Olympic Birds

Física

Óptica Geométrica

Guilherme Martins, Gustavo Globig e Lucas Cavalcante

Olympic Birds

Óptica Geométrica

Sumário

1 Introdução

Esta coletânea, elaborada pela equipe de Física do Olympic Birds, reúne problemas de óptica geométrica cuidadosamente organizados em diferentes níveis de dificuldade, identificados pelo número de estrelas em cada questão, variando de * (mais fácil) a **** (mais difícil). Ao longo deste material, você será desafiado a explorar fenômenos fascinantes, como reflexão, refração e formação de imagens, mergulhando nos aspectos mais intrigantes dessa área da Física, que muitos consideram desafiadora, mas que também encanta aqueles que se dedicam a compreendê-la.

Para enriquecer sua compreensão e aprimorar suas habilidades na resolução de problemas de óptica geométrica, recomendamos as seguintes obras:

1. **Problems in General Physics** – I.E. Irodov
   Um clássico para quem busca problemas desafiadores. Inclui questões aprofundadas sobre óptica, ideais para preparação em competições.

2. **Understanding Physics for JEE Main & Advanced – Optics and Modern Physics** – D.C. Gupta
   Focado em alunos que se preparam para exames competitivos, este livro traz explicações claras e uma excelente seleção de problemas de óptica e física moderna.

3. **JEE Main Advanced - Problems and Solutions** – G.K. Publications
   Uma coletânea de problemas organizados por dificuldade, com foco em preparação avançada. A seção de óptica geométrica é especialmente útil para competidores.

4. **Fundamentals of Physics** – Halliday e Resnick
   Uma obra abrangente e acessível, com capítulos que cobrem os fundamentos de óptica, reflexões e refrações, acompanhados de exemplos resolvidos.

5. **Curso de Física Básica - Óptica** – Moyses Nussenzveig
   Uma referência indispensável para estudantes brasileiros, com explicações rigorosas e problemas desafiadores que exploram a física da luz de maneira detalhada.

6. **Russian Physics Olympiad Problems** – A.V. Saraeva
   Uma coletânea de problemas desenvolvidos para competições, trazendo ótimos desafios na área de óptica geométrica e física em geral.

Ao final do material, há uma seção de gabaritos para a conferência rápida das respostas, seguida por uma seção detalhada de soluções completas. Nessa última, cada problema é resolvido passo a passo, ajudando você a esclarecer dúvidas e a superar qualquer dificuldade encontrada.

Aceite este desafio e divirta-se desvendando os mistérios da óptica geométrica com problemas incríveis!

2 Problemas

2.1 Problema 1 - Dioptro Duplo ***

Na interface entre dois meios, sendo um deles o ar e o outro a água (índice de refração 4/3), um semicilindro de raio R e índice de refração $n > 4/3$ é posicionado de duas formas distintas: - Com toda a superfície plana coincidente com a interface, mas com o semicilindro completamente imerso no ar. - Com toda a superfície plana coincidente com a interface, mas com o semicilindro completamente imerso na água.

Sabendo que há raios de luz paralelos incidindo perpendicularmente à interface e que os raios atravessam primeiro o semicilindro antes de passar pela água, determine a distância da imagem formada pelos raios em relação à interface para ambos os casos.

2.2 Problema 2 - Imagem no Infinito *

Considere um prisma com base em um setor circular de $90°$, formado pela metade de um semicilindro de raio R e índice de refração $n > 1$, com uma de suas superfícies planas em contato com o chão. Determine a distância à qual um objeto deve estar deste prisma para que a segunda imagem formada esteja no infinito.

2.3 Problema 3 - Imagem de um Quadrado ***

Utilizando uma lente convergente, determine como seria formada a imagem de um quadrado posicionado à frente da lente.

2.4 Problema 4 - Redução de Intensidade **

Um feixe de luz paralelo com intensidade inicial I_0 atravessa uma caixa óptica de comprimento 24 cm. A caixa contém duas lentes alinhadas ao longo de seus eixos principais e localizadas em faces opostas de mesmo diâmetro. O feixe tem diâmetro muito menor que o das lentes, e todos os raios são paralelos ao eixo principal. Após atravessar a caixa, a intensidade do feixe é reduzida para um quarto de seu valor inicial. Determine as distâncias focais das lentes nos seguintes casos:

a) Ambas as lentes são convergentes.

b) Uma lente é convergente e a outra é divergente.

2.5 Problema 5 - Olho Idealizado **

Considere o olho de um peixe como uma esfera de raio R. A pupila atua como o instrumento óptico que gera a imagem, e o cristalino é representado como uma lente plano-convexa, com a face plana voltada para o interior do olho, separando a pupila do restante da estrutura ocular. Sabendo que o meio externo ao olho é água, com índice de refração 4/3, determine a relação entre os índices de refração do cristalino (n_c) e do humor vítreo (n_v) do peixe.

2.6 Problema 6 - Estrutura Indeterminada ****

Considere uma estrutura inteiramente refletiva, desprezando efeitos refrativos, com formato linear simétrico. Todos os raios incidentes na superfície são paralelos e convergem para um único foco após serem refletidos uma única vez. No plano XY, os raios antes de serem refletidos seguem a direção $-\hat{j}$. O único raio que passa pelo foco antes de ser refletido é refletido no ponto (x_0, y_0), que é o ponto mais baixo da estrutura em relação ao eixo Y. Determine o lugar geométrico da estrutura em função de X, Y, f, x_0 e y_0.

2.7 Problema 7 - Óptica Cinemática *

Considere um objeto pontual no plano XYZ, localizado na coordenada $(0, y_0, 0)$. O plano de um espelho, coincidente ao plano ZX, começa a rotacionar com velocidade angular constante ω no sentido $\hat{k}$ em torno do eixo Z.

Determine:

a) A velocidade da imagem gerada pelo espelho.

b) O lugar geométrico descrito pela imagem ao longo do tempo.

