

Olympic Birds

Física



Introdução à Relatividade



Olympic Birds

Introdução à Relatividade

Física

Sumário

1	Introdução	3
1.1	Motivação e o experimento de Michelson-Morley	3
1.2	Postulados Fundamentais	5
2	Cinemática Relativística	5
2.1	Efeitos Fundamentais	5
2.1.1	Dilatação do Tempo	5
2.1.2	Contração do Espaço	7
2.2	Transformadas de Lorentz	8
2.3	Composição de Velocidades	11
2.4	Efeito Doppler	14
3	Dinâmica Relativística	17
3.1	Energia e Momento Relativísticos	17
3.2	Colisões	20
3.3	Força	24
4	Problemas	27
4.1	Problemas de Cinemática	27
4.1.1	Problema 1 - Quadrado Rotacionado(Morin) *	27
4.1.2	Problema 2 - Dilatação do Tempo? (Taylor)*	27
4.1.3	Problema 3 - Placa de Vidro em Movimento (Kleppner) **	28
4.1.4	Problema 4 - Dois Trens (Competitive) **	28
4.1.5	Problema 5 - Positrônio e Efeito Doppler Relativístico (Guide) ***	29
4.1.6	Problema 6 - Aberração Estelar (Competitive) ***	29
4.1.7	Problema 7 - Piloto suicida ***	30
4.2	Problemas de Dinâmica	30
4.2.1	Problema 8 - Decaimento e Raios Cósmicos (ITA 2020) *	30
4.2.2	Problema 9 - Acelerador Cíclotron (ITA 2024) *	30
4.2.3	Problema 10 - Caixa de fótons (Guide) **	30
4.2.4	Problema 11 - Oscilador Harmônico relativístico (Morin) **	31
4.2.5	Problema 12 - Produção de Partículas (Guide) **	31
4.2.6	Problema 13 - Colisão Pósitron-Elétron (Competitive)	32

4.2.7	Problema 14 - Foguete Relativístico (Guide) ***	32
5	Gabaritos	32
6	Apêndice: Aprendendo Quadrivetores	33

1 Introdução

A equipe do Olympic Birds, que já vêm lançando diversos materiais direcionados ao ensino da física inicia a partir daqui a divulgação de conteúdos relacionados a relatividade.

A relatividade, assunto que iremos introduzir a seguir, surge assim como as demais teorias físicas com o objetivo de derrubar ou aprimorar teorias anteriores.

Nesse caso temos um conjunto de pesquisas condensadas por Albert Einstein originadas essencialmente de um questionamento feito a partir do eletromagnetismo e das famosas equações de Maxwell, que obtiveram um valor para a velocidade da luz no vácuo, ao tratá-la como onda eletromagnética, gerando dúvidas a respeito da percepção de determinados acontecimentos (de agora em diante chamaremos de eventos) de um local (chamaremos de referencial, que pode ser qualquer lugar em que ocorre um evento) em relação ao outro, dado o valor extraordinário da velocidade da luz. Essa confusão causada pela mudança de percepção não pôde ser explicada pela mecânica clássica de Newton e nem mesmo pelas equações comuns utilizadas por Galileu para descrever a cinemática.

A seguir mostraremos desde o início a forma como tudo isso foi estudado, apresentando uma reformulação da cinemática e da dinâmica partir das novas teorias.

Ao final apresentaremos alguns problemas direcionados aos tópicos apresentados com seus respectivos gabaritos, ordenados de acordo com seu nível de dificuldade, sendo * problemas introdutórios, ** problemas de nível médio e *** problemas difíceis.

1.1 Motivação e o experimento de Michelson-Morley

Até o início dos estudos sobre relatividade as equações que regiam a cinemática como um todo eram as transformações de Galileu, apresentadas a seguir:

$$\begin{cases} x' = x - Vt \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = t \end{cases} \quad (1.1)$$

Quando foi encontrado um valor para a velocidade da luz como já foi discutido anteriormente, buscava-se encontrar em relação a qual referencial ela possuía esse valor.

Acreditava-se que a luz necessitava de um meio para se propagar, preenchido por uma substância que foi chamada de "éter".

E a partir disso, buscando encontrar a partir da aplicação das transformações de Galileu uma velocidade relativa $(c + v)$ ou $(c - v)$, sendo v a velocidade do éter.

A partir da busca por esse valor diversos cientistas corriam para encontrar o experimento ideal.

Dentre esses experimentos o mais famoso foi o de Michelson-Morley, com aparato experimental apresentado na figura, e que buscava medir a velocidade da luz aproveitando-se do movimento e da velocidade de translação da Terra.

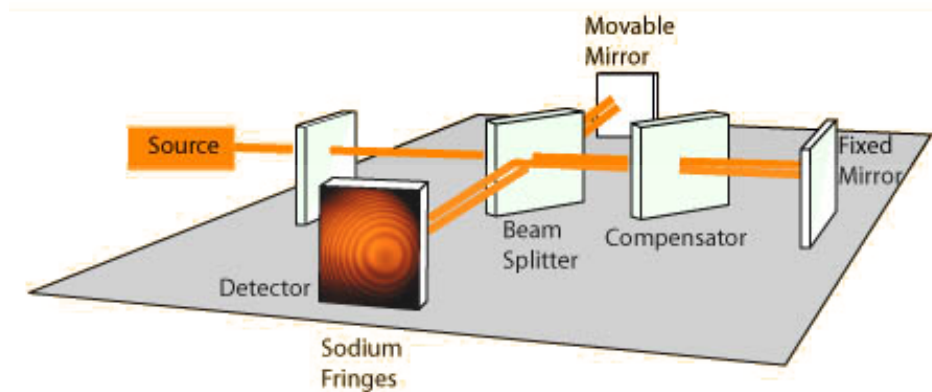
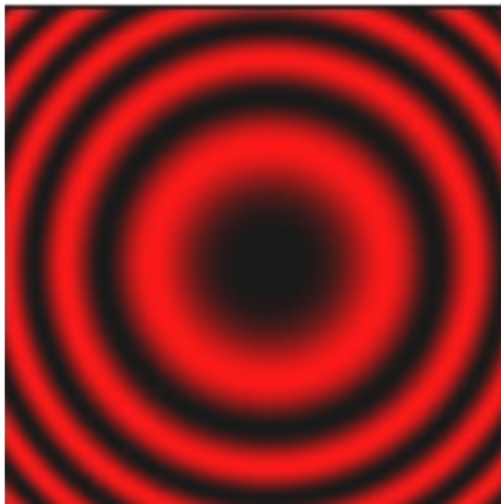
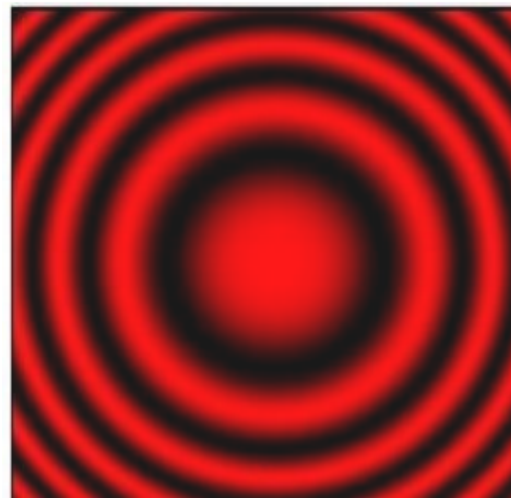


Figura 1: Ilustração do Interferômetro de Michelson-Morley. Fonte: Cienciadelux.

Se os feixes de luz tivessem velocidades diferentes em suas direções, padrões de interferência deveriam ser observados nos anteparos, como mostrado na figura.



(a) Padrão esperado (interf. destrutiva)



(b) Padrão obtido, sem desvio

Figura 2: Padrão de Interferência. Fonte: Artigo "Experiência de Michelson-morley no Ensino Médio : Prerrogativas e Possibilidades"

Em tese deveria ser obtido um padrão de interferência destrutiva, o que acabou não ocorrendo, já que o padrão esperado não se formou, logo constatou-se que o desvio (diferença de caminho óptico em relação ao comprimento de onda λ) era nulo, indicando que não havia outra velocidade. Esse resultado só foi compreendido algum tempo

depois, que comprovou a velocidade da luz como absoluta, sem que houvesse outra velocidade relativa a ela.

