Princípio do elemento extremo

Marcos Vinícius Burdzinski - Olympic Birds

01 de Julho de 2024

1 Introdução

Nesta seção, vamos discutir sobre uma ferramenta simples, e por isso muito poderosa na hora de resolver problemas olímpicos: O princípio do elemento extremo.
A sua essência consiste em considerar um elemento com a maior, ou menor, característica dentre todos os elementos (Por exemplo, dentre todos os números de um conjunto você considerar o maior deles; Dentre todos os pares de pontos, você pegar o par com a menor distância entre eles, entre várias outras aplicações).

2 Elemento extremo usando Geometria

Para entender melhor tal ideia, vamos dar uma olhadinha em uma aplicação interessante desse princípio:

Exemplo 1: *(Putnam 1979) Considere 2n pontos no plano, quaisquer 3 deles não colineares. Pintamos n deles de vermelho e os outros de azul. Prove que é possível agrupar os pontos em pares utilizando segmentos com extremidades em pontos de cores distintas de modo que quaisquer dois segmentos não se cortem.*

Solução: A primeira vista esse problema parece ser muito assustador: O que é que eu vou fazer nesse problema? Geometria? Indução? Mas e se os pontos..., mas e se for assim..., mas e se, mas e se, ... E você não chega em lugar algum. A solução envolve o princípio do elemento extremo e um toque de geometria: a desigualdade triangular.
Existem n^2 maneiras de parear os 2n pontos, isto é, ligar todos os pontos vermelhos com os pontos azuis. Considere, para cada um desses pareamentos, a soma dos comprimentos das ligações que fizemos, e pegue o pareamento com essa soma mínima. Por absurdo, suponha que existe os segmentos AB e CD que se cruzam (A e C pontos azuis, B e D vermelhos):

Pela desigualdade triangular, temos que $AO + OD > AD$ e $OB + OC > BC$, logo $AB + CD > AD + BC$. Assim, encontramos um pareamento com soma dos comprimentos ainda menor, o que contraria a nossa proposição de soma mínima. Esse

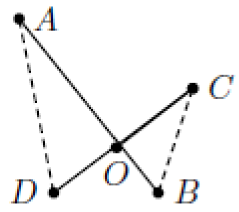

Figura 1: Ponto de interseção

argumento mostra que o pareamento com a soma mínima nos dá a condição desejada. Fascinante, não?

Exemplo 2:*(Teorema de Silvester) Um conjunto finito S de pontos no plano possui a seguinte propriedade: qualquer reta que passa por dois pontos de S passa por um terceiro ponto de S. Prove que todos os pontos de S estão sobre uma mesma reta.*

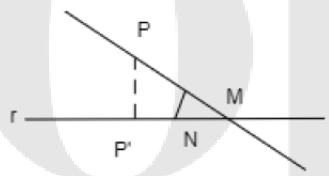

Figura 2: Teorema de Silvester

Solução: Seja R o conjunto de todas as retas que passam por pelo menos dois pontos de S. Seja $P \in S$ e $r \in R$ de tal forma que a distância entre P e r seja a menor distância não nula possível dentre todas. Traçamos P' a projeção de P sobre r. Como a reta r contém 3 pontos de S, então pelo menos 2 pontos estão de um lado de P', digamos que são M e N. Se N está entre P' e M, então a distância de N até a reta PM é menor que de P até r, contrariando a minimalidade. Esse argumento mostra que não pode existir uma distância não nula entre um ponto de S e uma reta de R, então todos os pontos estão contidos em uma única reta.

Eu sei, eu sei, essa solução envolveu um raciocínio aparentemente criado do absoluto nada, mas acreditem, quando passarem a resolver os exercícios sobre esse assunto vocês terão um olho treinado para ter ideias surpreendentes como essa!

3 Elemento extremo em TN

O bom de usar um elemento extremo é que eles podem possuir propriedades que nenhum outro elemento tem, assim resolvendo a questão. É muito comum em problemas que você se depare com o seguinte pensamento "Putz, se isso aqui fosse verdade o

problema estava resolvido", recomendo que você dê uma olhadinha em algum elemento extremo, ele pode possuir essa propriedade!
Para dar maior credibilidade ao que estou dizendo, vamos ver outro exemplo muito bacana:

Exemplo 2(Clássico): *Encontre todos os n tais que $n|2^n - 1$*

Solução: Fazendo alguns casos iniciais, começamos a desconfiar que além de $n = 1$ não há outras soluções (Pode acreditar, essas desconfiadas podem nos ajudar a encontrar o caminho certo!).
Prossigamos com nossa solução: Pegue um primo p que divide n, então $p|2^n-1$. Assim, $2^n \equiv 1(modP)$ e por conta disso $ord_p2|n$. Mas também $ord_p2|p-1$, logo, $ord_p2|mdc(p-1,n)$. Chegamos em um ponto crucial de nossa solução, pois se $mdc(p-1,n) = 1$, então $ord_p2|1 \Rightarrow ord_p2 = 1 \Rightarrow p|2^1 - 1 = 1$, o que é um absurdo! Mas a gente não pode garantir tal afirmação, pois por exemplo, $3|6$ e $mdc(3-1,6) = 2$. E agora, o que a gente faz? É aí que entra o nosso queridão princípio do elemento extremo, pegue q o menor primo que divide n, então $q - 1$ é primo com n pois $q - 1$ possui todos os seus fatores primos menores ou iguais a $q-1$, sendo que os fatores primos de n são maiores ou iguais a q. Assim, $mdc(q-1,n) = 1$ e nosso problema está resolvido!

Agora, vamos aplicar o princípio do elemento extremo na sua terra natal, a combinatória de fato!

4 Elemento extremo na Combinatória

Na combinatória, o princípio do elemento extremo aparece em tantos contextos quanto se pode imaginar, por isso é sempre bom ficar atento em quando ela será útil para resolver o problema. Geralmente, ela aparece em questões que precisamos provar determinado fato, como podemos ver na questão abaixo:

Exemplo 3(OBM): *Em um torneio de tênis de mesa (no qual nenhum jogo termina empatado), cada um dos n participantes jogou uma única vez contra cada um dos outros. Sabe-se que, para todo $k > 2$, não existem k jogadores $J_1, J_2, ..., J_k$ tais que J_1 ganhou de J_2, J_2 ganhou de J_3, ..., J_{k-1} ganhou de J_k e J_k ganhou de J_1.*
Prove que existe um jogador que ganhou de todos os outros e existe um jogador que perdeu de todos os outros

Solução: Nesse problema, é bem simples constatar que o elemento extremo que devemos pegar é o jogador com mais vitórias (para provar que há um jogador que não perdeu), e em seguida, o jogador que menos ganhou (para provar que há um jogador que não ganhou). Seja J_n o jogador com mais vitórias. Suponha que ele não ganhou todas, ou seja, existe um jogador J_t que ganhou de J_n. Se algum jogador que perdeu para J_n ganhar de J_t, então teremos um ciclo de $k = 3$, pois J_n ganhou desse jogador,

esse jogador ganhou de J_t e J_t ganhou de J_n. Portanto, J_t deve ter ganhado pelo menos de J_n e de todos os jogadores que perderam para J_n, ou seja, J_t ganhou mais partidas que J_n, um absurdo. Portanto, através da contradição acima podemos concluir que existe um jogador que ganhou todas!
Provar que existe um jogador que perdeu todas é análogo, e vou deixar como exercício para o leitor praticar o que acabou de aprender.

Para fechar com chave de ouro o nosso material, não poderia faltar o elemento extremo na tão querida álgebra.

5 Elemento extremo na Álgebra

Para falar bem a verdade, o princípio do elemento extremo na álgebra leva outro nome e toda uma teoria consigo: Descenso infinito de Fermat.

5.1 Definição

O descenso infinito de Fermat é uma ferramenta que, quando aplicável, permite provar que uma equação não possui raízes inteiras, ou encontrar todas as soluções dessa equação. Dada uma equação:

$$f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$$

Se o conjunto de soluções de f

$$A = \{(x_1, ..., x_n) \in \mathbb{Z} | f(x_1, x_2, ..., x_n) = 0\}$$

é diferente de vazio, então consideramos a solução mínima e obter a partir dela, uma solução ainda menor, nos levando a uma contradição e provando que A é vazio.
De um modo mais informal, pegamos a solução mínima (por exemplo, x_0 e y_0) e atráves de uma série de manipulações algébricas, encontramos uma solução ainda menor (por exemplo, $\frac{x_0}{2}$ e $\frac{y_0}{2}$)

5.2 Subida infinita de fermat

Dedico este subtópico para apresentar uma ideia vinda do descenso infinito de fermat. Esta técnica consiste em, a partir de uma solução, você encontrar outra e, com essa nova solução descobrir outra, e depois outra, e depois mais uma, e assim por diante, achando outras infinitas soluções. Será mais claro se eu apresentar um exemplo do que estou dizendo:

Exemplo 4 (IMO 1981): *Encontre todas as soluções inteiras positivas da equação:*

$$m^2 - mn - n^2 = \pm 1$$

Solução: Perceba que $m^2 = n^2 + mn \pm 1 \geqslant n^2 \Rightarrow m \geqslant n$, com igualdade se, e somente se, $(m, n) = (1, 1)$, que é uma solução. Agora vem o pulo do gato: Se (m, n) é solução com $m > n$, então $(n, m-n)$ também é! Para verificar isso, basta substituir na equação original:

$$n^2 - n(m-n) - (m-n)^2 = n^2 - nm + n^2 - m^2 + 2mn - n^2 = -(m^2 - nm - n^2) = \mp 1$$

Portanto, se temos uma solução, podemos descer até atingir uma solução (a, b), com $a = b$, ou seja, o par $(1, 1)$. Da mesma forma conseguimos provar que se (m, n) é solução, então $(m + n, m)$ também é e, portanto, a partir de um par será possível encontrar outros infinitos pares. Assim sendo, as soluções positivas são:

$$(1, 1), (2, 1), (3, 2), ..., (F_{n+1}, F_n), ...$$

Onde F_n é o e-nésimo termo da sequência de Fibonacci.

A "Subida infinita de Fermat"foge um pouco do nosso assunto principal que é o elemento extremo, mas eu não conseguiria terminar o material deixando incompleto um tópico importante como esse .

5.2.1 Nota:

Criei o termo (Pelo menos nunca li esse nome em nenhum lugar) "Subida infinita de Fermat"apenas para fins de didática, então peço que não utilizem esse nome achando que qualquer corretor de prova vai conhecê-lo!

6 Problemas

Sei que estavam ansiosos por essa parte! Os problemas a seguir vão desafiar os seus conhecimentos agora adquiridos, e te prepararão para resolver outros problemas que você enfrentará durante sua jornada acadêmica!

6.1- *Dada uma quantidade finita (maior do que 3) de pontos no plano, prove que existe um círculo que passa por três desses pontos e que não contém outros dos demais pontos em seu interior.*

6.2- *São dados $n \geqslant 3$ pontos no plano de forma que quaisquer três deles formam um triângulo de área menor que 1. Mostre que todos os n pontos estão no interior de um triângulo de área menor que 4.*

6.3- *n números $a_1, a_2, ..., a_n$ cuja soma é positiva são colocados em um círculo. Prove que existe i tal que $a_i \geqslant 0$, $a_i + a_{i+1} \geqslant 0$, $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} \geqslant 0$, ..., $a_i + a_{i+1} + ... + a_{i+n-1} \geqslant 0$, onde $a_{i+n} \equiv a_i$*

6.4- *São desenhados $n \geqslant 3$ retas no plano tais que:*
(i) quaisquer duas retas são concorrentes
(ii) por todo ponto de interseção entre duas retas passa pelo menos mais uma reta.
Prove que todas as retas passam por um mesmo ponto.

6.5 *O planeta Xurras possui 20 países. Sabe-se que, dentre quaisquer três desses países, existem dois sem relações diplomáticas. Prove que Xurras possui, no máximo, 200 embaixadas.*

6.6- *Em cada ponto de coordenadas inteiras no plano é escrito um inteiro positivo. Cada um desses números é igual à média aritmética de seus quatro vizinhos. Mostre que todos os números escritos são iguais.*

6.7- *Considere três escolas, cada uma com n alunos. Cada estudante tem ao todo $n+1$ amigos nas outras duas escolas em que ele não estuda. Prove que é possível selecionar um estudante de cada escola de tal forma que os três se conheçam mutuamente*

6.8- *Oito times de futebol participam de um torneio , onde cada time joga contra todos os outros exatamente uma vez. Sabendo que não houve empates, prove que, ao término da competição, é possível escolher quatro times A, B, C e D tais que: A derrotou B, C e D; B derrotou C e D; C derrotou D.*

6.9- *São dados n pontos no plano. Marcamos os pontos médios de todos os segmentos com extremidades nesses n pontos. Prove que há pelo menos $2n-3$ pontos marcados distintos.*

