Aula 05

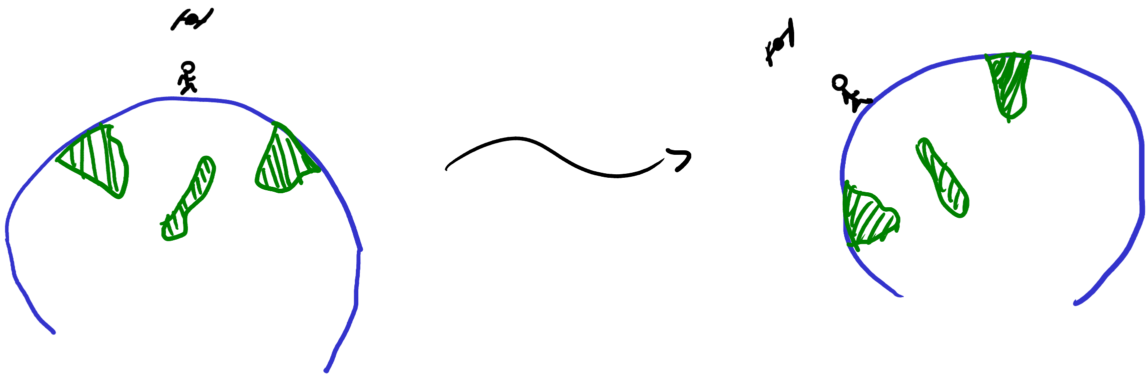
Mecânica Celeste

Resolução de Questões para a P1

1) O satélite SGDC (Satélite Geoestacionário de Defesa e Comunicações Estratégicas) foi o primeiro satélite brasileiro concebido exclusivamente para a transmissão de dados com alta velocidade e qualidade na banda Ka, cobrindo todo o Território Nacional e a Amazônia Azul.

Sabendo que o satélite é geoestacionário (se move com velocidade angular igual à da Terra), calcule a sua altura em relação a superfície do nosso planeta.

Satélites geoestacionários:



$P_S = P_T \simeq 23h\,56min\,4s$

Pela 3ª Lei de Kepler:

$$\frac{P_S^2}{R_S^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}, \quad \text{onde } R_S = R_T + h$$

$$(R_T + h)^3 = \frac{P_S^2 GM_T}{4\pi^2} \quad \therefore \quad R_T + h = \left(\frac{P_S^2 GM_T}{4\pi^2}\right)^{1/3}$$

$$h = \left(\frac{P_S^2 GM_T}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T$$

$$P_s = 23h\,56min\,4s \quad \therefore \quad P_s = 86\,164\,s$$

$$\therefore h = \left(\frac{86\,164^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{4\pi^2} \right)^{1/3} - 6{,}37 \cdot 10^6$$

$$\boxed{\therefore h \simeq 3{,}6 \cdot 10^7\, m}$$

2) Ainda sobre o satélite SGDC, calcule a sua velocidade sabendo que sua massa é de 5,8 toneladas. (Considere sua órbita circular).

$$V = \sqrt{\frac{GM_T}{R_S}}$$

$$R_S = R_T + h$$

$$V = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 5{,}97 \cdot 10^{24}}{6{,}37 \cdot 10^6 + 3{,}6 \cdot 10^7}}$$

$$\boxed{V \simeq 3{,}07\ km/s}$$

3) Antares (Alpha Scorpii) é a estrela mais brilhante da constelação de Escorpição. Ela é uma supergigante vermelha, com uma massa de 15,5 massas solares. Imagine que a estrela Antares, no fim de sua vida, colapsa e se transforma em um buraco negro, calcule o raio desse buraco negro considerando que não houve perda de massa no processo.

