

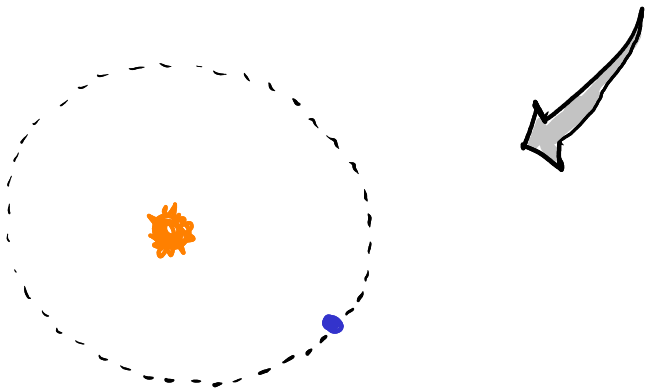
# Mecânica Celeste

## Energia

A energia é uma grandeza "abstrata" muito útil para a mecânica celeste, principalmente devido à sua conservação.

### ↳ Conservação da Energia Mecânica

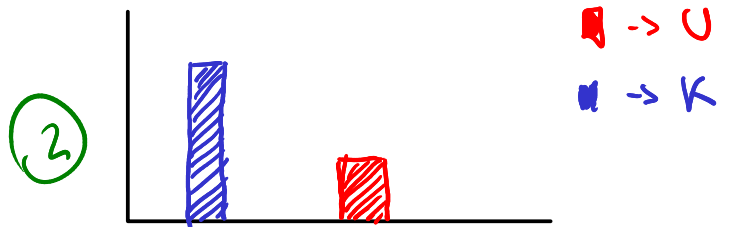
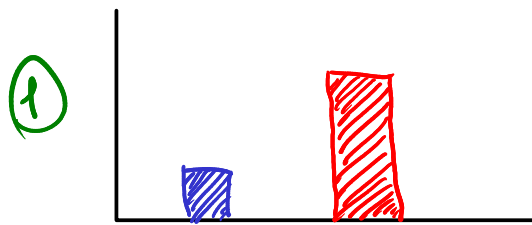
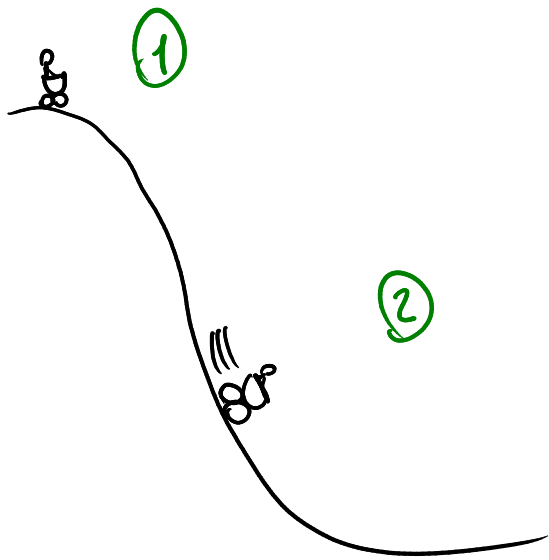
"Em sistemas isolados, a energia mecânica se conserva"



O que é a Energia Mecânica?

$$E = K + U$$

$$\left. \begin{aligned} K &= \frac{1}{2} mV^2 \\ U &= - \frac{GMm}{r} \end{aligned} \right\} E = \frac{1}{2} mV^2 - \frac{GMm}{r}$$



## Análise Energética das Órbitas

### 1) Órbitas Elípticas

Para orb. elípticas,  $E < 0$ , mas qual a expressão da energia?

Através da definição de energia, encontramos:

$$E = - \frac{GMm}{2a}$$

Assim, podemos encontrar uma expressão da velocidade:

$$\left. \begin{aligned} E &= \frac{1}{2} mV^2 - \frac{GMm}{r} \\ E &= - \frac{GMm}{2a} \end{aligned} \right\}$$

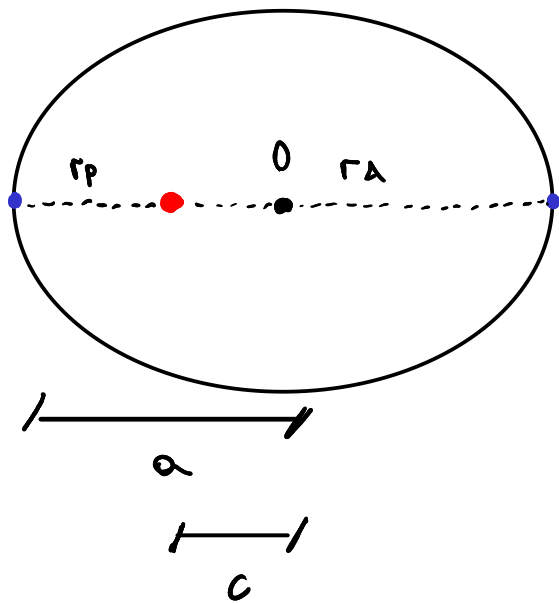
$$\frac{1}{2} mV^2 - \frac{GMm}{r} = - \frac{GMm}{2a}$$

$$\frac{V^2}{2} = \frac{GM}{r} - \frac{GM}{2a}$$

$$V^2 = GM \left( \frac{2}{r} - \frac{1}{a} \right)$$

Equação  
vis-viva

Podemos obter outras relações importantes definindo o periélio e o apoastro:



$$e = \frac{c}{a} \therefore c = ea$$

$$r_p = a - c = a - ea$$
$$\therefore r_p = a(1 - e)$$

$$r_A = a + c = a + ea$$
$$\therefore r_A = a(1 + e)$$

Calculando as velocidades nesses dois pontos:

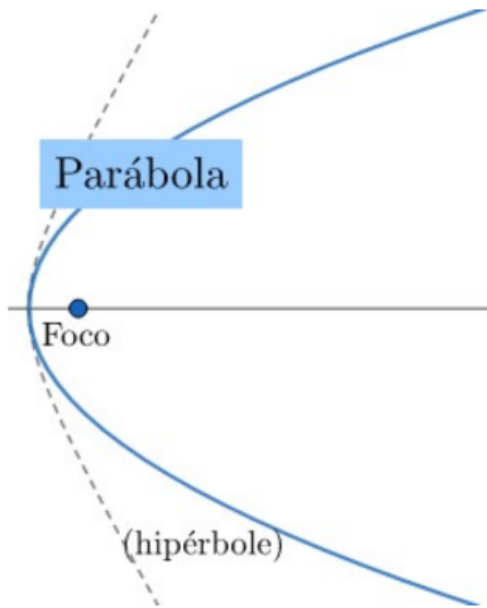
$$V_p^2 = GM \left( \frac{2}{r_p} - \frac{1}{a} \right) \therefore V_p^2 = \frac{GM}{a} \left( \frac{2}{1-e} - 1 \right)$$

$$V_p^2 = \frac{GM}{a} \left( \frac{2 - 1 + e}{1 - e} \right) \therefore V_p = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1+e}{1-e}}$$

$$V_A^2 = GM \left( \frac{2}{r_A} - \frac{1}{a} \right) \therefore V_A^2 = \frac{GM}{a} \left( \frac{2}{1+e} - 1 \right)$$

$$V_A^2 = \frac{GM}{a} \left( \frac{2 - 1 - e}{1 + e} \right) \therefore V_A = \sqrt{\frac{GM}{a} \frac{1-e}{1+e}}$$

## 2) Órbitas Parabólicas



$$\rightarrow E = 0$$

Uma órbita parabólica pode ser entendida como o limite em que uma órbita fechada (elíptica) se torna aberta.

Assim, podemos encontrar a velocidade de escape de um corpo.

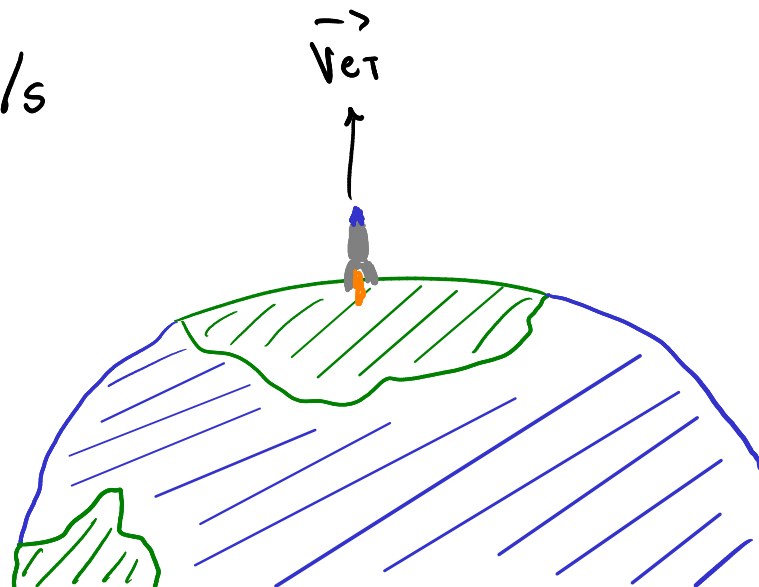
Para  $E = 0$ :

$$\frac{1}{2} m v_e^2 - \frac{GMm}{r} = 0 \quad \therefore \quad \frac{v_e^2}{2} = \frac{GM}{r}$$

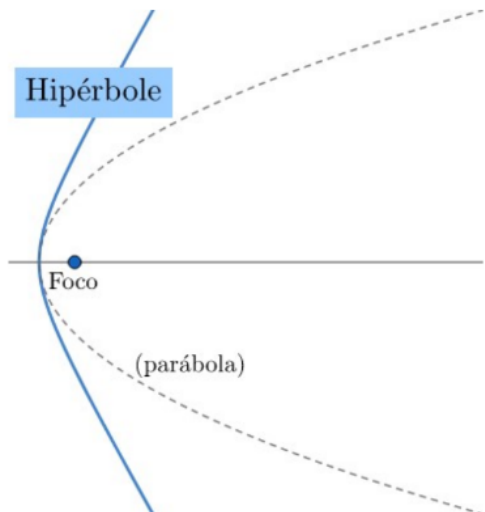
$$v_e = \sqrt{\frac{2GM}{r}}$$

Para o planeta Terra!

$$v_{eT} = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} \quad \therefore \quad v_{eT} \approx 11 \text{ km/s}$$



### 3) Órbitas Hiperbólicas



$$E > 0$$

Para órbitas hiperbólicas, é possível demonstrar que:

$$E = \frac{GMm}{2a}$$

Assim, calculamos a equação Vis - Viva para órbitas hiperbólicas:

$$E = \frac{GMm}{2a} = \frac{1}{2} mV^2 - \frac{GMm}{r}$$

$$\therefore V^2 = GM \left( \frac{2}{r} + \frac{1}{a} \right)$$