Olympic Birds

Física

Ondas em Cordas

Autores: Guilherme Rodrigues, Gustavo Globig, Lucas Cavalcante e William Alves

Sumário

1 Introdução

As ondas em cordas são fenômenos fascinantes que aparecem em diversas situações, desde o som produzido por instrumentos musicais até em sistemas de comunicação e sensores. Compreender como as ondas se propagam em cordas permite explorar não apenas a física envolvida, mas também uma variedade de aplicações práticas que se valem desses princípios, tornando esse conhecimento essencial para resolver problemas em competições como a OBF e outras olimpíadas de física, até mesmo em nível internacional.

Neste material, abordaremos uma série de tópicos fundamentais para o entendimento das ondas em cordas, iniciando com a Equação de Onda Unidimensional, que serve como base matemática para descrever a propagação de ondas ao longo de uma corda. A partir dela, desenvolveremos a Equação de Ondas em Cordas, onde analisamos como a tensão e a densidade linear de massa afetam a velocidade e o comportamento dessas ondas.

A energia transportada por ondas é um aspecto crucial para a compreensão completa do fenômeno. No capítulo sobre Intensidade e Potência da Onda em Corda, discutiremos como calcular a energia que se propaga ao longo da corda, considerando variáveis como amplitude e frequência, e como elas influenciam essa intensidade.

Um dos fenômenos mais intrigantes em ondas é a Interferência e Batimento, onde duas ou mais ondas interagem, formando padrões complexos. Esses conceitos são importantes para aplicações práticas, como ajustes finos em instrumentos musicais, além de aparecerem em questões desafiadoras de competições de física. Também exploraremos o comportamento das ondas ao encontrar diferentes meios, por meio do estudo de Reflexão e Transmissão, destacando como a onda pode ser refletida ou transmitida dependendo das condições do meio.

Finalmente, aprofundaremos nos Modos Normais de Vibração, explicando como ondas estacionárias se formam em cordas e como padrões específicos de vibração emergem. Esse conceito é vital para entender o funcionamento de instrumentos de corda, a produção de notas musicais distintas e ajustes em sistemas físicos para alcançar vibrações desejadas.

Este material busca fornecer uma compreensão ampla e detalhada sobre as ondas em cordas, suas características e principais fenômenos. Com isso, pretende-se oferecer uma base sólida para enfrentar problemas de diferentes níveis de complexidade que aparecem em competições como a OBF e até em olimpíadas internacionais de física, promovendo uma preparação completa para estudantes e entusiastas da área.

Se você está se preparando para a OBF e não possui uma base sólida em cálculo, incluindo integrais e derivadas, este material ainda pode ser útil. Nesse caso, recomenda-se que você foque nos resultados apresentados, em vez de se preocupar excessivamente com o desenvolvimento teórico dos conceitos, que vai além do escopo da olimpíada. Além disso, é altamente recomendado resolver os problemas, que estão divididos em três categorias:

- **Revisão**: problemas destinados a consolidar os conhecimentos aprendidos ao longo do material;
- **Aprofundamento**: questões mais desafiadoras, que exigem um pouco mais de tempo ou apresentam ideias diferenciadas;
- **Aplicação**: exercícios retirados de livros, vestibulares e olimpíadas, permitindo um aprendizado mais abrangente dos conteúdos abordados.

2 Equação de Onda Unidimensional

As ondas são oscilações periódicas que se propagam no espaço e seguem a equação caracteristica para ondas, a qual, em seu formato unidimensional é escrito como:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \tag{2.1}$$

que é governada por derivadas parciais de segunda ordem. Essa equação é frequentemente utilizada como meio de comparação com outras equações para ondas de pressão ou ondas em cordas (assunto abordado no capítulo 3 deste material). Ela é muito útil para encontrar expressões para a velocidade das ondas em seus respectivos meios de propagação.

É importante também compreender que as ondas em cordas são um caso específico de ondas progressivas, elas são ondas que se deslocam na horizontal, avançando seu perfil no espaço ou tempo podendo ser expressas por funções $Y(x,t) = f(x - vt)$ quando se propagam para a direita e $Y(x,t) = f(x + vt)$ quando se propagam para a esquerda. Essa expressão pode ser observada ao considerar dois referencias, um acompanhando a onda e outro parado na origem:

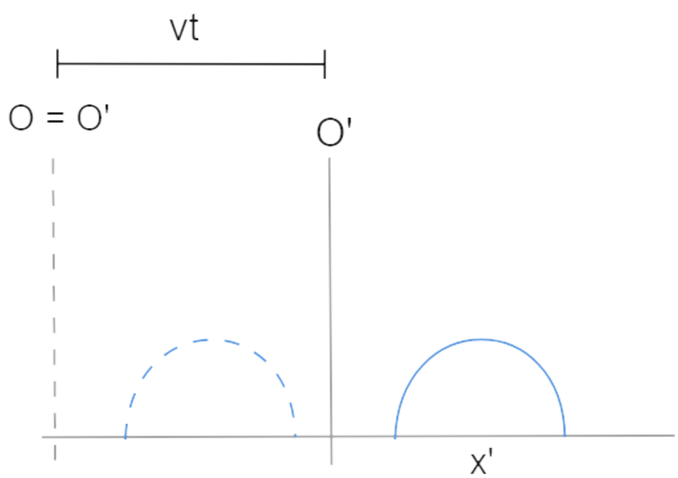


Figura 1: Onda progressiva para a direita em dois momentos diferentes

Para o referencial que se move com a onda:

$$y'(x', t) = y'(x', 0) = f(x')$$

Mas para o referencial em repouso, pode-se aplicar uma transformada de Galileu:

$$x' = x - vt$$
$$y' = y$$

Resultando em:

$$y(x,t) = f(x - vt)$$

Além disso, pode-se provar que essa função segue a equação características das ondas, pois:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x - vt)$$
$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 f''(x - vt)$$

Que ao substituir na equação de onda, resulta em:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \Rightarrow f''(x - vt) = \frac{v^2}{v^2} f''(x - vt) \Rightarrow 1 = 1$$

No caso específico das cordas, as ondas assumem um caráter de oscilação semelhante ao movimento harmônico simples, podendo ser expressas pela equação:

$$Y(x,t) = A\cos(kx - \omega t + \phi_0) \tag{2.2}$$

Ao substituir essa expressão na equação características de ondas, podemos encontrar uma relação entre v, k e ω:

$$\frac{\partial^2 Y}{\partial x^2} = -k^2 A\cos(kx - \omega t + \phi_0)$$
$$\frac{\partial^2 Y}{\partial t^2} = -\omega^2 A\cos(kx - \omega t + \phi_0)$$
$$-k^2 A\cos(kx - \omega t + \phi_0) = \frac{-\omega^2 A\cos(kx - \omega t + \phi_0)}{v^2}$$
$$\boxed{kv = \omega} \tag{2.3}$$

3 Equação de Ondas em Cordas

Para analisarmos o movimento de ondas em cordas e, consequentemente, obtermos uma equação que o descreva, tomemos como base um infinitésimo de corda no qual a onda se propaga (Figura 2):

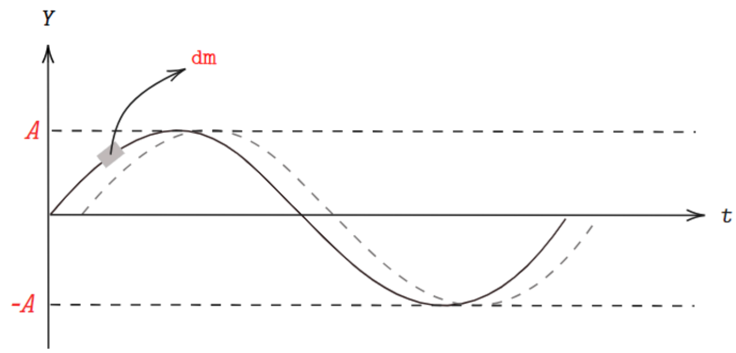


Figura 2: Onda em corda

Consideremos também as forças atuando sobre esse pequeno trecho (Figura 3):

