# 1 Questão curta - Planetário do Hidrogêniomarzio

*Escrito por Leon Luca*

Um certo dia, o professor Hidrogêniomarzio decidiu levar seus alunos para o planetário, a fim de prepará-los para as seletivas presenciais. Chegando lá, ele começou a explicar que adicionar as estrelas no programa de computador para serem exibidas na projeção não era uma tarefa tão fácil, já que as estrelas que deviam ser mais visíveis (as mais conhecidas) não eram necessariamente as maiores, mas sim, geralmente, as mais brilhantes. Além disso, por existir uma diferença muito grande entre os diâmetros das estrelas, uma poderia facilmente ocupar todo o espaço do planetário enquanto outra nem seria visível. Sendo assim, o professor fez as seguintes perguntas para os alunos:

(a) Como você faria para contornar esse desafio? Ou seja, exibir as estrelas de forma que as mais conhecidas (com fluxos geralmente grandes) de maneira mais destacada, mas sem que uma estrela seja muito maior que outra?

O professor, em seguida, disse que o programa calculava o raio da estrela de uma forma semelhante à lei de pogson: $r = k\log(F) + c$, onde $r$ é medido em milímetros. Assim, ele disponibilizou uma espécie de sextante que permitia medir o diâmetro angular das estrelas, e com ela os alunos encontraram o diâmetro angular de Vega e do Sol, que naquele momento estava com magnitude aparente de $-27$mag, encontrando os valores $5,95'$ e $44,2'$, respectivamente. Sendo assim:

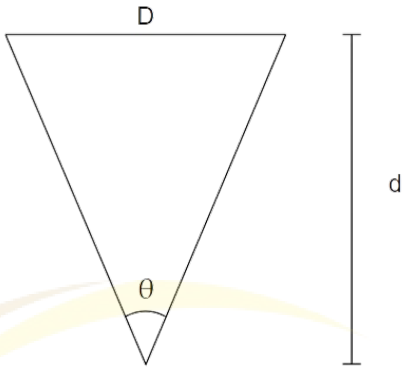
(b) Considerando que eles estavam no centro do planetário, que tem um raio de 10m, qual o valor de $k$?

(d) Como você faria para estimar o tempo sideral local $TSL$ da observação? Justifique sua resposta.

**Solução:**

(a) Para que as estrelas mais destacadas sejam as mais brilhantes, podemos fazer com que o raio seja uma função do fluxo (ou brilho), de forma que, quando mais brilhante, maior seja a estrela. Para que uma estrela não seja muito maior que outra, podemos escolher uma escala logaítmica. Assim, o raio da estrela no projeto seria calculado de acordo com o logaritmo do fluxo dessa mesma estrela.

(b) Primeiro, calcularemos o diâmetro angular em função do raio:




Como $\theta$ é um ângulo pequeno (já que D é dado em milímetros e d em metros), podemos calcular $\tan(\theta) = \theta = \frac{D}{d}$. Assim:

$$D = \theta d$$

Quando analisamos a fórmula que o professor deu, devemos relacionar à lei de pogson:

$$R = klog(F) + c,\ \Delta R = klog\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

$$m = -2,5log(F) + c, \Delta m = -2,5log\left(\frac{F_1}{F_2}\right)$$

Dividindo o primeiro pelo segundo:

$$\frac{\Delta R}{\Delta m} = -\frac{k}{2,5}$$

Reorganizando a equação e substituindo R por D/2:

$$k = -\frac{2,5d\Delta\theta}{2\Delta m}$$

Substituindo os valores, encontramos que:

$$\boxed{k = 5,15 * 10^{-3}m = 5,15mm}$$

(c) Pela fórmula conhecida, temos que $TSL = H_\lambda = H + \alpha$, ou seja, devemos saber o ângulo horário e a ascenção reta. Devemos começar nos localizando no planetário para saber em que hemisfério estamos. Após isso, devemos localizar um dos quatro pontos de equinócio ou solstício, que tem ascenção reta definida e conhecida (de preferência os pontos equinociais, já que estão na eclítica). Localizado, deve-se traçar dois círculos verticais: um que passa pelo polo celeste visível e outro que passa pelo ponto escolhido, e feito isso, deve-se inferir o ângulo horário. Dessa forma, tendo o ângulo horário e a ascenção reta do ponto, basta somar para encontrar o Tempo Sideral Local.

