1 Questão curta - Raul

O exoplaneta hipotético "Mau.I" é o único a orbitar sua estrela, NI-CHOLAS. Fixo à uma distância orbital de 4UA, Mau-I sofreu com processos tectonicos e se separou em 2 exoplanetas menores, Ra.ul e D-avilucas, que tem respectivamente 2/3 e 1/3 da massa total de Mau-I. Após observar estes dois novos exoplanetas, e mais especificamente, suas orbitas, que também são circulares, o astrônomo amador Leon, do estado da Bahia concluiu que a interação gravitacional entre Ra.ul e D-avilucas é desprezível. Quais os Raios das orbitas que Leon observou para Ra.ul e D-avilucas?
(DICA: os valores são números inteiros)

Solução:

Como a separação do planeta é realizada por forças internas, temos a conservação do momento angular total e da energia mecânica total:

1. **Conservação do momento angular**:

$$3mR_0\sqrt{\frac{GM}{R_0}} = 2mR_2\sqrt{\frac{GM}{R_2}} + mR_1\sqrt{\frac{GM}{R_1}}$$

Simplificando a expressão, obtemos:

$$3\sqrt{R_0} = 2\sqrt{R_2} + \sqrt{R_1}$$

2. **Conservação da energia mecânica**:

$$-\frac{3GmM}{2R_0} = -\frac{2GmM}{2R_2} - \frac{GmM}{2R_1}$$

Simplificando a expressão, temos:

$$\frac{3}{R_0} = \frac{2}{R_2} + \frac{1}{R_1}$$

De acordo com o enunciado, temos $R_0 = 4$ e os valores de R_1 e R_2 são números inteiros. A partir das duas equações encontradas, é possível deduzir que R_1 e R_2 também são quadrados perfeitos menores que 6. Por inspeção, apenas um par de números satisfaz todas essas condições:

$$\boxed{R_1 = R_2 = R_0 = 4\text{UA}}$$

2 Questão média - Leon

Em uma noite de junho, o jovem astrônomo Ramanugga vai participar de um encontro de observação do céu com outros astrônomos mirins. Chegando ao local marcado com seu telescópio de última geração, ele recebe uma mensagem no celular informando que o evento foi cancelado. Para não perder a viagem, ele decide praticar astrofotografia da Lua com seu telescópio, focando num ponto abaixo dela para evitar a alta incidência de luz.

Surpreendentemente, ao analisar a imagem, Ramanugga percebe duas Luas! Ele descobre que Miau, o vendedor do telescópio, havia colocado um espelho plano entre a lente objetiva e a placa fotográfica, como mostrado na imagem. Ramanugga, sem perder tempo, decide começar a fazer experimentos com essa configuração.

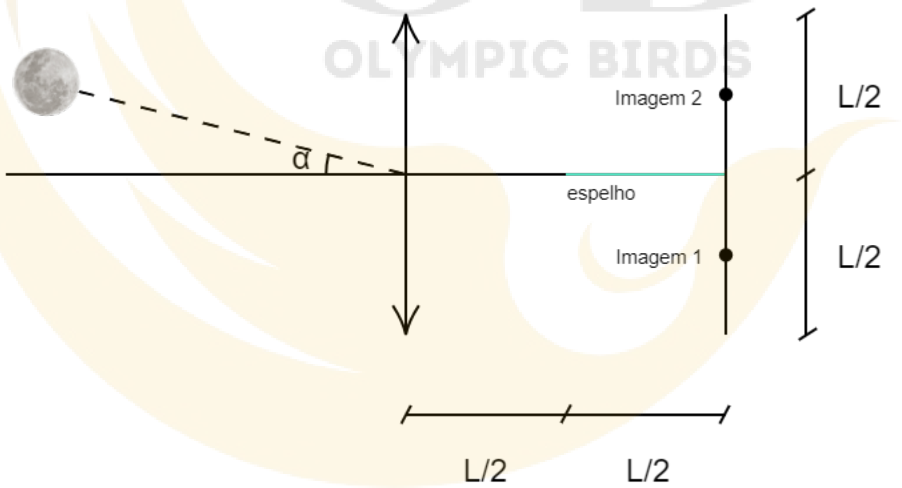


Figura 1: Telescópio de Ramanugga

a) Como Ramanugga não possui ferramentas para medir magnitudes, ele opta por outro método. Sabendo que o jovem possui duas lentes objetivas diferentes, ambas convergentes de altura L e distância focal $L/2$, mas uma tem formato retângular enquanto a outra tem formato circular, determine a diferença de magnitude encontrada por ele nos dois casos.

