as variáveis conhecidas. Assim:

$$E = \int V dq \frac{C}{C} = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{Q^2}{2C}$$

Essa fórmula é mais conhecida quando expressa em função da capacitância e da diferença de potencial, mas você pode facilmente trocar as variáveis a partir da definição de capacitância.

3.2 Energia em função do campo

Lembrando das "transformações triângulo" que vimos anteriormente, faz bastante sentido expressar a energia em função do campo elétrico, eliminando ρ e V . De fato, essa abordagem é extremamente útil, e vamos explicá-la agora.

Primeiro, eliminamos ρ utilizando a forma diferencial da Lei de Gauss:

$$\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \implies \rho = \epsilon_0(\nabla \cdot \mathbf{E}).$$

Substituindo $dq = \rho d\tau$, podemos reescrever a energia como:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int (\nabla \cdot \mathbf{E}) V d\tau. \quad (3.6)$$

A partir de agora, passaremos a denotar a energia como W para evitar confusões com o campo elétrico E . Para prosseguir, utilizaremos a seguinte propriedade vetorial:

$$\oint_S \mathbf{A} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{a} = \int_V \mathbf{B} \cdot (\nabla A) d\tau + \int_V (\nabla \cdot \mathbf{B}) A d\tau,$$

onde A é um escalar e \mathbf{B} é um vetor. Note que essa relação é uma espécie de integração por partes aplicada ao operador nabla. Embora não seja necessário decorar essa expressão, ela será útil para a demonstração.

Escolhendo $\mathbf{B} = \mathbf{E}$ e $A = V$, podemos aplicar essa propriedade à energia, lembrando que $\mathbf{E} = -\nabla V$:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \left(\int_V E^2 d\tau + \oint_S V \mathbf{E} \cdot d\mathbf{a} \right). \quad (3.7)$$

Aqui, utilizamos a relação $\mathbf{E} \cdot \mathbf{E} = E^2$.

Agora surge a seguinte questão: *Sobre qual volume estamos realizando a integração?* Como nosso objetivo é calcular a energia total do sistema, podemos considerar o volume de integração como infinito. Embora essa não seja uma exigência estrita, adotar um volume infinito garante que todas as contribuições possíveis sejam corretamente contabilizadas. Dessa forma, ao considerar o volume infinito, entendemos que ele abrange todo o espaço, desde o infinito até o ponto 0.

Nesse contexto, a expressão 3.7 pode ser simplificada. O volume τ cresce com r^3 , a área da aumenta com r^2 , o campo E decai com $1/r^2$ e o potencial diminui com $1/r$. Com isso, o primeiro termo da expressão tende a crescer à medida que r se aproxima do

infinito, enquanto o segundo termo decai com $1/r$, tornando-se negligenciável no limite do infinito. Portanto, a expressão resultante é:

$$W = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 d\tau \quad (\text{todo o espaço}) \quad (3.8)$$

4 Método das imagens

4.1 Introduzindo o método

O método das imagens trata-se da técnica de "substituir" uma configuração por outra mais fácil de analisar, por meio da adição das chamadas cargas imagens. O "substituir" está entre aspas, já que as situações não são exatamente iguais, possuindo diferenças, como na energia. Porém, isso não diminui a utilidade do método das imagens, que pode ser essencial para resolver certas questões sem recorrer a recursos computacionais.

Normalmente, aplicamos o método das imagens quando nos são solicitadas informações sobre a interação entre uma carga e um condutor com potencial constante V (em relação ao infinito). Muitas vezes, o condutor está aterrado, o que faz $V = 0$.

Vamos, então, começar com a aplicação mais direta:

Exemplo 4: A aplicação mais direta

Uma carga q está a uma distância d acima de uma placa infinita aterrada. Encontre a força sofrida pela carga e a energia da configuração (tente resolver sem o método das imagens e perceba as dificuldades, antes de verificar a solução).

Solução 4

Vamos pensar em outra configuração que satisfaça a condição de contorno $V = 0$ na região da placa. Uma carga $-q$ posicionada a uma distância d abaixo da placa satisfaz essa condição, já que o potencial dela cancela com o potencial de q em todos os pontos pertencentes à região da placa. Assim, dizemos que a situação é análoga a uma carga q separada por $2d$ de uma carga $-q$. Dessa forma, podemos computar a força:

$$F = \frac{kq^2}{4d^2}$$

lembrando que é uma força de atração. Enquanto isso, na energia precisamos ter um cuidado extra. Como a região abaixo da placa, na verdade, não existe, não podemos contabilizá-la no cálculo de energia. Isso pode ser entendido ao observar que as linhas de campo terminam na placa, em vez de continuarem até alcançar $-q$, como seria esperado.

Assim, a energia será dividida pela metade, resultando em:

$$E = \frac{kq^2}{4d}$$

Agora surgem as perguntas: Por que isso funciona? E quais são as condições para funcionar? Bem, a justificativa para o funcionamento do método das imagens está no chamado **Teorema da Unicidade**. Ele decorre diretamente da Equação de Poisson e, por isso, raramente vemos demonstrações dele, já que são consideravelmente difíceis. Vamos prová-lo no apêndice, mas, por enquanto, aceite que a Equação de Poisson possui solução única. Com isso, podemos argumentar que, se encontrarmos uma situação que satisfaça as condições de contorno para o potencial, essa será a única solução do problema. No exemplo anterior, a diferença entre as situações estava nas linhas de campo que ultrapassam a placa. Ajustando isso, encontramos a única configuração equivalente, conforme esperado pelo Teorema da Unicidade.