## 2 Questão média - Ramanujan alpinista

*Escrito por Leon Luca*

Durante suas férias no Espírito Santo, Ramanujan encontrou um campo completamente aberto.

a) Movido pela curiosidade, ele decidiu calcular a distância máxima que podia enxergar, levando em conta apenas a curvatura da Terra. Qual valor ele encontrou?

b) Cansado de lugares planos, ele decide escalar a maior montanha da sua cidade. Ao chegar no topo, ele percebe que, com a ajuda de um telescópio, consegue ver seu amigo Leno no horizonte, também de férias na Bahia. Qual a altura da montanha?

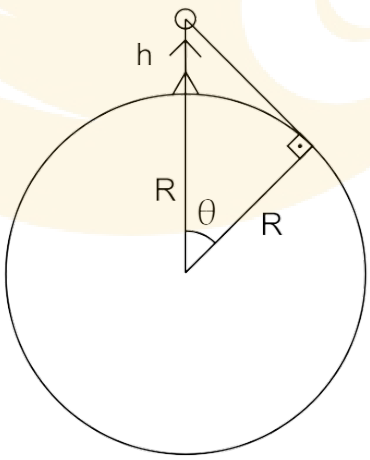
c) Ramanujan gostou tanto do lugar que acabou cochilando, acordando apenas quando o sol estava se pondo. Sabendo que ele começou a escalar quando o sol estava nascendo, quanto tempo se passou entre os dois eventos?

**Dados:**

- Altura de Ramanujan: $h = 2\,\text{m}$
- Raio da Terra: $R = 6.389\,\text{km}$
- Coordenadas da montanha: $\varphi_M = 20°19'\,\text{S}$, $\lambda_M = 40°21'\,\text{O}$
- Coordenadas de Leon: $\varphi_L = 14°17'\,\text{S}$, $\lambda_L = 39°50'\,\text{O}$
- Declinação do Sol: $\delta = 18°$

**Solução:**

a) Para conseguir calcular a distância, primeiro precisamos desenhar o último raio de luz que Ramanujan consegue enxergar:



Percebamos que, no caso do raio que vem de mais longe, ele tangencia a Terra. Pela geometria:

$$\cos\theta = \frac{R}{R+h}$$

Como $h << R$, $\theta \approx 0$, permitindo que se use a aproximação $cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2}$. Assim:

$$\frac{R}{R+h} = 1 - \frac{\theta^2}{2}$$

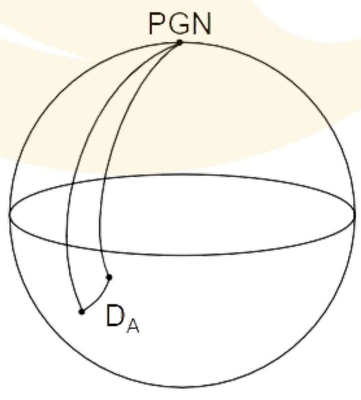
$$\theta \approx \sqrt{\frac{2h}{R}}$$

Esse ângulo que encontramos é a distância angular entre Ramanujan e o ponto observado. Como queremos a distância física, devemos multiplicar pelo raio da Terra:

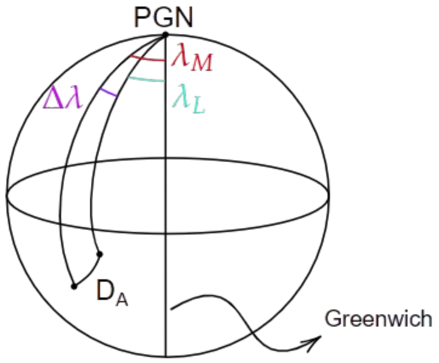
$$d = \theta R = \sqrt{2hR}$$

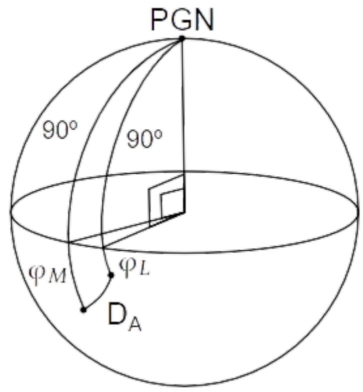
$$\boxed{\theta = 5050m \approx 5km}$$

b) Primeiro, devemos calcular a distância entre a montanha e Leno, através de trigonometria esférica:

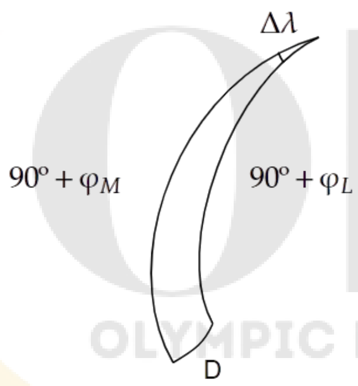



Enxeregando os ângulos e arcos:




Tendo visto os elementos do triângulo esférico, destaquemos ele:




Pela lei dos cossenos para trigonometria esférica:

$$\cos a = \cos b \cos c + \operatorname{sen} b \operatorname{sen} c \cos A$$

Podemos encaixar na situação da questão:

$$\cos D_A = \cos 90 + \varphi_M \cos 90 + \varphi_L + sin 90 + \varphi_M \operatorname{sen} 90 + \varphi_L \cos \Delta\lambda$$

$$\cos D_A = \operatorname{sen} \varphi_L \operatorname{sen} \varphi_L + \cos \varphi_L \cos \varphi_L \cos \Delta\lambda$$

Substituindo, encontramos que $D_A = 6$. Sabendo que essa é a distância ângular entre a Ramanujan no topo da montanha e Leno, a distância linear entre a base da monhtanha (projeção de Ramanujan na esfera terrestre) e Leno é essa distância ângular multiplicada por R.

$$D_L = D_A R$$

Dessa forma, chegamos num caso semelhante à letra (a), e podemos usar a fórmula encontrada lá:

$$D_A R = \sqrt{2HR}$$

$$\boxed{H = \frac{D_A^2 R}{2} = 35,6km}$$

Atente-se que essa altura é tão alta que chega a ser 3 vezes maior que o Monte Everest. Apesar disso, o seu tamanho é desprezível se comparado com o raio da Terra, de forma que a aproximação de $\theta$ pequeno ainda é válida.

c) Aqui, temos de calcular o intervalo de tempo considerando o nascer do sol na base da montanha e o pôr do sol no pico da montanha. Pelo triângulo PAZ (Polo Celeste Visível, Astro, Zênite) e pela lei dos cossenos:

$$\operatorname{sen} h = \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos H$$

No nascer do astro, h=0:

$$0 = \operatorname{sen}\delta \operatorname{sen}\varphi + \cos\delta\cos\varphi\cos H$$
$$\cos H = -\tan\delta\tan\varphi$$

Assim, definimos o horário do nascer e do pôr do sol como:

$$t_1 = 12 - H_1 = 12 - cos^{-1}(-\tan\delta\tan\varphi_M)$$
$$t_2 = 12 + H_2 = 12 + cos^{-1}(-\tan\delta\tan(\varphi_M + D_A))$$

A diferença de latitude é explicada pelo fato de, no topo da montanha, o horizonte mudar. Como ele vai enxergar o raio tangente à Terra vindo de qualquer distância angular $D_A$ (mesmo módulo, mas direções variando), ele vai enxergar o pôr do sol daquela latitude. Logo antes de anoitecer, ele vai enxergar o pôr do sol da maior latitude que consegue enxergar, que vai ser justamente quando a distância angular estiver completamente contida no eixo da latitude. Assim:

$$\Delta t = cos^{-1}(-\tan\delta\tan\varphi_M) + cos^{-1}(-\tan\delta\tan(\varphi_M + D_A))$$