1.2 Postulados Fundamentais

A partir das conclusões feitas pelo experimento de Michelson e Morley e demais estudos, foi possível chegar aos dois postulados fundamentais para a relatividade. Antes de os apresentar é importante entender o que é um referencial inercial:

Referencial Inercial

"Um referencial inercial é todo referencial em que as leis usuais da física são respeitadas"

A partir disso vamos aos postulados :

Primeiro postulado da Relatividade

"A velocidade da luz tem o mesmo valor c em qualquer referencial inercial"

Segundo postulado da Relatividade

"As leis da física são as mesmas para qualquer referencial inercial"

2 Cinemática Relativística

2.1 Efeitos Fundamentais

2.1.1 Dilatação do Tempo

Agora, finalmente abordando a relatividade de forma quantitativa vamos a analisar a diferença de percepção de tempo de um evento para dois referenciais diferentes, S e S' .

A forma mais clássica e mais simples para abordar a dilatação do tempo é analisar a emissão de um raio de luz dentro de um trem e comparar o intervalo de tempo entre a ida e a chegada do raio até o "chão" do trem, e a partir disso comparar a forma como ele é percebido para um observador em S e para um observador em S' .

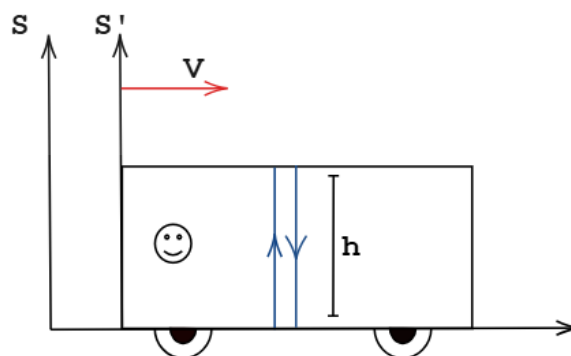


Figura 3: Emissão e recebimento da luz para observador em S' .

Para o observador em S' o intervalo de tempo entre a emissão e o recebimento do raio de luz é

$$\Delta t' = \frac{2h}{c} \quad (2.1)$$

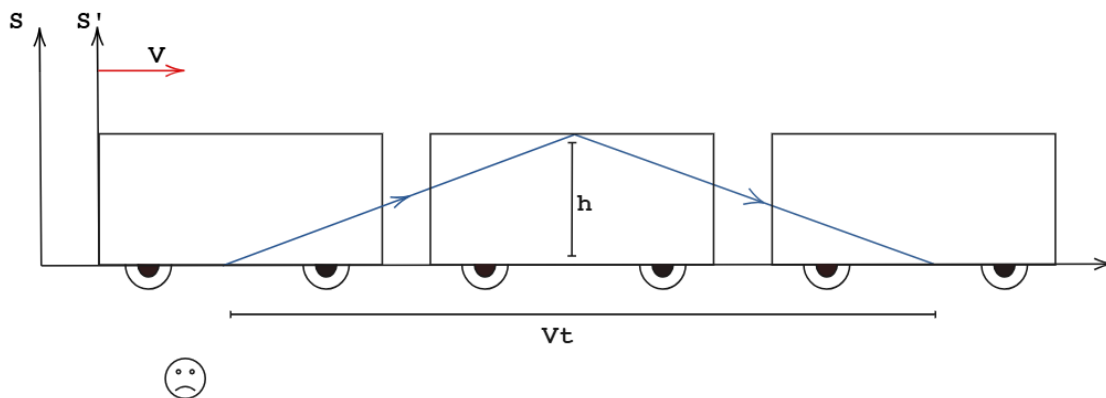


Figura 4: Emissão e recebimento da luz para observador em S'.

Agora para o observador em S devemos considerar o deslocamento do trem, dessa forma:

$$\left(\frac{c\Delta t}{2}\right)^2 = \left(\frac{V\Delta t}{2}\right)^2 + h^2 \quad (2.2)$$

$$\Delta t = \frac{2h}{\sqrt{c^2 - V^2}} \rightarrow \Delta t = \frac{2h}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.3)$$

Substituindo a eq. (2.1) na eq. (2.3) temos:

$$\Delta t = \Delta t' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}} \quad (2.4)$$

Com $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{V^2}{c^2}}}$ sendo conhecido como fator de lorentz, representado por γ , logo

$$\Delta t = \gamma \Delta t' \quad (2.5)$$

Lembrando que $\Delta t'$ é o intervalo de tempo próprio e pode até mesmo ser chamado de t_o , sendo assim

$$\boxed{\Delta t = \gamma \Delta t_o} \quad (2.6)$$

2.1.2 Contração do Espaço

Assim como na dilatação do tempo iremos utilizar argumentos geométricos, dessa vez para encontrar a relação entre comprimentos medidos nos referenciais S e S'.

Considere um feixe de luz emitido na parte de trás de um trem (onde se encontra um observador) e após atingir a parte frontal retorna à parte traseira, como apresentado na figura 5.

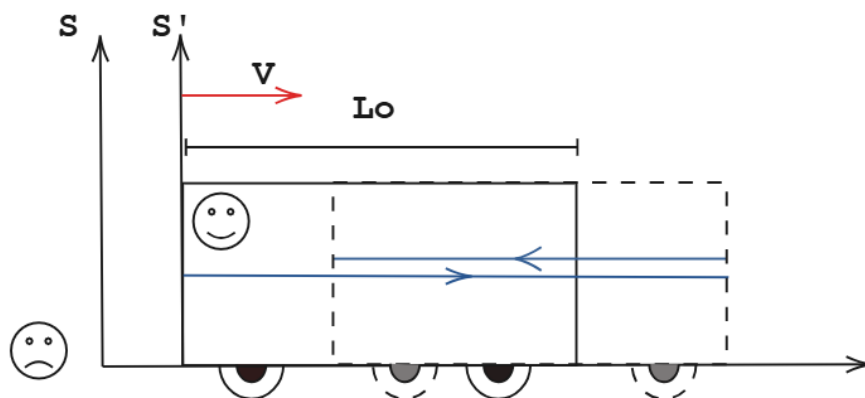


Figura 5: Emissão e recebimento da luz para observador em S'.

Para um observador que se encontra em S', no interior do trem o tempo entre a ida e o recebimento do raio de luz será dado por

$$\Delta t_o = 2 \frac{L_o}{c}$$

E conseqüentemente o comprimento próprio é dado por

$$L_o = \frac{c}{2} \Delta t_o \quad (2.7)$$

Agora para um observador fora do trem, no referencial S vamos dividir o tempo para a luz realizar seu trajeto em dois: o tempo para a luz ir do começo até o final do trem t_+ e o tempo para ela retornar t_- :

$$t_+ = \frac{L}{(c - v)}$$

$$t_- = \frac{L}{(c + v)}$$

Assim

$$\Delta t = t_+ + t_- = \frac{L'}{(c - v)} + \frac{L'}{(c + v)}$$

Sendo L o comprimento do trem medido no referencial S. Dessa forma L será dado por

$$L = \frac{c}{2} \Delta t \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right) \quad (2.8)$$

Reescrevendo a eq. (2.8) utilizando eq. (2.7) nós temos:

$$L' = L_o \frac{\Delta t_o}{\Delta t} \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)$$

Finalmente, usando a relação da eq. (2.6) nós temos :

$$\boxed{L = \frac{L_0}{\gamma}} \quad (2.9)$$

2.2 Transformadas de Lorentz

As transformadas de Lorentz são utilizadas em relatividade com o intuito de transformar espaço e tempo entre dois referenciais distintos, S e S' , assim como mostrado na figura 3. Logo a seguir mostraremos as expressões a serem utilizadas com tal finalidade.

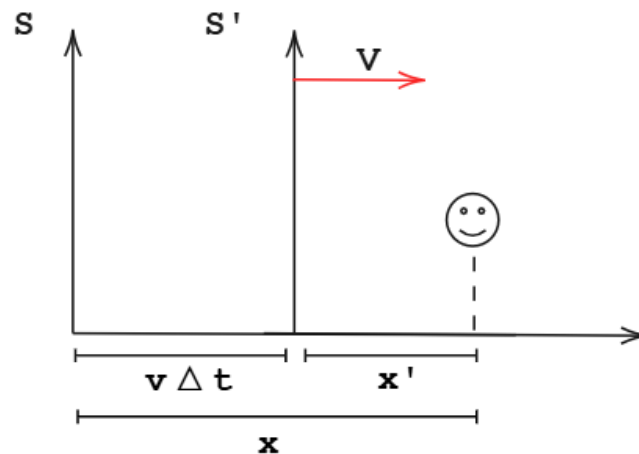


Figura 6: Ilustração dos referenciais S e S'.