Contudo, não é garantido que a situação equivalente sempre exista. O método das imagens só pode ser aplicado em situações de alta simetria; caso contrário, surgirão problemas. Para utilizá-lo corretamente, devemos seguir:

1. Cada carga imagem possui uma carga oposta à carga da qual foi espelhada.
2. Linhas de campo jamais devem aparecer dentro dos condutores; caso contrário, eles não seriam condutores. Por isso, deve-se corrigir a energia.
3. Nenhuma carga imagem pode estar na região ocupada pela carga original (todo o espaço fora dos condutores, onde existem linhas de campo). Caso isso aconteça, o método das imagens não pode ser aplicado ao problema.

Vamos resolver um exemplo para testar essas condições:

Exemplo 5: Dois semi-planos (Kevin Zhou - Adaptada)

Dois semi-planos condutores aterrados se interceptam de modo que, em coordenadas cilíndricas, as equações que descrevem os planos são $\theta = 0$ e $\theta = \theta_p = \pi/2$. Uma carga q é colocada entre os planos. O método das imagens pode ser usado para encontrar a força sobre a carga? Como a mudança de θ_p afeta os resultados? Tente, por exemplo, $\theta_p = 2\pi/3$.

Solução 5

Podemos resolver o primeiro caso com três cargas-imagem. Suponha que a carga q esteja em (x, y) . Então, podemos refletir no plano $\theta = 0$, adicionando uma carga $-q$ em $(x, -y)$ para satisfazer sua condição de contorno. Em seguida, podemos refletir tanto a carga real quanto essa carga-imagem no plano $\theta = \pi/2$ para satisfazer a condição de contorno desse plano, adicionando uma carga $-q$ em $(-x, y)$ e uma carga q em

(x, y) . Ou seja, o que basicamente fizemos foi "refletir" as cargas sobre os planos condutores, como se fossem espelhos, lembrando sempre de trocar o sinal da carga. Usaremos, então, a mesma técnica para tentar generalizar o resultado.

Sendo agora $\theta_p = 2\pi/3$, podemos repetir o processo, mas chegamos em um problema: uma das refletidas acaba parando na região da carga real. Como vimos anteriormente, isso significa que o método das imagens não pode ser aplicado nessa situação.

Vamos então provar o porquê do método só funcionar para $\theta_p = \pi/n$, com n inteiro. Se o ângulo for dessa forma, podemos criar uma circunferência com origem na interseção dos planos e desenhar um polígono regular circunscrito de n lados dentro dela. Assim, a região real à qual pertence a partícula será feita por um triângulo de abertura $\theta_p = \pi/n$ com respeito à origem. Desenhando outros triângulos da mesma forma, percebe-se que o polígono pode ser dividido em n triângulos desse tipo. Extendendo as superfícies e fazendo as reflexões da mesma maneira que fizemos anteriormente, temos os resultados esperados.

Um exemplo muito conhecido de aplicação do método das imagens é o da esfera aterrada:

Exemplo 6: O caso da esfera aterrada

Uma carga q está a uma distância d do centro de uma esfera de raio R . Encontre:

- A posição e a carga da carga imagem.
- A força sofrida pela carga caso a esfera tivesse um potencial elétrico V_0 , ao invés de estar aterrada.

Solução 6

(a) Para encontrar as características da carga imagem em uma esfera aterrada, deve-se somar os potenciais da carga real e da imagem na superfície da esfera e igualar a 0, considerando os pontos que pertencem ao eixo que liga o centro da esfera e a carga:

$$\frac{Kq}{d-R} + \frac{Kq'}{d-x} = 0$$

$$\frac{Kq}{d+R} + \frac{Kq'}{d+x} = 0$$

Resolvendo esse sistema de equações, encontra-se:

$$x = \frac{R^2}{d}$$

$$q' = -\frac{R}{d}q$$

(b) Para o caso da esfera com potencial V_0 , o procedimento será o mesmo, com a diferença de igualar os potenciais a V_0 :

$$\frac{Kq}{d-R} + \frac{Kq'}{d-x} = V_0$$

$$\frac{Kq}{d+R} + \frac{Kq'}{d+x} = V_0$$

Que resolvendo o sistema de equações, encontra-se:

$$x = \frac{R^2}{d - \frac{V_0}{Kq}(d^2 - R^2)}$$

$$q' = qR \left(1 - \frac{R}{d - \frac{V_0}{Kq}(d^2 - R^2)} \right) \left(\frac{V_0}{Kq} - \frac{1}{d-R} \right)$$

Então, a força sofrida pela carga será:

$$F = \frac{Kqq'}{(d-x)^2}$$

$$F = \frac{Kq^2R \left(1 - \frac{R}{d - \frac{V_0}{Kq}(d^2 - R^2)} \right) \left(\frac{V_0}{Kq} - \frac{1}{d-R} \right)}{\left(d - \frac{R^2}{d - \frac{V_0}{Kq}(d^2 - R^2)} \right)^2}$$

5 O que é um capacitor?

5.1 Definindo capacitância

Considere dois corpos metálicos genéricos como na Figura [1], inicialmente neutros. Então, um agente externo (como uma corrente elétrica) começa a transferir cargas de um corpo para o outro, fazendo com que um corpo fique negativamente carregado enquanto o outro acumula carga positiva. Como consequência, surge uma resistência a essa transferência, pois os corpos buscam se manter neutros. Isso faz com que o agente externo precise realizar trabalho para que a transferência de cargas aconteça. Suponha

que, no final do processo, um corpo acumulou uma carga $+Q$, enquanto o outro ficou com uma carga $-Q$.

