Aula 08

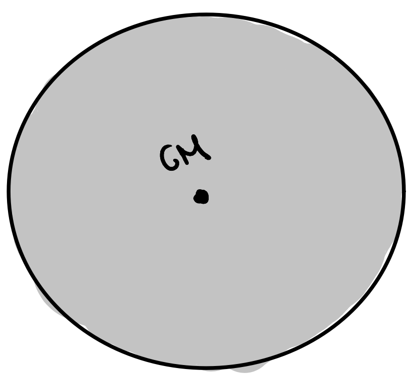
Mecânica Celeste

Sistemas Binários

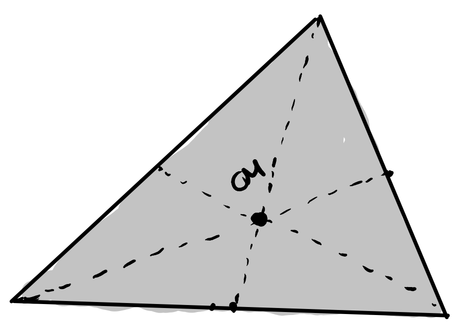
Em um sistema binário, os dois corpos orbitam o centro de massa

O que é o centro de massa

O centro de massa é o ponto em que se pode considerar que toda a massa do sistema está concentrado.

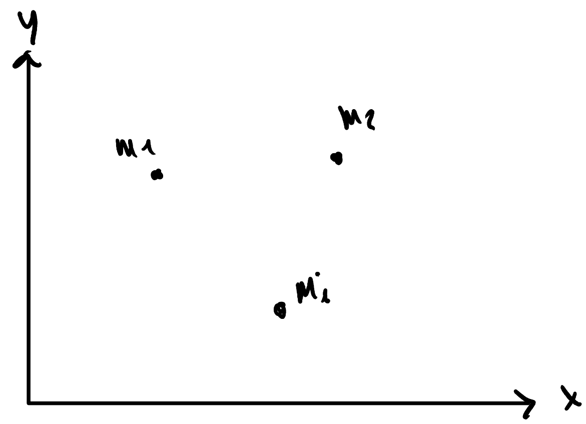


CM em uma circunferência



CM em um triângulo

A posição do centro de massa é calculada por uma média ponderada da posição de cada massa do sistema.



$$x_{cm} = \frac{m_1 x_1 + m_2 x_2 + m_3 x_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

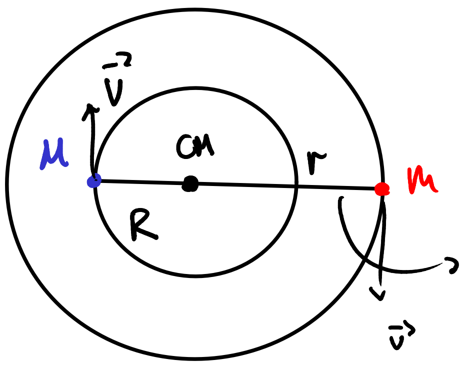
$$x_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i x_i}{M}$$

$$y_{cm} = \frac{m_1 y_1 + m_2 y_2 + m_3 y_3}{m_1 + m_2 + m_3}$$

$$y_{CM} = \sum_{i=1}^{n} \frac{m_i y_i}{M}$$

Órbitas Circulares

Em um sistema binário com órbitas circulares, o CM está no centro das órbitas.



A linha que liga os dois corpos sempre passa pelo CM.

Deste fato, concluimos que o período orbital das duas órbitas é igual.

A força gravitacinal agindo nos corpos é:

$$F = \frac{GMm}{(R+r)^2}$$

Repare que os corpos realizam mov. circulares, então, em M:

$$F = R_{cp} \therefore \frac{GMm}{(R+r)^2} = \frac{MV^2}{R}$$

$$V = \frac{2\pi R}{P} \therefore \frac{Gm}{(R+r)^2} = \frac{4\pi^2 R^2}{RP^2} = \frac{4\pi^2 R}{P^2} \quad (1)$$

Analogamente em m:

$$\frac{GM}{(R+r)^2} = \frac{4\pi^2 r}{P^2} \quad (2)$$

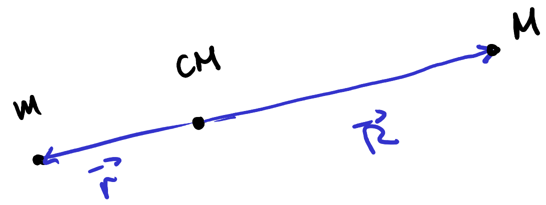
Somando (1) e (2):

$$\frac{G(M+m)}{(R+r)^2} = \frac{4\pi^2}{P^2}(R+r) \therefore \boxed{\frac{P^2}{(R+r)^3} = \frac{4\pi^2}{G(M+m)}}$$

3ª Lei de Kepler para sistemas binários

Utilizando o conceito de centro de massa, podemos encontrar a relação entre as velocidades e as distâncias dos dois corpos.

