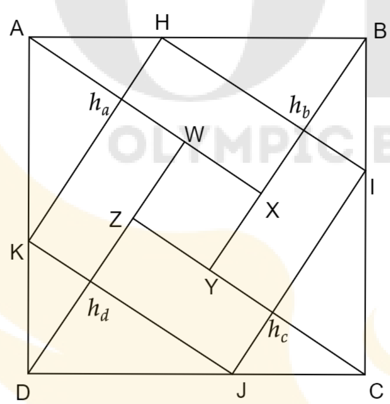
1 Questão: Espiral Quadrangular

Criado por Marcos Vinicius Burdzinski

Seja $ABCD$ um quadrado de lado 7, e $HIJK$ um quadrado de lado 5 inscrito dentro em $ABCD$, com $H \in \overline{AB}$, e $\overline{AH} < \overline{HB}$, $I \in \overline{BC}$, $J \in \overline{CD}$, $K \in \overline{DA}$. Sejam h_a, h_b, h_c, h_d os pés das alturas dos triângulos $\triangle AHK, \triangle HBI, \triangle ICJ, \triangle IDK$ com respeito aos vértices A, B, C, D, respectivamente. Defina também, $X = \overline{Ah_a} \cap \overline{Bh_b}; Y = \overline{Bh_B} \cap \overline{Ch_c}; Z = \overline{Ch_c} \cap \overline{Dh_d}; W = \overline{Dh_d} \cap \overline{Ah_a}$. Determine o perímetro da figura $XYZW$



Solução:

É fácil perceber que $\triangle AHK, \triangle HBI, \triangle ICJ, \triangle JDK$ São congruentes dois a dois por simples marcação de ângulo e sabendo que suas hipotenusas são iguais (São lados do quadrado $HIJK$). Defina $a = \overline{AH} \Rightarrow \overline{AK} = 7 - a$. Por pitágoras:

$$\overline{AH}^2 + \overline{AK}^2 = \overline{KH}^2 \Rightarrow a^2 + (7-a)^2 = 25$$

Assim, $\overline{AH} = 3$ e $\overline{AK} = 4$. Uma das relações pitagóricas nos diz que:

$$\overline{AH}^2 = \overline{KH} \times \overline{h_aH} \Rightarrow 9 = 5 \times \overline{h_aH} \Rightarrow \overline{h_aH} = \frac{9}{5}$$

Por congruência, nós temos que:

$$\overline{Hh_a} = \overline{Ih_b} = \overline{Jh_c} = \overline{Kh_d} = \frac{9}{5}$$

Defina W' como o segundo ponto de interseção da reta $\overline{DW}$ com o quadrado $HIJK$, e defina X', Z', Y' de modo análogo. As retas perpendiculares e paralelas nos garantem que $XYZW$ é um retângulo, e

$$\overline{WX} = \overline{h_a} - \overline{h_a W} - \overline{XX'} = 5 - \overline{kh_d} - \overline{h_b I} = 5$$

$$5 - \overline{Jh_c} - \overline{Hh_a} = 5 - \overline{Jh_c} - \overline{IX'} = \overline{XY}$$

Então $XYZW$ é um quadrado (Toda essa conta acima foi apenas por critério de formalidade, saber que $XYZW$ é um quadrado é intuitivo). Assim, o perímetro de $XYZW$ é 4 vezes o comprimento do lado $\overline{WX}$:

$$4\overline{WX} = 4\left(5 - \overline{kh_d} - \overline{h_b I}\right)$$

$$\boxed{4\overline{WX} = \frac{28}{5}}$$

2 Questão: Sobrinhos no cinema

Criado por Pedro Henrique Duailibe

Suponha que n sobrinhos do Bernarto Rito foram assistir um filme no cinema e decidiram comprar seus ingressos pessoalmente. Por sorte, conseguiram reservar n lugares consecutivos em uma fileira só para sentarem todos juntos. Quando os ingressos que indicam os assentos foram entregues, cada sobrinho pegou um local aleatório, o que causou furdúncio devido a preferência de alguns para sentar perto de outros. A única maneira de trocarem a configuração inicial de assentos é se pares de sobrinhos que sentam um do lado do outro trocarem de ingresso, com a restrição adicional que uma pessoa só pode trocar de ingresso uma vez. Contando com a configuração inicial, de quantas formas diferentes esses sobrinhos podem se organizar?

Solução:

Vamos representar a configuração inicial como sendo a palavra canônica $w_0 = 123 \cdots n$. O problema é equivalente a contar a quantidade de formas que podemos modificar essa palavra apenas invertendo pares disjuntos de letras consecutivas (um exemplo de configuração válida para $n = 6$ é 132465). Logo, é claro que o máximo de pares de letras que podemos inverter é $\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor$.

Portanto, seja $\mathcal{S}_n$ o conjunto de palavras (permutações) que se adequam ao enunciado. Defina $I : \mathcal{S}_n \to \mathcal{I}_n$ como sendo o *mapa de inversão* do conjunto de permutações até o conjunto de tabelas de inversões $\mathcal{I}_n$. Uma inversão em uma permutação $w = w_1 w_2 \cdots w_n$ é um par (i, j), $i < j$ tal que $w_i > w_j$. Por exemplo, em $w = 132465$, $(2, 3)$ e $(5, 6)$ é uma inversão. Já uma tabela de inversão $I(w)$ encoda uma permutação apenas representando o número de inversões que cada número da permutação canônica tem. Por exemplo, $I(132465) = (0, 1, 0, 0, 1, 0)$, pois o 2 foi invertido com o 3 e o 5 com o 6, totalizando duas inversões (isso não é uma explicação super detalhada de inversões, portanto se não tiver familiaridade com as definições recomendo uma leitura um pouco mais a fundo).