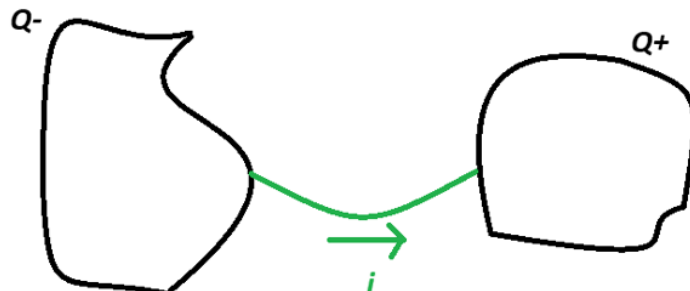


Figura 1: Representação da transferência de carga entre corpos metálicos.

No final do processo, será gerada uma diferença de potencial entre os corpos devido à diferença de cargas. Vamos chamar de V a diferença de potencial. A ddp desse sistema deve ser proporcional à carga acumulada nos corpos:

$$V \equiv \frac{Q}{C} \quad (5.1)$$

em que $\frac{1}{C}$ é uma constante de proporcionalidade que relaciona a carga Q e a ddp V . O termo C é chamado de *capacitância do sistema*.

Perceba que uma capacitância alta implica que é possível acumular mais carga gerando uma menor diferença de potencial. Assim, a capacitância descreve a *capacidade do sistema de armazenar carga*. Como veremos adiante, ela depende exclusivamente dos *fatores geométricos* dos corpos.

5.2 Definição de capacitor

Um capacitor é um componente eletrônico que armazena energia, constituído por dois condutores separados por um material isolante. Quando uma diferença de potencial (ddp) é aplicada ao sistema, carga elétrica se acumula nas placas.

A quantidade de carga que um capacitor pode armazenar é proporcional à sua capacitância, medida em *farads* (F). A principal função de um capacitor é armazenar e liberar energia de maneira controlada em circuitos elétricos.

5.3 Calculando alguns casos clássicos

Agora que possuímos o embasamento teórico, é hora de observar alguns casos para entender como é, de fato, calculada a capacitância de um sistema.

Exemplo 7: Capacitor de placas paralelas

Considere duas placas metálicas paralelas de área A , separadas por uma distância d . Elas estão sujeitas a uma diferença de cargas $+Q$ e $-Q$. Encontre a capacitância desse sistema (considere que as dimensões de cada placa são muito maiores que a distância de separação d).

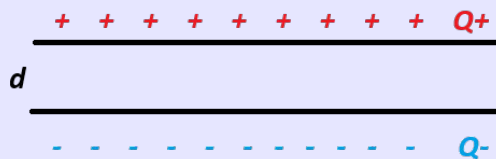


Figura 2: Capacitor de placas paralelas

Solução 7: Capacitor de placas paralelas

Observe que as cargas em cada placa geram um campo elétrico. Para simplificar o cálculo desse campo, podemos considerar que, como d é muito pequena em relação ao tamanho das placas, o campo entre as placas é uniforme e perpendicular às superfícies.

Usando a lei de Gauss para calcular o campo elétrico entre as placas, temos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

$$EA_{\text{gaussiana}} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \therefore E = \frac{Q}{\epsilon_0 A}$$

O potencial elétrico é dado por:

$$V = Ed = \frac{Q}{\epsilon_0 A} d$$

Como $C = \frac{Q}{V}$, encontramos:

$$\boxed{C = \frac{\epsilon_0 A}{d}} \quad (5.2)$$

Exemplo 8: Capacitor esférico

Considere um condutor esférico de carga $+Q$ envolto por outro condutor esférico de carga $-Q$, tal que r_1 é o raio da esfera interna e r_2 é o raio da esfera externa.

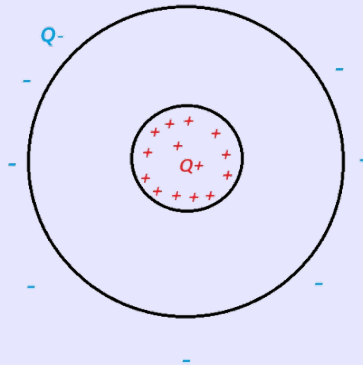


Figura 3: Capacitor esférico

Calcule a capacitância desse sistema, sabendo que as duas esferas são concêntricas.

Solução 8: Capacitor esférico

Usando a lei de Gauss, considere uma superfície esférica de raio r entre as esferas. Temos:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \therefore E 4\pi r^2 = \frac{Q}{\epsilon_0} \therefore E = \frac{Q}{4\pi r^2 \epsilon_0}$$

O potencial elétrico gerado é:

$$V = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r^2} dr = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0} \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} \right)$$

Utilizando a definição de capacitância $C = \frac{Q}{V}$, encontramos:

$$C = \frac{4\pi\epsilon_0 r_1 r_2}{r_2 - r_1} \quad (5.3)$$

Exemplo 9: Capacitor cilíndrico

Considere duas armaduras cilíndricas concêntricas, uma interna carregada com carga $+Q$ e a outra externa com carga $-Q$. O raio interno é r_1 , o externo é r_2 , e o comprimento dos cilindros é L .

