1 Questão Curta: Escada Infinita

Escrito por Raul Saraiva

Uma escada infinita com coeficiente de atrito μ possui bolinhas idênticas nas pontas de cada degrau. Sabendo que a altura do primeiro degrau ao segundo é h_0, de tal forma que a altura entre dois degraus consecutivos também forma uma progressão geométrica (P.G) de razão $q < 1$. A bolinha do primeiro degrau é lançada com velocidade horizontal V_0 em direção ao degrau seguinte. Sabe-se que a distância entre o ponto de queda de uma bolinha e outra na ponta do degrau forma uma P.G de razão q com d_0 como termo inicial. Sabe-se também que após a queda de cada bolinha do seu degrau, ela não quica. Qual a velocidade, imediatamente após a colisão, da bolinha que sofreu a n-ésima colisão, em função de g, d_0, h_0, q, V_0 e μ?

Considere todas as colisões elásticas e que $2\mu\sqrt{2gh_0} \ll V_0$.

Solução:

Sabendo que a bola não quica, temos que o chão fará um impulso que irá zerar a velocidade vertical.

Pelo Teorema do Impulso:

$$\int N\,dt = \Delta Q_y \Rightarrow \int N\,dt = mv_y = m\sqrt{2gh_0q^n}$$

$$\int N\mu\,dt = m\mu\sqrt{2gh_0q^n} \Rightarrow \int F_{\text{at}}\,dt = \Delta Q_x = m\mu\sqrt{2gh_0q^n}$$

$$\Delta v_n = \mu\sqrt{2gh_0q^n}$$

No caminho até a colisão com a próxima bola, pode-se aplicar Torricelli para encontrar a velocidade de chegada:

$$(v_{n-1} - \mu\sqrt{2gh_0q^{n-1}})^2 - 2dq^{n-1}\mu g = v_{n-1,2}^2$$

Pela conservação de momento na colisão:

$$m_{n-1}V_{n-1,2} + 0 \cdot m_n = m_n v_n + m_{n-1} v_{n-1,3}$$

Sabendo que $e = 1$, conclui-se que $v_{n-1,3} = 0$, então:

$$V_{n-1,2} = v_n$$

Substituindo na equação anterior:

$$v_n^2 = (v_{n-1} - \mu\sqrt{2gh_0 q^{n-1}})^2 - 2dq^{n-1}\mu g$$

Como essa relação vale para qualquer bola, pode-se somar as expressões desde a primeira até a enésima bola, resultando em:

$$v_n^2 = v_0^2 + 2gh_0\mu^2(1+q+\cdots+q^{n-1}) - 2g\mu d_0(1+q+\cdots+q^{n-1}) - 2\sum_{n=1}^{n} 2v_n\mu q^{\frac{n-1}{2}}\sqrt{2gh_0}$$

Além disso, como $2\mu\sqrt{2gh_0} \ll v_0$ e $v_k < v_0$ devido à dissipação pelo atrito, temos:

$$2\mu v_k\sqrt{2gh_0} \ll v_0^2$$

Por fim, como $q < 1$, o somatório converge, permanecendo muito menor que v_0. A expressão final fica:

$$v_n^2 = v_0^2 + 2gh_0\mu^2(1+q+\cdots+q^{n-1}) - 2g\mu d_0(1+q+\cdots+q^{n-1})$$

$$v_n^2 = v_0^2 - 2g\mu(d_0 - h_0\mu)\frac{1-q^n}{1-q}$$

$$v_n = \left(v_0^2 - 2g\mu(d_0 - h_0\mu)\frac{1-q^n}{1-q}\right)^{\frac{1}{2}}$$

2 Questão Média: O Experimento de Ximemes

Escrito por Daniela Emilia

Ximemes concluiu um teste de física e correu para um laboratório de física. O que ela mais gosta é um localizado em Tarija, Bolívia. Lá, praticou um experimento físico de eletromagnetismo, configurado em duas etapas consecutivas.

Inicialmente, um canhão de elétrons, cuja massa é M, é posto para oscilar harmonicamente na vertical do plano xy, disparando horizontalmente, a todo instante, elétrons com velocidade u_x. Logo em seguida, o elétron de massa m, cujos efeitos gravitacionais são desprezados, é acelerado por um campo elétrico vertical $\vec{E} = (0, +E, 0)$.

