1 Questão Curta: Átomo de hidrogênio

Escrito por William Alves

Um átomo de hidrogênio que inicialmente se encontra em repouso emite um fóton, o que indica uma transição do estado de energia **n** para seu estado fundamental n_o. Em seguida, o átomo atinge um elétron em repouso permanecendo junto a ele após o contato. Determine a velocidade do sistema após a colisão em função da energia do fóton em seu estado fundamental $\mathbf{E_o}$, da velocidade da luz **c**, da massa do átomo **m**, e de **n**.

Solução:

Com o átomo de hidrogênio inicialmente em repouso, conservando a quantidade de movimento, o momento do fóton (que é o mesmo do átomo) será:

$$\Rightarrow \Delta p = 0 \Rightarrow p_{\text{átomo}} = p_{\text{fóton}} = \frac{hv}{c}$$

A partir disso, considerando os dados do enunciado, a energia de emissão de um fóton pode ser escrita como:

$$\Rightarrow E_{\text{fóton}} = E_o\left(\frac{1}{n^2} - \frac{1}{n_o^2}\right) \Rightarrow E_{\text{fóton}} = E_o\left(\frac{n_o^2 - n^2}{n^2}\right)$$

Onde **n** indica o estado e n_o o estado fundamental. Considerando n_o como 1 e desenvolvendo a expresão de energia temos:

$$\Rightarrow E_{\text{fóton}} = h \cdot v = p_{\text{átomo}} \cdot c \Rightarrow v_{\text{átomo}} \cdot m_{\text{átomo}} \cdot c = E_o\left(\frac{1 - n^2}{n^2}\right)$$

$$\Rightarrow v_{\text{átomo}} = \frac{E_o}{m_{\text{átomo}} \cdot c}\left(\frac{1 - n^2}{n^2}\right)$$

Já que a massa do átomo de hidrogênio é muito maior que a massa do elétron temos que a velocidade do sistema é igual à velocidade do átomo :

$$\Rightarrow \boxed{v_{\text{átomo}} = -\frac{E_o}{m_{\text{átomo}}.c}\left(\frac{n^2-1}{n^2}\right)}$$

2 Questão Média: Trabalho de um sistema de cargas

Escrito por Tiago Rocha

Considere que nós trazemos uma carga q_1 para uma região sem carga. Depois, a essa mesma região, trazemos cargas $q_2, q_3, \ldots, q_n$, uma de cada vez. A separação entre as cargas 1 e 2 é r_{12}, entre as cargas 2 e 3 é r_{23} e assim por diante. Considere que todas as cargas fiquem fixas após serem colocadas. Chame a constante eletrostática do meio de k.

a) Considere $n = 3$ cargas. Calcule a energia potencial elétrica dessa configuração.

b) Qual a quantidade de trabalho necessário para criar a situação do item **a)**?

c) Agora, generalizeo resutado e obtenha o trabalho necessário para criar um sistema com N cargas.

Solução:

a) Usando a fórmula para a energia potencial elétrica de duas cargas pontuais, nós devemos somar a energia relacionada à interação de cada par de cargas para obter a energia total:

$$\boxed{E = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}}$$

b) No começo, antes de trazermos as cargas para a região de interesse, a energia total do sistema era 0, já que elas estavam infinitamente distantes umas das outras. Logo, toda energia que o sistema obteu após a aproximação das cargas deve vir do trabalho realizado, por causa da conservação de energia. Logo:

$$\boxed{W = E = \frac{kq_1q_2}{r_{12}} + \frac{kq_1q_3}{r_{13}} + \frac{kq_2q_3}{r_{23}}}$$