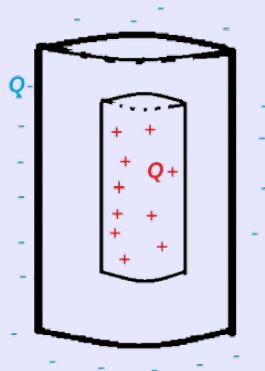


Figura 4: Capacitor cilíndrico

Considere que os cilindros são muito longos ($L \rightarrow \infty$). Calcule a capacitância C do sistema.

Solução 9: Capacitor cilíndrico

Devido à simetria cilíndrica, usamos uma gaussiana cilíndrica de raio r e comprimento L . Assim, pela lei de Gauss:

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \therefore E 2\pi r L = \frac{Q}{\epsilon_0} \therefore E = \frac{Q}{2\pi r L \epsilon_0}$$

O potencial elétrico é:

$$V = \int_{r_1}^{r_2} E dr = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \int_{r_1}^{r_2} \frac{1}{r} dr = \frac{Q}{2\pi L \epsilon_0} \ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)$$

Finalmente, aplicando $C = \frac{Q}{V}$, temos:

$$C = \frac{2\pi L \epsilon_0}{\ln \left(\frac{r_2}{r_1} \right)} \quad (5.4)$$

5.4 Energia armazenada em um capacitor

Vimos anteriormente que o capacitor armazena energia elétrica em forma de campo elétrico. O que faremos agora é calcular quantitativamente essa energia armazenada.

Por conservação de energia, a energia armazenada deve ser igual ao trabalho necessário para carregar o capacitor. O trabalho realizado no capacitor para carregá-lo até uma carga Q é o trabalho de levar os elétrons da placa positiva até a negativa, indo contra o campo elétrico que puxa os elétrons de volta para o condutor positivo. Suponha que, durante o processo de carregamento, a placa positiva tenha uma carga q . Vamos analisar o trabalho necessário dW para deslocar a próxima carga dq :

$$dW = V dq = \frac{q}{C} dq$$

O trabalho total para carregar o capacitor de $q = 0$ até $q = Q$ é:

$$W = \int_0^Q dW = \frac{1}{C} \int_0^Q q dq = \frac{1}{2} \frac{Q^2}{C}$$

Como $Q = CV$, substituímos e obtemos:

$$\boxed{W = \frac{1}{2} CV^2} \quad (5.5)$$

5.5 Associação de capacitores

A associação de capacitores refere-se à combinação de dois ou mais capacitores em um circuito para obter uma capacitância equivalente. Assim como em outros componentes eletrônicos, existem duas formas principais de associação: *em série* e *em paralelo*. Vamos calcular as capacitâncias equivalentes em cada caso.

Capacitores em série

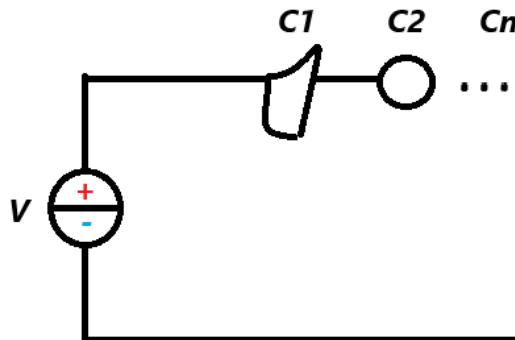


Figura 5: Capacitores em série

Nos capacitores conectados em série, a carga é a mesma em todos os capacitores, ou seja, $Q = Q_1 = Q_2 = \dots = Q_n$. Além disso, pela Lei de Kirchhoff das Tensões:

$$V = V_1 + V_2 + \dots + V_n$$

Como $V = \frac{Q}{C}$, temos:

$$\frac{Q}{C} = \frac{Q}{C_1} + \frac{Q}{C_2} + \cdots + \frac{Q}{C_n}$$

Dividindo ambos os lados por Q , obtemos a capacitância equivalente:

$$\boxed{\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} + \cdots + \frac{1}{C_n}} \quad (5.6)$$

Esta relação é análoga à associação de resistores em paralelo.

Capacitores em paralelo

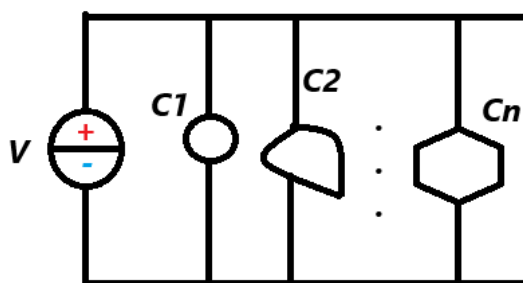


Figura 6: Capacitores em paralelo.

