Estratégias introdutórias

Guilherme Galvão de Oliveira Pinto - Olympic Birds

5 de Agosto de 2024

1 Estados e Processos

Nesse material veremos uma série de problemas que envolvem a análise de processos ou estados. Você certamente já se deparou com (bons :p) problemas olímpicos que descrevem jogos ou processos, ou ainda que perguntam se é ou não possível realizar algo, pois bem, tal técnica possui uma vasta aplicação que não se limita em apenas combinatória, mas também se faz presente em teoria dos números, álgebra e até mesmo em geometria!

Primeiramente, vejamos algumas dicas importantes antes de irmos à resolução:

Comece pelos casos pequenos!! Quando nos deparamos com problemas olímpicos, somos levados a entender o que está ocorrendo, e é através dos casos pequenos que fazemos o reconhecimento do processo e/ou encontramos padrões ou anomalias neste. Boas soluções surgem de casos pequenos!

"Ok! Acho que encontrei um padrão. Consigo provar que ele se mantém?". Ao encontrar um padrão, devemos provar que este é estável, ou seja, que é realmente um padrão. Mas seja cuidadoso! Em casos pequenos podemos também ter casos específicos, e aí corremos o risco de provar apenas uma parte do problema, por isso, faça muitos casos pequenos se for necessário.

Não se limite a apenas uma ideia, se for necessário, retorne ao marco zero e comece novamente com outra ideia, dessa vez você já conhece melhor o problema!

Só porque o problema é da IMO não quer dizer que você não pode encará-lo. Isso vale para qualquer problema! Não se limite ao ver algo difícil, boa parte dos alunos desistem ao verem o nome de uma prova ou de alguma técnica da qual não têm conhecimento, mas ora, que sentido faria se você já começasse sabendo a solução ou a técnica usada?!

Cada problema possui uma ou mais técnicas que podem ser simples mas aplicadas de forma específica. Aprecie, aprenda e as guarde em sua caixa de ferramentas, e, se por acaso não entender alguma nomenclatura, técnica ou passagem, não hesite em pedir ajuda a algum colega, livro/material ou internet. Este material poderia facilmente ser feito sem título, ou seja, não se trata de um assunto que deve ser estudado previamente.

Somente olhar a solução não te leva a lugar algum, então, antes de ir à solução, leia, pense, rabisque bastante, faça casos pequenos, e teste sempre novas ideias, uma de cada vez. O mais importante aqui não é essencialmente que você consiga resolver o problema, mas adquirir novas técnicas de resolução que possam ser aprimoradas, reutilizadas ou recicladas para problemas futuros.

Se puder, arrume um CADERNÃO, e o use para rabiscar soluções (é importante ter um rascunho, e, se possível, organizado). Não precisa escrever a solução de cada questão detalhada, afinal, ninguém quer perder muito tempo e seu cadernão não estará presente no dia da prova :), mas se houver aquele problema carregado de ideias, lemas, teoremas ou técnicas boas, esse sim vale a pena! Para treinar a escrita da solução, faça vários simulados!

2 Problemas Resolvidos

Vamos aos problemas resolvidos!

Primeiro, vejamos um problema simples, onde olhar para o processo é importante:

2.1 Exemplo 1

(Engel) No parlamento de Sikinia, cada membro tem no máximo três inimigos. Prove que os membros podem ser separados em duas casas de modo que cada membro tenha no máximo um inimigo em sua casa.

Solução:

Inicialmente, separamos os membros de qualquer forma nas duas casas. Seja **S** a soma total de todos os inimigos que cada membro tem em sua própria casa. Agora, suponha que um membro M tenha pelo menos dois inimigos em sua própria casa. Então ele tem no máximo um inimigo na outra casa. Se M trocar de casa, o número **S** diminuirá. Essa diminuição não pode continuar para sempre. Logo, em algum momento, **S** atinge seu mínimo absoluto. Então, alcançamos a distribuição necessária.

