Olympic Birds

Física

Matemática para Eletrostática

Autores: Tiago Rocha, Lucas Cavalcante e Pedro Saldanha

Olympic Birds

Matemática para Eletrostática

Física

Sumário

1 Introdução

Esse material destina-se a estudantes que queiram se aventurar nos conteúdos de eletricidade e eletromagnetismo em alto nível. O que vamos abordar aqui será a matemática usada para estudar esse conteúdos em nível parecido ao cobrado nas provas que selecionam os melhores alunos do país para participar das olimpíadas internacionais de física. Apesar dessas provas serem direcionadas para alunos do Ensino Médio, elas abordam diversos conteúdos universitários e o que vamos estudar nesse material é um deles. Então, esse material também pode ser bem útil para estudantes universitários que ainda não tiveram contato com esse formalismo. Ademais, é importante ressaltar que aqui não vamos apresentar apenas a matemática usada para estudar esses conteúdos, como vamos trazer exemplos e problemas aplicados em eletrostática. Na primeira parte desse material, vamos estudar a obtenção do campo elétrico por meio de integração, a partir de uma certa distribuição de cargas, um conhecimento fundamental na eletromagnetismo. Na segunda parte, vamos estudar apresentar o operador nabla e seus usos na eletrostática. Na terceira parte, comentaremos a "função"delta de Dirac, utilizada para descrever um comportamento bem interessante visto dentro desse conteúdo. Além disso, no final do material contaremos com diversas questões para você já treinar os conhecimentos adquiridos, todas com gabarito. Aproveite bem o material!

2 Campo elétrico por integração

Quando começamos nossos estudos em eletrostática, nós normalmente aprendemos a seguinte expressão para o campo elétrico:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{kq}{r^2} = \frac{q}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{2.1}$$

O que definitivamente não está errada, já que ela deriva diretamente da Lei de Coulomb. Contudo, quando vamos calcular o campo elétrico gerado por um corpo com várias cargas, devemos utilizar o chamado princípio da superposição, que afirma:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \sum_{i=1}^{n} E_i \tag{2.2}$$

Contudo, fazer essa soma nem sempre é uma tarefa fácil. Para distribuições contínuas de carga, realizar essa conta por meio do somatório se torna algo quase impossível. Logo, para corpos contínuos, devemos transformar o somatório da interação de diversas partículas em uma integral (uma soma contínua). Ou seja, o campo elétrico pode ser escrito como:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int_V \frac{\rho(\mathbf{r'})(\mathbf{r} - \mathbf{r'})}{|\mathbf{r} - \mathbf{r'}|^3} dV' \tag{2.3}$$

Aonde $\rho(\mathbf{r'})$ é a densidade volumétrica de carga do corpo em função da sua posição e **r-r'** é o vetor deslocamento que localiza a carga. No geral, escolhemos um sistema de coordenadas aonde r=0, para assim a expressão ser simplificada como:

$$\mathbf{E(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(\mathrm{r'})d\mathrm{V'}\hat{\mathbf{r'}}}{\mathrm{r'}^2} \tag{2.4}$$

Aonde usamos a definição de vetor unitário:

$$\hat{\mathbf{r}} = \frac{\mathbf{r}}{|\mathbf{r}|} \tag{2.5}$$

Entretanto, o uso de ' foi feito apenas para trazer um formalismo envolvendo os vetores posição e deslocamento. Na prática, usamos essa equação da seguinte forma:

$$\boxed{\mathbf{E(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_V \frac{\rho(r)dV\hat{r}}{r^2}} \tag{2.6}$$

Essa expressão é bem geral e, usada da maneira correta, sempre deve te fornecer o resultado esperado. Contudo, em alguns momentos vale mais a pena escrever essa expressão em função da densidade superficial de carga, σ, em problemas nos quais apenas duas dimensões do objeto carregado são relevantes:

$$\boxed{\mathbf{E(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_A \frac{\sigma(r)dA\hat{r}}{r^2}} \tag{2.7}$$

Analogamente, o campo elétrico pode ser escrito como:

$$\boxed{\mathbf{E(r)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_L \frac{\lambda(r)dl\hat{r}}{r^2}} \tag{2.8}$$

Onde λ é a densidade linear de carga do corpo, para corpos onde apenas uma dimensão é relevante. Contudo, na maioria dos problemas, tais densidades são constantes, o que pode ajudar muito no momento de resolver a integral.

Ao resolver um problema com essas expressões, acredito que devemos passar pelos seguintes passos:

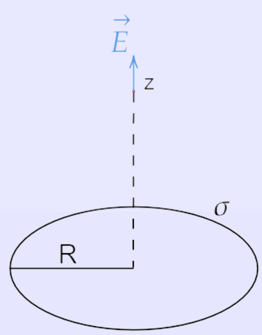
Passos para Resolver o Problema:

1. **Encontrar uma forma de modelar o problema:** isso é algo meio subjetivo, porém é como se fosse para você encontrar a melhor técnica para começar a resolver o problema. Esse passo vem antes mesmo de você usar as expressões acima, visto que há várias expressões pelas quais você pode modelar o campo (veremos elas depois, é claro).
2. **Escrever os elementos de dx, dA ou dV:** Esse passo não é tão fácil quanto parece. Há diversas maneiras de você modelar esses elementos, usando diferentes raciocínios e ideias. Dependendo da forma como você modelar a situação, as integrais podem ficar mais fáceis ou mais difíceis, então é bem importante prestar atenção nessa parte.
3. **Escrever a distância de separação:** De novo, esse é um passo que parece simples, mas dependendo da forma como você o fizer, o problema pode ficar mais fácil.
4. **Resolver as integrais:** Como eu disse, esse passo pode ser facilitado dependendo da forma como você realiza os dois primeiros passos. Contudo, em muitos problemas, você inevitavelmente pode cair em integrais mais complicadas. Assim, a situação vira um problema matemático: você deve usar de sua criatividade e das técnicas que conhece para auxiliar na solução da integral.

Vejamos um exemplo para ilustrar esses conceitos.

Exemplo 1: Campo de um disco

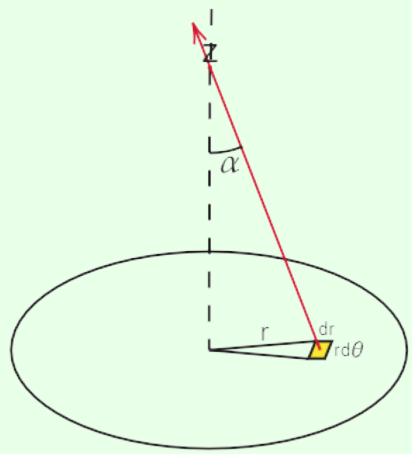
Considere um disco com densidade superficial σ e raio R. Calcule o campo elétrico em um ponto a uma distância z acima do centro do disco. Encontre o campo elétrico para os limites z $\ll$ R e z $\gg$ R.



Solução

(i) **Técnica de resolução:** Vamos obter o campo elétrico a partir da expressão $\mathbf{E}(\mathbf{r})$. Porém, por simetria, deve existir campo apenas na direção z. Por isso, vamos somar apenas as componentes verticais do campo (aparecerá um termo $\cos\theta$ na integral).

(ii) **Elemento de área:** Vamos escrever o elemento de área como um produto de $rd\theta$ (comprimento de um arco) com dr. Veja a figura a seguir para observar melhor.



(iii) **Distância de separação:** Vamos escrever l^2 como z^2+r^2. Perceba que eu poderia escrever em função do seno ou cosseno do ângulo, mas não farei isso para facilitar a integral.

(iv) **Cálculos:** Façamos as contas:

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\epsilon_0}\int \frac{rdrd\theta\cos\alpha}{z^2+r^2} = \frac{\sigma z}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} d\theta \int_0^r \frac{r}{(z^2+r^2)^{3/2}}\,dr \qquad (2.9)$$

Aonde substituimos $\cos\alpha = \dfrac{z}{\sqrt{z^2+r^2}}$. Agora, devemos usar a técnica de substituição de variáveis para resolver a última integral:

$$u = z^2+r^2 \rightarrow du = 2rdr \rightarrow rdr = \frac{du}{2} \qquad (2.10)$$

Substituindo então na integral:

$$E = \frac{\sigma z 2\pi}{4\pi\epsilon_0\cdot 2}\int_{u_0}^{u_f}\frac{1}{u^{3/2}}\,du = \frac{\sigma z}{4\epsilon_0}\cdot\left(\frac{2}{\sqrt{u_0}} - \frac{2}{\sqrt{u_f}}\right) \qquad (2.11)$$

Porém, lembrando da definição de u mostrada (10), percebe-se que $u_0 = z^2$ e $u_f = z^2 + R^2$. Logo, o campo elétrico pode ser escrito como:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) \hat{\mathbf{z}}} \tag{2.12}$$

Por último, devemos testar os limites pedidos. Caso z seja muito menor do que R, o segundo termo que está dentro do parentes vai poder ser desprezado, já que o seu denominador será muito maior do que o do primeiro termo. Logo, o campo será:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \hat{\mathbf{z}}} \tag{2.13}$$

Ou seja, o mesmo campo de uma carga sobre uma placa infinita carrega com densidade superficial σ! Esse era um resultado esperado, já que, como z≪R, o disco, na perspectiva da carga, seria praticamente uma placa infinita. Logo, conseguimos demonstrar o campo de uma placa infinita por um caminho diferente!
Contudo, podemos ainda testar o limite z≫R:

$$E = \frac{\sigma z}{2\epsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \left(1 - \left(1 + \frac{R^2}{z^2}\right)^{-\frac{1}{2}}\right) \tag{2.14}$$

Aqui, vale a pena usar a aproximação binomial $(1 + x)^n = 1 + nx$, para x≪1:

$$E = \frac{\sigma}{2\epsilon_0} \cdot \left(1 - 1 + \frac{R^2}{2z^2}\right) = \frac{\sigma R^2}{4\epsilon_0 z^2} \tag{2.15}$$

Contudo, podemos dizer que $\sigma = \dfrac{Q}{\pi R^2}$, aonde Q é a carga do disco, já que essa é a definição de σ. Logo, colocando o resultado em função de Q:

$$\boxed{\mathbf{E} = \frac{Q}{4\pi\epsilon z^2} \hat{\mathbf{z}}} \tag{2.16}$$

Ou seja, o campo gerado por uma carga pontual! Esse resultado também era esperado, já que, como z≫R, as dimensões do disco não devem mais importar para o cálculo do campo, mas sim apenas a sua carga. Logo, podemos tratar o disco como se fosse uma carga pontual! Novamente, conseguimos provar um resultado intuitivo por meio de cálculos mais complexos.
Mais questões nesse estilo estarão disponíveis na nossa seção de problemas.