Pela ilustração podemos relacionar x' , que é o espaço no referencial S' e x e Vt que são medidos no referencial S. Dessa forma

$$x - Vt = \frac{x'}{\gamma} \rightarrow x' = \gamma(x - Vt)$$

Se invertermos S e S' podemos chegar à um outro resultado

$$\boxed{x = \gamma(x' + Vt')} \quad (2.10)$$

Relacionando essas duas últimas equações podemos chegar à uma equação para transformação do tempo:

$$\boxed{t' = \gamma(t - \frac{Vx}{c^2})} \quad (2.11)$$

Além dessas equações é importante lembrar também que

$$\boxed{y = y'} \quad (2.12)$$

$$\boxed{z = z'} \quad (2.13)$$

já que os espaços perpendiculares ao eixo em que estamos trabalhando (eixo x) não sofrem alterações.

Tendo tudo isso em mãos podemos chegar à um conjunto de equações, conhecidas como transformadas de Lorentz que transformam espaço e tempo de S' para S.

$$\begin{cases} x' = \gamma(x - Vt) \\ y' = y \\ z' = z \\ t' = \gamma(t - \frac{Vx}{c^2}) \end{cases} \quad (2.14)$$

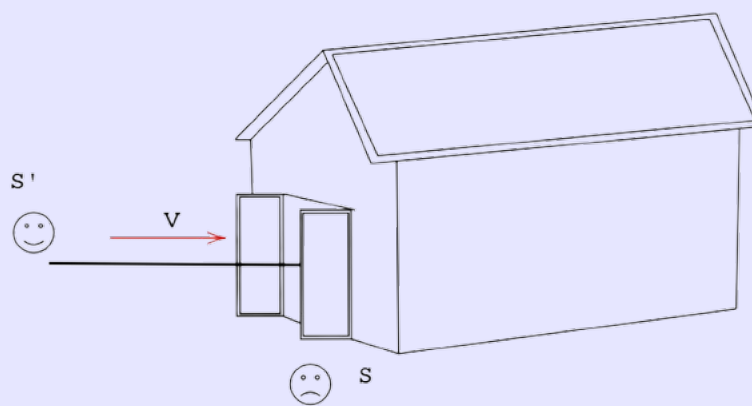
E para o caso inverso transformando de S para S' temos

$$\begin{cases} x = \gamma(x' + Vt') \\ y = y' \\ z = z' \\ t = \gamma(t' + \frac{Vx'}{c^2}) \end{cases} \quad (2.15)$$

Exemplo 1: Paradoxo do Saltador com Vara - Kleppner

O saltador com vara tem uma vara de comprimento L_o , e o fazendeiro tem um celeiro de comprimento $\frac{3}{4}L_o$. O fazendeiro aposta que pode fechar as portas da frente e de trás do celeiro com a vara completamente dentro. A aposta sendo feita, o fazendeiro pede ao saltador com vara para correr para dentro do celeiro com uma velocidade $v = \frac{\sqrt{3}}{2}c$. Neste caso, o fazendeiro observa que a vara é contraída para $L = \frac{L_o}{2}$, e a vara se encaixa no celeiro com facilidade.

O fazendeiro bate a porta no instante em que a vara está dentro, e reivindica a aposta. O saltador com vara discorda: ele vê o celeiro contraído por um fator de 2, então a vara não pode caber dentro. Deixe o fazendeiro e o celeiro no sistema S e o saltador com vara no sistema S' .



Sendo A a extremidade frontal da vara (a que chega primeiro à parte final do celeiro) e B a extremidade da parte traseira da vara, responda os seguintes itens
(a) O fazendeiro em S vê A alcançar a porta traseira em $t_A = 0$, e fecha a porta da frente no mesmo tempo $t_A = t_B = 0$. Qual é o comprimento da vara visto em S ?

(b) O saltador com vara em S' vê A alcançar a porta traseira em t'_A . Onde o saltador com vara vê B neste instante?

(c) Mostre que em S' , A e B não estão dentro do celeiro no mesmo instante

Solução 1: solução

Para $\frac{v}{c} = \frac{\sqrt{3}}{2}$ temos $\gamma = 2$

(a) No referencial do fazendeiro (S), o comprimento da vara será visto como $\frac{L_o}{\gamma}$ a partir da relação de contração do espaço, dessa forma

$$L = \frac{L_o}{\gamma} \rightarrow L = \frac{L_o}{2}$$

então a vara facilmente irá caber dentro do celeiro.

(b) Do ponto de vista do saltador (S') o comprimento da vara é L_o , então se a

ponta A estiver na parte traseira do celeiro, a ponta B estará se projetando para fora do celeiro por $L_o - \frac{3}{4}L_o = \frac{1}{4}L_o$.

(c) Partindo das transformadas de Lorentz, vamos escrever as funções de tempo e de espaço para o referencial S', tomando como referência os pontos A e B :

$$x'_B = \gamma(x_B - Vt) \quad t'_B = \gamma\left(t - \frac{Vx_B}{c^2}\right) \quad (2.16)$$

$$x'_A = \gamma(x_A - Vt) \quad t'_A = \gamma\left(t - \frac{Vx_A}{c^2}\right) \quad (2.17)$$

$$x'_A - x'_B = L_o$$

$$t'_A - t'_B = -\gamma\left(\frac{Vx_A}{c^2}\right) + \gamma\left(\frac{Vx_B}{c^2}\right) = -\gamma\left(\frac{VL}{c^2}\right) = \frac{VL_o}{c^2}$$

No referencial do saltador as duas pontas da vara não estão dentro do celeiro no mesmo instante.

Olhando mais de perto, no instante em que a porta da frente é fechada, o corredor observa que a extremidade A de seu poste está em $x'_A = L_o$, de modo que já está do lado de fora da porta traseira. Como esse evento, chame-o de C, parece ao fazendeiro no quadro S?

Como $t_C > 0$, o fazendeiro observa que o evento C ocorre depois que a porta é fechada. Então, o fazendeiro e o saltador estão corretos, a aposta não pode ser acertada até que eles concordem sobre qual será utilizado como referência na aposta.

2.3 Composição de Velocidades

Para prosseguirmos, é fundamental conhecer um resultado obtido a partir das transformações de Lorentz, que é a adição de velocidades. Esse resultado nos permite responder a seguinte pergunta: "Se um objeto se move com velocidade v_x relativa a um referencial S qual a sua velocidade v'_x relativa a um referencial S'?"

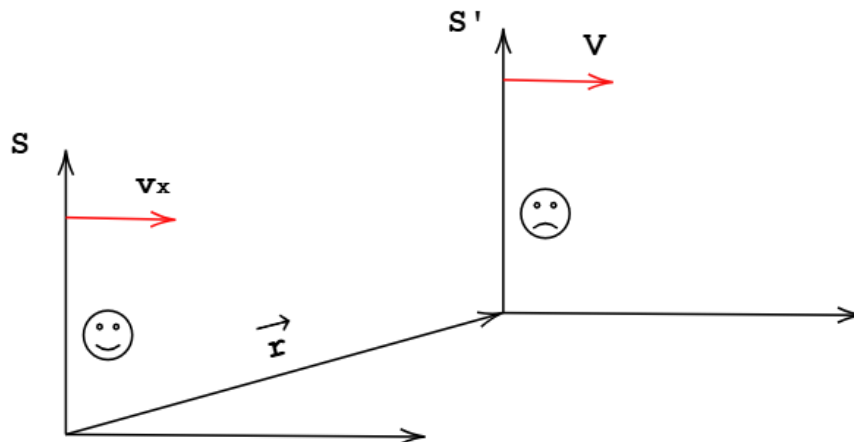


Figura 7: Ilustração para composição de velocidades.

Nessa caso consideraremos que o referencial S' se move com velocidade V ao longo do eixo x . Para o caso não relativístico as transformações de Galileu servem bem:

$$v'_x = v_x - V, \quad v'_y = v_y \quad \text{e} \quad v'_z = v_z$$

Já para o caso relativístico devemos recorrer às transformações de Lorentz. Primeiramente vamos escrever a velocidade na forma diferencial,

$$v = \frac{dx}{dt} \rightarrow v'_x = \frac{dx'}{dt'}$$

Sendo, $dx' = \gamma(dx - Vdt)$ e $dt' = \gamma(dt - \frac{Vdx}{c^2})$

$$\boxed{v'_x = \frac{v_x - V}{1 - \frac{v_x V}{c^2}}} \quad (2.18)$$

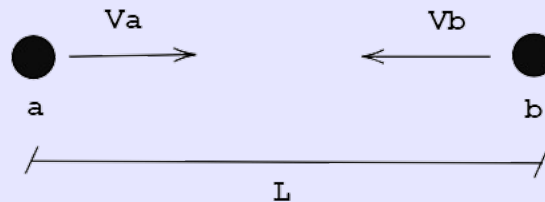
Como $dy' = dy$ e $dz' = dz$,

$$\boxed{v'_y = \frac{v_y}{\gamma(1 - \frac{v_x V}{c^2})}} \quad (2.19)$$

$$\boxed{v'_z = \frac{v_z}{\gamma(1 - \frac{v_x V}{c^2})}} \quad (2.20)$$

Exemplo 2: Foguetes em Rota de Colisão(Guide)

Uma pessoa na Terra observa dois foguetes se movendo diretamente em direção um ao outro e colidindo. No momento $t = 0$ no referencial da Terra, um observador determina que o foguete A está no ponto "a" e viaja para a direita com velocidade $V_a = 0,8c$ e o foguete "b" viaja para a esquerda com velocidade $V_b = -0,6c$. Os dois estão separados por uma distância $L = 4,2 \times 10^8 m$



- Quanto tempo passará até que os foguetes colidam?
- Qual a Velocidade de A em relação a B? Qual a velocidade de B em relação a A?
- Quanto tempo decorrerá desde que foguete A ultrapasse o ponto "a" até o momento da colisão? Quanto tempo decorrerá desde que o foguete B ultrapasse o ponto "b" até a colisão?