2.8 Problema 8 - Índice para Reflexão Interna (OBF 2015) **

Um raio luminoso incide em um bloco retangular feito de vidro, com índice de refração n_v, que está quase totalmente submerso em água, de índice de refração n_a.

a) Qual a condição para os índices de refração (água e vidro) para que possa haver reflexão interna total do feixe dentro do bloco de vidro?

b) Supondo que a condição do item a) seja satisfeita, determine o maior ângulo de incidência θ para que ocorra reflexão interna total na lateral esquerda do bloco de vidro (veja a figura abaixo). Considere o índice de refração do ar como 1, 0.

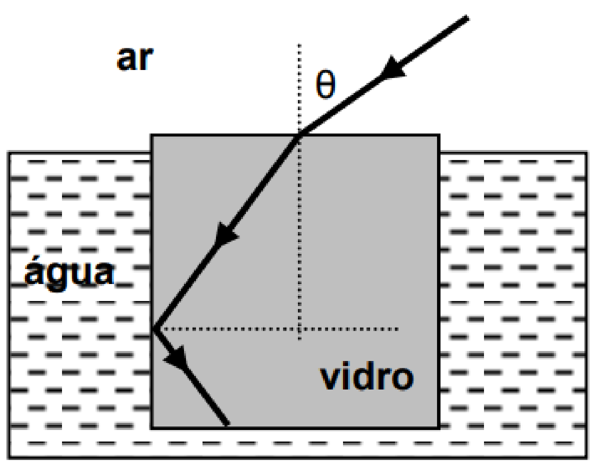


Figura 1: Imagem original da OBF.

2.9 Problema 9 - Caminhos Ópticos Iguais (Adaptado de OBF 2009) *

Dois caçadores estão em um labirinto formado por três espelhos, e cada um pode ver o outro através da geometria dos espelhos planos mostrada na figura abaixo.

Calcule o ângulo θ especificado na figura.

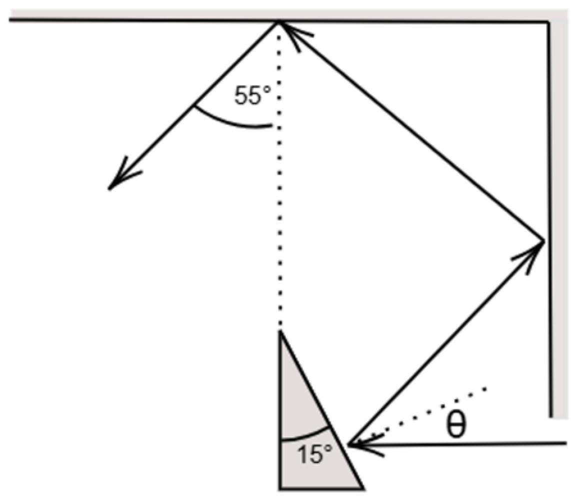


Figura 2: Imagem recriada e adaptada.

2.10 Problema 10 - Determinação de Índice de Refração (OBF 2009) *

Uma maneira simples de se determinar o índice de refração n de um líquido é utilizar o fenômeno da reflexão interna total, como mostra a figura abaixo.

Obtenha uma expressão para n em termos de l e h, onde um raio de luz origina-se no ponto A e é refletido totalmente no ponto B, conforme indicado na figura. Considere $1,0$ como o índice de refração do ar.

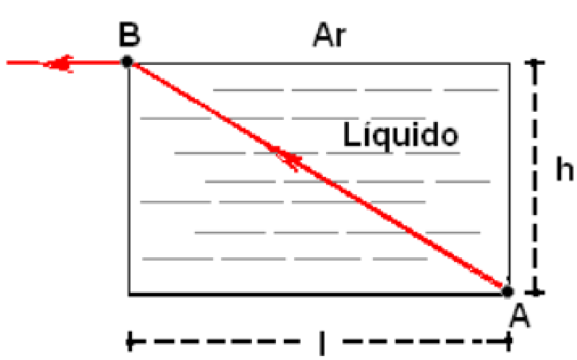


Figura 3: Imagem original da OBF.

2.11 Problema 11 - Relações da Óptica Geométrica (JEE Main Advanced) *

Uma radiação eletromagnética de frequência f, comprimento de onda λ, viajando com velocidade v no ar, entra em uma lâmina de vidro com índice de refração μ.

A frequência, o comprimento de onda e a velocidade da luz na lâmina de vidro serão, respectivamente:

a) $\frac{f}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{v}{\mu}$

b) $f, \frac{\lambda}{\mu}, \frac{v}{\mu}$

c) $n, \lambda, \frac{v}{\mu}$

d) $\frac{n}{\mu}, \frac{\lambda}{\mu}, v$

2.12 Problema 12 - Analisando Índices de Refração (JEE Main Advanced) *

Um raio de luz passa por quatro meios transparentes com índices de refração μ_1, μ_2, μ_3 e μ_4, conforme mostrado na figura.

As superfícies de todos os meios são paralelas. Se o raio emergente CD for paralelo ao raio incidente AB, devemos ter:

a) $\mu_1 = \mu_2$

b) $\mu_2 = \mu_3$

c) $\mu_3 = \mu_4$

d) $\mu_4 = \mu_1$

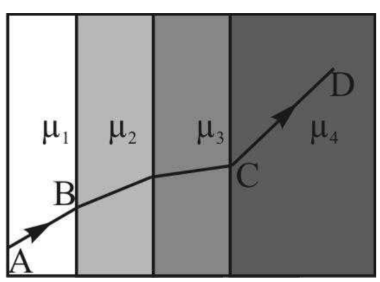


Figura 4: Imagem original de JEE Main Advanced.

2.13 Problema 13 - Velocidades na Óptica Geométrica (Adaptado de Gupta) ***

Um objeto O e um espelho M estão se movendo com as velocidades mostradas na figura abaixo.