3 O operador nabla

O operador ∇ (nabla) é um recurso que estará presente em quase todos os aprofundamentos deste livro devido à sua importância no estudo do eletromagnetismo. Por isso, é fundamental estudá-lo bem. O operador nabla é definido como:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}} \tag{3.1}$$

Apesar de ter componentes, ele não é um vetor, pois não consegue existir sozinho. Contudo, por ter componentes, podemos tratá-lo informalmente como um vetor para fazer nossas contas. Como operador, ele deve ser aplicado a um número ou a um vetor. Dependendo de como for aplicada, essa operação terá diferentes nomes. Sendo assim, nós chamamos o gradiente de um escalar A a seguinte operação:

$$\nabla A = \text{Gradiente do escalar A} \tag{3.2}$$

Perceba que, como o gradiente possui componentes, o grad A é, sem dúvida, um vetor. Em outras palavras, o gradiente transforma um escalar em um vetor. Mas... o que essa quantidade significa fisicamente?

Ao aplicarmos o operador nabla em um escalar A, o vetor resultante terá as coordenadas:

$$\nabla A = \frac{\partial A}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial A}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial A}{\partial z}\hat{k}$$

Esse resultado pode ser utilizado para descrever uma variação infinitesimal de uma função qualquer A:

$$dA = \frac{\partial A}{\partial x}dx + \frac{\partial A}{\partial y}dy + \frac{\partial A}{\partial z}dz = \nabla A \cdot (dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k})$$

Note que a expressão $dx\hat{i} + dy\hat{j} + dz\hat{k}$ representa um infinitesimal de caminho, dl, ou seja, um deslocamento em qualquer direção. Assim, podemos reescrever a variação da função A como:

$$dA = |\nabla A||dl|\cos\theta$$

Aqui, θ é o ângulo entre o deslocamento dl e o gradiente de A. Se considerarmos um deslocamento unitário, ou seja, $|dl| = 1$, a maior variação de A ocorre quando $\theta = 0°$. Portanto, o vetor ∇A aponta na direção do maior aumento da função A.

Além disso, podemos trazer aqui já uma aplicação dessa operação na eletrostática. Iremos explicar melhor isso em um material futuro, mas podemos calcular o potencial elétrico(uma grandeza escalar) e depois o campo através das seguintes equações:

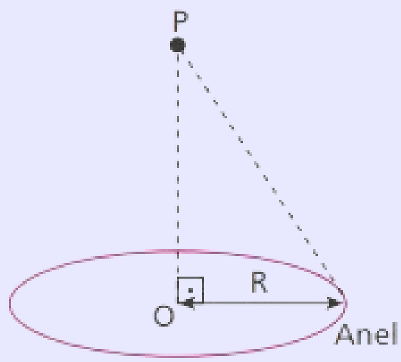
$$\boxed{V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\rho(\vec{r'})}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}d\tau} \tag{3.3}$$

$$\boxed{\vec{E} = -\nabla V} \tag{3.4}$$

Vamos interpretar as implicações físicas da equação que obtemos. O campo elétrico(um vetor) está sendo relacionado com o potencial elétrico (um escalar) por meio do gradiente. Isso é muito útil para descobrir o campo elétrico, pois em geral é mais fácil trabalhar com escalares (no caso o potencial elétrico) do que com vetores. Tendo em mãos o potencial elétrico, basta utilizarmos do gradiente para extrair o campo elétrico. Façamos um exemplo sobre isso:

Exemplo 2: Campo de um anel

Calcule o campo elétrico de anel carregado com densideade linear de carga λ e raio R em um ponto localizado em uma altura z dentro do eixo de simetria. Faça isso por meio das equações 3.3 e 3.4.



Solução

(i) **Técnica de resolução:** Inicialmente vamos calcular o potencial elétrico, utilizando a forma integral, e, em seguida, extrair o campo elétrico aplicando o gradiente na expressão do potencial que iremos encontrar

(ii) **Calculando o potencial:** o potencial elétrico vai ser da forma:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int\frac{\lambda}{\left|\vec{r}-\vec{r'}\right|}dl \tag{3.5}$$

$\vec{r}$ e $\vec{r'}$ vão ser:

$$\vec{r'} = Rcos\theta\hat{i} + Rsen\theta\hat{j} \tag{3.6}$$

$$\vec{r} = z\hat{k} \tag{3.7}$$

então:

$$\left|\vec{r} - \vec{r'}\right| = \sqrt{z^2 + Rcos^2\theta \ + Rsen^2\theta} = \sqrt{z^2 + R^2} \tag{3.8}$$