Solução 2: solução

(a) No referencial da terra a velocidade relativa dos foguetes será $v_{rel} = 1,4c$, dessa forma

$$\Delta t = \frac{L}{1,4c} = \frac{4,2 \cdot 10^8}{1,4 \cdot 3 \cdot 10^8} = 1s$$

(b) A velocidade de A com relação a B pode ser encontrada a partir da fórmula de adição de velocidades:

$$V_{A \rightarrow B} = \frac{0,6 + 0,8}{1 + 0,6 \cdot 0,8} c = 0,946c$$

A velocidade de B com relação a A tem mesmo módulo mas sentido oposto

$$V_{B \rightarrow A} = -0,946c$$

(c) Pela dilatação do tempo:

$$t_A = \frac{t}{\gamma_A} = t \cdot \sqrt{1 - \frac{v_A^2}{c^2}}$$

$$t_A = 0,6s$$

$$t_B = \frac{t}{\gamma_B} = t \cdot \sqrt{1 - \frac{v_B^2}{c^2}}$$

$$t_B = 0,8s$$

2.4 Efeito Doppler

O Efeito Doppler clássico mostra a diferença entre a frequência emitida por um emissor e a recebida por um observador a depender de suas velocidades em relação aos seus respectivos referenciais.

Nesse caso não devemos considerar efeitos relativísticos devido a baixa ordem da velocidade do som em comparação com a velocidade da luz. Além disso, há uma certa assimetria nesse caso, relacionada com a possibilidade de deslocamento tanto da fonte como do observador, o que não ocorre com a luz, já que a velocidade da luz é a mesma em qualquer referencial, tornando o caso relativístico de certa forma mais simples. O resultado para a velocidade do som é:

$$f_r = f_e \frac{(V_s \pm V_o)}{(V_s \pm V_f)} \quad (2.21)$$

com os sinais \pm dependendo do sentido de movimento da fonte e do observador.

Para o caso relativístico vamos considerar uma fonte F' emissora de frequência num referencial S' que se move com velocidade V e um referencial S em repouso, essa situação pode ser observada na figura 6.

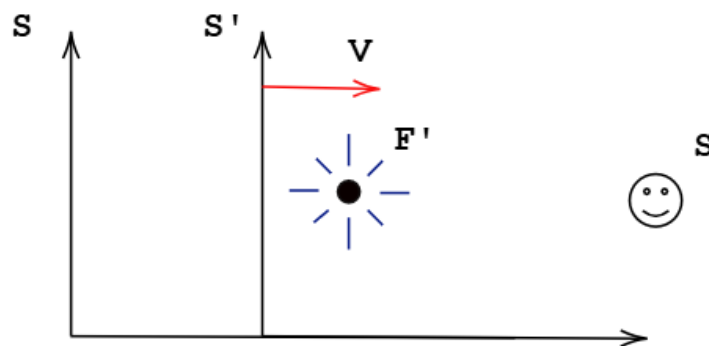


Figura 8: Fonte emitindo frequência.

Vamos analisar agora o intervalo de tempo entre a emissão de duas frentes de onda e consequentemente calcular a frequência emitida,

$$f_e = \frac{1}{\Delta t'} \quad (2.22)$$

sendo $\Delta t'$ o intervalo no referencial S' (tempo próprio), e que é diferente para S .

Para S esse mesmo intervalo de tempo é um Δt , e a partir disso podemos calcular o comprimento de onda percebido pelo observador, dado que a fonte F' se movimenta com velocidade V .

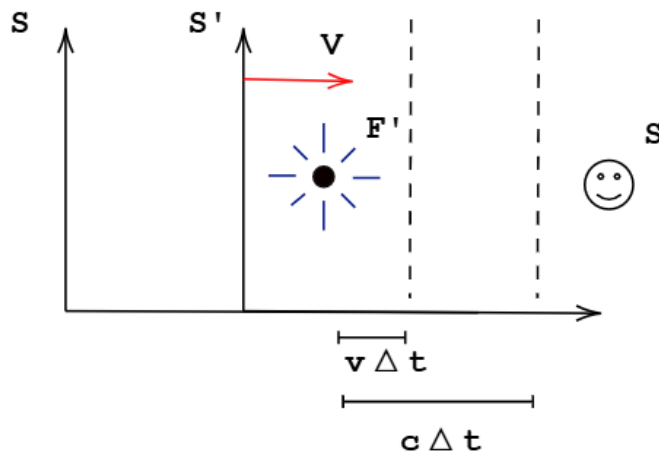


Figura 9: Ilustração da mudança no comprimento de onda.

Como ilustrado na figura 7, o comprimento de onda percebido será a diferença entre o espaço que a luz percorre no intervalo de tempo Δt e o deslocamento da fonte nesse mesmo intervalo de tempo.

$$\lambda = (c - V)\Delta t \quad (2.23)$$

Entretanto a frequência percebida pode ser escrita como

$$f_r = \frac{c}{\lambda} \rightarrow f_r = \frac{c}{(c - V)\Delta t} \quad (2.24)$$

e finalmente, escrevendo $\frac{c}{V} = \beta$:

$$f_r = \frac{\frac{1}{\Delta t}}{1 - \beta} \quad (2.25)$$

Utilizando o resultado da dilatação do tempo já conhecido temos que $\Delta t' = \gamma \Delta t$. Substituindo na eq. 2.14 temos que:

$$f_r = \frac{1}{\gamma} \frac{\frac{1}{\Delta t'}}{1 - \beta} \quad (2.26)$$

Trocando $\frac{1}{\Delta t'}$ por f_e e reajustando alguns termos obtemos f_r .

,

$$f_r = f_e \sqrt{\frac{1 + \beta}{1 - \beta}} \quad (2.27)$$

Para um caso qualquer onde o vetor posição do observador faz um ângulo θ com o sentido de deslocamento da fonte (veja a figura 8) uma abordagem um pouco mais sofisticada é necessária utilizando ondulatória, e a mostraremos a seguir.

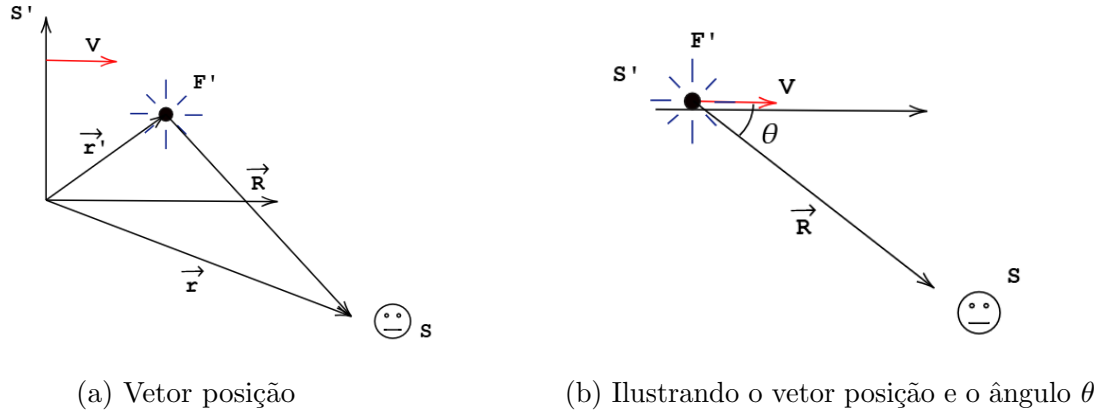


Figura 10: Efeito Doppler bidimensional.