O que fizemos foi definir uma função positiva **S** que diminui a cada passo do algoritmo. Então, sabemos que nosso algoritmo terminará. Não há sequência infinita estritamente decrescente de inteiros positivos. **S** não é rigorosamente um invariante, mas diminui monotonicamente até se tornar constante. Aqui, a relação de monotonicidade é a invariante (chamamos isso de monoinvariante!). No próximo problema veremos como às vezes definir uma função como a anterior não é tão evidente, embora seja uma ideia chave para uma rápida solução.

2.2 Exemplo 2

O próximo é da 27ª Olimpíada Internacional de Matemática (IMO 1986) e ilustra como às vezes a ideia chave para a solução pode estar disfarçada ou não ser tão natural.

(IMO 1986) É atribuído um inteiro a cada um dos vértices de um pentágono regular, de tal forma que a soma dos cinco números seja positiva. Se três vértices consecutivos recebem os números **x**, **y**, **z**, respectivamente, e **y** $<$ **0**, então a seguinte operação é permitida: os números **x**, **y**, **z** são trocados por **x**+**y**, **-y**, **z**+**y**, respectivamente. Tal operação é repetida enquanto houver um número negativo entre os cinco atribuídos. Determine se este processo necessariamente se encerra após um número finito de aplicações de tal operação.

Solução:

O processo sempre termina. Defina a função não-negativa $f(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4,\, x_5)$, onde x_1, x_2, x_3, x_4 e x_5 são os valores nos vértices do pentágono:

$$f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = \sum_{i=1}^{5} (x_i - x_{i+2})^2$$

Considere os índices de forma cíclica, isto é, $x_6 = x_1$ e $x_7 = x_2$.

Suponha que $y = x_4 < 0$. Então, $f_{novo} - f_{antigo} = 2(x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5)x_4 < 0$, uma vez que $S = x_1+x_2+x_3+x_4+x_5 > 0$ (Por que?) e $x_4 < 0$. Se o processo não terminasse, encontraríamos uma sequência decrescente infinita composta de inteiros não-negativos: $f_0 > f_1 > f_2 > ...$ e tal sequência não existe!

Observação:

O que fizemos foi definir uma função $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ que podemos chamar carinhosamente de "função de estado", pois esta caracteriza um estado do processo e muda de um estado i (f_i) para o próximo estado i+1 (f_{i+1}).

Não se preocupe se não conseguiu perceber tal função, em problemas do tipo é comum tais coisas estarem muito bem disfarçadas. Por isso, é importante praticar muito com bons problemas.

*Você consegue dizer o porquê de inicialmente a soma dos números ser positiva?

2.3 Exemplo 3

A seguir veremos um problema com enunciado simples mas que possui uma solução incrivelmente elegante que faz uma combinação de invariantes/monoinvariantes com paridade e binários:

(IMO 2009/SL) Considere 2009 cartas, cada uma com um lado dourado e um lado preto, dispostas paralelamente numa mesa. Inicialmente todas as cartas mostram seus lados dourados. Dois jogadores, posicionados do mesmo lado da mesa, fazem movimentos alternados. Cada movimento consiste em escolher um bloco de 50 cartas consecutivas, a mais à esquerda mostrando dourado, e virando-as todas. Então, aquelas que mostravam dourado agora mostram preto e vice-versa. O último jogador que pode fazer um movimento vence.

(a) O jogo termina necessariamente?

(b) Existe uma estratégia vencedora para o primeiro jogador?

Solução:

a) Inicialmente temos que as 2009 cartas mostram seu lado dourado. Façamos então a seguinte atribuição: 1 para dourado, 0 para preto. Note que, incialmente, temos o seguite:

$$\begin{array}{c} \text{D D D ... D} \\ \vee \\ \text{1 1 1 ... 1} \end{array}$$

Onde a sequência será um binário de 2009 dígitos iguais a 1.

Para efetuarmos uma jogada, devemos ter a carta mais à esquerda sendo dourada. Considerando em binários, devemos ter o dígito mais a esquerda igual à 1:

$$\cdots\ \overbrace{\boxed{D\ \ldots\ldots}}^{50}\ \cdots$$
$$\vee$$
$$\cdots\ \underbrace{\boxed{1\ \ldots\ldots}}_{50}\ \cdots \xrightarrow{\text{efetuando a jogada}} \cdots\ \underbrace{\boxed{0\ \ldots\ldots}}_{50}\ \cdots$$

Note que nosso binário de 50 dígitos que começa com 1 se transforma num binário de 50 dígitos que começa com 0, ou seja, passamos a ter um binário menor! Logo, a cada jogada, o valor do binário inicial vai diminuindo, e, como este não pode diminuir indefinidamente, o jogo deve terminar em algum momento.

b) Para a segunda parte do problema, enumeremos as cartas da direita para a esquerda.