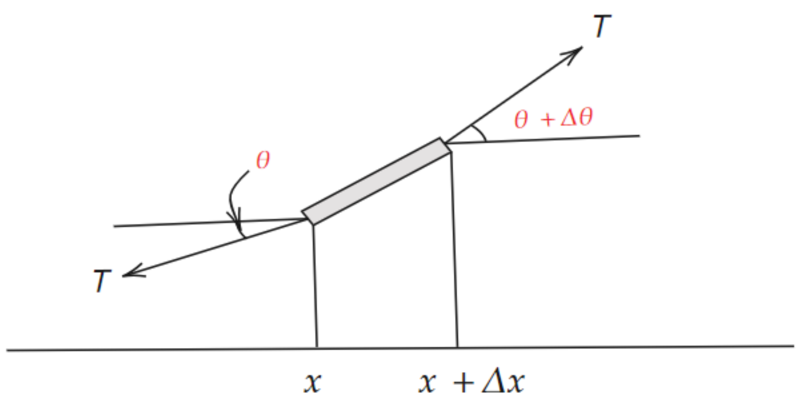


Figura 3: Forças sobre a corda

Analisando quantitativamente a força resultante em cada direção sobre o infinitésimo de corda, temos:

$$F_y = T\sin(\theta + \Delta\theta) - T\sin\theta$$

$$F_x = T\cos(\theta + \Delta\theta) - T\cos\theta$$

Para ondas em cordas, consideramos apenas oscilações que formam ângulos pequenos, com a aproximação para pequenos ângulos temos $\sin(\theta + \Delta\theta) \approx \theta + \Delta\theta$ e $\sin(\theta) \approx \theta$, além de que tanto $\cos(\theta + \Delta\theta)$ como $\cos(\theta)$ são aproximadamente iguais a 1. Logo:

$$F_y \approx T\Delta\theta \tag{3.1}$$

$$F_x \approx 0 \tag{3.2}$$

É possível observar que a força resultante na vertical será responsável por gerar uma aceleração sobre o trecho de corda. Dessa forma:

$$T\Delta\theta = (dm)a_y \rightarrow T\Delta\theta = (\mu\Delta x)a_y$$

Onde μ é a densidade linear de massa da corda. Considerando que o movimento da corda se dá como função de x, y e t, e fazendo as devidas aproximações, é possível obter que $\Delta\theta = \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x$. Assim, basta comparar a equação obtida com a equação de ondas unidimensionais 2.1 para obter uma expressão para a velocidade da onda na corda:

$$T\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}\Delta x = \mu\Delta x\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} \rightarrow \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{\left(\frac{T}{\mu}\right)}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

$$\boxed{V = \sqrt{\frac{T}{\mu}}} \tag{3.3}$$

4 Intensidade e Potência da Onda em Corda

Para gerar uma onda harmônica progressiva, é necessário aplicar trabalho em uma extremidade da corda, fazendo-a oscilar. Esse trabalho é transmitido ao longo da corda com a propagação da onda. Assim, ondas progressivas transversais, como as ondas em cordas, transportam energia. Podemos quantificar a quantidade de energia transportada pela onda através da potência instantânea e, em termos médios, pela intensidade. Além disso, é possível determinar a densidade de energia contida em uma onda. As quantidades relacionadas à energia serão derivadas a seguir.

4.1 Densidade de Energia

Para analisar a energia, consideremos uma onda progressiva representada pela equação 2.2. Tomando um elemento infinitesimal da corda, conforme mostrado na figura 2, a energia cinética desse trecho será:

$$dK = \frac{1}{2}dm\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx$$

Esta expressão pode ser escrita como uma densidade de energia cinética linear instantânea:

$$\frac{dK}{dx} = \frac{1}{2}\mu\left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 = \frac{1}{2}\mu(A\omega\sin(kx - \omega t + \phi_0))^2$$

Em geral, o valor instantâneo de uma energia ou potência não é tão interessante, sendo mais útil o valor médio, como $\overline{\sin^2\theta} = \overline{\cos^2\theta} = \frac{1}{2}$:

$$\boxed{\overline{\frac{dK}{dx}} = \frac{1}{4}\mu A^2\omega^2} \tag{4.1}$$

Como o elemento infinitesimal realiza um MHS na direção y, a energia potencial média é igual à energia cinética média, encontrada anteriormente em 4.1, pois essa energia potencial será transformada em energia cinética para a execução do movimento. Logo, a densidade linear de energia potencial média será:

$$\boxed{\overline{\frac{dU}{dx}} = \frac{1}{4}\mu A^2\omega^2} \tag{4.2}$$

Como a energia total é a soma da energia potencial e da energia cinética, a densidade de energia média total contida na onda será:

$$\boxed{\overline{\epsilon} = \overline{\frac{dE}{dx}} = \overline{\frac{dK}{dx}} + \overline{\frac{dU}{dx}} = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2} \tag{4.3}$$

4.2 Potência e Intensidade

Para encontrar a potência transportada pela onda, pode-se partir do princípio de que a potência é a força resultante multiplicada pela velocidade. No caso das ondas em cordas, a força resultante é:

$$F_y = -T\sin\theta \approx -T\tan\theta = -T\frac{\partial y}{\partial x} \tag{4.4}$$

Portanto, a potência instantânea transportada pela onda será:

$$P(x,t) = F_y v = F_y\frac{\partial y}{\partial t}$$

$$\boxed{P(x,t) = -T\frac{\partial y}{\partial x}\frac{\partial y}{\partial t}} \tag{4.5}$$

Para uma onda harmônica progressiva:

$$P(x,t) = -T(-kA\sin(kx-\omega t+\phi_0))(\omega A\sin(kx-\omega t+\phi_0)) = \omega kTA^2\sin^2(kx-\omega t+\phi_0)$$

Como o mais útil é o valor médio, tirando o valor médio da expressão, teremos a intensidade da onda, que é a potência média transportada por ela. Substituindo $T = \mu v^2$ e $kv = \omega$, resulta-se:

$$\boxed{I = \overline{P} = \frac{1}{2}\mu v\omega^2 A^2} \tag{4.6}$$

Outra forma de encontrar 4.6 é a partir da densidade de energia de uma onda, pois podemos escrever:

$$\overline{\Delta E} = \overline{\frac{dE}{dx}}\Delta x$$

Dividindo ambos os lados por Δt:

$$\overline{P} = \frac{\overline{\Delta E}}{\Delta t} = \overline{\frac{dE}{dx}}\frac{\Delta x}{\Delta t}$$

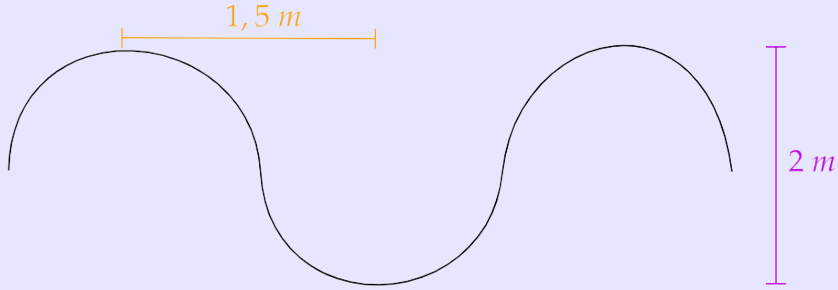
Em um intervalo de tempo Δt, a onda percorrerá uma distância $\Delta x = v\Delta t$, logo:

$$\boxed{I = \overline{P} = \overline{\frac{dE}{dx}}v} \tag{4.7}$$

Por fim, a equação 4.7 resulta em 4.6. Portanto, pode-se concluir que a intensidade é igual ao produto da densidade média de energia contida em uma onda multiplicada pela sua velocidade. Assim, a intensidade também é o fluxo médio de energia através de um ponto qualquer da corda.

