Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas

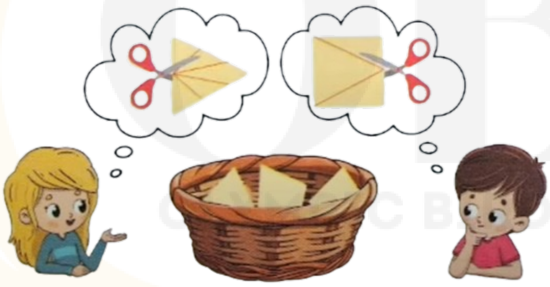
Comentário 2° Fase

Nível 3

1. Ana e Pedro cortam pedaços de papel que estão em uma cesta.

   - Sempre que Ana pega um pedaço, corta em cinco pedaços e devolve todos eles para a cesta.
   - Sempre que Pedro pega um pedaço, corta em três pedaços e devolve todos eles para a cesta.

   Inicialmente há três pedaços de papel na cesta.



a) Quantos pedaços de papel ficarão na cesta depois de Ana e Pedro pegarem um pedaço cada um e devolverem os pedaços cortados para a cesta?

Solução:

Como Ana e Pedro vão pegar um papel cada, na cesta restará apenas 1 papel. Ana vai cortar seu papel em 5 pedaços, enquanto Pedro vai cortar seu papel em 3 pedaços. Ambos vão devolver esses pedaços para a caixa. Portanto, $1 + 5 + 3 = 9$ pedaços de papel ficarão na cesta.

b) Descreva uma maneira para Ana e Pedro pegarem, cortarem e devolverem todos os pedaços de papel da cesta, de modo que, a partir dos três pedaços iniciais, a cesta fique com 11 pedaços

Solução:

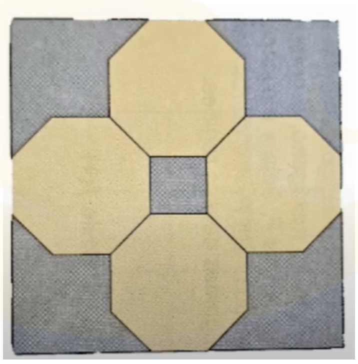
Ana deve pegar 1 pedaço de papel, enquanto Pedro deve pegar os 2 pedaços restantes. Assim, não restarão papéis na cesta. Em seguida, Ana vai devolver 5 pedaços (já que pegou apenas 1 papel), e Pedro vai devolver 6 pedaços (pois pegou 2 papéis). Logo, a cesta ficará com $5 + 6 = 11$ pedaços, como desejado.

c) Explique por que, a partir dos três pedaços iniciais, a cesta nunca ficará com 2024 pedaços após Ana e Pedro devolverem todos os pedaços cortados para a cesta.

Solução:

Perceba que Ana pega um pedaço de papel (ou seja, subtrai 1 unidade de papel da cesta) e devolve 5 pedaços (ou seja, adiciona 5 unidades de papel à cesta). Portanto, Ana sempre faz o número de papéis na cesta aumentar em 4 unidades. Pedro, por sua vez, pega 2 papéis e devolve 6, fazendo com que o número de papéis na cesta aumente em 2 unidades. Ou seja, a paridade do número de papéis na cesta não muda! Como inicialmente há 3 papéis na cesta (quantidade ímpar de papéis), sempre haverá um número ímpar de papéis dentro da cesta. Como 2024 é um número par, é impossível que a cesta tenha 2024 pedaços.

2. Quatro octógonos regulares de lado medindo 1 cm foram desenhados em um cartão quadrado, como na figura. Cada octógono tem um lado na borda do cartão e octógonos adjacentes têm um lado em comum.



a) Qual é área do cartão ?

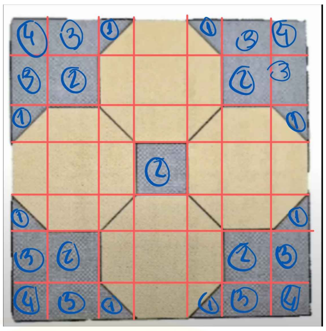
Solução:

Calculando a área dos octógonos regulares, temos:

$$A = 2(1 + \sqrt{2})l^2 = 2(1 + \sqrt{2}) \cdot 1^2 = 2 + 2\sqrt{2}\ cm^2$$

Como temos 4 octógonos na figura, multiplicamos por 4:

$$A = (2 + 2\sqrt{2}) \cdot 4 \Longrightarrow A = 8 + 8\sqrt{2}\ cm^2$$



Após dividirmos a figura com linhas verticais e horizontais, temos 4 tipos de formas: triângulos retângulos isósceles de hipotenusa 1 cm (digamos que a medida dos catetos seja x) (indicados com o número (1) na figura), quadrados de lado 1 cm (indicados com o número (2) na figura), retângulos de medidas 1 por x(indicados com o número (3) na figura) e quadrados de lado x (indicados com o número (4) na figura).