* Raio de Schwarzchild (raios de buracos negros)

O raio de Schwarzchild é definido como o raio em que a velocidade de escape de um corpo é igual à da luz.

$$V_e = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \Rightarrow c = \sqrt{\frac{2GM}{R_s}}$$

$$c^2 = \frac{2GM}{R_s} \therefore R_s = \frac{2GM}{c^2}$$

Para Antares, $M = 15{,}5 \cdot M_s$

$M = 15{,}5 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}$ kg

$$\therefore R_s = \frac{2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 15{,}5 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{(3 \cdot 10^{8})^2}$$

$$\boxed{R_s \simeq 45{,}7 \text{ km}}$$

4) O cometa Halley é famosíssimo pelas suas belas passagens periódicas, que ocorrem a cada 76 anos. Sabendo que no seu periélio, ele fica a uma distância de 0,586UA do Sol e que, nesse instante, sua velocidade é de aproximadamente 54,51km/s, prove que sua órbita é elíptica.

Órbita elíptica $\Rightarrow$ $\underline{E < 0}$

$$E = \frac{1}{2} m V^2 - \frac{GMm}{r} \quad \therefore \quad \frac{E}{m} = \frac{V^2}{2} - \frac{GM}{r}$$

Seja $\mu = \frac{E}{m}$:

$$\mu = \frac{V^2}{2} - \frac{GM}{r}$$

No periélio:

$r_p = 0{,}586 \text{ UA} = 0{,}586 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11} \text{ m}$

$V_p = 54{,}51 \text{ km/s} = 54{,}51 \cdot 10^3 \text{ m/s}$

Assim:

$$\mu = \frac{1}{2}(54{,}51 \cdot 10^3)^2 - \frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{0{,}586 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}$$

$$\mu \simeq -2{,}85 \cdot 10^7 \text{ J/kg}$$

$\hookrightarrow$ $\mu < 0 \Rightarrow \underline{E < 0}$

$\hookrightarrow$ órbita elíptica

5) Sabendo que a órbita do cometa Halley é elíptica e sabendo que o seu semi-eixo maior é igual a 17,8UA, calcule a sua velocidade e a sua distância até o Sol durante o afélio.

$r_p = 0{,}586\ UA$

$r_p = a(1-e) \therefore 1 - e = \dfrac{r_p}{a} \therefore e = 1 - \dfrac{r_p}{a}$

$e = 1 - \dfrac{0{,}586}{17{,}8} \therefore e \cong 0{,}967$

$r_A = a(1+e) \therefore r_A = 17{,}8\,(1 + 0{,}967) \therefore \boxed{r_A \cong 35\ UA}$

$V_A = \dfrac{GM}{a}\,\dfrac{1-e}{1+e} \therefore V_A = \sqrt{\dfrac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{17{,}8 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}\ \dfrac{1-0{,}967}{1+0{,}967}}$

$\boxed{V_A \cong 914\ m/s}$

6) Um jovem astrônomo observa um corpo no Sistema Solar e percebe que a sua órbita é elíptica, com período igual a 12 anos. Sabendo que, em determinado instante, este corpo estava com velocidade igual a 23,4km/s, calcule a que distância ele estava do Sol nesse instante.

Pela 3ª Lei de Kepler:

$\dfrac{P^2}{a^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_S} \therefore a^3 = \dfrac{P^2 GM_S}{4\pi^2}$

$P = 12\ \text{anos} = 12 \times 365 \times 24 \times 3600\ s$

$\therefore a = \left(\dfrac{(12 \cdot 365 \cdot 24 \cdot 3600)^2 \cdot 6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{4\pi^2}\right)^{1/3}$

