1 Questão Curta: Doppler Relativístico

Escrito por Lucas Cavalcante

Nessa questão iremos derivar uma expressão muito importante para a ótica e a ondulatória, o efeito doppler relativístico da luz. Para isso, considere uma fonte luminosa que emite uma onda eletromagnética com frequência f_0 e com ângulo θ_0 em relação ao eixo x no referencial próprio e velocidade v medida no laboratório na direção x. Sabendo que as transformações de Lorentz para energia e momento são:

$$\frac{E_{lab}}{c} = \gamma\left(\frac{E_0}{c} + \frac{p_{x,0}v}{c}\right)$$

$$p_{x,lab} = \gamma\left(p_{x,0} + \frac{E_0 v}{c^2}\right)$$

$$p_{y,lab} = p_{y,0}$$

$$p_{z,lab} = p_{z,0}$$

onde:

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$$

Encontre uma expressão para a frequência da onda eletromagnética medida pelo laboratório (f_{lab}) e para o ângulo entre o eixo x e a onda emitida medido no referencial do laboratório (θ_{lab}).

Solução:

A energia e o momento de um fóton podem ser escritos como:

$$E = hf$$
$$p = \frac{hf}{c}$$

Então, substituindo a energia e o momento do fóton no referencial móvel e no laboratório nas transformadas de Lorentz:

$$\frac{hf_{lab}}{c} = \gamma\left(\frac{hf_0}{c} + \frac{hf_0\cos(\theta_0)v}{c^2}\right)$$
$$\boxed{f_{lab} = \gamma f_0\left(1 + \frac{v}{c}\cos(\theta_0)\right)}$$

E o momento:

$$\frac{hf_{lab}\cos(\theta_{lab})}{c} = \gamma\left(\frac{hf_0\cos(\theta_0)}{c} + \frac{hf_0 v}{c^2}\right)$$
$$\gamma f_0\left(1 + \frac{v}{c}\cos(\theta_0)\right)\cos(\theta_{lab}) = \gamma\left(f_0\cos(\theta_0) + \frac{f_0 v}{c}\right)$$
$$\boxed{\cos(\theta_{lab}) = \frac{\cos(\theta_0) + \frac{v}{c}}{1 + \frac{v}{c}\cos(\theta_0)}}$$

2 Questão Média: O que estou vendo?

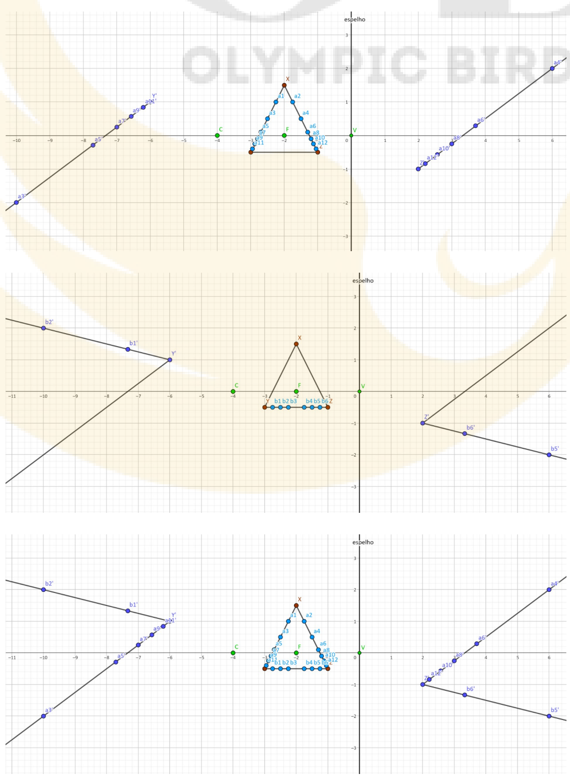
Escrito por Daniela Emilia

Vini está brincando com espelhos côncavos e convexos, para o aperfeiçoamento de um trabalho de robótica. Ele prepara uma situação em que o baricentro de um triângulo equilátero está no ponto focal de um espelho côncavo, em condições gaussianas. Contudo, muito atarefado diante de tantas de suas habilidades e de seus compromissos, ele pede, carinhosamente, sua ajuda para a esquematização geométrica da imagem do objeto em questão. Vale ressaltar que o Vini posicionou uma das bases triangulares paralelamente ao eixo principal do espelho côncavo.

Solução:

Para o estabelecimento de cada ponto da imagem, faz-se uma abordagem de pontos estratégicos do objeto triangular, em eixos paralelos ao principal do espelho. Em sequência, são explorados os eixos verticais.

Vale ressaltar que trabalha-se com somente dois raios luminosos notáveis e respectivos prolongamentos: aquele que, ao incidir na frente côncava espelhada paralelamente ao eixo principal, retorna pelo foco e aquele cuja trajetória passa duas vezes pelo centro do espelho.