Exemplo 1: Telefone de Lata

Uma brincadeira comum que demonstra o que é possível fazer com a Física e as ondas em cordas é o telefone de lata. Nela, um barbante é preso entre duas latas, e cada pessoa segura uma das latas. Ao se afastarem e alguém falar em uma das latas, a outra pessoa consegue ouvir o que foi dito. Duas crianças estavam participando dessa brincadeira, e, em determinado momento, a onda propagada pelo barbante assumiu a forma representada a seguir:



Considerando que a densidade linear do barbante é 5 g/m, a velocidade da onda era de 5 m/s, e que toda a intensidade da onda é transformada em som, qual é a intensidade do som ouvido pela criança que está com a lata recebendo a transmissão dessa onda?

Solução 1

Primeiro, a intensidade do som será a mesma da onda. Logo, é preciso primeiro encontrar as características da onda que quantificam a sua itensidade. Pela imagem, tem-se que a amplitude da onda será metade da distância vertical entre uma crista e um vale:

$$A = \frac{2}{2} = 1\ m$$

Além disso, o comprimeto de onda é a distância entre duas cristas. Como na imagem, é marcada a distância entre uma crista e um vale:

$$\lambda = 2 \times 1,5 = 3\ m$$

Por fim, ω se relaciona com o comprimento de onda pela expressão:

$$\omega = 2\pi f = 2\pi \frac{v}{\lambda} \approx 10,5\ rad/s$$

Portanto, substituindo esses valores na expressão da intensidade:

$$\boxed{I = \frac{1}{2}\mu v \omega^2 A^2 \approx 1,38\ W}$$

5 Interferência e Batimento

5.1 Interferência

Para as ondas em cordas, existem dois tipos de interferência possíveis: a interferência de ondas no mesmo sentido e a interferência de ondas em sentidos opostos. Ambas podem ser calculadas a partir do princípio da superposição, tratando-as como ondas progressivas e combinando-as.

I - Mesmo sentido

$$Y_1(x,t) = A_1 \cos(kx - \omega t + \phi_1)$$
$$Y_2(x,t) = A_2 \cos(kx - \omega t + \phi_2)$$

Nesse caso, considerando que a intensidade da onda é proporcional ao quadrado de sua amplitude, $I \propto A^2$, podemos calcular a intensidade resultante usando a relação:

$$A_{res}^2 = A_1^2 + A_2^2 - 2\sqrt{A_1 A_2} \cos \Delta\phi$$

$$\boxed{I_{res} = I_1 + I_2 - 2\sqrt{I_1 I_2} \cos \Delta\phi} \tag{5.1}$$

sendo $\Delta\phi = \phi_2 - \phi_1$. Essa relação pode ser obtida a partir de uma interpretação geométrica da interferência, utilizando fasores (Figura 4) e a lei dos cossenos.

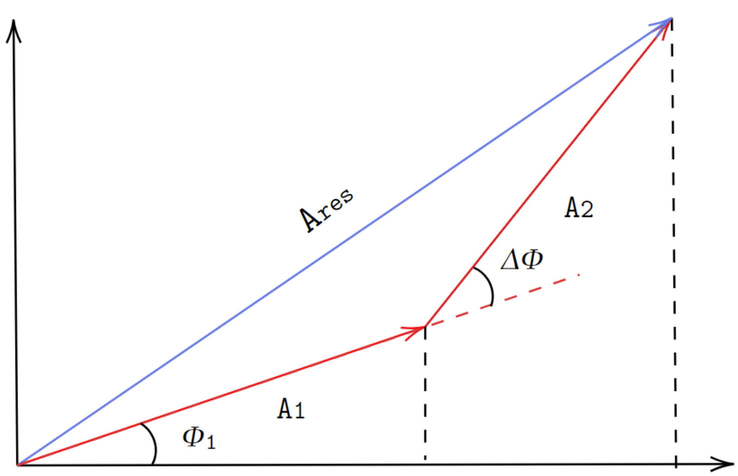


Figura 4: Método dos fasores

II - Sentidos contrários

Nesse caso, além de haver a interferência propriamente dita, também são formados padrões de ondas estacionárias quando as ondas se propagam em sentidos opostos. Tomemos duas funções de onda de mesma amplitude e façamos a combinação entre elas utilizando o princípio da superposição:

$$Y_1(x,t) = A\cos(kx - \omega t)$$
$$Y_2(x,t) = A\cos(kx + \omega t)$$

Utilizando a relação da soma de cossenos, temos:

$$\cos(a) + \cos(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\cos\left(\frac{a-b}{2}\right)$$
$$Y_1 + Y_2 = A\left[\cos(kx - \omega t) + \cos(kx + \omega t)\right]$$

$$\boxed{Y_1 + Y_2 = 2A\cos(kx)\cos(\omega t)} \tag{5.2}$$

Essa relação mostra que há também uma variação da amplitude da onda, responsável pela formação de uma envoltória. O padrão observado é apresentado na figura seguinte:

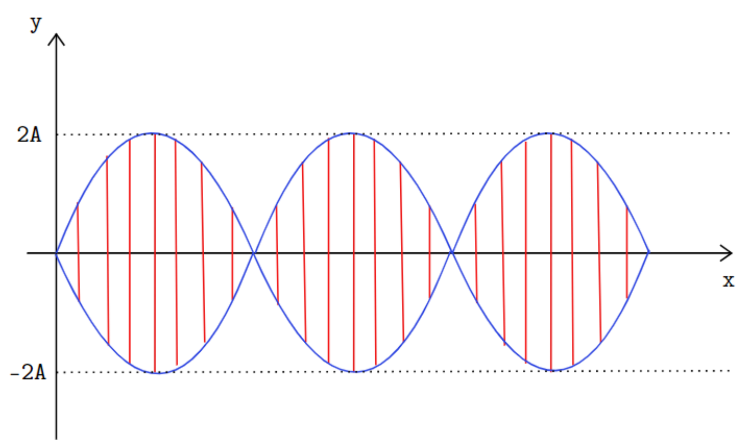


Figura 5: Padrão de ondas estacionárias

5.2 Batimento

Agora, vamos analisar duas ondas no mesmo sentido, com suas funções dadas abaixo:

$$Y_1(x,t) = A\cos(k_1 x - \omega_1 t)$$
$$Y_2(x,t) = A\cos(k_2 x - \omega_2 t)$$

A interferência entre essas duas ondas gera a seguinte função como resultado:

$$Y_1(x,t) + Y_2(x,t) = A\cos(k_1x - \omega_1 t) + A\cos(k_2x - \omega_2 t)$$
$$Y_1(x,t) + Y_2(x,t) = A\left[\cos\left(\frac{k_1x - \omega_1 t + k_2x - \omega_2 t}{2}\right)\cos\left(\frac{k_1x - \omega_1 t - k_2x + \omega_2 t}{2}\right)\right]$$
$$Y_1(x,t) + Y_2(x,t) = 2A\cos\left[\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}t - \frac{(k_2 - k_1)}{2}x\right]\cos\left[\frac{(\omega_1 + \omega_2)}{2}t - \frac{(k_1 + k_2)}{2}x\right]$$

Perceba que agora temos uma amplitude modulada e que varia com o tempo,

$$A(x,t) = 2A\cos\left[\frac{(\omega_2 - \omega_1)}{2}t - \frac{(k_2 - k_1)}{2}x\right]$$

e que é representada através de uma envoltória em torno de ondas individuais (Figura 5), gerando o fenômeno dos batimentos, o que nos leva aos conceitos de velocidade de fase e velocidade de grupo.

