1 Questão: Binomiais funcionais

Escrito por Kauan Emanuel
Considere função $f : N \to N$, tal que $f(x) = \binom{2x+1}{x}$. Seja O e B, respectivamente, a soma dos números e do quadrado dos números correspondentes as afirmações corretas. O valor de $O \times B$ é:

1. f é injetora
2. f é sobrejetora
3. f pode ser escrita como $\sum_{k=0}^{x} \binom{x+1}{x-k}\binom{x}{k}$
4. f é crescente
5. $f(2024) = \sum_{n=0}^{2024} \binom{4049-n}{2024-n}$

a) Quadrado perfeito
b) Múltiplo de 7
c) Divisível por 10
d) Ímpar
e) NDA

Solução:

1. Veja que a função assume valores diferentes para cada x, uma vez que os binômios se deslocam entre linhas e colunas do Triângulo de Pascal (esse teste você mesmo pode fazer), ou seja, nunca haverá um resultado $\binom{2a+1}{a} = \binom{2b+1}{b}$ que não seja $a = b$. Logo, f é injetora.
2. Note que a função também não assume todos os possíveis valores inteiros contidos no contradomínio da função. Para verifcar esse fato, basta calcular os f iniciais, como 1 e 2, visualiando que alguns valores não possuem correspondentes no eixo x pelo crescimento da função. Então, o item 2 é falso, pois f não sobrejetiva.

3. Pela Identidade de Vandermont, $\binom{m+n}{p} = \sum_{k=0}^{p} \binom{m}{k}\binom{n}{p-k}$, ou seja, $\binom{2x+1}{x} = \binom{(x)+(x+1)}{x} = \sum_{k=0}^{x} \binom{x+1}{x-k}\binom{x}{k}$, o que torna o item 3 verdadeiro.
4. No item 1 vimos que f é injetiva. Sendo assim, a partir da verificação do item 1, voc e consegue facilmente perceber que f támbem é cresnte, pois $f(k+1) > f(k)$.
5. Calculando o $f(2024)$, temos que ele é o binomial $\binom{4049}{2024}$. Pela propriedade da diagonal do Triângulo de Pascal, é fácil perceber que o valor de $f(2024)$ será o somatório apresentado, o que torna o item 5 verdadeiro.

$O = 1 + 3 + 4 + 5 = 13$ e $B = 1 + 3^2 + 4^2 + 5^2 = 51$. Logo, $O \times B = 13 \times 51 = 663$, que é ímpar.

Resposta: (d)

2 Questão: Complexos trigonométricos

Escrito por Kauan Emanuel
Sabendo que $cos\alpha = \frac{1}{5}$ e que $C = \sum_{k=0}^{\infty} cosk\alpha$, determine:
a) O valor de C.
b) O valor de $arg(z) - arg(1/3)$, sabendo que $z = 2C + i\sqrt{3}$

Solução:

a) Note que a soma da questão é uma PA de cossenos. Desssa forma, vamos criar outra soma com a mesma PA e número de elementos, com a diferença que a soma será de senos.

$S = \sum_{k=0}^{\infty} cosk\alpha$
$C = \sum_{k=0}^{\infty} senk\alpha$

Multiplicando a equação S por i e somando as duas equações temos:

$C + iS = \sum_{k=0}^{\infty} cosk\alpha + i\sum_{k=0}^{\infty} senk\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} cisk\alpha.$

Agora temos uma PG infinita de razão $cis\alpha$, logo:

$C + iS = \frac{a_1}{1-q} = \frac{cis0}{1-cis\alpha} = \frac{1}{2icis(\alpha/2)sen(\alpha/2)} = \frac{-i(cos(-\alpha/2)+isen(-\alpha/2))}{2sen(\alpha/2)}$

Como o item pede o valor de C, queremos a sua parte real. Então:
$C = \frac{-sen(-\alpha/2)}{2sen(\alpha/2)} \therefore C = \frac{1}{2}$