Nos capacitores conectados em paralelo, a tensão (V) é a mesma em todos os capacitores, ou seja, $V = V_1 = V_2 = \cdots = V_n$. Já a carga total é a soma das cargas individuais:

$$Q = Q_1 + Q_2 + \cdots + Q_n$$

Como $Q = CV$, temos:

$$CV = C_1V + C_2V + \cdots + C_nV$$

Dividindo ambos os lados por V , obtemos a capacitância equivalente:

$$\boxed{C_{\text{eq}} = C_1 + C_2 + \cdots + C_n} \quad (5.7)$$

Apêndice A: Solução da Equação de Laplace

Equação de Poisson e Laplace

Vimos anteriormente que:

$$\nabla^2 V = \frac{\rho}{\epsilon_0}$$

Essa é a chamada equação de Poisson no caso eletrostático, mas ela pode assumir um caráter mais geral. Qualquer equação do tipo $\nabla^2 V = \sigma(x)$ é uma equação de Poisson. Caso $\rho = 0$, temos que $\nabla^2 V = 0$, que é a chamada equação de Laplace.

Solução da equação de Laplace em 1 e 2 dimensões

1 dimensão

O caso mais simples da equação de Laplace seria o unidimensional. Nele, o operador laplaciano se reduz a $\frac{d^2}{dx^2}$:

$$\boxed{\frac{d^2 V}{dx^2} = 0} \quad (.8)$$

A partir daí, é fácil perceber que o potencial $V(x)$ deve ser da forma $V(x) = ax + b$. Diferente dos casos em dimensões maiores, como veremos mais adiante, não é necessário condições de contorno para resolver a equação aqui, apenas dois pontos que servem como condições iniciais para descobrir as constantes arbitrárias a e b .

Uma propriedade importante desta equação é que o valor de $V(x)$ em um ponto é igual à média aritmética de dois pontos equidistantes, ou, em outras palavras:

$$V(x) = \frac{1}{2}(V(x-a) + V(x+a))$$

Essa propriedade também revela um caráter muito importante da equação de Laplace: ela não aceita máximos e mínimos locais! Essa propriedade fica bem evidente no caso unidimensional, como vimos, mas ela é verdadeira em 3 e 2 dimensões também.

2 dimensões

Em duas dimensões, temos a seguinte equação de Laplace:

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = 0} \quad (.9)$$

Diferente do caso unidimensional, esta já não é uma equação ordinária, pois precisamos não apenas de condições iniciais, mas também de condições de contorno para resolvê-la. O teorema dos pontos equidistantes continua válido neste caso. Porém, em duas dimensões, os pontos equidistantes a outro ponto formam uma circunferência.

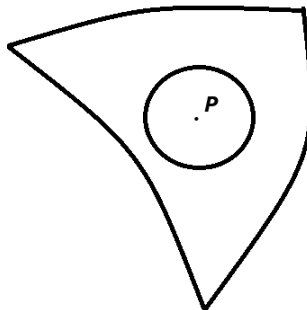


Figura 7: Superfície qualquer

O potencial $V(p)$ é, então, a soma de todos os pontos equidistantes, dividido pelo comprimento da circunferência, ou seja:

$$V(p) = \frac{1}{2\pi R} \oint V dl$$

Vamos inicialmente resolver a equação de Laplace em coordenadas retangulares. Para isso, aplicamos o método de separação de variáveis. Suponha que $V(x, y)$ possa ser escrito como o produto de duas funções, uma que depende apenas de x e a outra que depende apenas de y : $V(x, y) = X(x)Y(y)$.

Observação: Dizer que $V = X(x)Y(y)$ é uma hipótese um pouco idealista, que pode excluir algumas soluções possíveis. No entanto, ela é amplamente utilizada na física, pois as soluções encontradas apresentam certos tipos de simetria, o que pode ser muito útil em problemas, diferentemente de uma solução mais geral.

Substituindo essa forma na equação de Laplace, temos:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 (XY)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 (XY)}{\partial y^2} = Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

Como as derivadas das funções em relação às variáveis das quais elas não dependem são nulas, temos:

$$Y \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + X \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = 0$$

Dividindo ambos os lados por XY e isolando os termos com X , obtemos:

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2}$$

Como o lado esquerdo depende apenas de x e o lado direito apenas de y , deduzimos que ambos os lados devem ser iguais a uma constante, que vamos chamar de $-k^2$. Assim, obtemos um sistema de equações para X e Y . Começemos resolvendo para X :

$$\frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} = -k^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{X} \frac{\partial^2 X}{\partial x^2} + k^2 = 0$$

Essa é uma equação característica de um movimento harmônico simples (MHS), e a solução geral é dada por:

$$X(x) = A \cos(kx) + B \sin(kx)$$

Para Y , temos:

$$-\frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} = -k^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{Y} \frac{\partial^2 Y}{\partial y^2} + k^2 = 0$$

A solução geral dessa equação é:

$$Y(y) = C \cosh(ky) + D \sinh(ky)$$

Portanto, para $k \neq 0$, a solução geral para o potencial $V(x, y)$ é:

$$\boxed{V(x, y) = (A \cos(kx) + B \sin(kx))(C \cosh(ky) + D \sinh(ky))} \quad (.10)$$

Agora, para a equação de Laplace em coordenadas polares, temos:

$$\frac{\partial^2 V}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial V}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} = 0$$

Assumindo uma solução da forma $V(r, \theta) = R(r)\Theta(\theta)$, substituímos essa forma na equação de Laplace:

$$\frac{d^2 R}{dr^2} \Theta + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} \Theta + \frac{R(r)}{r^2} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} = 0$$