Assim, após passar por uma diferença de potencial V, o elétron é submetido unicamente a um campo magnético $\vec{B} = (-B, 0, 0)$. Determine o maior raio de curvatura possível realizado pelo elétron de carga $-q$.

Solução:

Estabelecem-se as condições cinemáticas do elétron na primeira etapa experimental. Primeiramente, em relação ao eixo x:

$$v_x = u \tag{1}$$

Agora, desenvolve-se o correspondente ao eixo y:

$$E_{\text{tot}} = +qV + \frac{1}{2}mu_y^2 = \frac{1}{2}mv_a^2 + \frac{1}{2}mu_y^2$$

$$\therefore v_a = \sqrt{\frac{2qV}{m}}$$

A componente da velocidade denominada u_y diz respeito à máxima alcançada no MHS. Logo,

$$u_y = -\omega A \operatorname{sen}(\omega t + \phi_o) = -\frac{k}{M} A \operatorname{sen}\left(\frac{k}{M}t + \phi_o\right)$$

$$\therefore u_y = \omega A = \frac{k}{M} A$$

Assim sendo,

$$v_y = u_y + v_a$$

$$v_y = \frac{k}{M} A + \sqrt{\frac{2qV}{m}} \tag{2}$$

Além disso, calcula-se o fenômeno da segunda etapa do experimento de Ximemes. Sobre a força magnética sobre a carga em movimento, tem-se:

$$qv_yB = \frac{mv_y^2}{r} \Rightarrow r = \frac{mv_y}{qB}$$

$$r = \frac{m}{qB}\left(\frac{k}{M}A + \sqrt{\frac{2qV}{m}}\right)$$

$$r = \frac{m}{M}\frac{kA}{qB} + \sqrt{2\frac{mV}{qB}} \tag{3}$$

3 Questão Longa: A Bolinha, o Bloco e a Porta

Escrito por Maria Beatriz

PARTE A

Emalha dá um pequeno cutucão em uma bolinha de massa m, que adquire uma velocidade inicial v_0 para a direita. Considerando que a bolinha está entre um bloco estacionário de massa M e uma porta trancada, que estão separados por uma distância L, que a colisão da bola é instantânea e elástica, e que o coeficiente de atrito entre o bloco e o chão é μ (mas não há atrito entre a bolinha e o piso), e que $M \gg m$, além de L ser grande o suficiente para que o bloco pare entre uma colisão e outra, encontre:

(a) Velocidade da bolinha após a enésima colisão com o bloco.

(b) Quão longe o bloco se move.

(c) Quanto tempo o bloco passa se movendo.

PARTE B

Em seguida, Emalha se entedia, lubrifica o piso de modo que não há mais coeficiente de atrito com o bloco nem com a bolinha, e realoca os itens de forma que, dessa vez, o bloco de massa M fique à direita da bolinha de massa m. O pequeno cutucão é dado para a esquerda, fazendo o bloco se mover com velocidade V_0 em direção à bolinha, que estava parada.

(d) Assumindo que todas as colisões são elásticas, encontre a distância mínima entre o bloco e a parede analisando explicitamente cada colisão.

(e) Aproximadamente quantas colisões ocorrem antes que o bloco alcance essa distância mínima.

(f) O índice γ é definido de forma que PV^γ seja conservado durante o processo adiabático. Em uma dimensão, o volume V é simplesmente o comprimento, e P é a força média. Usando o teorema adiabático, descubra o valor de γ para um gás monoatômico.

Solução:

(a) i) Considere um instante logo após a i-ésima colisão, onde o bloco sai com uma velocidade V_i e a bolinha com uma velocidade v_i. Conservando o momento e considerando coeficiente de restituição $e = 1$, temos:

$$mv_i = MV_{i+1} - mv_{i+1}$$

$$v_i = V_{i+1} + v_{i+1}$$

ii) Resolvendo o sistema:

$$v_{i+1} = \frac{(M-m)v_i}{M+m} \approx \frac{(1-m/M)v_i}{1+m/M} \approx (1-2m/M)v_i$$

$$V_{i+1} \approx \frac{2m}{M}v_i$$

iii) A velocidade v_n é obtida aplicando-se sucessivamente v_{i+1}, isto é, temos uma progressão geométrica com razão $q = 1 - 2m/M$. Logo:

$$v_n = \left(1 - \frac{2m}{M}\right)^n v_0$$

Fisicamente, isso significa que a velocidade da bolinha diminui exponencialmente a cada quique, com m/M sendo a razão que determina a taxa de perda de velocidade.