Pelo Teorema de Pitágoras: $x^2 + x^2 = 1 \implies 2x^2 = 1 \implies x = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$.

Logo, a área total do cartão será:

Área total dos triangulos cinzas(1): $8 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 \cdot \dfrac{1}{2} = 2cm^2$

Área total dos quadrados de lado 1 cinzas(2): $5 \cdot 1 = 5cm^2$

Área total dos retângulos cinzas (3): $8 \cdot 1 \cdot \dfrac{\sqrt{2}}{2} = 4\sqrt{2}$

Área total dos quadrados de lado $\dfrac{\sqrt{2}}{2}$(4):

$4 \cdot \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 2cm^2$

Portanto, ao total: $8 + 8\sqrt{2} + 2 + 5 + 4\sqrt{2} + 2 =$

$$\boxed{17 + 12\sqrt{2}}$$

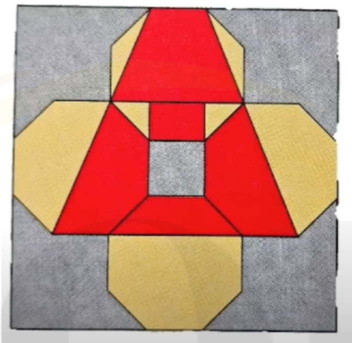
b) Qual é área da região cinza ?

Solução:

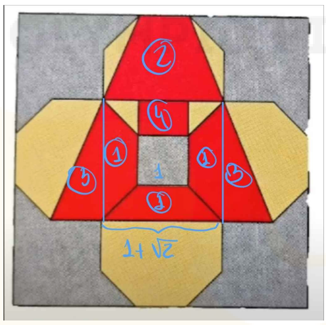
Basta fazer a subtração da área do cartão com a área dos octógonos:

$$(17+12\sqrt{2})-(8+8\sqrt{2})=\boxed{9+4\sqrt{2}\ cm^2}$$

c) Qual é a área da parte pintada em vermelho sobre os octógonos ?



Solução:



C) Note que temos 4 tipos de figuras, vamos calcular a área de cada uma delas e somar:

(1): trapézio de bases 1 e $(1+\sqrt{2})$, com altura $\dfrac{\sqrt{2}}{2} \implies 3\cdot(1+1+\sqrt{2})\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3\sqrt{2}+3}{2}cm^2$

(2): trapézio de bases 1 e $(1+\sqrt{2})$, com $\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ de altura

$$\implies 1\cdot(1+1+\sqrt{2})\cdot\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}=\frac{3+2\sqrt{2}}{2}cm^2$$

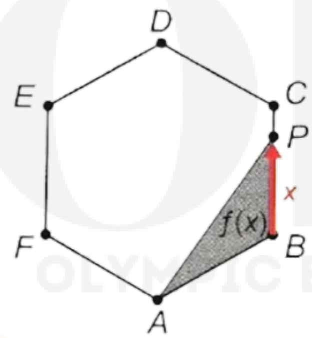
(3): triângulos de base 1 e altura $(1+\sqrt{2}) \implies 2\cdot 1\cdot(1+\sqrt{2})\cdot\frac{1}{2} = 1+\sqrt{2}cm^2$

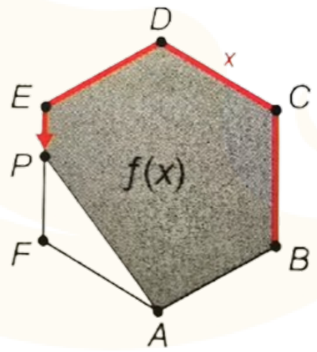
(4): retângulo de base 1 e altura $\frac{\sqrt{2}}{2} \implies 1\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2}cm^2$

Portanto, ao total, a área vermelha é: $\frac{3\sqrt{2}+3}{2} + \frac{3+2\sqrt{2}}{2} + 1 + \sqrt{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} =$

$$\boxed{(4\sqrt{2}+4)cm^2}$$

3. Um hexágono regular $ABCDEF$ tem lados de medida 1. Um ponto P desloca-se na borda do hexágono, a partir do vértice B, passando pelos vértices C, D e E até chegar ao vértice F. Seja x a distância percorrida pelo ponto P e seja $f(x)$ a área da região com vértices em P, A e outros vértices do hexágono pelos quais P já passou. A figura mostra algumas dessas regiões.





a) Calcule $f(1)$

Solução:

Note que $f(1)$ corresponde à área do triângulo ABC. Logo, temos:

$$f(1) = [ABC] = \frac{1\cdot 1\cdot \text{sen}(120^\circ)}{2}$$

Como $\text{sen}(120°) = \frac{\sqrt{3}}{2}$, temos:

$$f(1) = \frac{1 \cdot 1 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}$$

Portanto,

$$\boxed{f(1) = \frac{\sqrt{3}}{4}}$$

b) Determine a expressão de $f(x)$ quando P se desloca no lado DE.