Resposta: $C = \frac{1}{2}$

b) Pelo item A, obtemos que $z = 2\frac{1}{2} + 2\frac{\sqrt{3}}{2} = 2cis60.$

Sabe-se que $arg(z_1) - arg(z_2) = arg(\frac{z_1}{z_2})$ e que $arg(z) = \frac{y}{x}$, com $z = x + iy$ Dessa maneira:

$arg(z) - arg(1/3) = arg(\frac{z}{3+i}) = arg(\frac{1+i\sqrt{3}}{3+i}) = arg(\frac{3-\sqrt{3}+i(3\sqrt{3}-1)}{10})$
$\therefore arg(z) - arg(1/3) = arg(\frac{4\sqrt{3}-6}{3})$

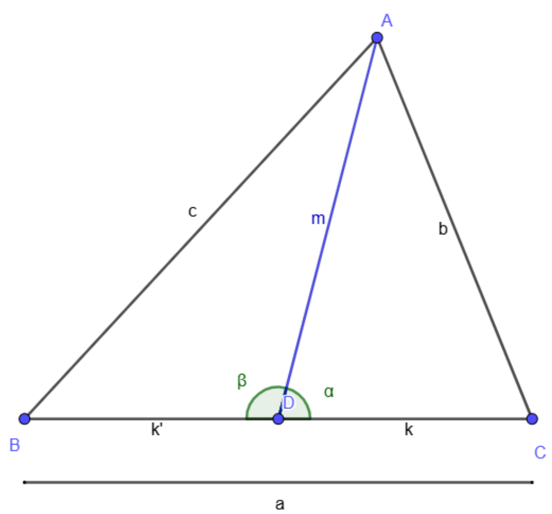
Resposta: $arg(\frac{4\sqrt{3}-6}{3})$

3 Questão: Mediana e suas propriedades

Escrito por Kauan Emanuel
Considere um triângulo ΔABC, de lados $BC = a$, $AC = b$ e $AB = c$ e sua mediana relativa ao lado BC, AD. Encontre:
a) Valor da mediana AD, em função dos lados do triângulo (conhecido como Teorema da Mediana)
Dado um ponto E, no prologamento da reta BC, o ângulo $AEB = \theta$ é θ, bem como $ED = AD$.
b) $cos(2\theta)$

Solução:

a) Inicialmente, temos a seguinte figura:



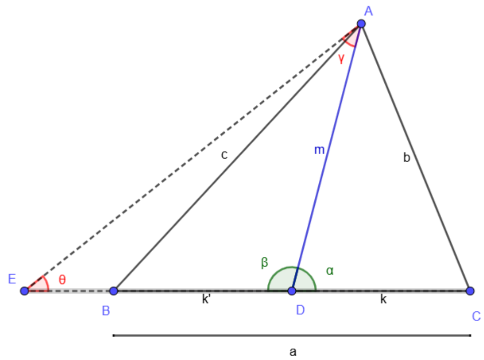
Note que $k = k'$ e $\beta = 180 - \alpha$.
Fazendo Lei dos Cossenos nos triângulos ΔABD e ΔACD, temos:
$b^2 = m^2 + (\frac{a}{2})^2 - 2m\frac{a}{2}cos\alpha \rightarrow b^2 = m^2 + k^2 - macos\alpha$
$c^2 = m^2 + (\frac{a}{2})^2 - 2m\frac{a}{2}cos(180 - \alpha) \rightarrow c^2 = m^2 + k^2 + macos\alpha$

Duplicando e somando as duas equações:

$4m^2 = 2(b^2 + c^2) - a^2 \rightarrow m = AD = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$

Resposta: $AD = \frac{\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}}{2}$

b) Agora, a situação ficou dessa forma:



Note que $2\theta = 2\gamma = \alpha$. Então, usando novamnete a Lei dos Cossenos no ΔADC, nesse caso, substituindo o valor de m, encontramos:

$cos2\theta = \frac{2c^2 - 2b^2 - a^2}{a\sqrt{2(b^+c^2) - a^2}}$

Resposta: $cos2\theta = \frac{2c^2 - 2b^2 - a^2}{a\sqrt{2(b^+c^2) - a^2}}$