Um comprimento de arco de circunferencia vai ser igual ao raio da mesma vezes o ângulo que abrange a mesma em radianos (l = Rθ) então um segmento infinetessimal dl vai ser obtido pelo raio R vezes um elemento infitessimal de angulo dθ (dl = Rdθ). Por fim, o potencial é:

$$V = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\int_0^{2\pi} \frac{\lambda}{\sqrt{z^2 + R^2}} Rd\theta = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{R\lambda}{\sqrt{z^2 + R^2}}2\pi = \boxed{\frac{\lambda}{2\epsilon_0}\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}} \tag{3.9}$$

(iii) **Calculando o campo elétrico:** Para obter o campo elétrico, basta aplicar o gradiente ($\vec{E}$ = -∇V)

$$\vec{E} = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{x}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{y}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{z}}\right)\left(\frac{\lambda}{2\epsilon_0}\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}\right) = -\frac{\lambda}{2\epsilon_0}\frac{\partial}{\partial z}\frac{R}{\sqrt{z^2 + R^2}}\hat{z} \tag{3.10}$$

Finalmete:

$$\boxed{\vec{E} = \frac{\lambda}{2\epsilon_0}\frac{Rz}{(z^2 + R^2)^{\frac{3}{2}}}} \tag{3.11}$$

Voltando às operações, chamamos a seguinte operação de tirar o divergente de **A**:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \text{Divergente do vetor } \mathbf{A} \tag{3.12}$$

Perceba que estamos diante de um produto escalar, que é possível por causa do comportamento do nabla. Se definirmos $A = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}$, podemos expandir esse resultado:

$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\frac{\partial}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) \cdot \left(A = A_x\hat{\mathbf{i}} + A_y\hat{\mathbf{j}} + A_z\hat{\mathbf{k}}\right) \tag{3.13}$$

O que, utilizando as propriedades de um produto vetorial, o resultado será a soma dos produtos escalares vindos da multiplicação termo a termo. Assim, o produto escalar vindo de componentes perpendiculares deve zerar, já que o valor do cosseno do ângulo que separa os vetores é nulo(equação 3.15). Logo, o resultado final será:

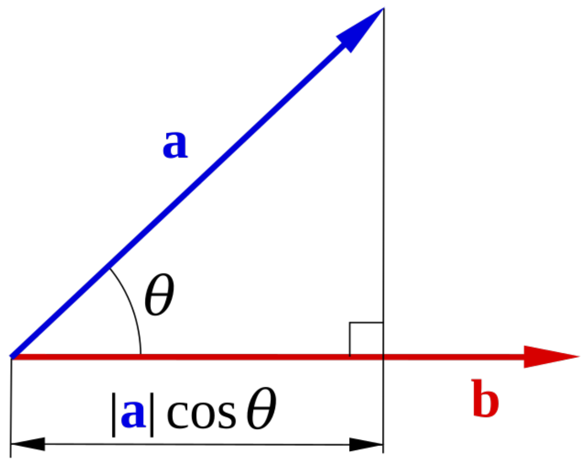
$$\nabla \cdot \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_x}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial A_y}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial A_z}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}\right) \tag{3.14}$$

Ou seja, o divergente causa uma derivada parcial em cada compontente de um vetor com respeito à própria coordenada da componente. Esse resultado é bem importante e vale a pena ser guardado.

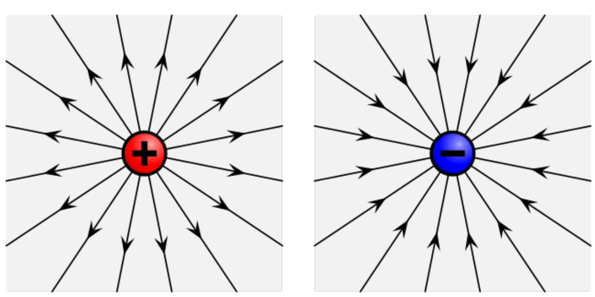
Além disso, outra forma de escrevermos um produto escalar é como:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|cos\theta \tag{3.15}$$

Aonde θ é o ângulo se separação entre os vetores $\mathbf{A}$ e $\mathbf{B}$. Colocando isso em uma figura:



Ou seja, o divergente realiza seus cálculos apenas com as **partes radiais de cada vetor**. Seu nome vem por um motivo muito interessante. Quando pensamos em divergente, normalmente nos vêm à mente funções radiais. Portanto, funções que dependem de uma distância r e apontam na direção de $\hat{r}$. Essas não são as únicas funções que respeitam o fato de que o divergente é diferente de 0, mas elas possuem grande significado físico (além de possuírem $\nabla \times A = 0$, como veremos). Sendo assim, vamos pensar em uma carga Q isolada no vácuo. Como vimos neste capítulo, o campo elétrico deve ser radial, então o desenho das linhas de campo será:



Contudo, perceba: pelo dicionário, vemos que divergir significa algo próximo de "afastar, espalhar". Isso é exatamente o que vemos no desenho! Ou seja, o divergente mede quantitativamente o quanto uma fonte diverge, algo que vimos aqui qualitativamente.