Considerando os vetores posição dos dois corpos com origem no CM.



$$m\vec{r} + M\vec{R} = 0 \quad \therefore \quad m\vec{r} = -M\vec{R}$$

Em módulo:

$$\boxed{mr = MR}$$

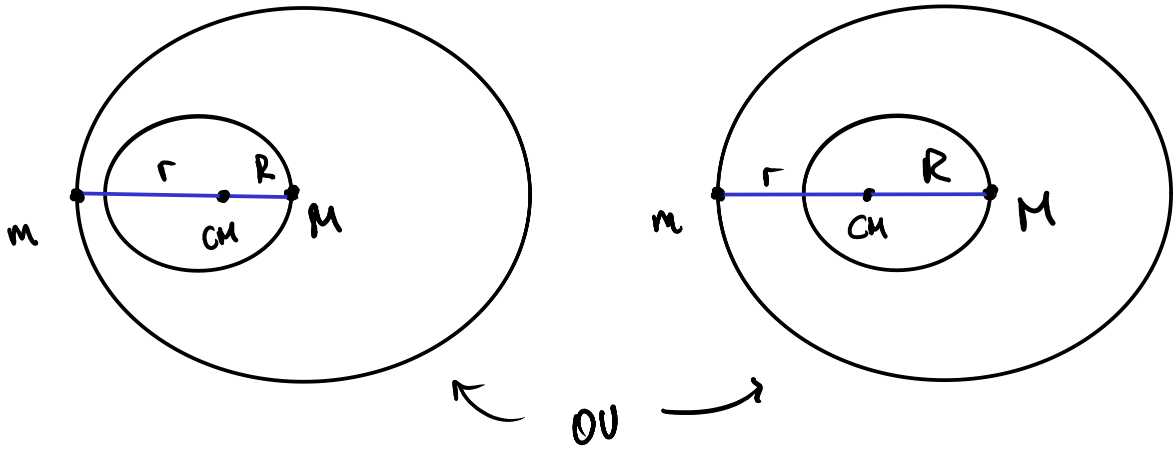
Para encontrar a relação entre as velocidades, vamos derivar a expressão acima.

$$m\frac{dr}{dt} = M\frac{dR}{dt}$$

$$v = \frac{dr}{dt} \quad e \quad V = \frac{dR}{dt} \quad \therefore \quad \boxed{mv = MV}$$

Formato e Disposição das órbitas

Pela 1ª lei de Kepler, as órbitas são elípticas, mas qual a disposição delas?



Na situação da direita, quando M está no afélio, m está no periélio.

Como $mr = MR$:

$$m a_1 (1 - e_1) = M a_2 (1 + e_2)$$

E quando M está no periélio, m está no afélio.

$$m a_1 (1 + e_1) = M a_2 (1 - e_2)$$

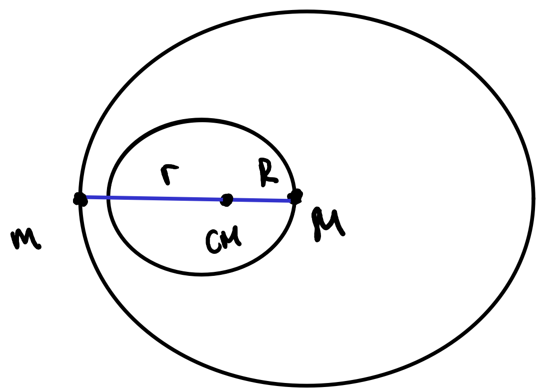
Subtraindo as equações:

$$m a_1 (1 - e_1 - 1 - e_1) = M a_2 (1 + e_2 - 1 + e_2)$$

$-2ma_1 e_1 = 2Ma_2 e_2$

$ma_1 = Ma_2$, portanto chegamos a $-e_1 = e_2$, o que é impossível, pois não existe excentricidade negativa.

Assim concluimos que a situação correta é a da esquerda.



Neste caso, quando M está no periélio, m também está, e vice-versa.

$mr = MR$

$ma_1(1-e_1) = Ma_2(1-e_2)$

$ma_1(1+e_1) = Ma_2(1+e_2)$

Subtraindo as equações:

$ma_1(1-e_1-1-e_1) = Ma_2(1-e_2-1-e_2)$

$-2ma_1 e_1 = -2Ma_2 e_2 \therefore \underline{e_1 = e_2}$