Fazendo uma análise a partir da ondulatória, a fase da onda que se propaga é escrita da seguinte forma

$$\phi = \vec{k}\vec{r} - \omega t$$

Escrevendo o vetor posição e o número de onda associados :

$$R = (r, ct), k = (k, \frac{\omega}{c})$$

Analisando o número de onda como um quadrivetor como visto anteriormente, e utilizando a transformação de Lorentz para ele:

$$K_s = (K_x, K_y, K_z, \frac{\omega}{c}) \quad (2.28)$$

$$K_{s'} = (K_{x'}, K_{y'}, K_{z'}, \frac{\omega'}{c}) \quad (2.29)$$

Logo

$$\frac{\omega'}{c} = \gamma(\frac{\omega}{c} - \beta K_x) \rightarrow \frac{\omega'}{c} = \gamma(\frac{\omega}{c} - \beta \frac{\omega}{c} \cos\theta)$$

$$\omega = \frac{\omega'}{\gamma(1 - \beta \cos\theta)} \quad (2.30)$$

$$\boxed{f = \frac{f_o}{\gamma(1 - \beta \cos\theta)}} \quad (2.31)$$

3 Dinâmica Relativística

3.1 Energia e Momento Relativísticos

Momento Relativístico

Na mecânica clássica o momento de uma partícula pode simplesmente ser escrito como $p = mv$. A mudança que ocorre em relatividade é que a massa da partícula é variável de acordo com a velocidade, e é modificada por um fator de γ , sendo $m = \gamma m_o$. Logo o momento relativístico deve ser escrito como

$$\boxed{p = \gamma m_o v} \quad (3.1)$$

que pode ser representado também no formato um quadrivetor

$$P = (E, p_x, p_y, p_z) \quad (3.2)$$

Vale lembrar que o momento pode ser conservado da mesma forma que na mecânica clássica:

$$\sum p_{fin} = \sum p_{in}$$

Energia Relativística

A energia relativística pode diretamente ser definida como

$$\boxed{E = \gamma m_o c^2} \quad (3.3)$$

É importante entender que a partir de agora uma partícula em repouso não tem energia nula, mas sim uma energia de repouso, associada à massa da partícula, que pode ser expressa como

$$E_{rep} = m_o c^2 \quad (3.4)$$

A energia total da partícula, que é o último ponto essencial a ser tratado a respeito de energia é a soma da energia cinética com a energia de repouso, assim

$$E = m_o c^2 + K \quad (3.5)$$

Dessa forma, encontrando a energia cinética:

$$K = (\gamma - 1)m_o c^2 \quad (3.6)$$

Relações importantes

A primeira relação, que relaciona energia e momento, é :

$$\beta = \frac{V}{c} = \frac{pc}{E} \quad (3.7)$$

A segunda relação está diretamente associada ao que foi apresentado no capítulo sobre quadrivetores :

$$P \cdot P = m^2 c^2 \quad (3.8)$$

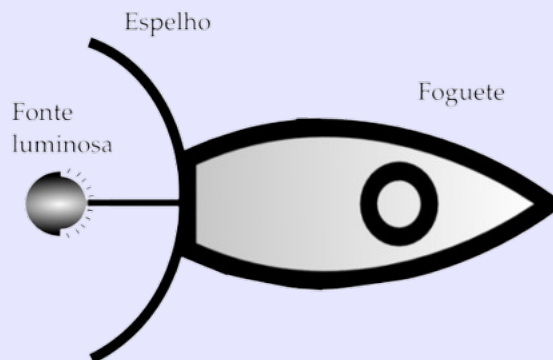
A última é uma relação fundamental, que associa energia e momento :

$$E^2 = p^2 c^2 + m_o^2 c^4 \quad (3.9)$$

Relação essa conhecida como "Pitágoras Relativístico", sendo a mais importante entre as três.

Exemplo 3: Foguete Fotônico (Seletiva de Física 2023 adaptado)

Obras de ficção científica que envolvem viagens espaciais costumam trazer propostas de veículos interestelares bastante curiosas. Considere um foguete fotônico, isto é, um dispositivo capaz de viajar pelo espaço impulsionado apenas por emissão de luz, capaz de atingir velocidades próximas à da luz no vácuo c . A estrutura do foguete é ilustrada na figura abaixo.



O foguete é constituído de uma carga útil à sua dianteira. Na sua parte traseira, o foguete dispõe de um espelho com formato parabólico, em cujo foco uma pequena fonte luminosa é fixada. A fim de aumentar a capacidade de propulsão do foguete, a lâmpada emite luz apenas em direção ao espelho, que é revestido por um material refletor ideal. O processo de reflexão da luz pelo espelho é responsável pela aceleração do foguete pelo espaço. Denote por m_0 a massa de repouso inicial do foguete.

- Determine a velocidade v do foguete em função da sua massa de repouso final, $m_f < m_0$.
- Supondo que o foguete atinja a velocidade de $v = 0.999c$, calcule a fração de sua massa de repouso não convertida em radiação.

Solução 3: solução

(a) Escrevendo primeiramente a energia total dos fótons nós temos

$$E_{tot} = P_{tot}c$$

Pela conservação de energia

$$E_{fót} + E_{fog} = m_0c^2$$

Pela conservação do momento temos também

$$\vec{P}_{fog} + \vec{P}_{fót} = 0 \rightarrow P_{fog} = P_{fót}$$

$$E_{fog} + P_{fót}c = E_{fog} + P_{fog}c = m_0c^2$$

Usando a relação fundamental para energia e momento

$$E^2 = (pc)^2 + (mc^2)^2$$

$$m_f^2c^4 = E_{fog}^2 - (p_{fog}c)^2$$

Sendo m_f a massa do foguete num dado instante após iniciar o movimento.

Usando que $P = \gamma mv$ e que $E = \gamma mc^2$

$$P_{fog} = E_{fog} \frac{v}{c^2}$$

Desse modo já podemos escrever duas equações para o foguete, uma antes do movimento se iniciar e outra depois, elas são respectivamente

$$E_{fog} \left(\frac{v+c}{c} \right) = m_o c^2$$

e

$$E_{fog}^2 \left(\frac{(v+c)^2}{c^2} \right) = m_f^2 c^4$$

Dividindo a equação pela equação elevada ao quadrado chegamos a

$$\frac{(c-v)}{(c+v)} = \frac{m_f^2}{m_o^2}$$

Com um pouco de conta chegamos a

$$v = c \left(\frac{m_o^2 - m_f^2}{m_o^2 + m_f^2} \right)$$

(b) Fazendo $v = 0,999c$ temos

$$\frac{m_f}{m_o} = \sqrt{\frac{(c-v)}{(c+v)}} = 0,02$$

3.2 Colisões

No geral questões de colisões assim como na mecânica clássica podem ser resolvidas utilizando conservação de energia e momento, entretanto deve ser dada atenção para certos detalhes apresentados a seguir.

Exemplo 4: Colisão de Duas Partículas Massivas

Uma bola relativística de vidro, com massa m_a , energia E_a e velocidade V_a , colide com uma bola estacionária de massa m_b , como mostrado na Figura 15.13. Se as duas bolas se fundem para formar um único pedaço, qual é a massa m do pedaço e com qual velocidade v ele se move?

Solução 4: solução

Inicialmente, para encontrar a massa final do sistema basta utilizar a relação da eq. 3.5.

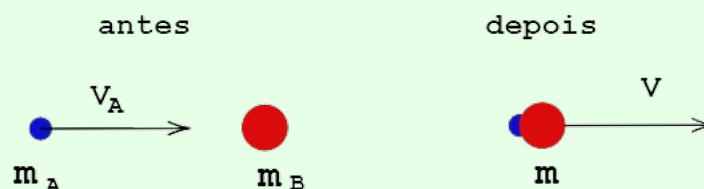
$$(p_{fin})^2 = m^2 c^2$$

Por conservação de momento e energia temos $p_{fin} = p_{in}$, onde p_{in} é o momento inicial total.

O que nos leva a $p_{in} = p_a + p_b$, daí

$$(p_{in})^2 = (p_a + p_b)^2 = p_a^2 + p_b^2 + 2p_a p_b$$

$$(p_{in})^2 = -m_a^2 c^2 - m_b^2 c^2 - 2E_a m_b$$



Comparando as equações chegamos a

$$m = \sqrt{m_a^2 + m_b^2 + \frac{2E_a m_b}{c^2}}$$

Usando uma das relações apresentadas para energia/momento

$$v = \frac{p_{fin} c^2}{E_{fin}}$$

Pela conservação do quadri-momento é possível finalmente chegar a

$$V = \frac{p_a c^2}{E_a + m_b c^2} = \frac{\gamma_a m_a v_a}{\gamma_a m_a + m_b}$$

Exemplo 5: Colisões e Quadrivetores - Morin

Dois Fótons tem energia E cada um. Eles colidem num ângulo θ e uma partícula de massa M é criada. Qual o valor de M ?