A velocidade de grupo pode ser entendida como a velocidade com que o grupo (e consequentemente a envoltória) se movimenta, sendo expressa por

$$\boxed{V_g = \frac{\Delta\omega}{\Delta k} = \frac{\omega_2 - \omega_1}{k_2 - k_1} = \frac{d\omega}{dk}} \tag{5.3}$$

Já a velocidade de fase é a velocidade com que se desloca um ponto que possui fase constante, que é consequentemente a velocidade da onda individual, sendo expressa pela razão entre o valor médio de ω e o valor médio de k:

$$\boxed{V_\phi = \frac{\overline{\omega}}{\overline{k}} = \frac{\omega_1 + \omega_2}{k_1 + k_2}} \tag{5.4}$$

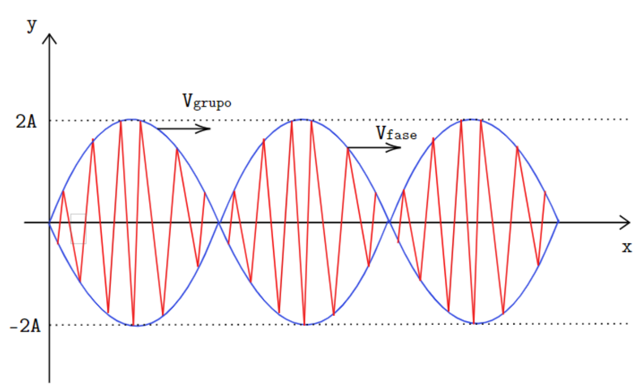


Figura 6: Velocidade de grupo e velocidade de fase

Frequência de batimento

A ideia de frequência de batimento é muito útil em algumas questões, e uma relação pode ser encontrada tomando duas ondas quaisquer:

$$Y_1 = A\cos(\omega_1 t) \Rightarrow Y_1 = A\cos(2\pi f_1 t)$$
$$Y_2 = A\cos(\omega_2 t) \Rightarrow Y_2 = A\cos(2\pi f_2 t)$$
$$Y_1 + Y_2 = 2A\cos\left(2\pi\left(\frac{f_1+f_2}{2}\right)t\right)\cos\left(2\pi\left(\frac{f_2-f_1}{2}\right)t\right)$$

Perceba que, nesse caso, a amplitude varia com o tempo, sendo:

$$A(t) = 2A\cos\left(2\pi\left(\frac{f_2-f_1}{2}\right)t\right)$$

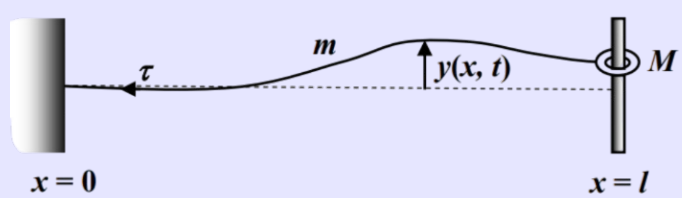
A frequência da envoltória é dada por $f_{\text{env}} = \frac{f_2-f_1}{2}$. Entretanto, o ouvido humano é capaz de perceber apenas o valor entre dois intervalos consecutivos, sendo o dobro de f_{env}. Assim, temos:

$$\boxed{f_{\text{bat}} = f_2 - f_1, \quad f_2 > f_1} \tag{5.5}$$

Essa ideia é frequentemente utilizada em questões nas quais ocorre uma diminuição na tensão de cordas em instrumentos, e percebe-se um batimento característico quando as cordas são acionadas. A frequência pode ser facilmente calculada utilizando a expressão para ondas em cordas, já deduzida anteriormente:

$$v = \sqrt{\frac{T}{\mu}} \Rightarrow \boxed{f = \frac{1}{\lambda}\sqrt{\frac{T}{\mu}}} \tag{5.6}$$

Exemplo 2: Pan Pearl River Delta Physics Olympiad



Nessa questão, considere que todos os movimentos oscilatórios possíveis são pequenos. Conforme mostrado na Figura 5.2, uma corda de massa m e comprimento l, sob tensão τ, tem uma massa M presa à sua extremidade. A massa M pode deslizar verticalmente ao longo de uma haste sem atrito em $x = l$. O formato da corda é descrito por uma função $y(x,t)$, e a

corda está fixada na origem, de modo que $y(0,t) = 0$.
I - Primeiro, suponha que a massa M seja mantida fixa em $y = 0$. Escreva a solução geral $y(x,t)$ para as ondas estacionárias na corda. Expresse sua resposta em termos dos parâmetros fornecidos e constantes arbitrárias.
II - Agora, suponha que a massa M pode deslizar para cima e para baixo ao longo de uma haste sem atrito em $x = l$. Qual é a condição de contorno para $y(x,t)$ em $x = l$? Você pode assumir que as oscilações são pequenas.
III - Escreva uma equação para as frequências das ondas estacionárias na corda quando a massa M está livre para deslizar. Não é necessário resolver a equação.

Solução 2

I - Uma abordagem para resolver essa questão é entender que ondas estacionárias, em geral, podem ser escritas na forma:

$$Y(x,t) = (A\sin(kx) + B\cos(kx))\sin(\omega t + \phi)$$

onde essa expressão resulta da interferência entre ondas viajando em sentidos opostos, conforme discutido anteriormente. Os coeficientes A e B são determinados pelas condições de contorno. Analisando as condições de contorno e desprezando a fase ϕ, temos que $Y(0,t) = 0$ e $Y(L,t) = 0$, o que implica que $B = 0$ e que $k_i L = i\pi$. Além disso, utilizando a expressão para a velocidade das ondas em cordas, temos:

$$V = \sqrt{\frac{\tau}{\frac{m}{L}}} \rightarrow \frac{\omega_i}{k_i} = \sqrt{\frac{\tau L}{m}}$$

$$\boxed{\omega_i = i\pi\sqrt{\frac{\tau}{mL}}}$$

Assim, como existem infinitas combinações de ondas estacionárias a serem consideradas (uma vez que o anel é móvel), podemos expressar a solução como um somatório:

$$\boxed{Y = 2\sum_{i=0}^{\infty} A_i \sin\left(\frac{i\pi x}{L}\right)\cos\left(i\pi\sqrt{\frac{\tau}{Lm}}t\right)}$$

II - A condição de contorno é determinada considerando que a amplitude de movimento do anel é muito menor que o comprimento da corda. Assim, temos:

$$ma_a = -\tau\sin\theta$$

Usando a aproximação para pequenos ângulos, temos:

$$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{\partial y}{\partial x}$$

e, portanto:

$$\boxed{ma_a = -\tau\frac{\partial y}{\partial x}.}$$

III - A partir da relação obtida anteriormente, temos:

$$m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\tau\frac{\partial y}{\partial x}$$

Pelo item **I**, sabemos que $Y_i = 2A\sin\left(\frac{\omega x}{V}\right)\cos(\omega t)$. Derivando as expressões para atender à condição de contorno, obtemos:

$$2mA\sin\left(\frac{\omega x}{V}\right)\cos(\omega t)\omega^2 = 2A\frac{\omega}{V}\cos\left(\frac{\omega x}{V}\right)\cos(\omega t)$$

Também sabemos que:

$$V = \sqrt{\frac{\tau L}{m}},$$

portanto:

$$\boxed{\tan\left(\frac{\omega L}{V}\right)\omega = \sqrt{\frac{\tau}{Lm}}.}$$

6 Reflexão e Transmissão

A equação de onda em uma corda pode ser descrita por $Y(x,t) = A\cos\left(Kx - \omega t + \phi_0\right)$, onde A é a amplitude, como visto anteriormente. Para se obter as relações de reflexão e transmissão, é necessário partir das condições de contorno do processo físico. Assim, o comportamento de uma onda em uma corda está relacionado às propriedades da corda, como a densidade linear, que está ligada à velocidade da onda na corda pela relação $v = \sqrt{\frac{T}{\mu}}$, em que μ é a densidade linear da corda e T é a tração exercida sobre a corda. Aplicando isso na relação $\omega = Kv$, encontra-se $K = \frac{\omega}{\sqrt{T}}\sqrt{\mu}$, ou seja, K é proporcional à raiz da densidade linear da corda.