b) Ao perceber que Ramanugga consegue se divertir mesmo com a pegadinha, Miau decide apertar o "botão do caos"e fazer com que o espelho realize um movimento harmônico simples como mostrado na figura. Mesmo sendo um vilão, Miau é perfeccionista e ajusta a amplitude do movimento harmônico simples para a máxima permitida, de modo que as duas imagens sempre se formem. Encontre essa amplitude A.

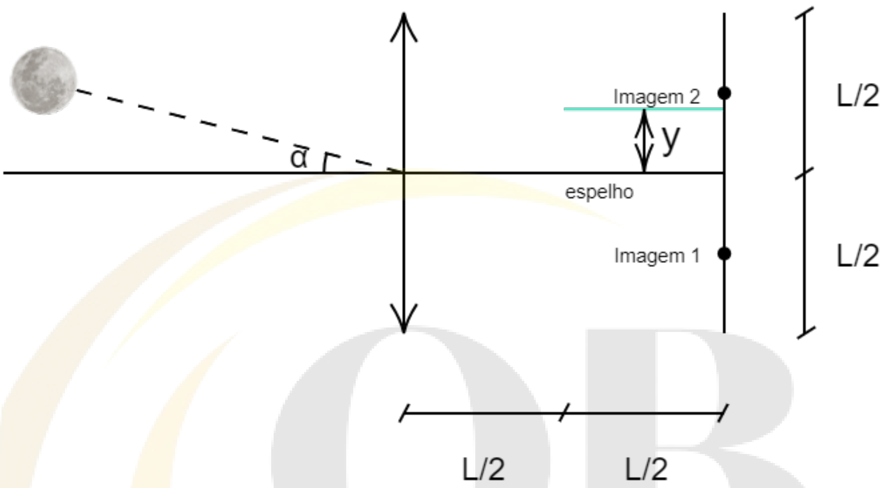
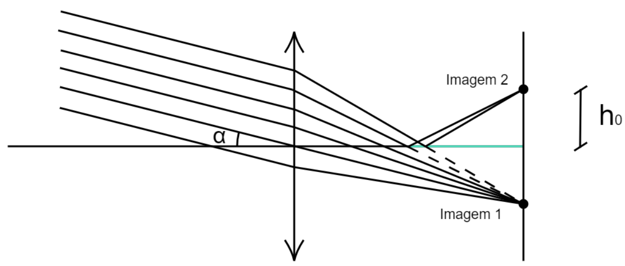


Figura 2: Telescópio de Ramanugga após um aumento y na altura do espelho

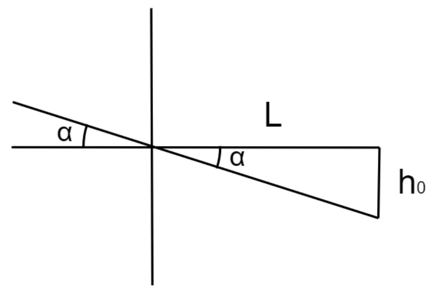
c) Ainda mais intrigado pelo movimento do espelho, Ramanugga decide calcular a frequência f e a amplitude A do movimento. Tendo encontrado o que queria e sabendo que seu telescópio está recebendo uma potência total P da Lua, ele decide calcular como varia o módulo da energia recebida na imagem 2 conforme a altura do espelho varia, ou seja, $\left|\frac{dE_2}{dy}\right|$. Encontre esse valor em função de P, f, A, y e L para a lente retangular.