Seja S o conjunto das cartas cujos números são 50, 100, 150, ..., 2000. Note que S tem 40 elementos, ou seja, 40 cartas.

Inicialmente, todas estas estão douradas, mas, a cada jogada, uma delas sempre é virada-exatamente uma (Por que?).

Inicialmente temos estas 40 cartas douradas, ou seja, uma quantidade par. Após a primeira jogada teremos que uma destas é virada e, passamos a ter uma quantidade ímpar de douradas.

Consegue perceber algo?

Na vez do jogador 2 jogar, sempre haverá uma quantidade ímpar de tais cartas. Ou seja, sempre haverá ao menos uma carta dourada a partir da qual o jogador 2 consegue efetuar sua jogada, pois, se não houvesse, teríamos zero (que não é ímpar) cartas douradas, uma contradição com o fato de a paridade da quantidade de cartas douradas sempre ímpar na vez do jogador 2.

Logo, o primeiro jogador não possui uma estratégia vencedora.

2.4 Exemplo 4

E que tal um exemplo com tabuleiros?!

(IMO 1989/SL) Um número natural é escrito em cada quadrado de um tabuleiro de xadrez **m** x **n**. O movimento permitido é adicionar um inteiro **k** a cada um dos dois números adjacentes de tal forma que números não negativos sejam obtidos (dois quadrados são adjacentes se eles compartilham um lado comum). Encontre uma condição necessária e suficiente para que seja possível que todos os números sejam zero após um número finito de operações.

Solução:

Observe que em cada movimento, estamos adicionado o mesmo número a dois quadrados, um dos quais é branco e outro preto. Se S_b e S_w denotam a soma dos números nos quadrados pretos e brancos, respectivamente, então $w_b - w_w$ é um invariante. Portanto, se todos os números forem 0 no final, $S_b - S_w = 0$ no final e, portanto, $S_b - S_w = 0$ no começo também. Essa condição é, portanto, necessária; agora provemos que é suficiente.

Suponha que a, b, c sejam números nas células A, B, C, respectivamente, onde A, B, C são células tais que A e C são ambas adjacentes à B. Se a $\leq$ b, podemos adicionar (-a) a ambos a e b, tornando a=0. Se a $\geq$ b, adicione (a-b) em b e c. Então b se torna a, e agora podemos adicionar (-a) a ambos eles, tornando-os 0. Assim, temos um algoritmo para reduzir um inteiro positivo a 0. Aplique isso em cada linha, fazendo com que todas, exceto as duas últimas entradas, sejam 0. Agora todas as colunas têm apenas zeros, exceto as duas últimas. Agora aplique o algoritmo começando do topo destas colunas, até que apenas dois números adjacentes diferentes de zero permaneçam. Esses dois últimos números devem ser iguais, pois $S_b = S_w$. Assim, podemos reduzir eles a 0 também.

2.5 Exemplo 5

O problema a seguir apresenta uma ideia incrível onde a estratégia de encarar o problema de forma global pode ser a ideia chave para a solução.

(IMO 2014/SL) Temos 2^m folhas de papel, com o número 1 escrito em cada uma delas. Realizamos a seguinte operação. Em cada passo, escolhemos duas folhas distintas; se os números nas duas folhas são **a** e **b**, então apagamos esses números e escrevemos o número **a+b** em ambas as folhas. Prove que após $m \cdot 2^{m-1}$ passos, a soma dos números em todas as folhas é pelo menos 4^m.