A ideia chave que torna tabelas de inversões super útil é que nós podemos interpretar o enunciado como o número de tabelas de inversões com entradas até 1, tal que não haja nenhum par de uns consecutivos (por que?). Logo, se definirmos $\phi(n, k)$ como o número de palavras binárias de tamanho $n-1$ (usamos $n-1$ por que a última entrada da inversão é sempre zero) com k uns tal que não haja nenhum 1 do lado do outro, o número que precisamos calcular é

$$\sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \phi(n, k).$$

Agora, como contamos $\phi(n, k)$? Isso é fácil, é apenas o Primeiro Lema de Kaplanksy! Isto é, existe uma bijeção entre o número de palavras binárias de tamanho $n-1$ com k 1s e com a condição que nenhum dos $\binom{k}{2}$ pares de uns são consecutivos com o número de permutações de $\{1, 2, ..., n-1\}$ com nenhum número consecutivo (por que?). Logo, por Kaplansky, temos que $\phi(n, k) = \binom{(n-1)+k+1}{k} = \binom{n-k}{k}$.

Assim, temos que

$$|\mathcal{S}_n| = \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{n}{2} \rfloor} \binom{n-k}{k}$$

Usando indução, deixo como exercício para o leitor mostrar que $|\mathcal{S}n| = Fn + 1$, onde F_k é o k-ésimo número de Fibonacci.

3 Questão: Equacão funcional

Criado por Julia Leguiza

Determine todas as funções $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tais que, para todos os $x, y \in \mathbb{R}$

$$f(xy + f(x)) = xf(y)$$

Solução:

Seja $P(x,y) : f(xy + f(x)) = xf(y)$.

Assim, $P(0,y) : f(f(0 \cdot y + f(0)) = 0f(y) \implies f(f(0)) = 0$.

Tomando $f(0) = a \implies f(a) = 0$.

Daí, $P(a,0) : f(a \cdot 0 + f(a)) = af(0) \implies f(0+0) = a^2 \implies f(0) = a^2$. Logo, $a = f(0) = a^2 \implies a = a^2 \implies a = 0$ ou 1. E com isso $\boxed{f(0) = 0 \text{ ou } 1}$.

Temos 2 casos a considerar:

1o caso: $f(0) = 0$.

Aqui vamos querer provar que a única solução possível é $f \equiv 0$, ou seja a função identicamente nula, $f(x) = 0$, $\forall x$. Mas antes, vamos extrair mais informações de $f(0) = 0$:

$P(x,0) : f(x \cdot 0 + f(x)) = xf(0)$. Logo, $\boxed{f(f(x)) = 0}$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Se existe y tal que $f(y) \neq 0$, então:

$$P\left(\frac{t}{f(y)}, y\right) : f\left(\frac{t}{f(y)} \cdot y + f\left(\frac{t}{f(y)}\right)\right) = \frac{t}{f(y)} \cdot f(y) = t,\ \forall t \in \mathbb{R}.$$

Logo, f é sobrejetiva, ou seja, pra todo $t \in \mathbb{R}$ existe z tal que $f(z) = t \implies f(f(z)) = f(t) = 0$, $\forall t \in \mathbb{R} \implies f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Absurdo!, já que supomos que existe y tal que $f(y) \neq 0$. Portanto, $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Verificando: $f(xy + f(x)) = f(xy + 0) = 0 = x \cdot 0 = xf(y)$ OK!

2o caso: $f(0) = 1$

Com isso, $P(x,0) : f(x \cdot 0 + f(x)) = xf(0) = x$. Logo, $f(f(x)) = x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Daí, f é sobrejetiva. Agora, vamos provar que f é injetora:

Se $f(a) = f(b) \neq 0 \implies f(a) + ab = f(b) + ab \implies f(ab + f(a)) = f(ab + f(b)) \implies P(a,b) = P(b,a) \implies af(b) = bf(a)$. Como $f(a) = f(b)$ e ambos são diferentes de 0, podemos cortar $\implies a = b$. Agora, falta provar que f é injetiva em 0. Para isso, seja α tal que $f(\alpha) = 0 \implies f(f(\alpha)) = f(0) = 1$. Da mesma forma, $f(f(\alpha)) = \alpha \implies \alpha = 1$. Então, f é injetora em 0 também! ($f(1) = 0$)

Portanto, f é injetora e sobrejetora $\implies f$ é bijetora.

Mais ainda, $P(y,1) : f(y \cdot 1 + f(y)) = yf(1) = 0 \implies f(y + f(y)) = 0$, $\forall y \in \mathbb{R}$. Como f é injetora em 0, $\implies f(y + f(y)) = 0 = f(1) \implies y + f(y) = 1 \implies f(y) = 1 - y$. Logo, $\boxed{f(x) = 1 - x, \forall x \in \mathbb{R}}$. Verificando:

Lado direito: $f(xy + f(x)) = f(xy + 1 - x) = 1 - (xy + 1 - x) = 1 - xy - 1 + x = x - xy$.

Lado esquerdo: $xf(y) = x(1 - y) = x - xy$.

Lado direito = Lado esquerdo. OK!

Portanto, todas as funções que satisfazem a equação do enunciado são: $f(x) = 0$, $\forall x \in \mathbb{R}$ ou $f(x) = 1 - x$, $\forall x \in \mathbb{R}$. ■