Dividindo ambos os lados por $R(r)\Theta(\theta)$, obtemos:

$$\frac{1}{R(r)} \frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{1}{R(r)} \frac{dR}{dr} = -\frac{1}{r^2 \Theta} \frac{d^2 \Theta}{d\theta^2}$$

Como os dois lados da equação dependem apenas de r e θ , ambos devem ser iguais a uma constante, que vamos chamar de $-k^2$. Assim, obtemos duas equações diferenciais separadas:

Para Θ , temos:

$$\frac{d^2 \Theta}{d\theta^2} + k^2 \Theta = 0$$

A solução geral para Θ é:

$$\Theta(\theta) = A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta)$$

Para R , temos:

$$r^2 \frac{d^2 R}{dr^2} + r \frac{dR}{dr} + k^2 R = 0$$

A solução para $R(r)$ tem a forma de funções de potência:

$$R(r) = Cr^n + Dr^{-n}$$

Finalmente, a solução geral para a equação de Laplace em coordenadas polares é dada por:

$$V(r, \theta) = (Cr^n + Dr^{-n}) (A \cos(n\theta) + B \sin(n\theta))$$

onde A , B , C e D são constantes determinadas pelas condições de contorno do problema.

5 Problemas

Questão 1.***(PPP 193) Dois pósitrons estão em cantos opostos de um quadrado de lado a . Os outros dois cantos do quadrado são ocupados por prótons. Todas as partículas possuem carga q , e a massa do próton M é muito maior que a massa do pósitron m . Encontre as velocidades aproximadas das partículas após um longo período de tempo.

Questão 2.*(PPP 114) Uma pequena esfera positivamente carregada de massa m está suspensa por um fio isolante de massa desprezível. Outra pequena esfera positivamente carregada é movida muito lentamente de uma grande distância até alcançar a posição original da primeira esfera. Como resultado, a primeira esfera se eleva uma altura h . Qual foi o trabalho realizado?

Questão 3.**(PPP 71) Duas pequenas esferas deslizam sem atrito, cada uma em uma das duas longas hastes paralelas fixas horizontais, separadas por uma distância d . As massas das esferas são m e M , e elas possuem cargas q e Q . Inicialmente, a esfera de maior massa M está em repouso, enquanto a outra está muito distante, aproximando-se com uma velocidade v_0 . Para quais valores de v_0 a esfera menor ultrapassa a esfera maior à direita?

Questão 4.**(Kevin Zhou) Um plano condutor infinito aterrado em $z = 0$ é deformado com uma protuberância hemisférica de raio R centrada na origem, como mostrado. Uma carga q é colocada em $z = a$, conforme ilustrado. O método das imagens pode ser usado

para encontrar o potencial na região com a carga? Em caso afirmativo, especifique as cargas-imagem; caso contrário, explique por quê.

Questão 5.***(Purcell 3.50) Uma carga pontual q está localizada a uma distância $b > r$ do centro de uma casca esférica condutora não aterrada de raio r , que também possui carga q . Quando b está próximo de r , a carga é atraída pela casca porque ela induz uma carga negativa; quando b é grande, a carga claramente é repelida. Encontre o valor de b para que a carga pontual esteja em equilíbrio. (Dica: você terá que resolver uma equação polinomial difícil. Você pode usar o fato de que ela contém um fator de $1 - x - x^2$.)

Questão 6.*(Purcell 3.21) Considere um capacitor formado por quatro placas paralelas de grande área A , igualmente espaçadas com uma pequena separação s . A primeira e a terceira placas estão conectadas por um fio, assim como a segunda e a quarta. Qual é a capacitância do sistema?

Questão 7.**(MPPP 152) Quatro esferas metálicas idênticas e não tocantes estão posicionadas nos vértices de um tetraedro regular, como mostrado. Uma carga $4q$ dada à esfera A eleva seu potencial a V . A esfera A também pode ser elevada ao potencial V se ela e uma das outras esferas forem carregadas com $3q$ cada. Qual deve ser o valor das cargas iguais dadas a A e a duas outras esferas para que o potencial de A seja novamente elevado a V ? E se as quatro esferas forem utilizadas?

Questão 8.*(Kevin Zhou) A energia total também pode ser encontrada integrando a densidade de energia do campo elétrico, $U = \frac{\epsilon_0}{2} \int E^2 dV$.

(a) Mostre que isso concorda com $U = \frac{CV^2}{2}$ para um capacitor de placas paralelas.

(b) Mostre que isso concorda com $U = \frac{CV^2}{2}$ para um capacitor formado por esferas concêntricas.

Questão 9.*(Purcell 3.26) Um capacitor de placas paralelas consiste em uma placa fixa e uma placa móvel que pode deslizar na direção paralela às placas. Seja x a distância de sobreposição. A separação entre as placas é fixa. Seja $C(x)$ a capacitância.

(a) Assuma que as placas estão eletricamente isoladas, de modo que suas cargas $\pm Q$ são constantes. Diferenciando a energia, encontre a força para a esquerda na placa móvel em termos de Q e $C(x)$.

(b) Agora, suponha que as placas estejam conectadas a uma bateria, de modo que a diferença de potencial ϕ seja mantida constante. Encontre a força para a esquerda na placa móvel, em termos de ϕ e $C(x)$.

(c) Se a placa móvel for mantida no lugar, as duas respostas acima devem ser iguais, pois nada está se movendo. Verifique se este é o caso, sendo cuidadoso com os sinais.

