1 Questão Curta: S'ana

Escrito por Heitor Chaves

O evento Sana 2025, que é focado no público geek e em cosplays de animes e desenhos animados, acontecerá em Fortaleza nos dias 24, 25 e 26 de janeiro. Considerando o referencial S (referencial da Terra), temos dois eventos: o primeiro ocorre em $t_0 = 0\ s$ e $x_0 = 0\ m$, enquanto o segundo ocorre em $t_f = 3,6 \cdot 10^{-6}\ s$ e $x_f = 4$ km. Nesse referencial, a velocidade é de $0,6c$ em relação a um referencial S'. Qual é a variação de espaço nesse referencial S'?

2 Questão Média: Capacitores dielétricos

Escrito por Tiago Rocha

Materiais dielétricos são aqueles que não podem ser aproximados como vácuo, ou seja, a permissividade desse meio é diferente de ϵ_0. Neste problema, vamos explorar os efeitos de materiais dielétricos em capacitores.

Considere um capacitor de placas paralelas localizado no vácuo, com carga Q, diferença de potencial V e campo elétrico E. Agora, suponha que ele seja preenchido por um material com permissividade relativa ϵ_r.

a) Encontre os novos valores para Q, V, E, a capacitância C e a energia armazenada W no capacitor.

b) Considere agora um capacitor esférico composto por partes de esferas concêntricas. Determine a diferença de potencial entre a superfície externa e o centro das esferas, considerando a mesma adição de material dielétrico. Use que o raio interno é a, o raio externo é b, a carga é Q, e expresse sua resposta também em função de ϵ_0.

c) Para um capacitor formado por partes de cilindros concêntricos muito longos, determine a diferença de potencial entre a superfície externa e o centro dos cilindros, considerando a mesma adição de material dielétrico. Use que o raio interno é a, o raio externo é b, a densidade linear de carga é λ, e expresse sua resposta também em função de ϵ_0.

3 Questão Longa: Óptica Diferente

Escrito por Lucas Cavalcante

No decorrer desta questão, será apresentada uma ferramenta extremamente útil para a ótica geométrica, especialmente quando se tem dificuldades com geometria ou ao lidar com sistemas mais complexos formados pela associação de vários sistemas óticos simples, como lentes e espelhos dispostos em sequência: a ótica matricial. Com essa abordagem, será possível resolver esses tipos de problemas por meio de um produto entre matrizes que relacionam o ângulo e a altura de incidência com o ângulo e a altura que a luz terá ao sair do sistema.

Este problema é dividido em três partes: **A**, **B** e **C**. A primeira parte aborda como representar os fenômenos principais da ótica por meio de matrizes, incluindo reflexão, refração e o deslocamento retilíneo da luz. Em seguida, trabalharemos com sistemas óticos mais simples, envolvendo lentes, formação de imagens em lentes e telescópios. Por fim, analisaremos sistemas óticos formados por superfícies circulares, deduzindo expressões para a reflexão em espelhos esféricos, dioptros esféricos e encontrando a equação dos fabricantes de lentes.

Caso encontre dificuldades para avançar no problema, consulte a solução no gabarito e tente resolver o restante da questão sem auxílio.

Parte A

a) Sabendo que, quando o ângulo entre a horizontal e uma reta está abaixo da horizontal, ele pode ser considerado negativo, e assumindo ângulos pequenos, encontre a expressão que relaciona a altura do feixe de luz logo antes de atingir um espelho plano e sua altura logo depois, bem como o ângulo que o raio de luz forma com a horizontal antes e após a reflexão.

b) Esse resultado pode ser expresso na forma de uma matriz como:

$$\begin{bmatrix} Y_e \\ \theta_e \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Y_i \\ \theta_i \end{bmatrix}$$

onde o índice e indica o raio de luz que sofre alteração pela reflexão, e o índice i indica o raio de luz incidente no espelho. A partir do resultado anterior, determine os termos M_{11}, M_{12}, M_{21} e M_{22}. Durante a resolução da questão, adote essa notação matricial para as expressões encontradas.