Entretanto, ainda existe mais uma operação para explorarmos. Ela é o rotacional de A:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \text{Rotacional do vetor } \mathbf{A} \tag{3.16}$$

Assim, vale a pena trazer o resultado de um produto vetorial:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

Aonde $\hat{i}$, $\hat{j}$ e $\hat{k}$ são os vetores unitários nas direções x,y e z, respectivamente. Além disso, a_x, a_y e a_z são as componentes do vetor **a** nas direções x,y e z (o mesmo vale para **b** e suas componentes). Perceba que o resultado do produto vetorial é o determinante dessa matriz. Desenvolvendo o determinante de uma matriz 3 por 3, chegamos ao resultado:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = (a_y b_z - a_z b_y)\hat{\mathbf{i}} + (a_z b_x - a_x b_z)\hat{\mathbf{j}} + (a_x b_y - a_y b_x)\hat{\mathbf{k}}$$

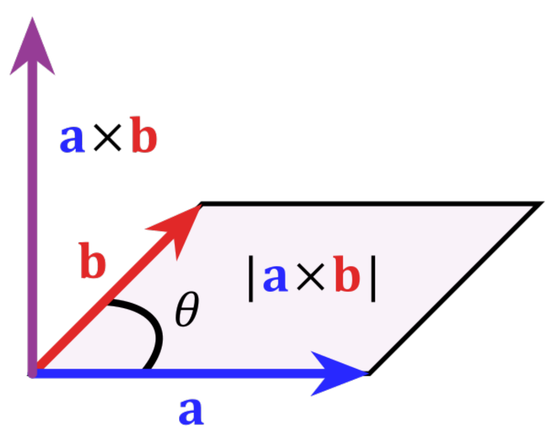
Aplicando isso para o rotacional de um vetor **A**:

$$\nabla \times \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Uma expressão também bem importante. Além disso, para uma interpretação melhor, podemos escrever a expressão do módulo de um produto vetorial:

$$|\mathbf{A} \times \mathbf{B}| = |\mathbf{A}||\mathbf{B}|sen\theta \tag{3.17}$$

Aonde θ é o ângulo de separação entre os dois vetores. Colocando isso em uma figura:



Por isso o nome “rotacional”, já que o seu resultado usa apenas componentes tangenciais ao ”raio”. Ou seja, o rotacional mede o quanto um vetor rotaciona de forma perpendicular à direção radial. Logo, forças centrais, como a força elétrica, possuem rotacional nulo (já que apontam sempre radialmente).

Agora que conhecemos as operações, vamos descobrir algumas propriedades importantes:

- O rotacional de um gradiente é sempre nulo. Isso é fácil de visualizar considerando que uma operação resulta em componentes radiais e a outra se utiliza de componentes tangenciais. Porém, você pode fazer a conta para verificar, se quiser.
- O divergente de um rotacional é sempre nulo. Vistos os conceitos que trouxemos nesse capítulo, isso já era esperado, já que o rotacional se utiliza de componentes ”tangenciais”enquanto o divergente se utiliza de componentes ”radiais”. Contudo, aqui você também pode fazer a conta para verificar.

Além disso, também podemos desenvolver mais um uso para o nabla. Ele é o laplaciano, que definimos como:

$$\nabla \cdot (\nabla A) = \nabla^2 A = \text{Laplaciano de um escalar A} \tag{3.18}$$

Que nada mais é um que uma combinação entre duas operações anteriormente mostradas. Por isso, não vale a pena detalharmos muito mais sobre ele. Porém, ele também possui grande importância, já que aparece em algumas equações bem fundamentais, algo que explicaremos no futuro.

Agora que conhecemos algumas aplicações do operador nabla, vale a pena ressaltar que existem expressões prontas sobre ele para diferentes sistemas de coordenadas. Elas geralmente não são demonstradas, pois causa do enorme trabalho exigido para fazer tal ação. Porém, é bem comum problemas te darem esses resultados e pedirem para você trabalhar com eles. Por isso, vamos mostrá-los:

4 Operadores em Diferentes Sistemas de Coordenadas

4.1 Coordenadas Cartesianas

Gradiente:

$$\nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}\hat{\mathbf{i}} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

Divergente:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_z}{\partial y} - \frac{\partial F_y}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial F_x}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial x}\right)\hat{\mathbf{j}} + \left(\frac{\partial F_y}{\partial x} - \frac{\partial F_x}{\partial y}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

4.2 Coordenadas Cilíndricas

Gradiente:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\hat{\mathbf{j}} + \frac{\partial \phi}{\partial z}\hat{\mathbf{k}}$$

Divergente:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r}\frac{\partial (rF_r)}{\partial r} + \frac{1}{r}\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

Rotacional:

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{1}{r}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\hat{\mathbf{i}} + \left(\frac{\partial F_r}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial r}\right)\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 F = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(r\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}$$

4.3 Coordenadas Esféricas

Gradiente:

$$\nabla \phi = \frac{\partial \phi}{\partial r}\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{r}\frac{\partial \phi}{\partial \theta}\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial \phi}{\partial \phi}\hat{\mathbf{k}}$$

Divergente:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial (r^2 F_r)}{\partial r} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial (\sin\theta F_\theta)}{\partial \theta} + \frac{1}{r\sin\theta}\frac{\partial F_\phi}{\partial \phi}$$

Rotacional:

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{r\sin\theta}\left(\frac{\partial (\sin\theta F_\phi)}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial \phi}\right)\hat{\mathbf{i}} + \frac{1}{r}\left(\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial F_r}{\partial \phi} - \frac{\partial (rF_\phi)}{\partial r}\right)\hat{\mathbf{j}} + \frac{1}{r}\left(\frac{\partial (rF_\theta)}{\partial r} - \frac{\partial F_r}{\partial \theta}\right)\hat{\mathbf{k}}$$

Laplaciano:

$$\nabla^2 F = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial F}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\theta}\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\sin\theta\frac{\partial F}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\frac{\partial^2 F}{\partial \phi^2}$$

Por último, vamos enunciar alguns teoremas envolvendo essas operações. Vai parecer algo tirado da cartola agora, mas com o tempo você vai vendo como esses resultados fazem sentido e descobre como visualizá-los. Contudo, normalmente não é necessário decorar esses teoremas, apenas vou enunciá-los para podermos demonstrar alguns resultados depois.

5 Teoremas Fundamentais

5.1 Teorema Fundamental do Gradiente

Seja ϕ uma função escalar suave, então o Teorema Fundamental do Gradiente afirma que:

$$\int_C \nabla\phi \cdot d\mathbf{r} = \phi(\mathbf{r}_B) - \phi(\mathbf{r}_A) \tag{5.1}$$

Aonde C é uma curva suave que conecta os pontos $\mathbf{r}_A$ e $\mathbf{r}_B$.

5.2 Teorema da Divergência (Teorema de Gauss)

Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial suave definido em um volume V com superfície fechada S, então o Teorema da Divergência (ou Teorema de Gauss) afirma que:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{F})\, dV = \oint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{A} \tag{5.2}$$

Aonde dV é o elemento de volume e $d\mathbf{A}$ é o vetor de área sobre a superfície S.

5.3 Teorema de Stokes (Teorema do Rotacional)

Seja $\mathbf{F}$ um campo vetorial suave definido em uma superfície S com borda C, então o Teorema de Stokes (ou Teorema do Rotacional) afirma que:

$$\oint_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{A} \tag{5.3}$$

Aonde $d\mathbf{r}$ é o elemento de comprimento ao longo de C e $d\mathbf{A}$ é o vetor de área sobre a superfície S.

Vamos testar a utilidade desses teoremas em um exemplo:

Exemplo 3: Lei de Gauss diferencial

Escreva a Lei de Gauss em função do divergente do campo(e da densidade de carga ρ) e depois do laplaciano do potencial, sabendo que ela pode ser escrita como:

$$\oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \tag{5.4}$$

Solução

Utilizando o teorema da divergência:

$$\int_V (\nabla \cdot \mathbf{E})\, dV = \oint_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{A} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} \tag{5.5}$$

Logo, usando a definição de densidade de carga, podemos escrever:

$$\boxed{\nabla \cdot \mathbf{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{5.6}$$

Além disso, usando que $E = -\nabla V$, podemos escrever:

$$\boxed{\nabla^2 V = -\frac{\rho}{\epsilon_0}} \tag{5.7}$$

6 O Delta de Dirac

A equação 5.6, encontrada no exemplo passado, é de extrema importância dentro do estudo de eletrostática. Contudo, em boa parte das questões, o campo elétrico depende apenas de $\hat{\mathrm{r}}/r^2$ (com os outros termos sendo constantes), o que faz saber o divergente dessa função um conhecimento importante. Vamos então calcularmos em um exemplo:

Exemplo 4: Um divergente estranho

Calcule o divergente da função $\hat{\mathrm{r}}/r^2$. Depois, calcule a integral em área de $\hat{\mathrm{r}}/r^2$(como a que aparece no teorema da divergência). Discuta o resultado.

Solução

Primeiramente, podemos escrever r em função das coordenadas x, y e z:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \tag{6.1}$$

Algo que também pode ser feito para o vetor unitário:

$$\hat{r} = \frac{x\hat{i} + y\hat{j} + z\hat{k}}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \tag{6.2}$$

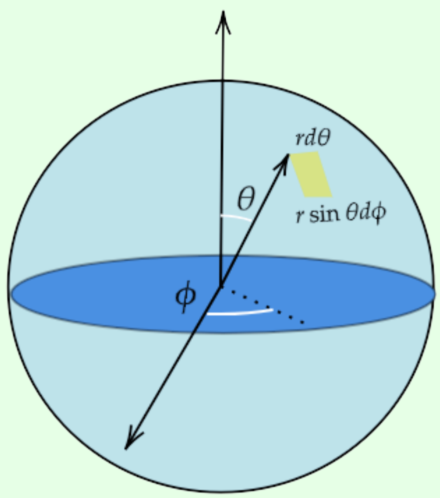
Com essas informações, você pode já calcular o divergente da função sem cálculo muito avançado. Porém, aproveitando o que aprendemos sobre os operadores em coordenadas esféricas, vamos mostrar uma solução mais curta, até para você poder poupar tempo durante exames. Lembrando o divergente em coordenadas esféricas, podemos escrever:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial(r^2 F_r)}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{r^2}{r^2}\right) = 0 \tag{6.3}$$