Considerando o seguinte fenômeno: uma onda percorre uma corda até encontrar uma intersecção onde a densidade linear muda de μ_1 para μ_2. Nesse caso, teremos três ondas para analisar: a incidente, a transmitida e a refletida. As duas primeiras se movem na mesma direção, mas em regiões com densidades lineares μ_1 e μ_2, respectivamente, enquanto a última se move na direção oposta na região de densidade linear μ_1:

$$Y_t = A_t \cos(K_2 x - \omega t)$$
$$Y_i = A_i \cos(K_1 x - \omega t)$$
$$Y_r = A_r \cos(K_1 x + \omega t)$$

Analisando as condições de contorno, devido a continuidade da onda para todo t a função de onda transmitida deve ser igual à soma das ondas incidente e refletida na intersecção da corda, ou seja, temos:

$$Y_t(x,t) = Y_i(x,t) + Y_r(x,t)$$
$$Y_t(0,t) = Y_i(0,t) + Y_r(0,t)$$

$$\boxed{A_t = A_i + A_r} \tag{6.1}$$

Ainda, para que a corda, onde as ondas estão se propagando, permaneça contínua, é necessário que a inclinação da onda transmitida seja igual à soma das inclinações das ondas refletida e incidente. Em outras palavras, a derivada espacial das ondas também deve obedecer à condição de contorno:

$$\boxed{\frac{\partial Y_t(x,t)}{\partial x} = \frac{\partial Y_i(x,t)}{\partial x} + \frac{\partial Y_r(x,t)}{\partial x}} \tag{6.2}$$
$$-A_t K_2 \sin(K_2 x - \omega t) = -A_i K_1 \sin(K_1 x - \omega t) - A_r K_1 \sin(K_1 x + \omega t)$$

Para $x = 0$, temos:

$$A_t K_2 \sin(-\omega t) = A_i K_1 \sin(-\omega t) - A_r K_1 \sin(-\omega t)$$

Isolando, obtemos:

$$\boxed{K_2 A_t = K_1 A_i - K_1 A_r} \tag{6.3}$$

Com $A_t = A_i + A_r$, multiplicando por K_2, resulta em:

$$0 = A_i(K_2 - K_1) + A_r(K_2 + K_1)$$

$$A_r = A_i \frac{(K_1 - K_2)}{(K_2 + K_1)}$$

Como sabemos que $K_i = \frac{\omega}{\sqrt{T}}\sqrt{\mu_i}$, podemos encontrar a relação entre as amplitudes das ondas refletida e transmitida em termos da onda incidente:

$$\boxed{A_r = A_i \frac{(\sqrt{\mu_1} - \sqrt{\mu_2})}{(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})}} \tag{6.4}$$

$$\boxed{A_t = A_i \frac{2\sqrt{\mu_1}}{(\sqrt{\mu_1} + \sqrt{\mu_2})}} \tag{6.5}$$

Com essa relação, podemos analisar alguns resultados notáveis:

I - Se a onda passa de um meio mais denso para um menos denso, ou seja, $\mu_1 > \mu_2$, temos que A_r será positivo. Logo, a amplitude da onda refletida possui o mesmo sentido que a onda incidente.

II - Se $\mu_1 < \mu_2$, ou seja, a onda encontra um meio mais denso, a amplitude refletida será negativa, indicando que ela inverte o sentido em relação à onda incidente.

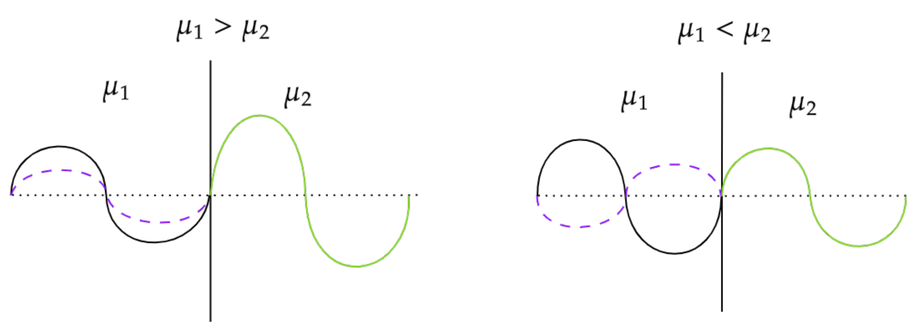


Figura 7: Reflexão e Transmissão de Ondas em Cordas

III - Se a extremidade for fixa, podemos considerar $\sqrt{\mu_2} \gg \sqrt{\mu_1}$, de forma que $\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2}} \approx 0$. Assim, $A_t = 0$ e $A_r = -A_i$.

IV - Se a extremidade for livre, temos $\sqrt{\mu_1} \gg \sqrt{\mu_2}$, resultando em $\sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}} \approx 0$, logo $A_t = 2A_i$ e $A_r = A_i$.

7 Modos Normais de Vibração

Ao considerar uma corda vibrante de comprimento L presa em ambas as extremidades, é mais conveniente analisá-la como ondas estacionárias com modos normais de vibração, em vez de tratá-la como um movimento progressivo de ondas que se refletem nas extremidades. Para termos comparativos, podemos essencialmente compreender uma onda estacionária como um conjunto de partículas de massa $\frac{\mu N}{L}$, onde N refere-se ao número de partículas, com $N \to \infty$, em oscilação acoplada.

Com isso, sabemos que, para todo ponto X, as partículas oscilarão com frequência ω, estarão em fase descrita por δ_0, e terão uma amplitude $A(X)$ característica do modo para cada X. Assim, podemos descrever a função de onda estacionária como:

$$Y(X,t) = A(X)\cos(\omega t + \delta_0)$$

Aplicando a equação característica para ondas unidimensionais (Equação 2.1), temos:

$$\frac{\partial^2 (A(X)\cos(\omega t + \delta_0))}{\partial X^2} = \frac{1}{V^2}\frac{\partial^2 (A(X)\cos(\omega t + \delta_0))}{\partial t^2}$$

$$\cos(\omega t + \delta_0)\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} = -\frac{\omega^2}{V^2}A\cos(\omega t + \delta_0)$$

$$\boxed{\frac{\partial^2 A}{\partial X^2} + K^2 A = 0} \tag{7.1}$$

Para resolver essa equação, uma abordagem comum é aplicar a solução geral para uma equação diferencial de segunda ordem, que tem a forma:

$$A(X) = A_1\cos(KX) + A_0\sin(KX)$$

Essa solução é apropriada porque descreve uma onda, cujo perfil pode ser representado como a soma de funções senoides e cossenoides. Assim, a forma geral da solução reflete a natureza oscilatória das ondas.

Pelas condições de contorno:

$$A(0) = A(L) = 0$$

$$A(0) = A_1 = 0; \quad A(L) = A_0\sin(KL) = 0$$

$$A(X) = A_0\sin(KX)$$

Podemos observar que, para todo K_n, $\sin(K_n L) = 0$, logo K_n deve seguir a fórmula:

$$\boxed{K_n = \frac{n\pi}{L}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7.2}$$

Tendo em mente que:

$$\boxed{\omega_n = K_n v = \frac{n\pi}{L} v} \tag{7.3}$$

Podemos concluir que os modos normais de vibração são dados por:

$$\boxed{Y_n(X,t) = A_0 \sin\left(\frac{n\pi}{L} X\right) \cos\left(\frac{n\pi}{L} V t + \delta_n\right)} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7.4}$$

O comprimento de onda da corda, associado ao modo n, é dado por:

$$\boxed{\lambda_n = \frac{2\pi}{K_n} = \frac{2L}{n}} \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \tag{7.5}$$

Que resulta em uma frequência para o enésimo harmônico:

$$\boxed{f_n = \frac{nv}{2L}} \tag{7.6}$$

Os quatro primeiros harmônicos de ondas em cordas com ambas as extremidades presas estão representados a seguir:

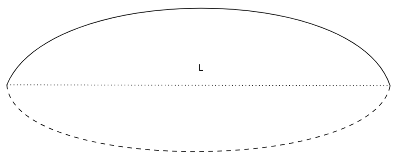


Figura 8: 1° Harmônico

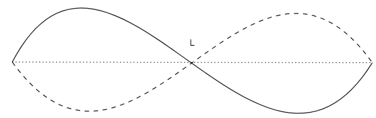


Figura 9: 2° Harmônico

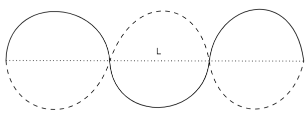


Figura 10: 3° Harmônico

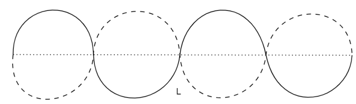


Figura 11: 4° Harmônico

Figura 12: Harmônicos de uma corda vibrante.