(b) A distância percorrida pelo bloco pode ser obtida a partir do trabalho da força de atrito. Após um longo período de tempo, a bola perde completamente sua energia, de forma que toda a sua energia cinética inicial é convertida em calor por causa do atrito. Assim:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = F_{\text{at}}d = \mu Mgd$$

Logo:

$$d = \frac{mv_0^2}{2\mu Mg}$$

(c) Considere t_n como o tempo que o bloco se move após cada quique. Sabemos que $I = \Delta p$, então:

$$F_{\text{at}}t_n = MV_n \quad \Rightarrow \quad \mu Mgt_n = M\left(\frac{2m}{M}v_{n-1}\right) = 2m\left(1 - \frac{2m}{M}\right)^{n-1} v_0$$

O tempo total T é dado pela soma infinita dos t_n:

$$T = \sum_{n=1}^{\infty} t_n = \frac{2m}{M}\frac{v_0}{\mu g}\sum_{n=0}^{\infty}\left(1 - \frac{2m}{M}\right)^n = \frac{2m}{M}\frac{v_0}{\mu g}\cdot\frac{1}{1-\left(1-\frac{2m}{M}\right)}$$

Portanto:

$$T = \frac{v_0}{\mu g}$$

Isso faz sentido para $n \to \infty$, mesmo que $v_n = \left(1 - \frac{2m}{M}\right)^n v_0$ tenda a valores muito pequenos conforme n aumenta.

(d) i) Considere uma colisão ocorrendo a uma distância arbitrária x da parede. Sejam v e V as velocidades da bolinha e do bloco, respectivamente, após a colisão. O produto $x(v - V)$ é constante para todas as colisões.

ii) O tempo até a próxima colisão é dado por $Vt + vt = 2x$, já que a soma das distâncias percorridas pelos dois objetos é $2x$. Assim, a próxima colisão ocorre a uma distância:

$$x' = x - Vt = x - \frac{2xV}{v+V} = x\frac{v-V}{v+V}$$

Logo:

$$x'(v+V) = x(v-V)$$

iii) Como a colisão é elástica ($e = 1$), temos:

$$v + V = v' + V'$$

Portanto, usando a equação acima:

$$x'(v' - V') = x(v - V) = \text{cte}$$

iv) Para achar o valor dessa constante: após a primeira colisão, o bloco continua com velocidade V_0 (supondo m/M pequeno) e a bolinha adquire uma velocidade $2V_0$. Assim, a constante é:

$$\text{cte} = L(2V_0 - V_0) = LV_0$$

v) Quando a distância mínima $x_{\min}$ é atingida, a velocidade do bloco é praticamente zero. Assim, toda a energia cinética inicial do bloco foi transferida para a bolinha. Logo, a constante pode ser escrita como:

$$LV_0 = L_{\min}\left(V_0\sqrt{\frac{M}{m}} - 0\right) \quad \Rightarrow \quad L_{\min} = L\sqrt{\frac{m}{M}}$$

(e) Sabemos que $\Delta v = 2V$ e pela conservação da energia:

$$V^2 + \frac{m}{M}v^2 = V_0^2$$

O número de colisões n pode ser estimado pela integral da variação de v, dado que a cada colisão ocorre uma mudança de velocidade:

$$n \approx \int \frac{dv}{2V}$$

Substituindo:

$$n \approx \frac{1}{2}\int \frac{dv}{\sqrt{V_0^2 - \frac{m}{M}v^2}} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{M}{m}}\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{M}{m}}$$

(f) O análogo da pressão (P) no caso unidimensional é simplesmente a força atuante. A força média exercida pela bolinha, que pode ser vista como uma molécula de gás, é:

$$F = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{2mv}{2x/v} = \frac{mv^2}{x}$$

O análogo do volume seria x. Assim, a conservação de vx implica também a conservação de Fx^3, o que sugere que $\gamma = 3$.