Solução:

(a) Sabendo que os raios de luz vindos de uma fonte astronômica incidem paralelamente, podemos montar o seguite esquema:



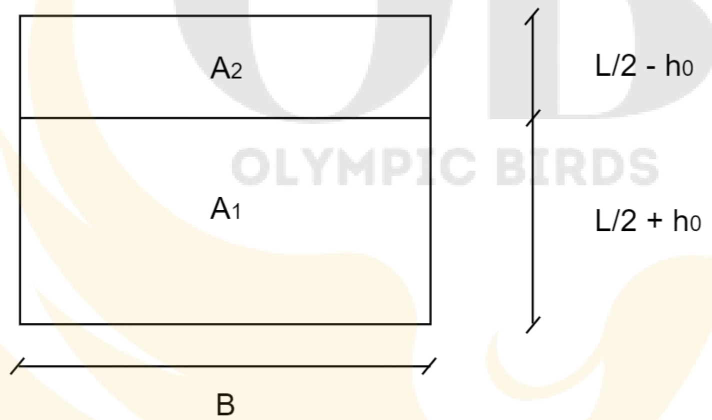
Como o espelho é plano, a distância dele à imagem 2 é igual à distância dele à imagem 1. Assim:



$$h_0 = L\tan(\alpha)$$

Como a razão entre as potências recebidas nas imagens é igual à razão das áreas delimitadas onde os raios incidem em cada imagem respectiva, temos:

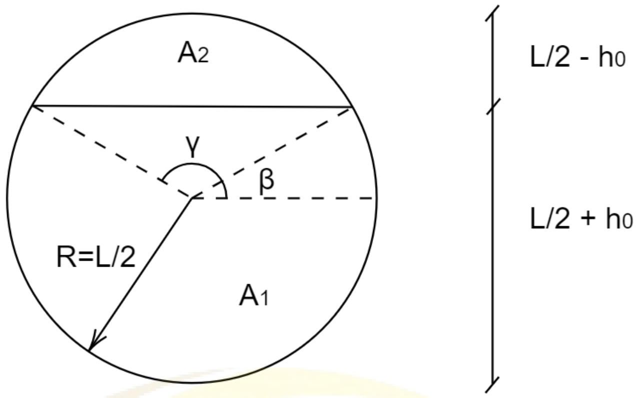
- Lente retangular:



$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{B(\frac{L}{2} - h_0)}{B(\frac{L}{2} + h_0)} = \frac{L/2 - L\tan(\alpha)}{L/2 + L\tan(\alpha)} = \frac{1 - 2\tan(\alpha)}{1 + 2\tan(\alpha)}$$

$$\boxed{\Delta m = -2.5log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = -2.5log\left(\frac{1 - 2\tan(\alpha)}{1 + 2\tan(\alpha)}\right)}$$

- Lente circular:



$$A_2 = \pi R^2 \frac{\gamma}{2\pi} - \frac{R^2 \operatorname{sen}(\gamma)}{2} = \frac{R^2}{2}(\gamma - \operatorname{sen}(\gamma))$$

Como $\gamma = \pi - 2\beta$:

$$\operatorname{sen}(\gamma) = \operatorname{sen}(2\beta)$$

$$A_2 = \frac{R^2}{2}(\pi - 2\beta - \operatorname{sen}(2\beta))$$

$$A_1 = \pi R^2 - A_2 = \pi R^2 - \frac{R^2}{2}(\pi - 2\beta - \operatorname{sen}(2\beta) = \frac{R^2}{2}(\pi + 2\beta + \operatorname{sen}(2\beta))$$

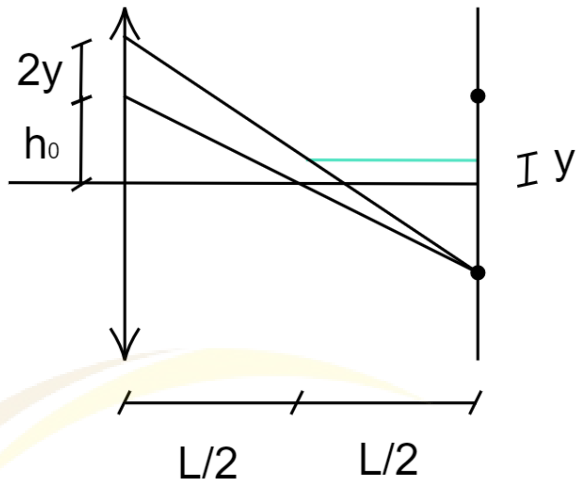
Sabendo que $R = L/2$, temos:

$$\operatorname{sen}(\beta) = \frac{h_0}{R} = \frac{L\tan(\alpha)}{L/2} = 2\tan(\alpha) \therefore \beta = \operatorname{sen}^{-1}(2\tan(\alpha))$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{A_2}{A_1} = \frac{\frac{R^2}{2}(\pi - (2\beta + \operatorname{sen}(2\beta)))}{\frac{R^2}{2}(\pi + (2\beta + \operatorname{sen}(2\beta)))} = \frac{\pi - (2\operatorname{sen}^{-1}(2\tan\alpha) + \operatorname{sen}(2\operatorname{sen}^{-1}(2\tan\alpha)))}{\pi + (2\operatorname{sen}^{-1}(2\tan\alpha) + \operatorname{sen}(2\operatorname{sen}^{-1}(2\tan\alpha)))}$$

$$\boxed{\Delta m = -2.5log\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = -2.5log\left(\frac{\pi - (2\operatorname{sen}^{-1}(2\tan\alpha) + \operatorname{sen}(2\operatorname{sen}^{-1}(2\tan\alpha)))}{\pi + (2\operatorname{sen}^{-1}(2\tan\alpha) + \operatorname{sen}(2\operatorname{sen}^{-1}(2\tan\alpha)))}\right)}$$

(b) Primeiro, calculemos h(y)



$$h(y) = h_0 + 2y$$

Num primeiro caso limite, h(y) deve ser igual à $\frac{L}{2}$. Assim:

$$\frac{L}{2} = L\tan\alpha + 2A$$

$$A = \frac{L}{4}(1 - 2\tan\alpha)$$

No outro caso limite, y=h_0.

Como a questão não diz qual acontecerá primeiro, qualquer uma das duas opções será considerada.

$$\boxed{A = \frac{L}{4}(1 - 2\tan\alpha) \text{ ou } A = L\tan\alpha}$$

(c)

$$P = P_1 + P_2$$

$$\frac{P_2}{P_1} = \frac{P_2}{P - P_2} = \frac{L/2 - h(y)}{L/2 + h(y)}$$

$$P_2 = P\frac{L - 2h(y)}{2L} = P\frac{L - 2L\tan(\alpha) - 4y}{2L}$$

$$P_2 = \frac{2P}{L}(A - y) = \frac{dE_2}{dt}$$

$$y = A\cos(\varphi) => |sin(\varphi)| = \frac{\sqrt{A^2 - y^2}}{A}$$

$$v = \frac{dy}{dt} = -wAsin(\varphi) => |dt| \equiv \frac{|dy|}{w\sqrt{A^2 - y^2}}$$

$$\left|\frac{dE_2}{dt}\right| = \left|\frac{dE_2}{dy}\right| w\sqrt{A^2 - y^2} = \frac{2P}{L}(A - y)$$

$$\boxed{\left|\frac{dE_2}{dy}\right| = \frac{P}{\pi f L}\sqrt{\frac{A - y}{A + y}}}$$

3 Questão longa - Leon

A Termodinâmica do Buraco Negro, um dos maiores avanços da astrofísica teórica do século XX, surgiu do esforço para caracterizar esses corpos celestes por sua própria natureza, em vez de apenas considerar seus efeitos no espaço-tempo. Embora o tema exija um conhecimento profundo de física avançada, abordaremos aqui um modelo simplificado, limitando-nos à uma visão clássica e considerando um buraco negro sem carga e sem momento angular, ou seja, um buraco negro de Schwarzschild.

a) Sabendo que a área de um buraco negro depende da sua massa, determine a variação de área que um buraco negro de massa M_B sofrerá ao absorver uma estrela de massa M. Considere $M_B >> M$.

b) No passado, acreditava-se que os buracos negros possuíam entropia igual a zero. No entanto, com o avanço das pesquisas, percebeu-se que isso violaria a segunda lei da termodinâmica. Se um corpo com entropia maior que zero fosse absorvido por um buraco negro, sua entropia seria reduzida a zero, o que é inconsistente com essa lei. Diante desse dilema, o astrofísico Stephen Hawking desenvolveu uma fórmula para a entropia dos buracos negros:

$$S = \frac{AK_bc^3}{4G\hbar}$$

- A é área do buraco negro.
- K_b é a constante de Boltzmann.

- c é a velocidade da luz.
- $\hbar$ é constante de Planck reduzida.