Exemplo 3: Notas Musicais

As notas musicais geradas por instrumentos de cordas são produzidas a partir das ondas que se formam nas cordas vibrantes do instrumento, que oscilam em um de seus modos harmônicos fundamentais. Para ajustar o som produzido, especialmente no caso do violão, é preciso ajustar a tensão na corda, normalmente apertando o cavalete, o que aumenta a tensão e altera a velocidade da onda gerada na corda.

Considerando que a frequência da nota Sol é 400 Hz, o comprimento do fio é de 1 m e a densidade linear da corda é $0,6$ g/m, qual deve ser a tração aplicada no cavalete para que a nota Sol seja produzida no quinto harmônico da onda?

Solução 3

Como visto na equação 7.6, a frequência em função da velocidade para $n = 5$ será:

$$f_5 = \frac{5v}{2L}$$

Substituindo a expressão 3.3 da velocidade de uma onda:

$$f_5 = \frac{5}{2L}\sqrt{\frac{T}{\mu}}$$

$$T = \frac{4L^2 f_5^2 \mu}{25} = \frac{4 \times 1^2 \times 400^2 \times 0,6 \cdot 10^{-3}}{25}$$

$$\boxed{T = 15,36\ N}$$

8 Problemas

Aqui estão alguns exercícios para você aprofundar os conceitos trabalhados durante este material. Eles estão organizados em diversos níveis: fáceis, médios, interessantes, difíceis e avançados (em ordem crescente de dificuldade), e nas categorias de: 1 - Revisão, 2 - Aprofundamento e 3 - Aplicação. O objetivo é que, ao atingir a categoria 3 - Aplicação, você já tenha alcançado um excelente nível de domínio sobre o conteúdo.

Recomendo realizar todos os exercícios de revisão para se certificar de que está com uma base sólida, permitindo aprofundar tópicos mais específicos nos exercícios de aprofundamento.

8.1 Exercícios de Revisão

8.1.1 (Nível Fácil) - Características Básicas de Ondas (Adaptado de Gupta)

(a) Uma onda transfere momento, mas poderia transferir momento angular? Independentemente da resposta, prove.

(b) Por que a frequência é uma medida fundamental para a onda? Pense em uma possível explicação para isso.

(c) Qual é a diferença entre a velocidade da onda e a velocidade da partícula?

(d) Se um pulso de onda desloca-se de um meio menos denso para um mais denso, o que ocorre com o pulso refletido? E o pulso transmitido?

8.1.2 (Nível Fácil) - Análise Dimensional de Função

Dada a equação

$$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}},$$

analise-a dimensionalmente e conclua se ela faz sentido.

8.1.3 (Nível Médio) - Encontrando a Equação da Onda Progressiva

Uma onda possui velocidade de 5 m/s, comprimento de onda de 3 metros e a velocidade vertical máxima registrada por uma partícula foi de 10 m/s. Encontre:

(a) a constante k;

(b) a frequência ω;

(c) a amplitude da função da onda;

(d) a equação da onda progressiva.

8.1.4 (Nível Interessante) - Relações Úteis na Onda Progressiva

Encontre uma relação entre a velocidade da partícula em uma onda progressiva e a velocidade da onda por meio da tangente da curva da função da onda. Dica: tire as derivadas parciais por tempo e depois por x da função da onda $A\sin(kx - \omega t)$.

8.1.5 (Nível Difícil) - Testando Conceitos (Adaptado de Gupta)

Uma equação representará uma onda se satisfizer a seguinte equação diferencial:

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2},$$

onde v é a velocidade da onda ou velocidade de fase. Usando essa relação, prove que a função

$$y(x,t) = Ae^{B(x-vt)}$$

representa uma onda progressiva.

8.2 Exercícios de Aprofundamento

8.2.1 (Nível Médio) - Função da Onda pela Tensão - Parte 1 (Adaptado de Gupta)

Observe o seguinte modelo, que será útil para resolver a questão. Observe que $0 \leqslant x \leqslant l$.

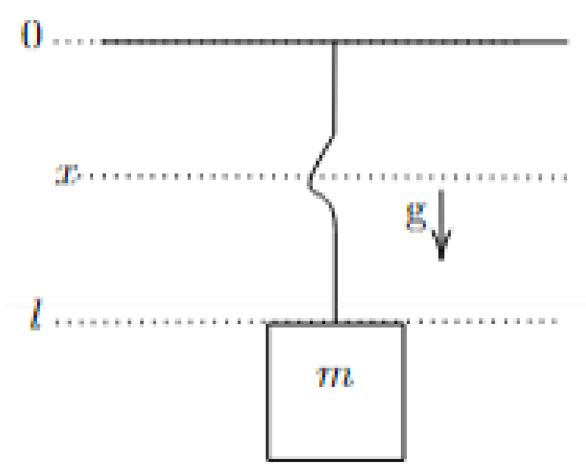


Figura 13: Esquema da questão 2.1

(a) Obtenha a tensão T em função de x, $T(x)$; (observação: aqui você apenas terá que utilizar resultados da mecânica. Caso ainda não esteja familiarizado com este conteúdo, recomendo que veja o gabarito do item (a) para resolver os demais itens sem problemas).

(b) Obtenha a função da velocidade em relação a x, uma vez tendo a função $T(x)$. Use que a densidade linear da corda é constante e igual a μ, sabendo que a velocidade em 0 é igual a V_0.

(c) Obtenha a posição do pulso em função do tempo. Dica: integre a velocidade do pulso para obter a posição. Considere que o pulso começa no tempo 0 na origem (altura de O) e está na posição x após um tempo t.

(d) Verifique quanto tempo o pulso leva até atingir o final de seu caminho, ou seja, até chegar em l.

8.2.2 (Nível Médio) - Demonstrando a Potência Média Total

Sabendo que uma corda tem as seguintes características definidas: densidade linear μ, velocidade angular ω, constante k, amplitude A, e considerando oscilações necessariamente pequenas:

(a) Obtenha a potência média da energia cinética (dica: revisite as ideias trabalhadas na questão 1.4).

(b) Obtenha a potência média da energia potencial utilizando a relação $Fv = P$.

(c) Obtenha a potência média da energia potencial pelos seguintes passos: integre F em relação a um pequeno deslocamento vertical para obter a energia potencial; e em seguida, derive pelo tempo a energia potencial.

(d) Sabendo que a potência média tanto da energia potencial quanto da energia cinética são iguais a

$$P_{\text{cinética}} = P_{\text{potencial}} = \frac{\mu\omega^2 A^2}{4}$$

e que a seção transversal da corda é S e a densidade volumétrica é ρ, obtenha a seguinte expressão para a potência total:

$$P_{\text{cinética}} = \frac{\rho\omega^2 v S A^2}{2}$$

8.2.3 (Nível Avançado) - Função de Onda para N Massas Acopladas (Adaptado de Morin)

Dispondo num intervalo definido por duas paredes N massas acopladas com molas de constante k iguais entre si:

(a) Mostre a equação do movimento do deslocamento em função de x para a n-ésima massa.

(b) Tendendo N a infinito, chegue na função fundamental de onda (confira a questão 1.5: você deve chegar nessa relação).