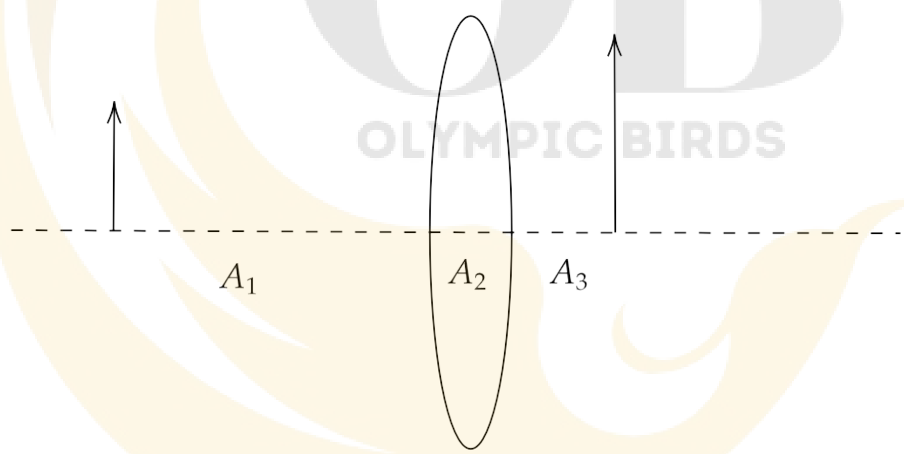
c) Mantendo as mesmas condições dos itens anteriores, considere agora o raio de luz atravessando o limite entre dois meios, saindo de um meio de índice de refração n_1 e indo para outro de índice n_2. Encontre a matriz que relaciona a altura e o ângulo do raio que atinge o limite com a altura e o ângulo do raio que atravessa esse limite.

d) Por fim, para esta parte da questão, determine a matriz que representa o estado do raio luminoso após percorrer uma distância horizontal d a partir do ponto inicial, ou seja, a matriz que, ao multiplicar a altura e ângulo iniciais, determina o ângulo e a altura após percorrer a distância d do ponto original.

Parte B

e) Agora analisaremos a matriz que representa a transformação ocasionada por um dos principais dispositivos óticos: as lentes. Existem duas formas principais de encontrar essa matriz. Uma envolve uma abordagem puramente matemática, sem o uso de conceitos físicos, e será apresentada na solução como complemento. A outra forma utiliza a equação de Gauss e conceitos de geometria, considerando ângulos pequenos. Utilizando este método, determine a matriz que representa a transformação sofrida pelo raio luminoso ao passar por uma lente de foco f.

f) A utilidade da ótica matricial torna-se mais evidente ao associar fenômenos que possuem representação matricial, como deslocamento, reflexão e lentes. A matriz resultante será o produto das matrizes de cada elemento, seguindo a ordem de multiplicação da esquerda para a direita, começando pelo primeiro sistema ótico que a luz atravessa até o último. Por exemplo, representando o caso de um objeto formando a imagem a partir de uma lente:



onde A_i representa a matriz que transforma o ângulo e a altura no trecho i. A matriz que representa a transformação de todo o processo é:

$$A_t = A_3 A_2 A_1$$

Dado esse resultado, qual é a matriz que representa o sistema ótico mostrado na imagem, considerando que a distância entre o objeto e a lente é d_1, entre a lente e a imagem é d_2, e o foco da lente é f?

g) A partir da matriz encontrada anteriormente, é possível deduzir alguns resultados físicos importantes. Sabendo que, para a formação da imagem, sua altura não pode depender do ângulo de incidência, o que podemos concluir sobre o termo

M_{12} da matriz? Além disso, qual o significado físico dos termos M_{11} e M_{22}, considerando o resultado encontrado para M_{12}?

h) Agora, utilizando o mesmo procedimento do item f, encontre a matriz que representa a transformação causada pelo raio luminoso ao passar por duas lentes, com focos f_1 e f_2, e que possuem uma distância d entre si. Qual é o foco equivalente desse sistema ótico?

Parte C

i) Nesta parte, vamos trabalhar com outros sistemas óticos importantes, derivando fórmulas famosas e analisando sistemas formados por superfícies circulares. Primeiro, determine a matriz para a reflexão em uma superfície circular de raio R.

j) Encontre agora a matriz para um dioptro esférico com raio R, na situação em que a luz passa de um meio com índice de refração n_1 para um meio com índice de refração n_2.

k) Com base na matriz para um dioptro esférico, determine a matriz para dois dioptros colados, formando uma lente com faces de raios R_1 e R_2. Considere que a luz passa de um meio com índice de refração n_1, atravessa a lente de índice n e depois passa para um meio de índice n_2. Qual é o foco equivalente desse sistema? Qual o resultado para $n_1 = n_2$?

l) Utilizando o mesmo procedimento do item f, mas agora com uma lente imersa em dois meios de índices de refração diferentes, qual o novo resultado obtido ao considerar que a altura do feixe não pode depender do ângulo de incidência? Expresse sua resposta em termos de f_{eq}, d_1, d_2, n_1 e n_2.