Determine a velocidade da imagem do objeto no espelho.

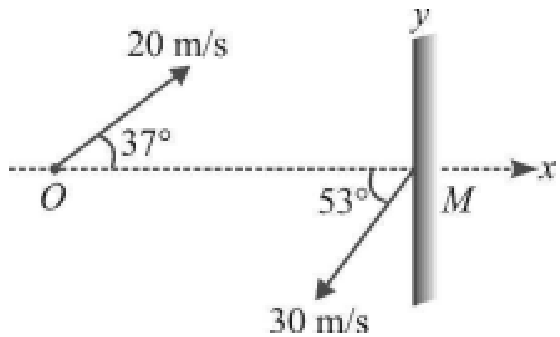


Figura 5: Imagem original de Gupta.

2.14 Problema 14 - Distância do Espelho (Adaptado de Gupta) *

Encontre a distância de um objeto a partir de um espelho côncavo com distância focal 10 cm, de forma que a imagem seja quatro vezes maior que o objeto.

2.15 Problema 15-Aumento de Caminho Óptico (Adaptado de Gupta)*

A luz passa por um meio cujo índice de refração é μ. Determine o aumento de caminho óptico causado por essa passagem, sabendo que a espessura do meio é t.

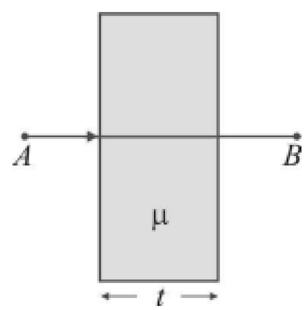


Figura 6: Imagem original de Gupta.

2.16 Problema 16 - Desenhos Geométricos **

Na imagem abaixo, está representada uma lente convergente biconvexa de foco f e um objeto à esquerda da lente (o retângulo vermelho). Utilizando os conceitos do caminho dos raios na óptica geométrica, desenhe e/ou obtenha:

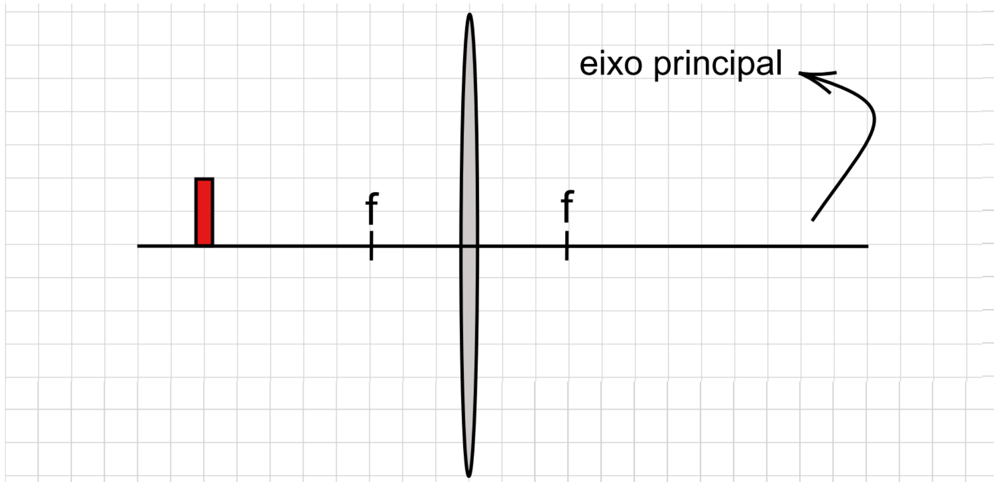


Figura 7: Representação geométrica com uma lente biconvexa e objeto.

a) o antiprincipal da lente.

b) o caminho dos raios de luz que saem do objeto.

c) onde é formada a imagem.

d) a altura da imagem e sua ampliação em relação ao objeto.

Observação: Antes de verificar o gabarito desta questão, realize a questão 17, pois ambas estão conectadas.

2.17 Problema 17 - Cálculos e Compatibilidade **

Levando em consideração a imagem da questão anterior, supondo que cada unidade no gráfico equivale a 1 cm, obtenha numericamente:

a) o antiprincipal da lente.

b) onde é formada a imagem.

c) a altura da imagem e sua ampliação em relação ao objeto.

Após completar esta 1ª parte, compare seus resultados com os obtidos na questão anterior. Verifique onde estão desenhados o antiprincipal, a imagem e seu tamanho, e confira as medidas (em centímetros) de cada um. Caso seus resultados não sejam compatíveis, revise o passo a passo da sua resolução e identifique possíveis erros. Após isso, consulte o gabarito para validar suas respostas.

2.18 Problema 18 - Lente Dupla (Adaptado de Gupta) **

Um sistema óptico é construído combinando uma lente plano-convexa e outra plano-côncava, feitas de materiais diferentes, conforme ilustrado na imagem abaixo. Este sistema irá se comportar como uma lente. Encontre sua distância focal.

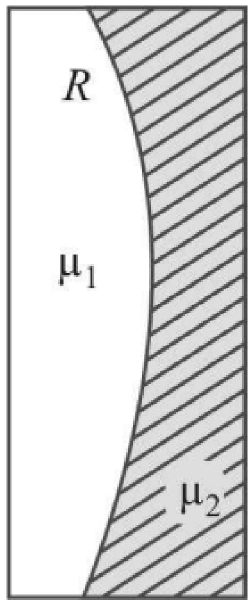


Figura 8: Sistema óptico composto por lentes plano-convexa e plano-côncava.

2.19 Problema 19 - Velocidade de Imagem (OBF 2017) ****

Um objeto pontual desloca-se com velocidade constante de 10 m/s, aproximando-se do vértice (V) de um espelho côncavo, cuja distância focal é 10 cm, como ilustrado na figura abaixo. Em um dado instante, o objeto passa pelo ponto A, situado a 10 cm do centro de curvatura do espelho, com uma velocidade de $v = 10\,\text{cm/s}$. Determine:

a) a posição da imagem em relação ao vértice do espelho, quando o objeto passa pelo ponto A.

b) a velocidade da imagem.