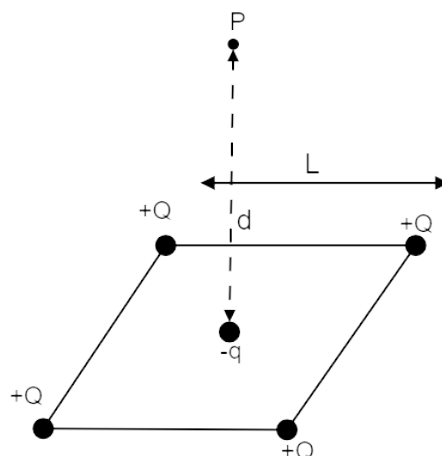
(d) Em termos de campos elétricos, por que há uma força na placa móvel? O efeito invocado na resposta desta parte altera as conclusões das partes (a) a (c) de alguma forma?

Questão 10.**(Purcell 3.9) Uma casca esférica condutora possui carga Q e raio R_1 . Uma casca esférica condutora maior e concêntrica possui carga $-Q$ e raio R_2 .

- (a) Se a casca externa for aterrada, explique por que nada acontece com a carga nela.
- (b) Se, em vez disso, a casca interna for aterrada, por exemplo, conectando-a ao solo por um fio muito fino que passa por um pequeno furo na casca externa, encontre sua carga final.
- (c) Não é tão claro por que a carga sairia da casca interna na parte (b), pensando em termos de forças. Um pequeno pedaço de carga positiva certamente desejará pular para o fio e seguir o campo elétrico através do espaço até a casca maior. Mas, quando chega à casca maior, parece que não há motivo para continuar indo até o infinito, pois o campo é zero do lado de fora. E, pior ainda, o campo apontará para dentro assim que alguma carga positiva tiver se afastado das cascas. Portanto, parece que o campo irá arrastar de volta qualquer carga positiva que tenha saído. A carga realmente deixa a casca interna? Em caso afirmativo, o que há de errado com o raciocínio acima?

Questão 11. ** Duas pequenas esferas de metal (puntiformes), de massas m e cargas $+q$ cada estão mantidas encostadas na superfície interna de um anel de raio r e massa $4m$ feito de acrílico. Todo o conjunto está inicialmente em repouso sobre um plano horizontal liso, com as esferas separadas pela distância r . Sendo k a constante eletrostática do meio, determine a velocidade máxima atingida pelo anel, após as esferas serem liberadas.

Questão 12. * (OBF/2001) Um quadrado de lado L tem uma carga puntiforme $+Q$ fixa em cada um de seus vértices, como indicado na figura a seguir. No centro O do quadrado é fixada uma carga puntiforme $-q$. O ponto P , localizado ao longo do eixo perpendicular ao plano do quadrado e que passa pelo seu centro, dista d do ponto O . Considere que todo o sistema se encontra no vácuo e que a constante eletrostática do vácuo é denotada por K .



Calcule o valor da carga localizada no centro para que o campo elétrico resultante em P seja nulo.

Questão 13. ** (IME 1979) Esquemáticamente, uma campainha, A e B são condutores esféricos, com diâmetros de 20cm e 4 cm, respectivamente. B é suspenso de P por um fio isolante. A placa metálica C é ligada à Terra.

- A esfera A, carregada inicialmente a um potencial de 50 kV, atrai B que, após o contato, é repelida e se choca com a placa C, descarregando-se.
- A operação se repete enquanto o potencial de A for superior a 25 kV.

Determine o número de vezes que B baterá em A.

Questão 14. Sistema Massa-Mola-Massa **

Um sistema massa-mola-massa composto por 2 esferas metálicas de carga Q e massa m , e por uma mola de constante elástica k_m , comprimento L , inicialmente não alongada. O sistema é mantido em equilíbrio pela ação de um fio de nylon não elástico, preso às esferas. Rompendo-se este fio, qual a distância máxima entre as esferas ? (Dados: $k_m = 1 \text{ N/m}$; $L = 1 \text{ m}$; $Q = 10 \mu\text{C}$; $K = 1 \cdot 10^{10}$ (ct. eletrostática))

Questão 15. Pósitron em Esfera Condutora **

Um pósitron (p^+) é lançado a partir de uma distância d com uma velocidade inicial v_0 , em direção ao centro de uma esfera condutora de raio R carregada positivamente com carga $+Q$. A esfera é dotada de um furo diametral.

Determine a velocidade inicial mínima que possibilita ao pósitron atravessar a esfera.

- Despreze o campo gravitacional.
- Considere a esfera fixa.

Questão 16. Diferença de Potencial em Superfície Cônica ***

Uma superfície cônica (um cone de sorvete vazio) tem uma densidade de carga uniforme σ . A altura do cone é h , assim como o raio do topo.

Encontre a diferença de potencial entre os pontos a (o vértice) e b (o centro do topo).

Questão 17. ** Encontre o potencial a uma distância s de um fio reto infinitamente longo que possui uma densidade linear de carga uniforme λ . Calcule o gradiente do potencial e verifique se ele fornece o campo correto.

Questão 18. ** O potencial elétrico de uma determinada configuração é dado pela expressão:

$$V(r) = \frac{Ae^{-\lambda r}}{r}$$

onde A e λ são constantes. Encontre o campo elétrico $\mathbf{E}(r)$ e a densidade de carga $\rho(r)$.