Solução 5: solução

Primeiramente, escrevendo o quadri-momento dos fótons nós temos:

$$P_{\gamma 1} = (E, E, E, 0)$$

e

$$P_{\gamma 2} = (E, E \cos \theta, E \sin \theta, 0)$$

Lembrando que consideramos $c = 1$ para facilitar os cálculos, mas ele pode voltar depois por meio de análise dimensional simples. A energia e o momento são conservados, logo, podemos escrever a energia e o momento da partícula final:

$$P_M = (2E, E + E \cos \theta, E \sin \theta, 0)$$

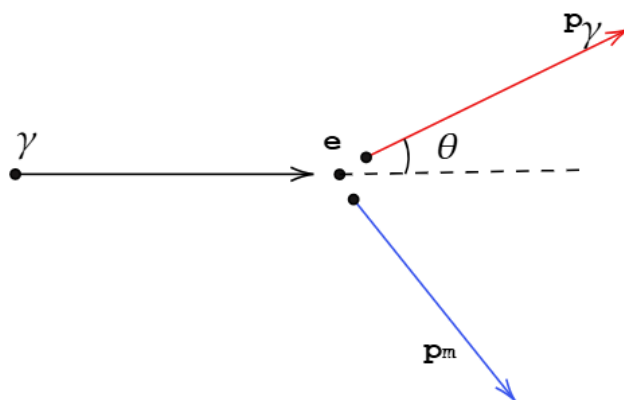
$$M^2 = P_M \cdot P_M = (2E)^2 - (E + E \cos \theta)^2 - (E \sin \theta)^2$$

Dessa forma

$$M = E \sqrt{2(1 - \cos \theta)}$$

Efeito Compton

O experimento definitivo para determinar que o próton não tem massa foi o que futuramente ficaria conhecido como Efeito Compton. Fenômeno esse que ocorreu a partir da incidência de raios-X sobre elétrons, que a partir de uma colisão entre fótons e elétrons gera o espalhamento ilustrado na figura.



Os quadri-momentos antes da colisão são:

$$P_{\gamma} = \left(\frac{hc}{\lambda}, \frac{hc}{\lambda}, 0, 0 \right), P_m = (mc^2, 0, 0, 0)$$

Depois da colisão os quadri-momentos são:

$$P'_\gamma = \left(\frac{hc}{\lambda'}, \frac{hc}{\lambda'} \cos\theta, \frac{hc}{\lambda'} \sin\theta, 0 \right), P_m = (mc^2, 0, 0, 0)$$

Pela conservação de energia e momento, nós temos

$$P_\gamma + P_m = P'_\gamma + P'_m$$

Daí

$$P'_m = (P_\gamma + P_m - P'_\gamma)^2$$

$$P'_m = P_\gamma^2 + P_m^2 + P'^2_\gamma + 2P_m(P_\gamma - P'_\gamma - 2P_\gamma P'_\gamma)$$

$$m^2 c^4 = m^2 c^4 + 2mc^2 \left(\frac{hc}{\lambda} - \frac{hc}{\lambda'} \right) - 2 \frac{hc}{\lambda} \frac{hc}{\lambda'} (1 - \cos\theta)$$

Manipulando algebricamente a equação podemos chegar a

$$\lambda' = \lambda + \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta)$$

$$\Delta\lambda = \frac{h}{mc} (1 - \cos\theta)$$

Onde $\frac{h}{mc}$ é conhecido como o comprimento de onda de Compton

$$\lambda_c = \frac{h}{mc}$$

Referencial do CM

É possível demonstrar a partir das equações de transformação de momento e energia que

$$E^2 - (pc)^2 = E'^2 - (p'c)^2$$

o que nos permite percorrer todos os referenciais, já que o quadrado da energia total menos o quadrado do seu momento total será igual para todos os outros referenciais.

E é importante entender que para muitas partículas $E_{total}^2 - p_{total}^2 c^2$ é igual ao quadrado da energia total no referencial do CM, já que por definição $p_{total} = 0$ no referencial do CM.

Exemplo 6: Limite de Energia - Morin

Uma partícula de massa m e energia E colide com uma partícula estacionária idêntica. Qual é o limite de energia para um estado final contendo N partículas de massa m ? (Entenda que limite de energia é o mínimo para que o processo possa ocorrer.)

Solução 6: solução

Inicialmente os quadri-momentos no referencial do laboratório são

$$(E, p, 0, 0) \text{ e } (m, 0, 0, 0)$$

Sendo $p = \sqrt{E^2 - m^2}$ (considerando $c = 1$)

Logo o quadri-momento final das partículas em relação ao laboratório será

$$P_{final} = (E + m, p, 0, 0)$$

O valor de $E_{total}^2 - p_{total}^2 = cte$, sendo igual para qualquer referencial inercial, e no referencial do CM (onde $p = 0$) é igual apenas à energia do CM. Dessa forma

$$P_{final}^2 = P_{final} \cdot P_{final} = (E + m)^2 - p^2$$

$$(E + m)^2 - (\sqrt{E^2 - m^2})^2 = (E_{finCM})^2$$

$$2Em + 2m^2 = (E_{finCM})^2$$

A condição para energia mínima vem exatamente do conceito de CM relacionado à relatividade, pois, já que o momento é nulo, as partículas não terão energia cinética, apenas energia de repouso. Sendo assim

$$2Em + 2m^2 = (Nm)^2$$

$$E = \left(\frac{N^2}{2} - 1 \right)$$

3.3 Força

Força em relatividade tem uma pequena alteração diretamente relacionada com o fator γ associado ao momento de um corpo qualquer, que agora é escrito como $p = \gamma mv$. Uma abordagem direta para encontrar o que deve ser alterado em relação à força é escreve-la na forma diferencial de momento em relação ao tempo.

$$F = \frac{dp}{dt} \rightarrow F = \frac{d(\gamma mv)}{dt}$$

Temos então que aplicar a regra da cadeia para esta derivada (considerando a massa constante),

$$F = \frac{d\gamma}{dt}mv + \gamma m \frac{dv}{dt} \quad (3.10)$$

Para reduzirmos linhas significativas de conta iremos escrever de forma direta o resultado de $\frac{d\gamma}{dt}$,

$$\frac{d\gamma}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \right) = \gamma^3 v \frac{dv}{dt}$$

Dessa forma,

$$F = ma\gamma(\gamma^2 v^2 + 1) \quad (3.11)$$

Com um pouco de álgebra temos que $\gamma^2 v^2 + 1 = \gamma^2$, logo

$$\boxed{F = \gamma^3 ma} \quad (3.12)$$

O mesmo resultado pode ser encontrado a partir de uma diferencial de energia:

$$F = \frac{dE}{dx} = \gamma^3 ma \quad (3.13)$$

Exemplo 7: Movimento sob força constante

Uma partícula de massa de repouso m_0 é submetida a uma força constante de módulo F_0 . No instante inicial do movimento $t = 0$, o corpo encontrava-se em repouso.

- Calcule as funções horárias $x(t)$ e $v(t)$ da partícula.
- Mostre que o limite não relativístico das expressões encontradas corresponde aos resultados obtidos pela Mecânica Clássica.

Solução 7: solução

- Escrevendo a Força como uma diferencial de momento:

$$F_0 = \frac{dP}{dt} \rightarrow P(t) = F_0 t$$

Logo

$$\frac{m_o v}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = F_o t$$

$$v(t) = \frac{\left(\frac{F_o t}{m_o}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{F_o t}{m_o c}\right)^2}}$$

A função horária $x(t)$ será então:

$$x(t) = \int_0^t \frac{\left(\frac{F_o t}{m_o}\right)}{\sqrt{1 + \left(\frac{F_o t}{m_o c}\right)^2}} dt$$

Dessa forma

$$x(t) = ct \sqrt{1 + \left(\frac{m_o c}{F_o t}\right)^2} - \frac{m_o c^2}{F_o}$$

(b) Para o limite não relativístico basta aplicarmos a aproximação binomial $(1 + x)^n \approx 1 + nx$, assim

$$x(t) = \frac{m_o c^2}{F_o} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{F_o t}{m_o c}\right)^2} - 1 \right) \approx \frac{1}{2} \frac{m_o c^2}{F_o} \left(\frac{F_o t}{m_o c}\right)^2$$

$$x(t) = \frac{F_o t^2}{2 m_o}$$

Que corresponde ao resultado obtido por meio de cinemática clássica.