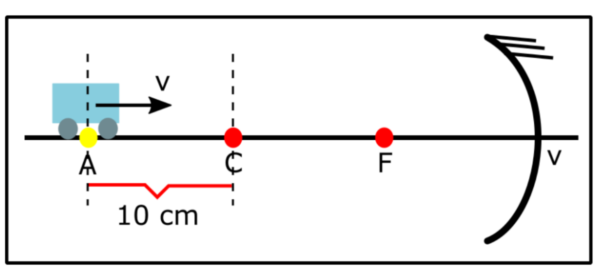


Figura 9: Imagem original da OBF.

2.20 Problema 20 - Velocidade em Índices de Refração (OBF 2010) *

Um raio monocromático de luz atravessa um conjunto de materiais, como esquematizado na figura abaixo ($\theta_x > \theta_y$). Determine:

a) Em qual(is) material(is) a luz se propaga com a maior velocidade.

b) Em qual(is) material(is) a luz se propaga com a menor velocidade.

c) Qual o valor de θ.

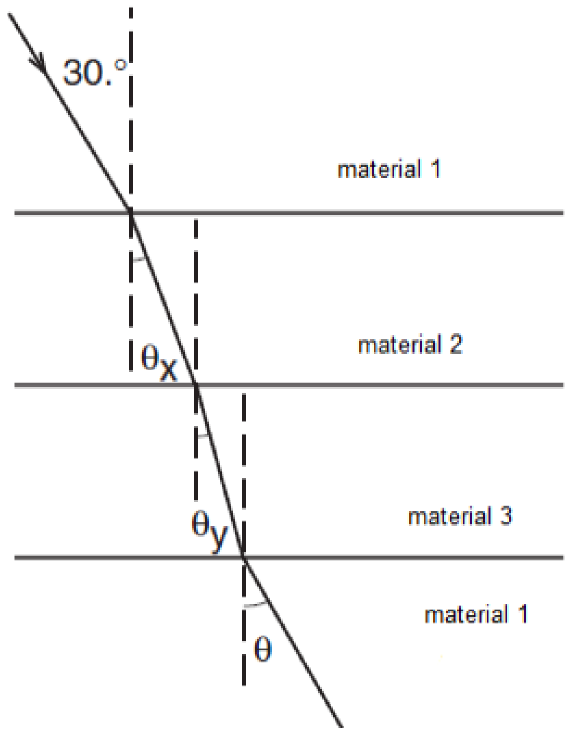


Figura 10: Esquema original da OBF 2010.

3 Gabarito

1. $\frac{4(nR-R)}{3n(n-1)}$ e $\frac{3Rn}{3n-4}$

2. $\frac{R}{n-1}$

3. Quadrilátero qualquer.

4.

 a) 8 cm e 16 cm

 b) divergente 24 cm e convergente 48 cm

5. $2n_c - n_v = \frac{8}{3}$

6. $Y = \dfrac{(X - x_0)^2}{4f} + y_0$

7. MCU de raio y_0.

$\vec{V} = -\omega \cos(\omega t)\hat{i} + \omega \sin(\omega t)\hat{j}$

8.

 a) O índice de refração do vidro tem que ser maior que o do ar.

 b) $\theta = \arcsin\left(\sqrt{\mu_v^2 - \mu_a^2}\right)$

9. $\theta = 20^\circ$

10. $n = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2}$

11. Alternativa (b) é a correta.

12. Alternativa (d) é a correta.

13. $\vec{V}_{\text{imagem}} = (-52\hat{x} + 12\hat{y})\,\text{m/s}$

14. $x = \frac{50}{4} = 12,5\,\text{cm}$

15. $\Delta(C.O.) = t \cdot (\mu - 1)$

16.

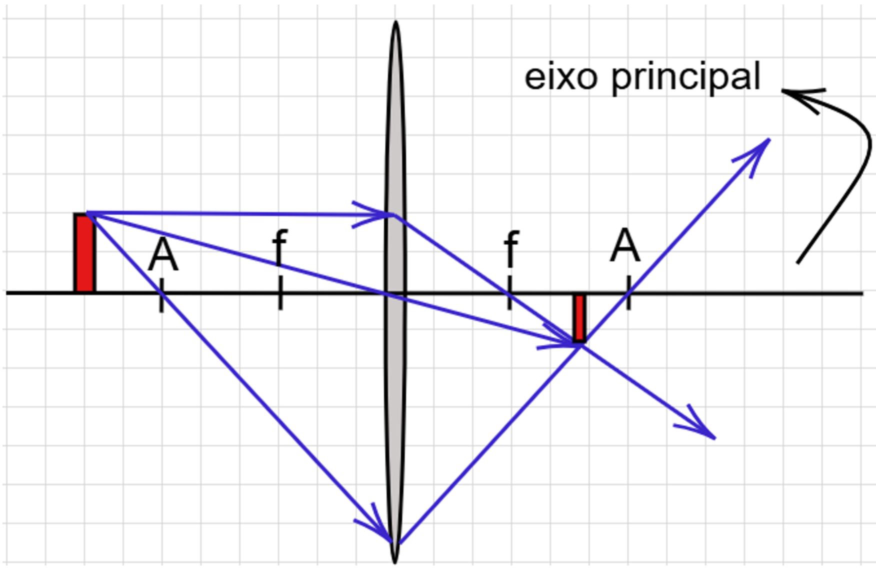


Figura 11: Solução ilustrada. Confira os detalhes no gabarito.