Questão 19. Potencial e Campo Elétrico em Cilindro Sólido Uniformemente Carregado ****

Encontre o potencial no eixo de um cilindro sólido uniformemente carregado, a uma distância z do centro. O comprimento do cilindro é L , seu raio é R , e a densidade de carga é ρ . Use o resultado para calcular o campo elétrico nesse ponto. (Considere que $z > L/2$)

Questão 20. Potencial de Casca Esférica Uniformemente Carregada *

Encontre o potencial de uma casca esférica uniformemente carregada de raio R e carga total Q .

6 Gabarito

$$1. v_1 = \sqrt{\frac{kq^2(4 + 1/\sqrt{2})}{am}} v + 2\sqrt{\frac{kq^2}{\sqrt{2}am}}$$

$$2. W = 3mgh$$

$$3. v_m = \sqrt{\frac{2kQq(M + m)}{Mmd}}$$

4. Pode ser feito com três cargas-imagem, todas no eixo z :

- Uma carga $-q$ em $z = -a$.
- Uma carga $-\frac{qR}{a}$ em $z = \frac{R^2}{a}$.
- Uma carga $\frac{qR}{a}$ em $z = -\frac{R^2}{a}$.

$$5. b = \frac{(1 + \sqrt{5})r}{2}$$

$$6. C = \frac{3A\epsilon_0}{s}$$

7. $12q/5$ e $2q$, respectivamente.

8. Demonstração

$$9. a) F = \frac{Q^2}{2C} \frac{dC}{dx}$$

$$b) F = \frac{\phi^2}{2} \frac{dC}{dx} r$$

c) Demonstração

d) A força é devida aos campos de borda, já que o campo não associado às bordas é perfeitamente vertical. Assim, conseguimos calcular o efeito dos campos de borda usando energia, mesmo tendo ignorado completamente os campos de borda no cálculo da energia! Este é mais um exemplo de como as leis de conservação podem fornecer informações que seriam muito difíceis de obter de outra forma.

10.

- (a) O potencial na casca externa devido a ela mesma é dado por

$$-\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2},$$

e o potencial devido à casca interna é

$$\frac{Q}{4\pi\epsilon_0 R_2}.$$

Assim, o potencial total é zero. Portanto, a casca externa já está efetivamente aterrada.

(b) $Q' = \frac{R_1 Q}{R_2}.$

- (c) O erro principal é que as cargas positivas também são repelidas pelas cargas que estão atrás delas no fio. Assim, eventualmente, o campo devido às cascas pode até mesmo se tornar interno; há uma linha inteira de cargas positivas atrás de uma dada carga que a empurra para frente.

Outra forma de dizer isso é que um fio tem capacitância desprezível; como um tubo fino de metal cheio de água, ele não pode armazenar carga líquida extra, mas apenas deixar a carga se mover rigidamente por todo o sistema. É energeticamente favorável que isso aconteça, então, mesmo que algumas cargas não queiram se mover para frente, suas vizinhas irão empurrá-las para frente.

11. $v = \frac{q}{2} \sqrt{\frac{k}{3mr}}$

12. $q = 4Q \left(\frac{d}{\sqrt{d^2 + \frac{L^2}{2}}} \right)^3$

13. $N = 4$ vezes

14. $d = 2m$

15. $v = \sqrt{\frac{2KQd}{Rd} \left(\frac{d-r}{m} \right)}$

16. $V = \frac{\sigma h}{2\epsilon_0} [1 - \ln(\sqrt{2} + 1)]$

17. $V = \lambda \frac{4\pi\epsilon_0}{\lim_{x \rightarrow \infty} [\ln(x + \sqrt{x^2 + s^2}) - x + \sqrt{x^2 + s^2}]}$

18. $\mathbf{E} = Ae^{-\lambda r} \left(\frac{\lambda}{r} + \frac{1}{r^2} \right) \hat{r}, \quad \rho = \epsilon_0 A \left(4\pi\delta^3(\mathbf{r}) - \lambda^2 \frac{e^{-\lambda r}}{r} \right),$

$$19. V = \frac{\rho}{4\epsilon_0} \left\{ (z + \frac{L}{2}) \sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2} - (z - \frac{L}{2}) \sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2} + R^2 \ln \left[\frac{z + \frac{L}{2} + \sqrt{R^2 + (z + \frac{L}{2})^2}}{z - \frac{L}{2} + \sqrt{R^2 + (z - \frac{L}{2})^2}} \right] - 2zL \right\}.$$

$$20. V = \frac{q}{4\epsilon_0 \pi r}$$

Referências

1. PURCELL, E. M. *Electricity and Magnetism*. 3. ed. New York: McGraw-Hill, 2013.
2. GRIFFITHS, David J. *Introduction to Electrodynamics*. 4. ed. Boston: Pearson Education, 2017.
3. REIF, F. *Puzzling Physics Problems: With Hints and Solutions*. Dover Publications, 2008.
4. REIF, F. *200 More Puzzling Physics Problems: With Hints and Solutions*. Dover Publications, 2013.
5. HALLIDAY, David; RESNICK, Robert; WALKER, Jearl. *Fundamentos de Física - Volume 2*. 10. ed. Rio de Janeiro: LTC, 2014.
6. DAUM, Kleber. *Teoria do Eletromagnetismo - Volume 1*. São Paulo: Editora Blucher, 2007.