4 Problemas

4.1 Problemas de Cinemática

4.1.1 Problema 1 - Quadrado Rotacionado(Morin) *

Um quadrado com lados de comprimento adequado L passa voando por você com velocidade v , em uma direção paralela a dois de seus lados. Você está no plano do quadrado. Quando você vê o quadrado em seu ponto mais próximo de você (Veja a Figura), mostre que ele parece estar rotacionado em vez de contraído, e encontre o ângulo aparente de rotação. Suponha que L seja pequeno comparado com a distância entre você e o quadrado. (Esta configuração é um dos poucos casos em que estamos realmente preocupados com o tempo que a luz leva para viajar até seu olho.)

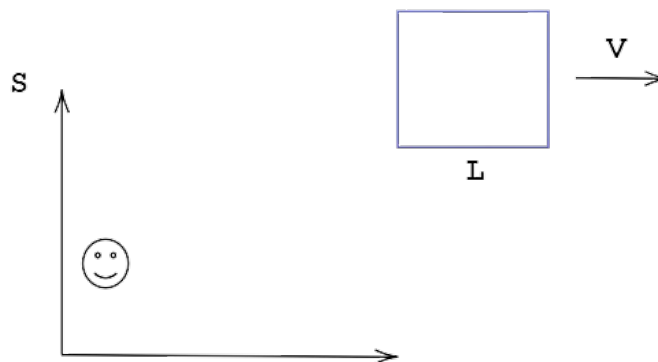


Figura 11: Quadrado em movimento.

4.1.2 Problema 2 - Dilatação do Tempo? (Taylor)*

A dilatação do tempo implica que quando um relógio se move em relação a um quadro S , medições cuidadosas feitas por observadores em S descobrirão que o relógio está lento. Isso não é a mesma coisa que dizer que um único observador em S verá o relógio lento, e esta última afirmação nem sempre é verdadeira. Para entender isso, lembre-se de que o que vemos é determinado pela luz que chega aos nossos olhos.

Considere um observador parado próximo ao eixo x enquanto um relógio se aproxima dele com velocidade V ao longo do eixo. Conforme o relógio se move da posição A para B , ele registrará um tempo Δt_o , mas conforme medido pelos auxiliares do observador, o tempo entre os dois eventos ("relógio em A " e "relógio em B ") é $\Delta t = \gamma \Delta t_o$. No entanto, como B está mais próximo do observador do que A , a luz do relógio em B alcançará o observador em um tempo menor do que a luz de A . Portanto, o tempo Δt_{visto} entre o observador ver o relógio em A e vê-lo em B é menor que Δt . (a) Prove que

$$\Delta t_{visto} = \Delta t(1 - \beta) = \Delta t_o \sqrt{\frac{1 - \beta}{1 + \beta}}$$

(que é menor que Δt_o). Prove ambas as igualdades. (b) Que horas o observador verá quando o relógio tiver passado por ela e estiver se afastando?

A moral desse problema é que você deve ter cuidado ao declarar ou pensar sobre a dilatação do tempo. É bom dizer "Relógios em movimento são observados, ou medidos, para funcionarem devagar", mas é definitivamente errado dizer "Relógios em movimento são vistos para funcionarem devagar".

4.1.3 Problema 3 - Placa de Vidro em Movimento (Kleppner) **

Uma placa de vidro se move para a direita com velocidade v . Um flash de luz é emitido de A e passa pelo vidro para chegar a B a uma distância L . O vidro tem espessura D em seu quadro de repouso, e a velocidade da luz no vidro é c/n . Quanto tempo leva para a luz ir de A até B?

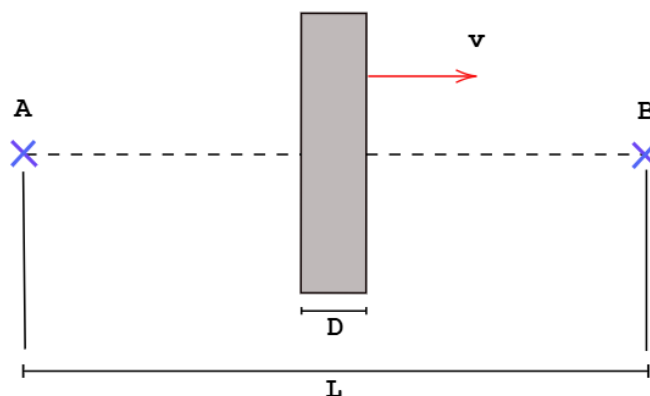


Figura 12: Placa de Vidro em movimento.

4.1.4 Problema 4 - Dois Trens (Competitive) **

Dois trens idênticos estão viajando em velocidades $\frac{4c}{5}$ e $\frac{3c}{5}$ para a direita no referencial S. O trem mais rápido está inicialmente atrás do trem mais lento. Defina os eventos P e Q como a frente do trem mais rápido cruzando a parte de trás do trem mais lento e a parte de trás do trem mais rápido cruzando a frente do trem mais lento respectivamente. Quando o evento P ocorre no quadro S, um observador R começa a andar da parte de trás do trem mais lento para a frente do trem mais lento. Coincidentemente, o tempo durante o qual ele alcança a frente do trem mais lento coincide com o evento Q. Encontre a velocidade do trem mais rápido no quadro do trem mais lento. Portanto, encontre a velocidade do observador R no quadro S.

4.1.5 Problema 5 - Positrônio e Efeito Doppler Relativístico (Guide) ***

Um elétron e^- e um pósitron, e^+ , de massa m_e

- (a) Calcule a energia, momento, velocidade e frequência dos fótons.
- (b) O positrônio com velocidade v se afasta do observador no laboratório e se aniquila como mostrado na Figura . Dê a frequência do fóton conforme medido pelo observador e calcule sua frequência em termos da frequência no sistema de repouso do positrônio (Efeito Doppler Relativístico).

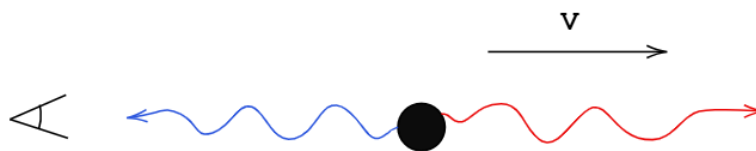


Figura 13: Aniquilação Elétron-Pósitron.

4.1.6 Problema 6 - Aberração Estelar (Competitive) ***

Uma fonte de luz estacionária está situada na origem do quadro S. Ela emite um flash que é recebido por um observador que se afasta viajando a uma velocidade v na direção x positiva. Seja o quadro do observador S' . Se θ e θ' são os ângulos subtendidos pelo caminho da luz e o eixo x positivo no quadro S, e o eixo x' positivo no quadro S' respectivamente, mostre que

$$\cos\theta' = \frac{\cos\theta - \beta}{1 - \beta\cos\theta}$$

onde $\beta = \frac{v}{c}$ é definido para ser positivo nas direções x ou x' .

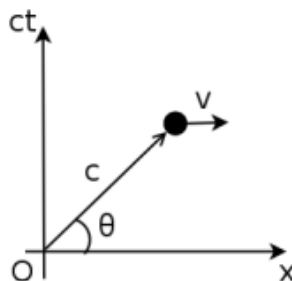


Figura 14: Objeto se movimentando e seu vetor posição.

4.1.7 Problema 7 - Piloto suicida ***

Uma nave espacial viaja com uma aceleração constante g (como percebida pelos passageiros) ao longo de uma linha reta. Em determinado momento, ela lança dois mísseis na direção de seu movimento, um com velocidade v (comparável à velocidade da luz c), e outro com velocidade $2v$ (estas são as velocidades no referencial da nave). Encontre o intervalo de tempo como medido pelo referencial da nave espacial entre o evento de alcançar o primeiro míssil e o de alcançar o segundo.

4.2 Problemas de Dinâmica

4.2.1 Problema 8 - Decaimento e Raios Cósmicos (ITA 2020) *

Raios cósmicos interagem com átomos da atmosfera e produzem partículas instáveis X . Por meio de experimentos, constata-se que X decai em uma partícula Y e em um neutrino ν , conforme a equação de decaimento $X \rightarrow Y + \nu$. Considerando desprezível a massa de repouso do neutrino e X inicialmente em repouso, determine a velocidade da partícula Y em termos de c e das massas de X e de Y .

4.2.2 Problema 9 - Acelerador Cíclotron (ITA 2024) *

Em um acelerador cíclotron uma partícula 1 carregada com carga q , massa m_o e energia cinética K , submetida a um campo magnético $B = -Bz$, percorre uma trajetória curvilínea de raio r_1 no plano xy . No mesmo acelerador uma partícula 2 carregada com carga $2q$, massa $2m_o$ e energia cinética $4K$, submetida ao mesmo campo magnético, percorre outra trajetória curvilínea de raio r_2 . Considerando efeitos relativísticos determine a razão r_2/r_1 , em termos das energia cinética K , massa m_o e velocidade da luz c .