17.

a) $A = 4\,\text{cm}$

b) $v = 4,8\,\text{cm}$

c) $y = 1,2\,\text{cm}$

18. $\frac{1}{f} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{R} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{R}{\mu_1 - \mu_2}$

19.

a) $y = 15\,\text{cm}$

b) $V = 2,5\,\text{cm/s}$ para a esquerda

20.

a) Material 1.

b) Material 3.

c) $30°$

4 Soluções

Problema 1

Considere $n_1 = 1$ (índice de refração do ar), $n_3 = \frac{4}{3}$ (índice de refração da água) e $n_2 = n$ (índice de refração do objeto). Temos P e P', sendo respectivamente as distâncias do objeto e da imagem. Usando a equação do dioptro para o primeiro caso com a maior parte do objeto fora da água, temos:

Do n_1 para n_2:

$$\frac{n_1}{P} + \frac{n_2}{P'} = \frac{n_2 - n_1}{R}$$

$$\frac{1}{\infty} + \frac{n}{P'} = \frac{n-1}{-R}$$

$$P' = \frac{nR}{n-1}$$

Do n_2 para n_3:

$$\frac{n_2}{P''} + \frac{n_3}{P'''} = \frac{n_3 - n_2}{\infty}$$

$$P''' = -P'' \cdot \frac{n_3}{n_2}$$

Pela geometria da situação, $P'' = R - P'$. Logo:

$$P''' = \left(R - \frac{nR}{n-1}\right) \cdot \frac{4}{3n} = \frac{4(nR - R)}{3n(n-1)}$$

$$\boxed{\frac{4(nR - R)}{3n(n-1)}}$$

No segundo caso, não há diferença do n_1 para n_2. Logo, podemos fazer direto do n_2 para n_3:

$$\frac{n_2}{\infty} + \frac{n_3}{P'} = \frac{n_3 - n_2}{-R}$$

$$P' = \frac{n_3 R}{n_2 - n_3} = \frac{4R}{3n - 4}$$

$$P'' = R + P' = \frac{3nR}{3n-4}$$

$$\boxed{\frac{3nR}{3n-4}}$$

Problema 2

Usando a equação do dioptro, fazendo o caminho reverso da imagem para o objeto, temos:

Do n para o ar:

$$\frac{n}{P'} + \frac{1}{\infty} = \frac{1-n}{-R}$$

$$P' = \frac{nR}{n-1}$$

Do ar para o n:

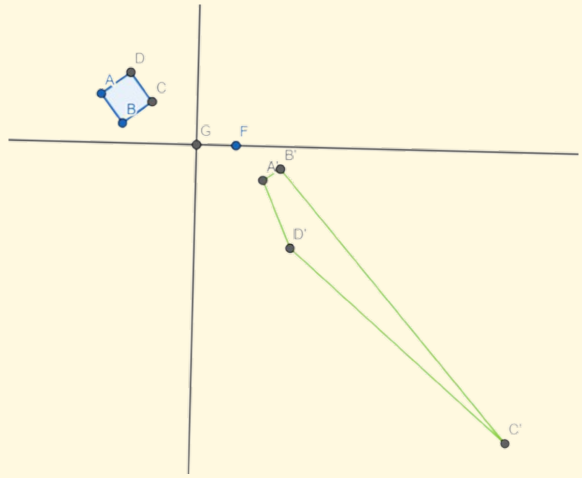
$$\frac{1}{P} + \frac{n}{P'} = \frac{n-1}{\infty}$$

Corrigindo os sinais:

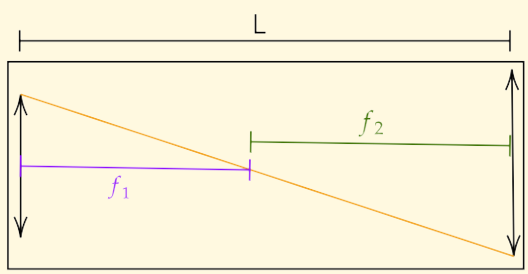
$$\boxed{\frac{R}{n-1}}$$

Problema 3

Pega-se um quadrado ABCD com um alinhamento qualquer em relação ao eixo principal da lente. Estabelecem-se duas retas diagonais ligando os pares $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, depois passando pelo centro da lente. Deve-se fazer duas retas paralelas às anteriores e, claro, por ser um quadrado, elas devem ser perpendiculares entre si. Estabelecido o plano focal, paralelo ao plano da lente e passando pelo foco, as retas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, ao intersectarem o plano da lente, se desviarão por refração, formando os raios diagonais refratados que intersectarão no plano focal os mesmos pontos respectivos às retas paralelas anteriormente traçadas. Com isso, basta traçar raios notáveis com cada um dos pontos e então a intersecção desses raios refratados com os raios diagonais refratados formará as imagens de cada ponto (A', B', C', D'), que ao conectá-los formará um quadrilátero não convencional A'B'C'D'.



Problema 4



A) Temos pela geometria $L = f_1 + f_2$. Usando a relação das intensidades pela conservação da potência:

$$I_0 r^2 \alpha \frac{I_0}{4} R^2$$

$$R = 2r$$

Por semelhança de triângulos, teremos:

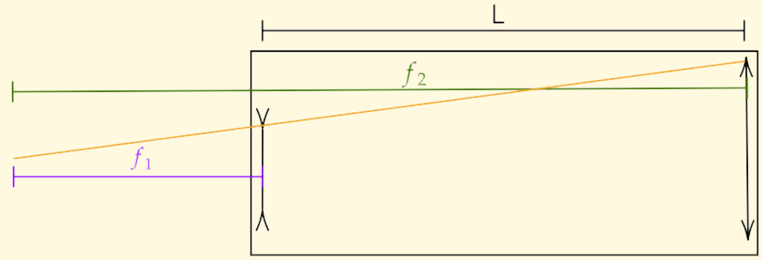
$$\frac{r}{f_1} = \frac{R}{f_2}$$

$$f_2 = 2f_1$$

$$L = f_1 + f_2$$

Onde $L = 24$ cm. Analisando ambas as equações:

$$\boxed{f_1 = 8 \text{ cm}} \quad \text{e} \quad \boxed{f_2 = 16 \text{ cm}}$$



B) É geometricamente impossível se obter o efeito do experimento sendo a primeira lente convergente e a segunda divergente. Com base nisso, a única solução possível é a primeira ser divergente e a segunda ser convergente. Com isso, temos $L = f_2 - f_1$.