Agora, vamos atrás de calcular a integral pedida. Para isso, podemos escrever o elemento de área em coordenadas esféricas:

$$dA = r^2 sen\theta d\theta d\phi \tag{6.4}$$

Algo que pode ser um pouco complicado de enxergar. Aqui uma figura para facilitar:



Logo, substituindo na integral:

$$\oint_S \frac{\hat{\mathbf{r}}}{\mathbf{r^2}} \cdot d\mathbf{A} = \int_0^{\pi} sen\theta d\theta \int_0^{2\pi} d\phi = 4\pi \tag{6.5}$$

O que é algo que não esperavámos! Pelo Teorema da divergência, se o divergente dessa função é nulo, sua integral na área também deveria ser. Acontece que esquecemos um caso, que é no qual r=0. Nessa situação, o divergente dessa função tende ao infinito. Logo, temos um gráfico aonde em quase todas as posições y=0, com exceção da origem, aonde $y \to \infty$. E, como a temos acesso a integral dessa função, sabemos que a área abaixo do gráfico vale 4 π! Isso nos motiva a criar uma "função"chamada de **Delta de Dirac**, que vamos estudar nesse capítulo.

Agora que conhecemos o motivo por trás da criação do Delta de Dirac, vamos apresentá-lo. A "função"Delta de Dirac em uma dimensão é a que segue as seguintes propriedades:

$$\delta(x) = \begin{cases} 0, & \text{se } x \neq 0, \\ \infty, & \text{se } x = 0, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1 \end{cases}$$

A palavra "função"está colocada entre aspas por causa que o comportamento do Delta de Dirac é tão estranho que talvez o mais correto não seja chamá-lo de função. Contudo, vamos usar essa nomeclatura para facilitar a comunicação dentro do material.

Contudo, para generalizarmos para 3 dimensões, devemos multiplicar as funções de cada coordenada:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\delta(y)\delta(z)dxdydz = \int_{-\infty}^{\infty} \delta^3(r)dV = 1 \tag{6.6}$$

Aonde $\delta^3(r)$ é um Delta de Dirac generalizado para 3 dimensões(apenas em r=0 possui seu valor diferente de 0). Logo, combinando os resultados 5.2, 6.5 e 6.6, podemos finalmente escrever a divergência de $\frac{\hat{r}}{r^2}$ da maneira correta:

$$\boxed{\nabla \cdot \left(\frac{\hat{r}}{r^2}\right) = 4\pi\delta^3(r)} \tag{6.7}$$

O que era nossa maior motivação para estudar o Delta de Dirac. Agora, podemos calcular a divergência do campo com muita mais eficácia. Contudo, ainda falta discutirmos algo: qual o sentido física de tal resultado ser 0 em quase todos os pontos, menos na origem? Bem, se apenas existe carga na origem, a densidade de carga vai ser 0 em todos os pontos, com exceção da origem. Contudo, na origem, o volume pelo qual se está dividindo a carga é praticamente nulo, o que faz a densidade de carga ir para o infinito. Ou seja, lembrando da equação 5.6, percebe-se que o aparecimento do Delta de Dirac no divergente já era algo esperado!

7 Problemas

1. (Griffths) Encontre o campo elétrico a uma distância z acima do ponto central de um fio reto de comprimento $2L$ que possui uma densidade linear de carga λ.

Dado:

$$\int_a^b \frac{1}{(a^2 + x^2)^{\frac{3}{2}}}\, dx = \left.\frac{x}{a^2\sqrt{a^2 + x^2}}\right|_a^b$$

2. (Griffths) Agora, encontre o campo elétrico de um ponto que está a uma distância z acima de uma das extremidade de um fio reto de comprimento L e densidade linear de carga λ.

3. (Irodov) Uma carga pontual q está localizada no centro de um fino anel de raio R com uma carga $-q$ uniformemente distribuída. Encontre a intensidade do campo elétrico de um ponto que está no eixo do anel a uma distância x de seu centro. Qual o resultado para $x \gg R$?

4. (Griffths) Ache o campo elétrico a uma distância z a partir do centro de uma casca esférica de raio R que possui uma densidade superficial de carga σ. Faça os casos para $z < R$ (dentro da casca) e $z > R$ (fora da casca). Expresse sua resposta em função da carga total q da esfera.

Dado:

$$\int_0^\pi \frac{(z - R\cos x)\sin x}{(R^2 + z^2 - 2Rz\cos x)^{\frac{3}{2}}}\,dx = \frac{(z-R)}{|z-R|} - \frac{(-z-R)}{|z+R|}$$

5. (Irodov) Um fino anel não condutor de raio R possui uma densidade linear de carga $\lambda = \lambda_0 \cos\theta$, onde λ_0 é uma constante e θ é a coordenada angular do sistema de coordenadas polares. Encontre o campo elétrico, considere um eixo de cooordenadas em que o θ é medido de acordo com a regra da mão direita a partir do sentido positivo do eixo y: (Dica: para resolver a integral $\int \cos^2 x$, utilize as expressões para arco metade)

a) no centro do anel;

b) no eixo do anel como uma função da distância x de seu centro.