$\therefore a \cong 7{,}84 \cdot 10^{11}\ m$

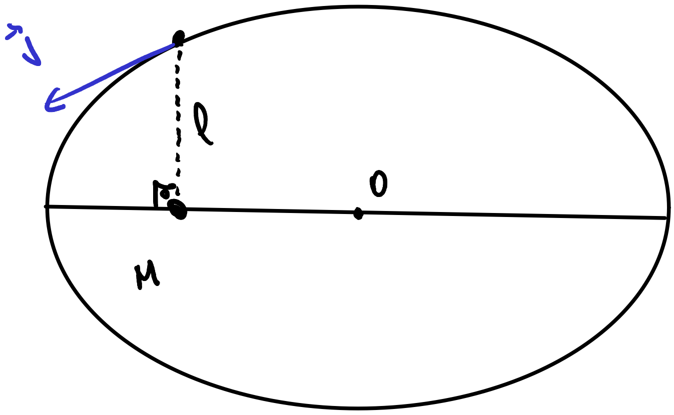
Pela Equação Vis-Viva:

$$V^2 = GM\left(\frac{2}{r} - \frac{1}{a}\right) \quad \therefore \quad \frac{V^2}{GM} = \frac{2}{r} - \frac{1}{a}$$

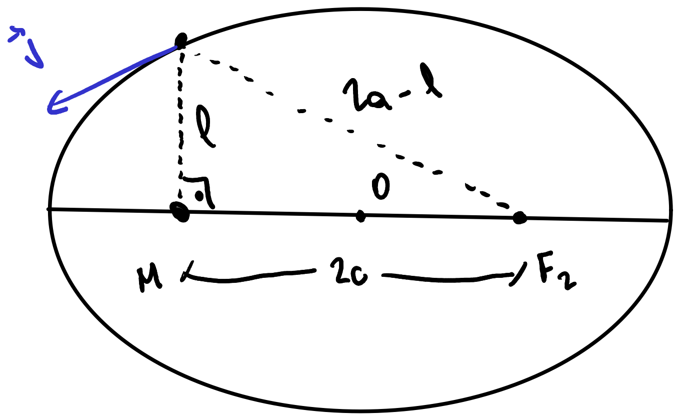
$$\frac{2}{r} = \frac{V^2}{GM} + \frac{1}{a} \quad \therefore \quad r = \frac{2}{\frac{V^2}{GM} + \frac{1}{a}}$$

$$r = \frac{2}{\frac{(23,4 \cdot 10^3)^2}{6,67 \cdot 10^{-11} \cdot 1,99 \cdot 10^{30}} + \frac{1}{7,84 \cdot 10^{11}}} \quad \therefore \quad \boxed{r \simeq 3,7 \cdot 10^{11}\,m}$$

7) Imagine um planeta fictício se movendo em uma órbita elíptica ao redor de uma estrela de massa igual a 3 massas solares. Sabendo que a excentricidade da órbita é igual a 0,42 e que o semi-eixo maior é igual a 4UA, calcule a velocidade do planeta quando ele se encontra no semi-latus rectum (esquema abaixo).



Calculemos l:



$$(2a - l)^2 = l^2 + 4c^2$$

$$4a^2 - 4al + l^2 = l^2 + 4c^2$$

$$e = \frac{c}{a} \therefore c = ea$$

$$\therefore 4a^2 - 4al = 4e^2a^2$$

$$1 - \frac{l}{a} = e^2$$

$$\frac{l}{a} = 1 - e^2 \therefore l = a(1 - e^2)$$

Por fim, pela equação Vis-Viva:

$$V = \sqrt{GM\left(\frac{2}{l} - \frac{1}{a}\right)}$$

$$V = \sqrt{GM\left(\frac{2}{a(1-e^2)} - \frac{1}{a}\right)} \therefore V = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{2}{1-e^2} - 1\right)}$$

$$V = \sqrt{\frac{GM}{a}\left(\frac{2 - 1 + e^2}{1-e^2}\right)} \therefore V = \sqrt{\frac{GM}{a}\,\frac{1+e^2}{1-e^2}}$$

$$M = 3M_S \therefore V = \sqrt{\frac{6{,}67 \cdot 10^{-11} \cdot 3 \cdot 1{,}99 \cdot 10^{30}}{4 \cdot 1{,}496 \cdot 10^{11}}\;\frac{1 + 0{,}42^2}{1 - 0{,}42^2}} \therefore \boxed{V \simeq 30{,}8 \text{ km/s}}$$