Usando o mesmo princípio de intensidade:

$$f_2 = 2f_1$$

Com isso, temos:

$$\boxed{f_1 = 24 \text{ cm}}$$

$$\boxed{f_2 = 48 \text{ cm}}$$

Onde f_1 é o foco da lente divergente e f_2 da convergente.

Problema 5

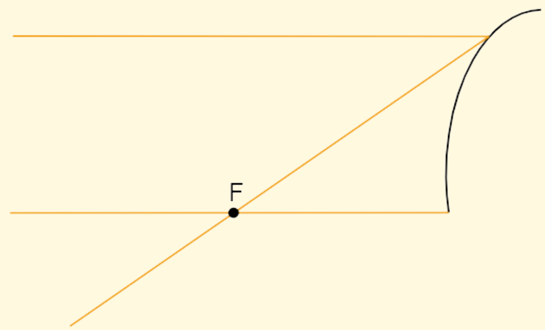
Aplicando a equação dos fabricantes de lentes generalizada, temos:

$$\frac{n_1}{P_1} + \frac{n_2}{P_2} = n_L \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \right) - \frac{n_1}{R_1} - \frac{n_2}{R_2}$$

$$\frac{4/3}{\infty} + \frac{n_v}{2R} = n_c \left(\frac{1}{R} + \frac{1}{\infty} \right) - \frac{4/3}{R} - \frac{n_v}{\infty}$$

$$2n_c - n_v = \frac{8}{3}$$

Solução 6



Comparando os caminhos ópticos entre um raio qualquer e o raio que passa pelo foco temos:

$$nS_0 + ny' + nf = nS_0 + n(x'^2 + (f - y')^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y' + f = (x'^2 + (f - y')^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$y'^2 + f^2 + 2y'f = x'^2 + f^2 + y'^2 - 2fy'$$

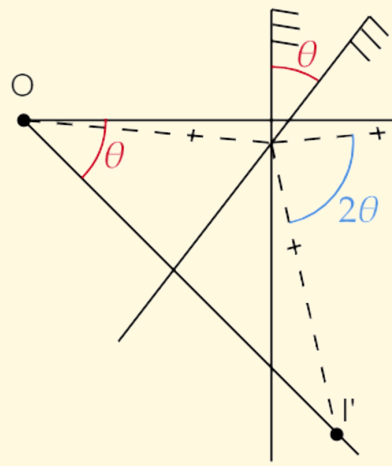
$$4fy' = x'^2$$

$$y' = \frac{x'^2}{4f}$$

Onde corrigindo as coordenadas $x' = x - x_0$ e $y' = y - y_0$:

$$y = \frac{(x - x_0)^2}{4f} + y_0$$

Solução 7

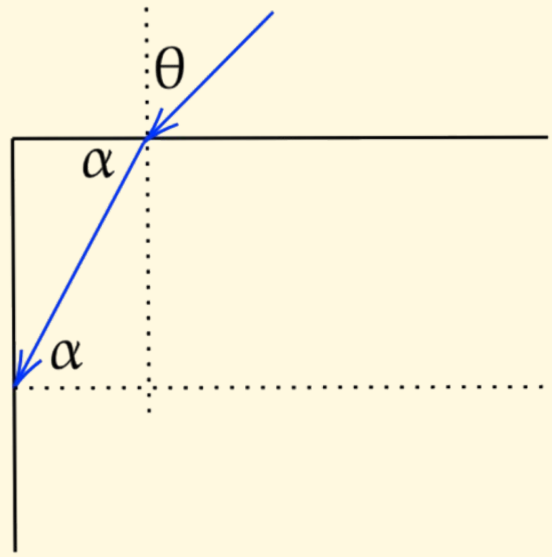


Analisando a geometria do problema, observa-se que ao rotacionar o espelho por θ, a imagem também rotaciona em relação à posição inicial por 2θ em relação ao centro de rotação do espelho. Além disso, a distância da imagem em relação à origem do sistema é sempre constante. Logo, pode-se concluir que a imagem realiza um movimento circular uniforme (MCU) de raio y_0 com velocidade angular constante ω.

$$V = -\omega \cos(\omega t)\hat{i} + \omega \sin(\omega t)\hat{j}$$

Solução 8

Itens (a) e (b): Montemos o esquema a seguir:



Onde, pela lei de Snell:

$$\sin(\theta) = \mu_{\mathrm{v}} \cos(\alpha)$$

E, para a condição (limite) de reflexão interna:

$$\mu_{\mathrm{v}} \sin(\alpha) = \mu_{\mathrm{a}} \sin(90^\circ) = \mu_{\mathrm{a}}$$

Usando a relação trigonométrica:

$$\sin(\alpha)^2 + \cos(\alpha)^2 = 1$$

Logo:

$$\left(\frac{\sin(\theta)}{\mu_v}\right)^2 + \left(\frac{\mu_a}{\mu_v}\right)^2 = 1$$

Ou simplesmente:

$$\mu_v^2 - \mu_a^2 = \sin^2(\theta)$$

Como um seno elevado ao quadrado sempre é um valor positivo, logo o índice de refração do vidro necessariamente é maior que o da água (resposta do item (a)).