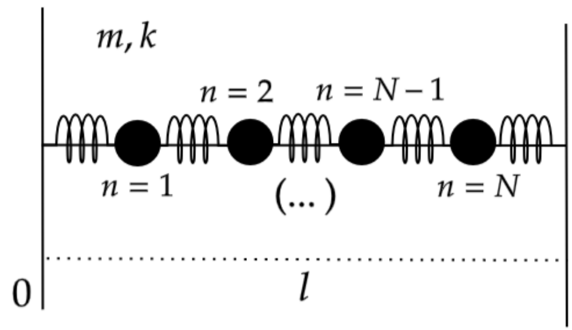


Figura 14: N massas acopladas por molas

8.2.4 (Nível Difícil) - Energia Total da Função de Onda

Nesta questão, observe que $f(x)$ é a função de onda de um ou mais pulsos de pequenas oscilações em relação ao eixo y. Tendo em vista isto, obtenha a energia cinética total dessa onda, indo de $-\infty$ até $+\infty$ no eixo x. A densidade da onda é definida por $\mu = \mu(x)$ e $y = y(x,t)$, de forma que se sabe $y(x,t)$ e $\mu(x)$.

Dica: obtenha alguma relação entre x e y que definirá uma pequena porção de massa e sua energia cinética, e então integre a expressão inteira para chegar ao valor de toda a energia cinética.

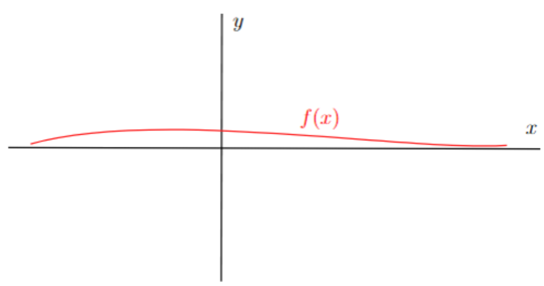
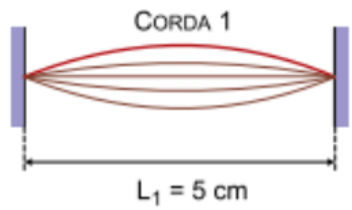


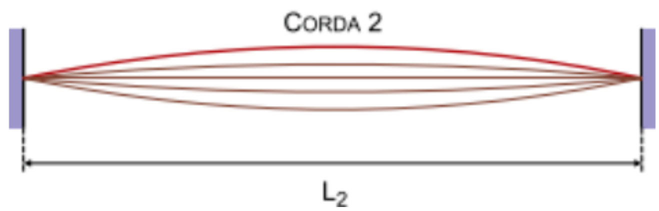
Figura 15: Uma onda de oscilação vertical bem pequena!

8.3 Exercícios de Aplicação

8.3.1 Nível Fácil - Unesp (2023)

Para ilustrar o fato de que cordas que emitem sons mais graves precisam ser mais longas, considere duas cordas, 1 e 2, ambas com extremidades fixas, que possuem espessuras iguais, a mesma densidade linear de massa e estão sujeitas à mesma força de tração.





Quando essas cordas vibram em seus modos fundamentais, a frequência da onda sonora emitida pela corda 1 é 150 vezes maior do que a frequência da onda sonora emitida pela corda 2.

Sabendo que o comprimento da corda 1 é $L_1 = 5\,\text{cm}$, determine o comprimento L_2 da corda 2:

a) 7,5 m

b) 8,0 m

c) 5,0 m

d) 2,5 m

e) 1,5 m

8.3.2 Nível Fácil - Uva (2019)

Uma das cordas de um violão, com comprimento igual a 65,0 cm, é afinada para produzir uma nota de frequência 250 Hz quando vibra em seu modo fundamental. Qual é a velocidade da onda que percorre a corda?

a) 250 m/s

b) 325 m/s

c) 400 m/s

d) 475 m/s

8.3.3 Nível Fácil - Uepa (2013)

Notas musicais, emitidas por exemplo por um violão, são compostas por vários sons de frequências diferentes, cada um correspondente a um harmônico. Considere que, ao dedilhar uma corda de um violão com comprimento $0,5\,\text{m}$ e massa de $5\,\text{g}$, a tensão aplicada na corda seja de $4\,\text{N}$.

Com base nessas informações, é correto afirmar que a frequência do 4° harmônico emitido por essa corda, em Hz, é igual a:

a) 60

b) 80

c) 100

d) 120

e) 140

8.3.4 Nível Fácil - EsPCEx (2022)

Uma corda homogênea de seção transversal constante e de comprimento $15,60\,\text{m}$ é esticada na horizontal e suas extremidades são presas a paredes paralelas e opostas. Uma onda estacionária é estabelecida nessa corda de modo que se formam apenas três ventres entre as suas extremidades. Sabendo que a velocidade de propagação da onda na corda é de $2,60\,\text{m/s}$, podemos afirmar que a frequência da onda é de:

a) 0,15 Hz

b) 0,25 Hz

c) 0,50 Hz

d) 2,00 Hz

e) 4,00 Hz

8.3.5 Nível Médio - ITA (2016)

Uma corda de cobre, com seção de raio r_C, está submetida a uma tensão T. Uma corda de ferro, com seção de raio r_F, de mesmo comprimento e emitindo ondas de mesma frequência que a do cobre, está submetida a uma tensão $\frac{T}{3}$. Sendo $1,15$ a razão entre as densidades do cobre e do ferro, e sabendo que ambas oscilam no modo fundamental, a razão $\frac{r_C}{r_F}$ é igual a:

a) 1,2

b) 0,6

c) 0,8

d) 1,6

e) 3,2

8.3.6 Nível Difícil - ITA (2001)

Uma partícula descreve um movimento cujas coordenadas são dadas pelas seguintes equações:

$$X(t) = X_0 \cos(\omega t) \quad \text{e} \quad Y(t) = Y_0 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{6}\right),$$

em que ω, X_0 e Y_0 são constantes positivas. A trajetória da partícula é:

a) Uma circunferência percorrida no sentido anti-horário.

b) Uma circunferência percorrida no sentido horário.

c) Uma elipse percorrida no sentido anti-horário.

d) Uma elipse percorrida no sentido horário.

e) Um segmento de reta.

8.3.7 Nível Médio - ITA (1960)

Um pelotão desfila num ritmo de 120 passos por minuto, ao som de uma fanfarra que o precede; nota-se que a última fila está com o pé esquerdo à frente quando os componentes da fanfarra estão com o direito à frente. Sabendo-se que a velocidade do som no ar é de 340 m/s, o comprimento do pelotão, incluindo a fanfarra, é de aproximadamente:

a) 170 m

b) 680 m

c) 85 m

d) 200 m

e) 490 m

8.3.8 Nível Médio - IME (2013)

Quando uma corda de violão é tocada, o comprimento de onda da onda sonora produzida pela corda:

a) é maior que o comprimento de onda da onda produzida na corda, já que a distância entre as moléculas do ar é maior que a distância entre os átomos da corda.

b) é menor que o comprimento de onda da onda produzida na corda, já que a massa específica do ar é menor que a massa específica da corda.

c) é igual ao comprimento de onda da onda produzida na corda, já que as frequências das duas ondas são iguais.

d) pode ser maior ou menor que o comprimento de onda da onda produzida na corda, dependendo das velocidades de propagação da onda sonora e da onda produzida na corda.

e) pode ser maior ou menor que o comprimento de onda da onda produzida na corda, dependendo das frequências da onda sonora e da onda produzida na corda.