Só então, percebe-se que tal configuração de experimento de óptica geométrica apresenta uma imagem peculiar. Não por um contexto de imagem desfocada, mas por um com imagem parcialmente classificada em real, outra parte tida como virtual e ainda dois pontos impróprios.

3 Questão Longa: Dielétrico

Escrito por Tiago Rocha

Normalmente, estudamos os fenômenos da eletrostática no ambiente do vácuo. Contudo, neste problema, vamos investigar o que ocorre quando o meio é diferente, o que nos obriga a realizar diversas correções. Em relação a isso, podemos dizer que quanto mais distante do vácuo for o meio (vamos chamar ele de M), mais ele apresentará resistência a movimentos que pensamos ser naturais.

Dados:

Constante eletrostática do vácuo:

$$k_0 = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}$$

a) A partir do que foi dito na introdução, qual você diria que é maior em módulo: o campo elétrico entre dois corpos no vácuo ou em outro ambiente?

b) Sendo assim, escreva desigualdades entre a constante eletrostática e a permissividade do vácuo com as do meio M.

Esse fenômeno de resistência ocorre devido ao que chamamos de polarização. O vetor polarização pode ser dado como

$$\mathbf{P} = \epsilon_0 \chi \mathbf{E},$$

onde χ é uma constante adimensional chamada de susceptibilidade elétrica do meio, quando estamos no que chamamos de dielétricos lineares. Assim, definimos o vetor deslocamento elétrico:

$$\mathbf{D} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon \mathbf{E},$$

onde ϵ é o que definimos como permissividade elétrica do meio.

c) Encontre uma expressão para ϵ.

d) Qual é o sentido de criarmos a grandeza $\mathbf{D}$?

e) Sabendo que um capacitor tem, no vácuo, diferença de potencial V, capacitância C, campo elétrico E, carga Q e energia W, calcule como ficariam essas grandezas se o capacitor fosse transferido para um meio de constante dielétrica $\epsilon_r = \dfrac{\epsilon}{\epsilon_0}$.

f) Se transferirmos um capacitor carregado do vácuo para o diamante, qual seria a redução percentual ou aumento percentual de cada uma de suas grandezas?

Material	Constante Dielétrica
Ar	1.0
Benzeno	2.28
Diamante	5.8
Sal	5.9
Silicone	11.7
Metanol	33.0

Tabela 1: Constantes dielétricas de diferentes materiais

g) Calcule χ do vácuo, do ar e do diamante.

h) As Leis de Coulomb e Gauss originais ainda valem em regimes dielétricos? Justifique.

Solução:

Solução

a) Como o meio gera uma resistência, faz mais sentido pensarmos que o campo elétrico diminuirá.

b) Como o campo elétrico ficará menor, então a constante eletrostática desse meio deverá também diminuir, já que o campo é diretamente proporcional a ela. Como k é proporcional a $\frac{1}{\epsilon}$, então a permissividade do meio deve aumentar.

c) Usando as fórmulas dadas:

$$\epsilon \mathbf{E} = \epsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{P} = \epsilon_0 \mathbf{E}(1+\chi) \tag{1}$$

Logo, $\epsilon = \epsilon_0(1+\chi)$

d) Criando D, podemos fazer uma correção na permissividade do meio. A partir disso, podemos corrigir os efeitos que um meio causa no campo elétrico apenas conhecendo sua susceptibilidade elétrica, de forma a deixar a expressão final para o campo elétrico bem simples.

e) Se calcularmos a razão entre o campo elétrico com e sem o dielétrico, vemos que o campo é reduzido por um fator de ϵ_r. Como V é diretamente proporcional a E, ele será reduzido pelo mesmo fator. Já a carga se manterá a mesma, devido ao princípio da conservação da carga elétrica. Logo, como a capacitância é $\frac{Q}{V}$, ela deverá ser aumentada em ϵ_r. Usando a equação para energia no capacitor, percebe-se que ela deverá diminuir em ϵ_r.

f) Substituindo, vemos que todas as grandezas devem reduzir em $\epsilon_r = 5.8$, com exceção da carga elétrica(que permanecerá a mesma) e a capacitância(que será aumentada em 5.8).

g) No vácuo, com certeza χ deve ser nulo, já que não a resistência do meio. Algo parecido ocorre com o ar, que possui uma susceptibilidade tão baixa que não é nos mostrada com o número de algarismos significativos que temos na tabela. Agora, no diamante, podemos fazer o cálculo:

$$\epsilon_r = \frac{\epsilon_0(1+\chi)}{\epsilon_0} = 5.8 \tag{2}$$

Logo, χ é igual 4.8.

h) A resposta é sim! Podemos justificar isso se formos pensar "Por que existe essa resistência?". Bem, para afetar o campo elétrico, ela deve surgir por meio de cargas elétricas, que geram um campo contrário ao original. Assim, o campo resultante acaba sendo diminuído. Logo, todas as correções que fizemos são construídas a partir das leis originais da eletrostática, o resultado final é apenas uma maneira de facilitar a visualização desse processo ao público (além deixar a conta mais simples e prática).