Dado: No referencial do acelerador, a expressão equivalente à resultante centrípeta no contexto da mecânica relativística é $p^2/\gamma m_o r$, onde p é o momento relativístico, γ é o fator de Lorentz e r é o raio da trajetória circular.

4.2.3 Problema 10 - Caixa de fótons (Guide) **

Uma caixa vazia de massa total M com paredes perfeitamente refletoras está em repouso no quadro do laboratório. Então ondas eletromagnéticas estacionárias são introduzidas ao longo da direção, consistindo de N fótons, cada um de frequência ν_o .

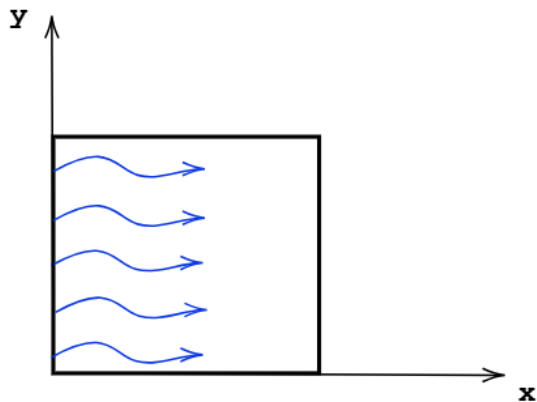


Figura 15: Caixa de fótons.

- a) Indique qual será a massa de repouso do sistema (caixa + fótons) quando os fótons estiverem presentes.
- b) Mostre que esta resposta pode ser obtida considerando o momento e/ou energia do sistema caixa-mais-fóton em qualquer quadro inercial movendo-se ao longo do eixo.

4.2.4 Problema 11 - Oscilador Harmônico relativístico (Morin) **

Uma partícula se move ao longo do eixo x , sob influência de uma força $F = -m\omega^2 x$ (essa é a força de mola padrão da lei de Hooke com $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$). A amplitude do movimento (máximo valor de $|x|$) é b . Mostre que o período (tempo para uma oscilação completa) é dado por

$$T = \frac{4}{c} \int_0^b \frac{\gamma}{\sqrt{\gamma^2 - 1}} dx,$$

onde $\gamma = 1 + \frac{\omega^2}{2c^2}(b^2 - x^2)$.

4.2.5 Problema 12 - Produção de Partículas (Guide) **

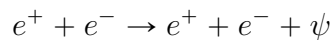
Considere um fóton de energia ϵ_γ incidindo num próton em repouso. Para ϵ_γ suficientemente grande, um méson π pode ser produzido na reação

$$\gamma + p \rightarrow p + \pi^0$$

Qual é a ϵ_{min} do fóton para que essa reação ocorra?

4.2.6 Problema 13 - Colisão Pósitron-Elétron (Competitive)

Considere a reação:



Determine a energia inicial mínima do elétron ou pósitron para que essa reação ocorra no quadro do centro de momento (CoM) em termos das massas de repouso m_ψ e m_e . Portanto, encontre a energia limite do pósitron se o pósitron for bombardeado no elétron estacionário no referencial do laboratório.

4.2.7 Problema 14 - Foguete Relativístico (Guide) ***

Um foguete inicialmente com massa M_o ejeta seu combustível com velocidade constante $-u(u > 0)$ relativo ao seu referencial instantâneo em repouso. De acordo com a mecânica Newtoniana sua velocidade V se relaciona com sua massa $M(V)$ da seguinte forma

$$\frac{M}{M_o} = \exp\left(-\frac{V}{u}\right)$$

(a) Derive este resultado. Demonstre que pode-se chegar ao resultado

$$Mdv = -udM$$

e que ele é idêntico para o caso relativístico.

(b) Encontre uma expressão para o caso relativístico. Mostre que no limite não relativístico voltamos ao resultado da Mecânica Clássica.

5 Gabaritos

1. $\sin\theta = \beta$

2. (a) Demonstração.

(b) $\Delta t_{visto} = \Delta t(1 + \beta)$

3. $T = \frac{L}{c} + \frac{D}{c}\left(n - 1 - \frac{v(n-1)}{c}\right)$

4. $u = \frac{7c}{5}$

5. (a) $\epsilon = m_e c^2 + \frac{\epsilon_b}{2}$

$p = \pm(m_e c + \frac{\epsilon_b}{2c})$

$v = \pm c$

$\omega = \frac{2\pi}{h}(m_e c^2 + \frac{\epsilon_b}{2})$

(b) $\omega' = \omega \sqrt{\frac{1-\beta}{1+\beta}}$

6. Demonstração.

7. $\Delta t = \frac{c}{g} \left(\frac{1 + \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}}{1 - \frac{v}{c} + \frac{v^2}{c^2}} \right)$

8. $V_x = \left(\frac{m_x^2 - m_y^2}{m_x^2 + m_y^2} \right) c$

9. $\frac{r_2}{r_1} = 2 \left(\sqrt{\frac{K + m_o c^2}{K + 2m_o c^2}} \right)$

10. (a) (b) Demonstração.

11. Demonstração.

12. $\epsilon_{min} = m_\pi \left(1 + \frac{m_\pi}{2m_p} \right)$

13. $E_{lim} = m_e + 2m_\psi + \frac{m_\psi^2}{2m_e}$

14. (a) Demonstração.

(b) $\frac{M}{M_o} = \left(\frac{1-\beta}{1+\beta} \right)^{\frac{c}{2u}}, \beta = \frac{V}{c}$

6 Apêndice: Aprendendo Quadrivetores

Como foi visto anteriormente as seguintes transformadas são utilizadas para espaço e tempo em relatividade:

$$\begin{array}{lcl} \text{S} & & \text{S}' \\ x & \longrightarrow & x' = \gamma(x - \beta c) \\ y & \longrightarrow & y' = y \\ z & \longrightarrow & z' = z \\ ct & \longrightarrow & ct' = \gamma(ct - \beta x) \end{array}$$

Com $\beta = \frac{V}{c}$.

Ademais

$$R = (x, y, z, ct)$$

$$R' = (x', y', z', ct')$$

Essa transformação no espaço e no tempo pode ser representada por uma matriz de transformação para quaisquer quantidades (x_1, \dots) :

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \\ ct' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma & 0 & 0 & -\gamma\beta \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\gamma\beta & 0 & 0 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ ct \end{bmatrix}$$

Para a teoria e problemas devemos nos preocupar nesse momento em escrever o momento como quadrivetor (quadri-momento) e também o vetor posição e o número de onda que é um vetor também como quadrivetores.

Vetor posição e número de onda

$$R = (r, ct)$$

$$k = (k, \frac{\omega}{c}) \rightarrow k = (k_x, k_y, k_z, \frac{\omega}{c})$$

Quadri-momento

$$P \equiv (E, p) \equiv (E, p_x, p_y, p_z)$$

Onde utilizar o primeiro termo como E em vez de $\frac{E}{c}$ é muito comum, pois considera-se $c = 1$, o que pode ser corrigido no resultado final por meio de análise dimensional.

Sendo E e p a energia e o momento totais das partículas envolvidas no sistema. Pela conservação do momento temos

$$P_{antes} = P_{depois}$$

que são os quadri-momentos das partículas.

Ademais, é importante entender que o produto entre dois quadrivetores $A \equiv (A_o, A_1, A_2, A_3)$ e $B \equiv (B_o, B_1, B_2, B_3)$ pode ser escrito da seguinte forma:

$$A \cdot B \equiv A_o B_o - A_1 B_1 - A_2 B_2 - A_3 B_3$$

E pela relação fundamental $E^2 - (pc)^2 = m^2 c^4$ podemos escrever:

$$P \cdot P = m^2 \rightarrow P^2 = m^2$$

Referências

- [1] Morin, David. *Introduction to Classical Mechanics: With Problems and Solutions*. Cambridge University Press, 2008.
- [2] Taylor, John R. *Classical Mechanics*. University Science Books, 2005.
- [3] Kleppner, Daniel, and Robert J. Kolenkow. *An Introduction to Mechanics*. Cambridge University Press, 2013.
- [4] Cahn, Sidney B., Gerald D. Mahan, and Boris E. Nadgorny. *A Guide to Physics Problems: Part 1 – Mechanics, Relativity, and Electrodynamics*. Springer, 1994.
- [5] Frolov, Alexei M., and Dmitri G. Abramov. *Competitive Physics: Relativity, Electrodynamics, and Waves*. World Scientific, 2015.