Resolvendo a equação, encontramos:

$$\boxed{\Delta t = 11h13min}$$

# 3 Questão longa - Uma jornada inesperada

*Escrito por Raul Sztutman*

O alienígena Allen, nativo da galáxia de Andrômeda, decidiu visitar o Sistema Solar. Após uma pequena parada no planeta Netuno, a nave de Allen se dirigiu à Terra com velocidade constante, aterrissando após 60 dias de viagem. Ao conversar com um astrônomo terrestre, Allen conheceu a escala de magnitudes criada por Hiparco e decidiu fazer alguns cálculos relacionados às magnitudes aparentes. Ajude Allen com os problemas a seguir:

**Parte A: Magnitudes**

a) Allen quer calcular a magnitude aparente do Sol em Netuno.

b) Allen quer calcular a magnitude aparente do Sol em função de sua distância ao Sol.

c) Allen quer calcular a magnitude aparente do Sol em função do tempo (T) durante seu trânsito de Netuno à Terra. Use o tempo em horas e considere que Allen saiu de Netuno em T=0.

**Parte B: Dilatação extrema**

Ao analisar a fisiologia de Allen (que é um ciclope!), um médico terrestre notou que sua espécie tem um sistema ocular bem similar ao dos humanos, mas com uma diferença impressionante: sua pupila se dilata e se contrai para ter *exatamente* o diâmetro mínimo necessário para enxergar o que Allen deseja observar. Calcule então:

d) O diâmetro da pupila de Allen em função de sua distância ao Sol, quando Allen está olhando para o Sol.

e) O diâmetro da pupila de Allen em função do tempo (T) durante o trajeto de Netuno até a Terra, considerando que Allen passou todo o caminho observando o Sol.

**Dados:**

- Raio da órbita de Netuno: $30,1\,\mathrm{UA}$
- Diâmetro da pupila humana: $6\,\mathrm{mm}$
- Magnitude limite do olho humano: 6
- Albedo da Terra: $\frac{37}{100}$
- Magnitude aparente do Sol a partir da Terra: -26,7
- Raio da Terra: $6350\,\mathrm{km}$
- Massa do Sol: $2 \cdot 10^{30}\,\mathrm{kg}$

**Solução:**

a)

$$m_N - m_T = -2,5log\left(\frac{F_N}{F_T}\right) = 5log\left(\frac{d_N}{d_T}\right)$$

$$m_N = m_T + 5log(d_N)$$

Onde $d_N$ é dado em UA. Substituindo:

$$\boxed{m_N = -26,7 + 5log(30,1) = -19,3}$$

b) Pela letra a):

$$\boxed{m = -26,7 + 5log(d)}$$

Se d é dado em UA.

c)

$$\Delta d = v\Delta t \implies d_t = d_0 - vt$$

$$v = \frac{30,1UA - 1UA}{60 * 24h} = 0,02UA/h$$

Assim:

$$\boxed{m = -26,7 + 5log(30,1 - 0,02t)}$$

d) Como o sistema ocular é bem similar ao humano, vamos supor que a potência mínima que deve ser incidir no olho para que ele consiga enxergar é a mesma para os humanos e ciclopes. Assim:

$$P_H = P_C \implies kF_m d_H^2 = kFd_C^2$$
$$\frac{F}{Fm} = \frac{d_H^2}{d_C^2}$$

$$m_m = -2,5log(F_m)$$

,

$$m = -2,5log(F)$$
$$m = m_m - 2,5log\left(\frac{F}{F_m}\right) = m_m + 5(logd_C - logd_H)$$

Substituindo:

$$m = 6 + 5logd_C - 5log6 = 5logd_C + 2,1 = -26,7 + 5logd$$
$$logd_C = -5,76 + logd$$

$$\boxed{d_C = 1,74 * 10^{-6} log(d)}$$

Onde $d_C$ é dado em mm e $d$ em UA.

e) Pelo item c):

$$\boxed{d_C = 1,74 * 10^{-6} log(30,1 - 0,02t)}$$