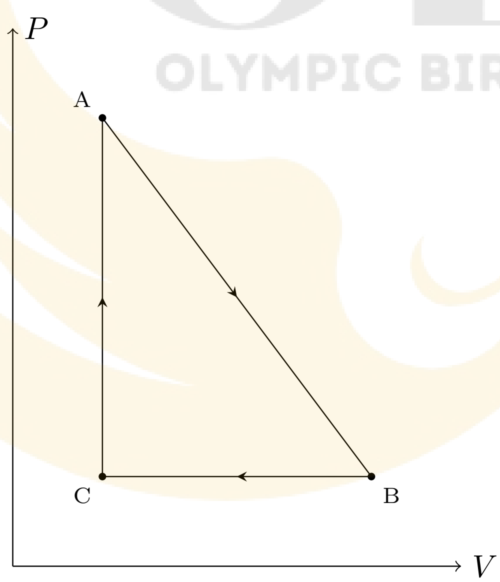
c) Percebe-se pelo item **a)** que devemos somar a interação de cada partícula. Contudo, devemos ter um cuidado especial com essa conta, pois a energia da interação entre cargas x com y é a mesma que a de y com x. Logo, se fizermos a conta dessa maneira, teríamos repetido cada resultado duas vezes, fazendo assim que a enrgia contada ficasse duas vezes maior. Logo, usando a relação encontrada no item b), podemos representar o trabalho através do somatório:

$$\boxed{W = E = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\frac{kq_iq_j}{r_{ij}}}$$

3 Questão Longa: Transformação retilínea

Escrito por Guilherme Rodrigues

Considere um ciclo termodinâmico no gráfico $P \times V$, onde o segmento $\overline{AB}$ é uma reta. Sabendo que os pontos A e B possuem a mesma temperatura.



a) Determine o intervalo em que a reta é uma transformação endotérmica ou exotérmica.

b) Apresente o volume do ponto de mudança de comportamento.

c) Encontre a equação que determine a variação de calor de uma transformação definida pela reta $\overline{AB}$, com base em V_0(volume inicial) e V_F(volume final).

d) Calcule o rendimento η como uma máquina térmica.

Dados: $V_A + V_B = K$; $C_v = \alpha R$ onde R é a constante dos gases ideais, V_A é o volume do gás no ponto A e V_B é o volume do gás no ponto B.

Solução:

I) a equação da reta $\overline{AB}$ é $P = \frac{P_A - P_B}{V_A - V_B}V + (P_A + P_B)$, pelo fato dos pontos serem isotérmicos tem-se $P_A V_A = P_B V_B$, logo $P = -\frac{P_B}{V_A}V + (P_A + P_B)$ com isso é possível se obter o diferencial da pressão em função do diferencial do volume, $dP = -\frac{P_B}{V_A}dV$.

II) usando a primeira lei da termodinâmica temos:

$$Q = \tau + \Delta U$$

derivando obtem-se

$$dQ = d\tau + dU$$

onde dQ interpreta-se com a variação infinitesimal de calor, logo $dQ = 0$, $dQ > 0$ e $dQ < 0$ representam, respectivamente, uma reação adiabática, endotérmica e exotérmica. $d\tau = PdV$, $dU = nC_v dT$, onde $C_v = \alpha R$ assim $du = n\alpha R dT$.

no ponto de mudança onde $dQ = 0$

$$dQ = PdV + n\alpha R dT = 0$$

$$PdV = -n\alpha R dT$$

$$P = -n\alpha R \frac{dT}{dV}$$

III) Usando a equação de clapeyron $PV = nRT$

$$VdP + PdV = nRdT = -V\frac{P_B}{V_A}dV + PdV$$

$$\frac{dT}{dV} = \frac{1}{nR}(-V\frac{P_B}{V_A} + P)$$

IV) aplicando III e I em II:

$$P = \frac{-n\alpha R}{nR}(-V\frac{P_B}{V_A} + P)$$

$$P = -\alpha(-V\frac{P_B}{V_A} + P)$$

$$P + \alpha P = P(1+\alpha) = \frac{V\alpha P_B}{V_A}$$

$$P = -\frac{P_B}{V_A}V + (P_A + P_B) = \frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{VP_B}{V_A}$$