6.10- *Prove que não existem quádruplas de inteiros positivos (x, y, z, w) satisfazendo:*

$$x^2 + y^2 = 3(z^2 + w^2)$$

6.11- *Encontre todas as soluções positivas do sistema abaixo:*

$$a + b = c^2$$

$$b + c = d^2$$

$$c + d = e^2$$

$$d + e = a^2$$

$$e + a = b^2$$

6.12- *Cada equipe de um torneio de vôlei joga com cada uma das outras exatamente uma vez. Ao fim do torneio, cada jogador faz uma lista com os nomes de todos os jogadores vencidos por ele e de todos os que foram vencidos pelos jogadores que ele venceu. Sabendo que não houve empates, prove que existe um jogador cuja lista possui o nome de todos os outros jogadores.*

7 Referências

- T. Andreescu e Z. Feng, 102 Combinatorial Problems, From the training of the USA IMO team, Birkh¨auser 2003.
- A. Engel, Problem-Solving Strategies, Springer 1998.
- POTI (polo olímpico de treinamento intensivo), curso de combinatória nível 3, princípio do extremo aula 8, Professor Carlos Shine
- POTI (polo olímpico de treinamento intensivo), curso de combinatória nível 3, princípio do extemo, UFPR, Professor Vitor Emanuel Gulisz
- POTI (polo olímpico de treinamento intensivo), curso de teoria dos números, descenso infinito de fermat aula 12, Professor Carlos Gustavo Moreira

8 Dicas para os problemas

6.1- *Nesse problema, considere o menor círculo que passa por 3 pontos!*

6.2- *Neste, considere o triângulo de área máxima! Onde vão estar todos os demais pontos? Lembre-se que um triângulo de mesma base e com a mesma altura tem área igual!*

6.3- *Considere essa sequência:*

$$a_1, a_1 + a_2, a_1 + a_2 + a_3, ..., a_1 + a_2 + ... + a_n$$

Considere a soma de valor mínimo, digamos que é $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_t$. Verifique que a_{t+1} satisfaz as condições do problema.

6.4- *A solução desse problema é uma adaptação da demonstração do teorema de Silvester (Dá para perceber que esse problema e o teorema de Silvester tem essências bem semelhantes!).*

6.5- *Considere o país P com o maior número de relações diplomáticas. Seja $p_1, p_2, ..., p_k$ os países que fazem relações diplomáticas com P. Verifique que p_i e p_j, com $k \geqslant i \neq j \geqslant 1$ não podem ter relações diplomáticas entre si. Então o máximo de relações diplomáticas é $(20 - k)k \leqslant 100$, (pois cada um dos outros $(20 - k)$ países podem ter no* *máximo k relações diplomáticas). Como em cada relação diplomática há 1 embaixada em cada um dos dois países, o resultado segue.*

6.6- *Considere o menor número escrito nesse plano. Como é que a média aritmética de 4 números é menor que todos os 4?*

6.7- *Considere o Aluno que conhece o maior número de alunos de uma escola, digamos que são k alunos. Ele vai conhecer $n - k + 1 \geqslant 1$ alunos da outra escola, então tome um desses alunos para a sua análise.*

6.8- *Sem muito mistério, tome A o time que mais venceu dentre os oito times. A venceu de pelo menos 4 times: B, C, D e E. Um deles, digamos que B, ganhou de pelo menos dois dos times, por exemplo C e D. E assim por diante!*

6.9- *Tome A e B os pontos mais distantes um do outro. Os pontos médios com extremidade em A ou B estão contidos nas circunferências de centros A e B e raio $\frac{AB}{2}$, respectivamente. Há um ponto em comum que é o ponto médio de AB. Logo, como há $2(n-2)+1 = 2n-3$ segmentos com extremidades em A ou B, há pelo menos $2n-3$ pontos médios.*

6.10- *Seja (x_0, y_0, z_0, w_0) a menor solução do sistema. Eu acredito, você é capaz de encontrar uma solução ainda menor!*

6.11- *Tome (a, b, c, d, e) uma solução do sistema. Sejam x e y respectivamente, o maior e o menor número entre a, b, c, d, e. Então $2x \geqslant x^2$ (Para fins didáticos, suponha que a seja o maior número, então $a^2 = d + e \leqslant a + a \Rightarrow a^2 \leqslant 2a$). Faça o mesmo para y, você vai reduzir o problema e encontrará apenas uma solução!*

6.12- *Olha só, que surpresa! Vamos considerar A como o time que mais venceu, e seja B um time que venceu de A. Prove que B também está na lista de A (Use a ideia do exemplo 3), então todos os times que venceram de A estão na lista de A, e todos os times que A venceu também estarão na lista de A. Ou seja, todo Mundo está na lista de A!*