Olympic Birds

Problemas da Semana 7

Matemática

---

1 Questão: O rebanho de Zaratustra

Escrito por Pedro Henrique de Abreu Duailibe

Zaratustra tem um rebanho com 1000 ovelhas, todas com peso diferente de zero (ainda bem). Prove que é possível remover uma ovelha do rebanho de Zaratustra tal que as 999 ovelhas restantes não possam ser particionadas em dois conjuntos com pesos totais (soma dos pesos das ovelhas em cada conjunto) iguais.

Nota: uma partição de um conjunto A é um conjunto $\{A_1, \ldots, A_n\}$ tal que $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A$ e $A_i \cap A_j = \varnothing$, para todos $i \neq j$.

2 Questão: Um monge preguiçoso

Escrito por Marcos Vinicius Burdzinski

Um jovem menino chega até um monge preguiçoso, porém sábio, e pede para que o monge ensine para ele todo o seu conhecimento. O monge, com preguiça de ensinar o menino, diz para ele "Ó pequeno menino, das montanhas mais íngrimes, escale a mais íngrime e traga um pedaço do topo dela para mim, assim você será digno de receber a minha sabedoria". O menino entusiasmado, fez o que o monge pediu e, 1 ano depois, voltou para o monge e entregou uma pedra do topo da montanha mais íngrime da região. O monge assustado, disse para o menino: "Ó pequeno menino, provaste a sua dedicação e força. Agora, para receber a minha sabedoria, deverá provar que és inteligente e paciente o suficiente. Para isso, lhe proponho o seguinte problema: Seja $X_1, X_2, X_3, ..., X_n$, k, e M inteiros positivos de tal modo que: $\frac{1}{X_1} + \frac{1}{X_2} + \frac{1}{X_3} + ... + \frac{1}{X_n} = k$ e $X_1 X_2 X_3 ... X_n = M$. Considere o polinômio

$$P(x) = M(x+1)^k - (x + X_1)(x + X_2) \cdots (x + X_N)$$

Teste, em $P(x)$ todos os inteiros positivos em ordem crescente, até encontrar uma raíz da equação. Quando encontrar esse número, traga um papel com esse número escrito até mim. Então, poderei ensinar a minha sabedoria a você". Prove que tal polinômio não apresenta soluções nos reais positivos. Isto é, o monge passou a perna no menino para não ter que ensiná-lo.

3 Questão: Sequência de somas de k-ésimas potências

Escrito por Julia Leguiza

Sejam $x_1, x_2, \ldots, x_n$ reais positivos e seja $S_k = x_1^k + x_2^k + \ldots + x_n^k$.

(a) Dado que $S_1 < S_2$, mostre que $S_1, S_2, S_3, \ldots$ é estritamente crescente.

(b) Prove que existe um inteiro positivo n e reais positivos $x_1, x_2, \ldots, x_n$, tal que $S_1 > S_2$ e $S_1, S_2, S_3, \ldots$ não é estritamente decrescente.