$$\frac{\alpha}{1+\alpha}\frac{VP_B}{V_A} + \frac{P_B}{V_A}V = P_A + P_B$$

$$V\frac{P_B}{V_A}(\frac{1+2\alpha}{1+\alpha}) = P_A + P_B$$

$$V = \frac{1+\alpha}{1+2\alpha}V_A(\frac{P_A}{P_B} + 1) = \frac{1+\alpha}{1+2\alpha}(V_A + V_B)$$

$$\boxed{V = \frac{1+\alpha}{1+2\alpha}K}$$

V) Para $dQ > 0$

$$V < \frac{1+\alpha}{1+2\alpha}K$$

Para $dQ < 0$

$$V > \frac{1+\alpha}{1+2\alpha}K$$

A) Logo para valores no intervalo de $\left(V_A\ ;\ \frac{1+\alpha}{1+2\alpha}K\right]$ a reação será endotérmica, e para valores no intervalo de $\left[\frac{1+\alpha}{1+2\alpha}K\ ;\ V_B\right)$ será exotérmica.

B) O volume do ponto de mudança de comportamento será:

$$\boxed{V = \frac{1+\alpha}{1+2\alpha}K}$$

C) I) Usando a primeira lei da termodinâmica:

$$Q = \tau + \Delta U$$

II) O trabalho pode ser encontrado pela análise do gráfico como sua área:

$$\tau = \frac{(P_0 + P_F)(V_F - V_0)}{2}$$

III) A variação de energia interna pode ser encontrada integrando a equação $dU = n\alpha R dT$, trocando a variável dT por dV através do item III) anterior:

$$dT = \frac{1}{nR}(-\frac{P_B}{V_A}VdV - \frac{P_B}{V_A}VdV + (P_A + P_B)dV)$$

$$\int_{U_0}^{U_F} dU = \alpha(-2\frac{P_B}{V_A}\int_{V_0}^{V_F} VdV + (P_A + P_B)\int_{V_0}^{V_F} dV)$$

$$\Delta U = \alpha[-2\frac{P_B}{V_A}(\frac{V_F^2}{2} - \frac{V_0^2}{2}) + (P_A + P_B)(V_F - V_0)]$$

$$\Delta U = (V_F - V_0)\alpha(-\frac{P_B}{V_A}(V_F + V_0) + P_A + P_B)$$

IV) Aplicando III) e II) em I):

$$Q = \frac{(P_0 + P_F)(V_F - V_0)}{2} + (V_F - V_0)\alpha(-\frac{P_B}{V_A}(V_F + V_0) + P_A + P_B)$$

$$\boxed{Q = -(V_F^2 - V_0^2)\frac{P_B(1 + 2\alpha)}{2V_A} + (V_F - V_0)(P_A + P_B)(1 + \alpha)}$$

D) I) O rendimento de uma máquina térmica se dá por $\eta = \frac{\tau}{Q_q}$ II) Q_q é o calor fornecido ao sistema pela fonte quente ou seja é todo o calor endotérmico do sistema que se dá pelo calor de C para A e de A para B

$$Q_q = nC_v(\frac{P_A V_A}{nR} - \frac{P_B V_B}{nR}) + \frac{(P_A + P_B)(V_B - V_A)}{2}$$

$$Q_q = \alpha V_A(P_A - P_B) + \frac{(P_A + P_B)(V_B - V_A)}{2}$$

III) O trabalho τ se obtém analisando o gráfico:

$$\tau = \frac{(P_A + P_B)(V_B - V_A)}{2}$$

IV) Aplicando II) e III) em I) temos:

$$\boxed{\eta = \frac{(P_A + P_B)(V_B - V_A)}{2\alpha V_A(P_A - P_B) + (P_A + P_B)(V_B - V_A)}}$$