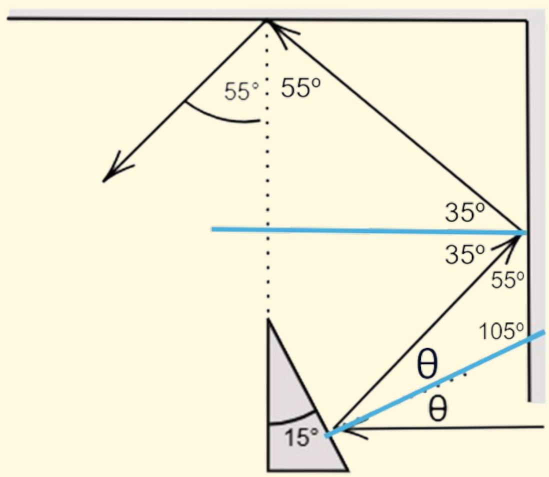
Como a fórmula obtida já trabalha na situação limite, o maior ângulo de incidência que permite a reflexão interna é dado pela última expressão obtida. Isolando θ:

$$\theta = \arcsin\left(\sqrt{\mu_v^2 - \mu_a^2}\right)$$

Que é a resposta do item (b).

Solução 9

Na reflexão, é sabido que o ângulo de incidência deverá ser igual ao de reflexão. Construindo o caminho contrário da luz, obtém-se a seguinte imagem:



No triângulo retângulo mais abaixo, à direita, nota-se a seguinte relação:

$$55° + 105° + \theta = 180°, \quad \text{logo} \quad \theta = 180° - 55° - 105° = 20°$$

Solução 10

No contexto de uma reflexão total, ou seja, na qual o ângulo de incidência do raio que sai seria 90°, cujo seno é igual a 1, logo teremos que:

$$\sin(90°) = 1 = n\sin(\theta)$$

E, por sua vez, seja θ o ângulo de incidência do raio ainda no líquido, é fácil notar (geometricamente) pelo desenho que:

$$\tan(\theta) = \frac{l}{h}$$

Usando a relação trigonométrica:

$$\sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) = 1, \quad \text{logo} \quad 1 + \frac{1}{\tan^2(\theta)} = \frac{1}{\sin^2(\theta)}$$

E substituindo pelas expressões de tangente e seno conhecidas, obtém-se que:

$$n^2 = 1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2$$

Ou seja:

$$n = \sqrt{1 + \left(\frac{h}{l}\right)^2}$$

Solução 11

A velocidade da onda é inversamente proporcional ao índice de refração do seu meio; logo, diminui com o aumento deste. Por este fator, elimina-se o item (d).

A frequência não se altera na troca de meios. Só isso já elimina todos os itens que não sejam o (b). Logo, (b) é a resposta, mas ainda iremos analisar o comprimento de onda.

Por conta da expressão

$$v = f\lambda$$

, e como f se mantém constante, logo o comprimento de onda λ é diretamente proporcional à velocidade: ou seja, ele aumenta com a diminuição do índice de refração, sendo inversamente proporcional a este. Com isto, o item (c) é eliminado.

Ou seja: o único item com todos os elementos corretos é o (c), a resposta.

Solução 12

Pela lei de Snell, sabe-se que

$$\mu_1 \sin(\theta_1) = \mu_2 \sin(\theta_2)$$

ou, generalizando,

$$\mu_i \sin(\theta_i) = \text{constante}$$

e, se os raios AB e CD são paralelos, isso significa que saíram com o mesmo ângulo de incidência em relação ao seu meio anterior. Como a relação de Snell é constante, podemos escrever que

$$\mu_1 \sin(\theta_1) = \mu_2 \sin(\theta_2) = \mu_3 \sin(\theta_3) = \mu_4 \sin(\theta_4)$$

e, sabendo que $\theta_1 = \theta_4$, logo

$$\mu_4 \sin(\theta_4) = \mu_1 \sin(\theta_1)$$

e assim

$$\mu_4 = \mu_1$$

, ou seja, o item (d) é o correto.

Solução 13

Primeiro, vamos nos voltar para o referencial do espelho. Vamos analisar apenas as velocidades horizontais (eixo x), já que a velocidade vertical da imagem será simplesmente a velocidade vertical do objeto (a velocidade vertical do espelho não afeta em nada a construção da imagem). Sabemos que, uma vez que

$$\cos(37^\circ) = \sin(53^\circ) = 0,8 \quad \text{e} \quad \cos(53^\circ) = \sin(37^\circ) = 0,6$$

logo

$$V_y = 12\,\text{m/s}, \quad V_x = 16\,\text{m/s}, \quad v_x = 18\,\text{m/s}, \quad v_y = 24\,\text{m/s}$$

onde V é a velocidade do objeto, e v é a velocidade do espelho. Para o espelho, a velocidade horizontal do objeto será

$$18 + 16 = 34\,\text{m/s} \quad \text{(para a direita)}$$

e logo a velocidade horizontal da imagem será de 34 m/s para a esquerda. Agora, voltando ao referncial da Terra, devemos adicionar a velocidade (também para a esquerda) do espelho. Assim, a velocidade horizontal da imagem será

$$34 + 18 = 52\,\text{m/s} \quad \text{(para a esquerda)}$$

Conforme dito antes, a velocidade vertical da imagem será a mesma do objeto, ou seja, 12m/s. Assim:

$$\vec{V}_{\text{imagem}} = (-52\hat{x} + 12\hat{y})\,\text{m/s}$$

Solução 14

Como a distância em relação ao espelho é diretamente proporcional ao tamanho (vertical) do objeto, logo, usando a fórmula para espelhos côncavos

