



Olympic Birds  
Problemas da Semana 3  
Matemática

---

## 1 Questão: Binomiais funcionais

*Escrito por Kauan Emanuel*

Considere função  $f : N \rightarrow N$ , tal que  $f(x) = \binom{2x+1}{x}$ . Seja  $O$  e  $B$ , respectivamente, a soma dos números e do quadrado dos números correspondentes as afirmações corretas. O valor de  $O \times B$  é:

1.  $f$  é injetora
  2.  $f$  é sobrejetora
  3.  $f$  pode ser escrita como  $\sum_{k=0}^x \binom{x+1}{x-k} \binom{x}{k}$
  4.  $f$  é crescente
  5.  $f(2024) = \sum_{n=0}^{2024} \binom{4049-n}{2024-n}$
- a) Quadrado perfeito
  - b) Múltiplo de 7
  - c) Divisível por 10
  - d) Ímpar
  - e) NDA

## 2 Questão: Complexos trigonométricos

*Escrito por Kauan Emanuel*

Sabendo que  $\cos \alpha = \frac{1}{5}$  e que  $C = \sum_{k=0}^{\infty} \cos k\alpha$ , determine:

- a) O valor de  $C$ .
- b) O valor de  $\arg(z) - \arg(1/3)$ , sabendo que  $z = 2C + i\sqrt{3}$

### 3 Questão: Mediana e suas propriedades

*Escrito por Kauan Emanuel*

Considere um triângulo  $\triangle ABC$ , de lados  $BC = a$ ,  $AC = b$  e  $AB = c$  e sua mediana relativa ao lado  $BC$ ,  $AD$ . Encontre:

a) Valor da mediana  $AD$ , em função dos lados do triângulo (conhecido como Teorema da Mediana)

Dado um ponto  $E$ , no prolongamento da reta  $BC$ , o ângulo  $AEB = \theta$  é  $\theta$ , bem como  $ED = AD$ .

b)  $\cos(2\theta)$