Considerando válida a termodinâmica clássica e sabendo que as transformações não realizam trabalho, encontre a "temperatura do buraco negro".

c) Hawking, em um avanço significativo para a ciência, teorizou que os buracos negros podem emitir uma radiação que segue o padrão da radiação de corpo negro, com um pico de comprimento de onda na temperatura previamente calculada, conhecida como temperatura de Hawking. Através dessa radiação, um buraco negro poderia perder massa. No entanto, a incidência de outro tipo de radiação, a radiação cósmica de fundo, poderia anular o efeito da radiação de Hawking ao prover energia/massa na mesma taxa que o buraco negro expele. Assim, determine a massa de equilíbrio M_E que um buraco negro deve ter para que sua perda de massa pela radiação Hawking seja compensada pela radiação cósmica de fundo, ou seja, a massa na qual ele atinje o equilíbrio térmico. O que acontece se M_B for menor que M_E? E se for maior?

d) Considerando o efeito da radiação cósmica de fundo desprezível, determine a luminosidade do buraco negro de massa M_B em função de $\hbar$, c, G e M_B. Considerando também $\mathrm{M}_B >> M_E$, determine o tempo de vida desse astro.

Dados:

- Constante de Stefan-Boltzmann:

$$\sigma = \frac{\pi^2 K_b^4}{60\hbar^3 c^2}$$

Solução:

(a) Sabendo que o buraco negro de Schwarzschild possui simetria esférica, com raio $r_s = \frac{2Gm}{c^2}$, temos que:

$$A = 4\pi r_s^2 = \frac{16\pi G^2 m^2}{c^4}$$

Assim,

$$\frac{dA}{dm} = \frac{32\pi G^2 m}{c^4} \Rightarrow dA = \frac{32\pi G^2 m dm}{c^4}$$

$$\boxed{dA = \frac{32\pi G^2 M_B M}{c^4}}$$

(b) Pela Termodinâmica Clássica, temos que $dQ = dU - dW$ e que $dQ = TdS$. Como $dW = 0$, temos:

$$T = \frac{dU}{dS}$$

Pela equivalência massa–energia, $dE = dU = dmc^2$, o que resulta em:

$$T = c^2 \frac{dm}{dS}$$

Como $S = \frac{AK_b c^3}{4G\hbar}$, podemos substituir A e descobrir:

$$S = \frac{4\pi G K_b m^2}{\hbar c}$$

Derivando em função da massa:

$$\frac{dS}{dm} = \frac{8\pi G K_b m}{\hbar c}$$

Finalmente, encontramos que:

$$\boxed{T = c^2 \frac{dm}{dS} = \frac{\hbar c^3}{8\pi G K_b} \frac{1}{M_B}}$$

(c) No equilíbrio térmico, $T = T_{cmb}$:

$$T = \frac{\hbar c^3}{8\pi G K_b} \frac{1}{M_B} \Rightarrow M_E = \frac{\hbar c^3}{8\pi G K_b T_{cmb}}$$

Ao contrário do esperado, quando o buraco negro não está em equilíbrio térmico, ele se distancia dele. Se $M_B < M_E$, $T > T_{cmb}$, o que significa que a radiação Hawking supera a radiação CMB, fazendo com que o corpo perca mais massa/energia do que ganha ao longo do tempo. Dessa forma, como a área e a temperatura são diretamente e inversamente proporcionais à massa, nessa ordem, a temperatura vai sempre aumentar enquanto a área diminui, até o ponto em que o astro eventualmente evapore.

De forma contrária, no caso em que $M_B > M_E$, $T < T_{cmb}$, o corpo vai receber mais massa/energia da radiação CMB do que a radiação Hawking é capaz de retirar, resultando numa massa cada vez maior, seguida de uma área também maior e uma temperatura menor.

(d)

$$F = \frac{L}{A} = \sigma T^4$$

$$\boxed{L = \sigma A T^4 = \frac{\pi^2 K_b^4}{60\hbar^3 c^2}\frac{16\pi G^2 m^2}{c^4}(\frac{\hbar c^3}{8\pi G K_b m})^4 = \frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2 m^2}}$$

Nesse caso, a luminosidade advém da perda da energia interna:

$$\frac{\hbar c^6}{15360\pi G^2 m^2} = \frac{-dU}{dt} = -c^2\frac{dm}{dt}$$

$$dt = -\frac{15360\pi G^2 c^2 m^2}{\hbar c^6}dm$$

$$\int_0^{t_v} dt = -\frac{15360\pi G^2 c^2}{\hbar c^6}\int_{M_B}^{0} m^2 dm$$

$$\boxed{t_v = \frac{5120\pi G^2}{\hbar c^4}M_B^3}$$