Solução:

Seja P_k o produto dos números das folhas depois de k turnos. No (k+1)-ésimo turno, trocamos a e b por (a+b) em ambas as folhas. Daí, temos que:

$$P_{k+1} = \frac{(a+b)^2}{ab} \cdot P_k \implies \boxed{P_{k+1} \geq 4P_k}$$

Sendo usado que $(a+b)^2 \geq 4ab$, fato que é verdade, nos rais positivos, se e somente se, $(a-b)^2 \geq 0$.

Como $P_0 = 1$, então, por produto telescópico (ou indução), podemos concluir que $P_k \geq 4^k \cdot P_0$, ou seja, $P_k \geq 4^k$. Para $k = m \cdot 2^{m-1}$, temos que:

$$P_{m \cdot 2^{m-1}} \geq 4^{m \cdot 2^{m-1}} = (2^2)^{m \cdot 2^{m-1}} = (2^m)^{2^m} \implies \boxed{P_{m \cdot 2^{m-1}} \geq (2^m)^{2^m}}$$

Por $MA \geq MG$, resultado que podemos usar pois estamos sempre dentro dos reais positivos, podemos concluir que a soma S dos números escritos nas 2^m folhas após $m2^{m-1}$ turnos é no mínimo:

$$\frac{S}{2^m} \geq \sqrt[2^m]{P_{m \cdot 2^{m-1}}} \geq \sqrt[2^m]{(2^m)^{2^m}} \implies S \geq 2^m \cdot 2^m \implies \boxed{S \geq 4^m}$$

3 Problemas Propostos

Problema 1. (OBM 2018)

Escreve-se, inicialmente, os números 1, 2, 3, ... 10 em um quadro. Uma operação consiste em deletar os números a, b e escrever o número $a+b+\frac{ab}{f(a,b)}$, onde $f(a,b)$ é a soma de todos os números no quadro, excluindo a e b. Isso será feito até restarem dois números x, y com $x \geq y$. Encontre o valor máximo de x.

Questão no AoPS

Problema 2. (USAMO 1999)

O Jogo Y2K é jogado em uma grade de 1×2000 da seguinte forma. Dois jogadores, alternadamente, escrevem um S ou um O em um quadrado vazio. O primeiro jogador que formar a sequência SOS em três quadrados consecutivos vence. Se todos os quadrados forem preenchidos sem formar SOS, o jogo termina em empate. Prove que o segundo jogador tem uma estratégia vencedora.

Questão no AoPS

Problema 3. (USAMO 2004)

Alice e Bob jogam um jogo em uma grade de 6 por 6. Em seu turno, um jogador escolhe um número racional que ainda não apareceu na grade e escreve em um quadrado vazio da grade. Alice começa e os jogadores alternam. Quando todos os quadrados estiverem preenchidos, em cada linha, o quadrado com o maior número nessa linha é colorido de preto. Alice vence se ela puder desenhar uma linha do topo ao fundo da grade que passe pelos quadrados pretos. Bob vence se ela não puder fazer isso. (Se dois quadrados compartilham um vértice, Alice pode desenhar uma linha de um para o outro que passe por esses dois quadrados.) Encontre, com prova, uma estratégia vencedora para um dos jogadores.

Questão no AoPS

Problema 4. (IMO 1994/SL)

Pedro tem três contas em um banco, cada uma com um número inteiro de dólares. Ele só pode transferir dinheiro de uma conta para outra de forma que o valor na conta de destino seja dobrado. Prove que Pedro pode sempre transferir todo o seu dinheiro para duas contas. Pedro pode sempre transferir todo o seu dinheiro para uma conta?

Questão no AoPS

Problema 5. (Ibero 2000)

Há um monte de 2000 pedras. Dois jogadores jogam alternadamente, seguindo as seguintes regras:

(a) Em cada turno, o jogador pode pegar 1, 2, 3, 4 ou 5 pedras do monte.

(b) Em cada turno, o jogador está proibido de pegar a mesma quantidade de pedras que o outro jogador pegou no turno anterior.

Perde o jogador que não puder fazer uma jogada válida. Determine qual jogador tem uma estratégia vencedora e forneça tal estratégia.