8.3.9 Nível Fácil - OBF (2001)

Uma longa corda ideal de comprimento L encontra-se em repouso, esticada horizontalmente ao longo do eixo x. Nesse momento, um vibrador oscila para cima e para baixo com frequência f e amplitude A, gerando uma onda transversal senoidal com comprimento de onda λ, que se propaga no sentido positivo do eixo x. A onda gerada sofre reflexão na parede à direita e um padrão de onda estacionária se forma. Despreze efeitos de atrito e resistência do ar.

a) Calcule a equação da onda estacionária resultante da superposição das ondas propagantes para a direita e para a esquerda.

b) Considerando que o ponto $x = 0$ corresponde a um anti-nó, determine o número de nós entre $x = 0$ e $x = L$ desta onda estacionária se $L = 4,5\,\mathrm{m}$ e $\lambda = 2\,\mathrm{m}$.

8.3.10 Nível Interessante - JEE Main (2021)

A amplitude de uma perturbação de onda que se propaga na direção positiva de x é dada por

$$y = \frac{1}{(x-2)^2+1} \quad \text{em} \quad t = 0$$

$$y = \frac{1}{(x-1)^2+1} \quad \text{em} \quad t = 2\,\mathrm{s},$$

onde x e y estão em metros. A forma da perturbação da onda não muda durante a propagação. A velocidade da onda é:

a) 0,25 m/s

b) 2,5 m/s

c) 0,5 m/s

d) 1,0 m/s

8.3.11 Nível Difícil - JEE Main(2020)

Qual das seguintes opções não representa uma onda viajante?

(a) $y = A\sin(kx - \omega t)$

(b) $y = A\cos(kx + \omega t)$

(c) $y = A\sin(\omega t - kx)$

(d) $y = A\sin kx\,\sin\omega t$

8.3.12 Nível Médio - JEE Main

A onda transversal é descrita pela equação

$$y = y_0 \sin\left(4\pi\left(\nu t - \frac{x}{\lambda}\right)\right).$$

A velocidade máxima da partícula é igual a quatro vezes a velocidade da onda se:

a) (A) $\lambda = \frac{\pi y_0}{4}$

b) (B) $\lambda = 2\pi y_0$

c) (C) $\lambda = \frac{\pi}{y_0}$

d) (D) $\lambda = \pi y_0$

8.3.13 Nível Médio - JEE Main

Um fio de densidade linear $9,8 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg/m}$ passa sobre uma polia leve e sem atrito, fixada no topo de um plano inclinado, que forma um ângulo de 30° com a horizontal. As massas m e M estão amarradas nas duas extremidades do fio, de modo que m repousa sobre o plano e M pendura-se livremente para baixo. Todo o sistema está em equilíbrio e uma onda transversal se propaga ao longo do fio com uma velocidade de $100\,\mathrm{m/s}$. Então:

a) (A) $m = 20\,\mathrm{kg}$

b) (B) $M = 5\,\mathrm{kg}$

c) (C) $\frac{m}{M} = 1$

d) (D) $\frac{m}{M} = 2$

9 Gabaritos

9.1 Exercícios de revisão

9.1.1 Exercício 1.1

(a) O momento angular varia na presença de torque, que pode ser expresso como o produto vetorial entre força e posição. Quando há torque, a orientação da velocidade é modificada devido à rotação. Como a velocidade das partículas na questão permanece sempre estritamente na vertical, não há torque, e, portanto, não há variação no momento angular, impossibilitando sua transferência.

(b) A frequência é uma medida fundamental porque não se altera quando a onda muda de meio, mantendo-se constante. Uma boa analogia é considerar a luz: a energia da luz é quantificada por uma expressão que depende apenas da frequência. Assim, desde que a energia seja conservada, a frequência deve permanecer constante, caso contrário, haveria violação da conservação de energia. Como a luz é uma onda fundamental, o mesmo comportamento ocorre para outras ondas.

(c) A velocidade da onda refere-se à velocidade de propagação dos pulsos. Como a onda não transporta matéria, as partículas permanecem estacionárias ao longo do eixo x (supondo uma onda progressiva ao longo de x com oscilações nos eixos y e z). A velocidade das partículas pode ser obtida pela derivada parcial em relação ao tempo da função de onda. A velocidade das partículas é sempre perpendicular à velocidade de propagação da onda, uma característica que resulta da natureza não material do transporte da onda.

(d) A onda refletida sofrerá ou não uma inversão de fase dependendo das densidades dos dois meios. Conforme demonstrado anteriormente, quando o novo meio é mais denso, a onda refletida sofre inversão de fase; a onda transmitida, por outro lado, nunca sofre inversão de fase.

9.1.2 Exercício 1.2

Demonstração.

9.1.3 Exercício 1.3

(a) Sabe-se que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$, logo $k = \frac{2\pi}{3}$.

(b) A partir da relação:

$$\lambda \cdot f = v$$

$$2\pi f = \omega$$

temos:

$$\omega = \frac{2v\pi}{\lambda} = \frac{10\pi}{3}. \tag{9.1}$$

(c) A velocidade máxima de uma partícula é obtida pela derivada parcial em relação ao tempo da função de onda:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t), \tag{9.2}$$

resultando em:

$$-A\omega\cos(kx - \omega t). \tag{9.3}$$

Assim, $A\omega$ corresponde exatamente à velocidade máxima de uma partícula. Logo:

$$\frac{v_{\text{max}}}{\omega} = A = \frac{3}{\pi}. \tag{9.4}$$

(d) Com os valores de A, ω, e k conhecidos, a função de onda é dada por:

$$y(x,t) = A\sin(kx - \omega t) = \frac{3\cos\left(\frac{2\pi(x-5t)}{3}\right)}{\pi}. \tag{9.5}$$

9.1.4 Exercício 1.4

$$V_p = -V\frac{dy}{dx}. \tag{9.6}$$

9.1.5 Exercício 1.5

Aplicação de fórmula.

9.2 Exercícios de Aprofundamento

9.2.1 Exercício 2.1

(a)

$$T(x) = \left(\int_l^x \mu(x)dx + M\right)g. \tag{9.7}$$

(b)

$$v = \sqrt{\frac{T(x)}{\mu}} = \sqrt{\frac{(\mu x + M)\,g}{\mu}}. \tag{9.8}$$

(c)

$$\frac{gt^2}{4} + t\sqrt{\frac{Mg}{\mu}} = x. \tag{9.9}$$

(d)

$$\frac{\sqrt{l + \frac{M}{\mu}} - \sqrt{\frac{M}{\mu}}}{\frac{\sqrt{g}}{2}} = T_{\text{total}}. \tag{9.10}$$

9.2.2 Exercício 2.2

Todos os itens estão respondidos no item (d).

9.2.3 Exercício 2.3

Demonstração.

9.2.4 Exercício 2.4

$$E_k = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \mu(x) \left(\frac{\partial y}{\partial t}\right)^2 dx.$$

9.3 Exercícios de Aprofundamento

9.3.1 Exercício 3.1

Item (a)

9.3.2 Exercício 3.2

Item (b)

9.3.3 Exercício 3.3

Item (b)

9.3.4 Exercício 3.4

Item (b)

9.3.5 Exercício 3.5

Item (d)

9.3.6 Exercício 3.6

Item (c)

9.3.7 Exercício 3.7

Item (a)

9.3.8 Exercício 3.8

Item (d)

9.3.9 Exercício 3.9

(a): Soma das funções de onda progressiva e regressiva, já explicado no material

(b): n=4

9.3.10 Exercício 3.10

Item (c)

9.3.11 Exercício 3.11

Item (d)

9.3.12 Exercício 3.12

Item (b)

9.3.13 Exercício 3.13

Item (d)

Referências

[1] MORIN, D. *Waves*. 2022. Inédito. Manuscrito em preparação.

[2] GUPTA, D. C. *Waves for JEE Main & Advanced (Study Package for Physics)*. New Delhi: Disha Publications, 2021.

[3] NUSSENZVEIG, H. M. *Curso de Física Básica 2: Ondas, calor e termodinâmica*. 5. ed. São Paulo: Edgard Blücher, 2014.

[4] HELOU, Gualter; NEWTON, Cássio. *Tópicos de Física 2*. 19. ed. São Paulo: Editora Saraiva, 2012.