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = \frac{1}{f}$$

e, dizendo que a distância do objeto seja x, e logo da imagem 4x, e usando a informação de que o foco = 10cm:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{4x} = \frac{1}{10}$$

e assim, isolando x:

$$x = \frac{50}{4} = 12,5.$$

Solução 15

O caminho óptico é dado por A equação é dada por:

$$\text{C.O.} = \Delta(x)\mu$$

seja μ o índice de refração do meio. Neste caso, será

$$\text{C.O.} = t \cdot \mu$$

Caso não houvesse esse meio, o caminho óptico seria simplesmente

$$\text{C.O.} = t \cdot 1 = t$$

E o caminho óptico adicionado por esse meio será justamente a variação entre esses valores, ou seja:

$$\Delta(C.O.) = t \cdot (\mu - 1)$$

Problema 16

Informações importantes: o antiprincipal fica a uma distância do centro óptico da lente duas vezes maior que o foco; os raios paralelos ao eixo deverão passar pelo foco do lado contrário; e o raio que passa por um antiprincipal também passará pelo outro, sofrendo inversão ao passar pela lente. Com a informação de que o raio que passa pelo centro óptico mantém-se inalterado, pode-se construir a seguinte imagem. Na qual as linhas azuis são os principais raios que permitirão a construção da imagem. Note que o ponto no qual eles convergem será exatamente a altura da imagem, revelando assim suas coordenadas. Note também que, como será o ponto de encontro dos raios, bastava utilizar dois deles, independente de quais fossem.

Problema 17

Item (a): Da mesma forma que na questão anterior, o antiprincipal tem sua distância duas vezes maior que a do foco. Logo, será de 4cm.

Item (b): Pela relação de lentes convergentes, sabe-se que

$$\frac{1}{u} + \frac{1}{v} = \frac{1}{f}$$

onde u é a posição (horizontal) do objeto, v é a posição da imagem e f é o foco. Sabendo que $f = 2\,\text{cm}$ e $u = 8\,\text{cm}$ (visível pela imagem), então

$$\frac{1}{v} = \frac{1}{f} - \frac{1}{u} = \frac{1}{3} - \frac{1}{8} = \frac{5}{24}, \quad \text{logo} \quad v = 4,8\,\text{cm}$$

Item (c): A altura é diretamente proporcional à distância. Sabendo que a altura do objeto é de 2cm, logo:

$$\frac{2\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} = \frac{y}{4,8\,\text{cm}}.$$

Agora, isolando y:

$$y = \frac{2\,\text{cm}}{8\,\text{cm}} \times 4,8\,\text{cm} = \frac{2 \times 4,8}{8} = 1,2\,\text{cm}.$$

Observe a imagem no item anterior e note como os valores que podem ser obtidos pela construção gráfica são muito próximos dos valores obtidos pelo cálculo. As pequenas imprecisões advêm somente da qualidade do desenho; na vida real, ambos os valores seriam exatamente iguais.

Problema 18

Na associação de lentes, os focos se relacionam da seguinte forma:

$$\frac{1}{f} = \frac{1}{f_1} + \frac{1}{f_2}$$

e, pela fórmula dos fabricantes de lentes:

$$\frac{1}{f} = (\mu - 1)\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)$$

onde, para espelhos côncavos, R é negativo; para convexos, é positivo, e, para planos, tendo a infinito, aplicaremos a cada uma das lentes:

$$\frac{1}{f_1} = (\mu_1 - 1)\left(\frac{1}{\infty} - \frac{1}{-R}\right) = \frac{\mu_1 - 1}{R}$$

e

$$\frac{1}{f_2} = (\mu_2 - 1)\left(\frac{1}{-R} - \frac{1}{\infty}\right) = \frac{\mu_2 - 1}{-R}$$

Desta forma,

$$\frac{1}{f} = \frac{\mu_1 - \mu_2}{R} \quad \Rightarrow \quad f = \frac{R}{\mu_1 - \mu_2}$$

Problema 19

Item (a): Pela fórmula do espelho côncavo, seja x a posição do objeto e y a posição da imagem:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$

e sabendo que $x = 20\,\text{cm} + 10\,\text{cm} = 30\,\text{cm}$ (o valor da distância do centro em relação ao espelho é o dobro da distância focal, por isso acrescente um fator de 20cm), logo

$$\frac{1}{y} = \frac{1}{f} - \frac{1}{x} = \frac{1}{10} - \frac{1}{30} = \frac{1}{15}.$$

Ou seja, $y = 15\,\text{cm}$.

Item (b): Pela fórmula do espelho côncavo, seja x a posição do objeto e y a posição da imagem:

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{f}$$

Tirando a derivada por tempo da expressão dos dois lados (e sabendo que f é constante, ou seja, a derivada equivale a zero):

$$d\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y}\right) = 0 = -\frac{\frac{dx}{dt}}{x^2} - \frac{\frac{dy}{dt}}{y^2}$$

e sendo
$$\frac{dx}{dt} = V_x \quad \text{e} \quad \frac{dy}{dt} = V_y$$
logo, isolando V_y, obtemos:
$$\frac{V_y}{y^2} = -\frac{V_x}{x^2},$$
$$V_y = -V_x \cdot \frac{y^2}{x^2}.$$
Ou seja, a velocidade da imagem é em sentido contrário à velocidade do objeto, sendo igual em módulo à velocidade deste multiplicada pelo fator $\left(\frac{y}{x}\right)^2$.

Utilizando os valores conhecidos do item anterior ($y = 15\,\text{cm}$, $x = 30\,\text{cm}$ e $V = 10\,\text{cm/s}$), então teremos que
$$V_y = \left(\frac{y}{x}\right)^2 V_x = \left(\frac{15}{30}\right)^2 \times 10 = \frac{10}{4} = 2,5\,\text{cm/s para a esquerda.}$$
No sentido contrário a V_x.

Solução 20

Itens (a), (b), (c): Quanto menor o índice de refração do meio, maior a velocidade da onda nele, e o ângulo de incidência também é inversamente proporcional ao índice de refração do meio. Logo, $\theta = 30^\circ$, pois o raio passa pelo mesmo material (material 1).

Além disso, visualmente:
$$\theta_y < \theta_x < 30^\circ$$
Logo, a velocidade máxima será no material 1, e mínima no material 3.