Questão no AoPS

Problema 6. (Cone Sul 2020)

Há uma pilha com 15 moedas em uma mesa. A cada passo, Pedro escolhe uma das pilhas na mesa com $a > 1$ e a divide em duas pilhas com $b \geq 1$ e $c \geq 1$ moedas, escrevendo no quadro o produto abc. Ele continua até haver 15 pilhas com 1 moeda cada. Determine todos os valores possíveis que a soma final dos números no quadro pode ter.

Questão no AoPS

Problema 7. (Ibero 2014)

N moedas são colocadas sobre uma mesa, $N - 1$ são genuínas e têm o mesmo peso, e uma é falsa, com um peso diferente. Usando uma balança de dois pratos, o objetivo é determinar com certeza qual é a moeda falsa e se ela é mais leve ou mais pesada que uma moeda genuína. Sempre que se deduzir que uma ou mais moedas são genuínas, elas serão imediatamente descartadas e não poderão mais ser usadas em pesagens subsequentes. Determine todos os N para os quais o objetivo é alcançável. (Não há limites quanto ao número de vezes que se pode usar a balança).

Nota: a única diferença entre as moedas genuínas e a falsa é o peso; caso contrário, elas são idênticas.

Questão no AoPS

Problema 8. (OBM 2022)

Um jogo de um único jogador tem as seguintes regras: inicialmente, há 10 pilhas de pedras com $1, 2, ..., 10$ pedras, respectivamente. Um movimento consiste em fazer uma das seguintes operações:

i) Escolher 2 pilhas, ambas com pelo menos 2 pedras, combiná-las e depois adicionar 2 pedras à nova pilha;

ii) Escolher uma pilha com pelo menos 4 pedras, remover 2 pedras dela e depois dividi-la em duas pilhas com a quantidade de pedras a ser escolhida pelo jogador.

O jogo continua até que não seja possível fazer uma operação. Mostre que o número de pilhas com uma pedra no final do jogo é sempre o mesmo, independentemente de como os movimentos são feitos.

Questão no AoPS

Problema 9. (OBM 2012)

Em um cultivo de bactérias, existem duas espécies delas: bactérias vermelhas e azuis.

Quando duas bactérias vermelhas se encontram, elas se transformam em uma bactéria azul.

Quando duas bactérias azuis se encontram, elas se transformam em quatro bactérias vermelhas.

Quando uma bactéria vermelha e uma azul se encontram, elas se transformam em três bactérias vermelhas.

Encontre, em função da quantidade de bactérias azuis e vermelhas inicialmente no cultivo, todos os possíveis quantitativos de bactérias, e para cada quantitativo possível, as possíveis quantidades de bactérias vermelhas e azuis.

Questão no AoPS

Problema 10. (IMO 2017)

É dado um inteiro $N \geq 2$. Uma coleção de $N(N+1)$ ogadores de futebol, nenhum dos quais tem a mesma altura, está em fila. Sir Alex quer remover $N(N-1)$ jogadores dessa fila, deixando uma nova fila de $2N$ jogadores na qual as seguintes N condições se mantêm:

(1) Ninguém está entre os dois jogadores mais altos,

(2) Ninguém está entre o terceiro e quarto jogadores mais altos,

$\vdots$

(N) Ninguém está entre os dois jogadores mais baixos.

Mostre que isso é sempre possível.

Questão no AoPS

Problema 11. (OBM 2023)

Seja n um inteiro positivo. A humanidade começará a colonizar Marte. As agências SpaceY e SpaceZ serão responsáveis por viajar entre os planetas. Para evitar que os foguetes colidam, eles viajarão alternadamente, com a SpaceY fazendo a primeira viagem. Em cada viagem, a agência responsável realizará um dos dois tipos de missão:

(i) Escolher um inteiro positivo k e levar k pessoas para Marte, criando uma nova colônia no planeta e estabelecendo-as nessa colônia;

(ii) Escolher uma colônia existente em Marte e um inteiro positivo k stritamente menor que a população dessa colônia, e trazer k pessoas dessa colônia de volta à Terra.

Para manter a organização em Marte, uma missão não pode resultar em duas colônias com a mesma população e o número de colônias deve ser no máximo n. A primeira agência que não conseguir realizar uma missão irá à falência. Determine, em termos de n, qual agência pode garantir que não irá à falência primeiro.

Questão no AoPS