6. (Irodov) Ache a intensidade do campo elétrico no centro de uma esfera de raio R com densidade superficial de carga $\sigma = \vec{a} \cdot \vec{r}$, onde $\vec{a}$ é um vetor constante e $\vec{r}$ é o raio vetor com origem no centro da esfera.

7. Calcule o resultado das seguintes expressões diferenciais, sabendo que $\vec{A} = x^3 y\hat{x} + y^2 z^4 \hat{y} + 4zx^3\hat{z}$:

a) $\nabla \cdot \vec{A}$

b) $\nabla \times \vec{A}$

c) $\nabla^2 \vec{A}$

8. (Griffths) Encontre o campo elétrico em um ponto a uma distância s de um fio reto infinito com uma densidade linear de carga λ, sabendo que potencial gerado pelo fio é $V = -\dfrac{1}{4\pi\epsilon_0} 2\lambda \ln \dfrac{s}{a}$, onde a é uma constante que representa a distância ao fio onde o potencial é nulo. [È interessante utilizar o gradiente em cooordenadas cilíndrivas]

9. (Griffths) Se o campo elétrico em uma região do espaço é dado (em coordenadas esféricas) pela expressão:

$$\vec{E} = \frac{k}{r}[3\,\hat{r} + 2\sin\theta\cos\theta\sin\phi\,\hat{\theta} + \sin\theta\cos\phi\,\hat{\phi}]$$

para uma constante k qualquer, qual a densidade de carga ? [È interessante utilizar o divergente em cooordenadas esféricas]

10. (Griffths) O potencial elétrico de uma certa configuração de cargas é dada pela expressão:

$$V = A\frac{e^{-\lambda r}}{r}$$

onde A e λ são constantes. Encontre o campo elétrico $\vec{E}$. [È interessante utilizar o gradiente em cooordenadas esféricas]

11. (Griffths) Resolva as seguintes integrais:

a) $\int_2^6 (3x^2 - 2x - 1)\delta(x-3)\,dx$

b) $\int_0^5 \cos(x)\delta(x-\pi)\,dx$

c) $\int_0^3 x^3\delta(x+1)\,dx$

d) $\int_{-\infty}^{\infty} \ln(x+3)\delta(x+2)\,dx$

12. (Griffths) Encontre a divergência da função:

$$\mathbf{V} = \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r}$$

Existe uma função delta na origem, assim como havia para $\dfrac{\hat{r}}{r^2}$? Qual é a fórmula geral para a divergência de $r^n\hat{\mathbf{r}}$?

13. ((Griffths) Encontre o rotacional de $r^n\hat{\mathbf{r}}$.

8 Gabarito

1. $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{2\lambda L}{z\sqrt{z^2+L^2}}\hat{z}$

2. $\vec{E} = \dfrac{1}{4\pi\epsilon_0}\dfrac{\lambda}{z}\left[\left(-1 + \dfrac{z}{\sqrt{z^2+L^2}}\right)\hat{x} + \left(\dfrac{L}{\sqrt{z^2+L^2}}\right)\hat{z}\right]$

3. $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\left(-\frac{qx}{(R^2+x^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{q}{x^2}\right)\hat{z}$, para $x \gg R$: $\vec{E} = \frac{3qR^2}{8\pi\epsilon_0 x^4}\hat{z}$

4. Para $z > R$, $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{4\pi R^2\sigma}{z^2}\hat{z}$; para $z < R$, $E = 0$

5. **a)** $\vec{E} = -\frac{\lambda_0}{4\epsilon_0 R}\hat{y}$

   b) $\vec{E} = -\frac{\lambda_0 R^2}{4\epsilon_0(x^2+R^2)^{\frac{3}{2}}}\hat{y}$

6. $\vec{E} = -\frac{\vec{a}r}{3\epsilon_0}$

7. **a)** $\nabla \cdot \vec{A} = 3x^2y + 2yz^4 + 4x^3$

   b) $\nabla \times \vec{A} = -4y^2z^3\hat{x} - 12zx^2\hat{y} - x^3\hat{z}$

   c) $\nabla^2\vec{A} = 6xy\hat{x} + (2z^4 + 12y^2z^2)\hat{y} + 24zx\hat{z}$

8. $\vec{E} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2\lambda}{s}\hat{s}$

9. $\rho = \frac{3k\epsilon_0}{r^2}(1 + \sin\phi\cos 2\theta)$

10. $\vec{E} = Ae^{-\lambda r}(1+\lambda r)\frac{\hat{r}}{r^2}$

11. **a)** 20

    b) -1

    c) 0

    d) 0

12. $\nabla \cdot \left(\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^n}\right) = (n+2)r^{n-1}$, a menos que $n = -2$, caso no qual a divergência é $4\pi\delta^3(\mathbf{r})$; para $n < -2$, a divergência é indefinida na origem.

13. $\nabla \times (r^n\hat{\mathbf{r}}) = \mathbf{0}$

9 Referências Bibliográficas

[1] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics.* 4ª ed., Pearson, 2013. ISBN: 9780321856562.

[2] David J. Griffiths. *Introduction to Electrodynamics.* 5ª ed., Cambridge University Press, 2023. ISBN: 9781108420419.

[3] I.E. Irodov. *Problems in General Physics.* Mir Publishers, 1981. ISBN: 5-03-000800-4.