Solução:

A expressão para $f(x)$ quando P se desloca no lado DE corresponde ao valor de $f(x)$ com $x \in [2, 3]$. A mudança do valor de $f(x)$ quando P andar uma pequena distância Δx no lado DE será o incremento da área resultante do triângulo ADP. Assim, temos

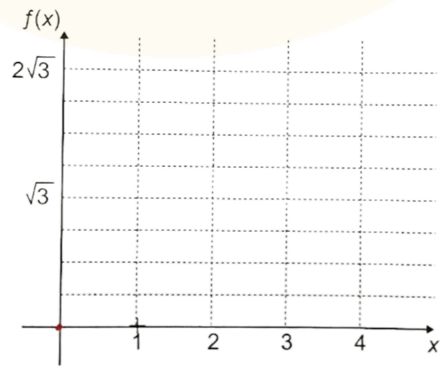
$$f(x) = [ADP] + [ABCD] = [ADP] + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

Agora, $[ADP](x)$ é da forma $\frac{(x-2)\cdot 2 \cdot \text{sen}\, 60°}{2}$, dado que $2 \leqslant x \leqslant 3$ e usando a fórmula trigonométrica da área novamente. Assim, ficamos com

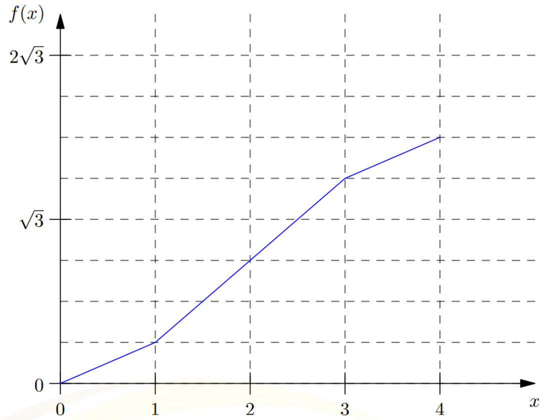
$$f(x) = \frac{(x-2) \cdot 2 \cdot \text{sen}\, 60°}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}.$$

$$\boxed{f(x) = \frac{\sqrt{3}(x-2)}{2} + \frac{3\sqrt{3}}{4}}$$

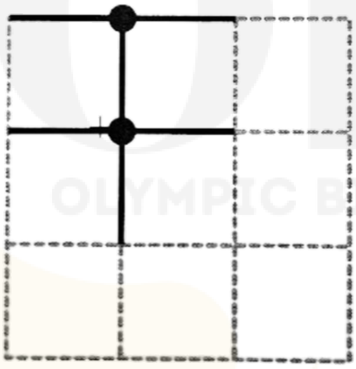
c) Esboce abaixo o gráfico de f.



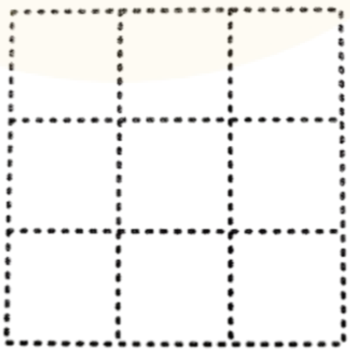
Solução:



4. Um terreno quadrado foi dividido em 9 lotes também quadrados, cercados por muros. Câmeras instaladas no encontro de dois ou mais muros vigiam os muros adjacentes ao ponto de instalação. Na figura temos duas câmeras vigiando 6 muros.



a) Indique uma posição de duas câmaras na figura abaixo de modo que elas vigiem a maior quantidade possível de muros.



Solução:

Modele os possíveis locais de instalação das câmeras como pontos no plano cartesiano, sendo o ponto mais inferior à esquerda o $(0, 0)$ e o ponto mais superior à direita o $(3, 3)$.Note que posicionar duas câmeras nos pontos $(1, 1)$ e $(2, 2)$ tem o efeito de vigiar oito muros, e essa é a maior quantidade possível, pois cada câmera vigia, no máximo, **quatro muros**.

b) Qual é o número mínimo de câmeras necessárias para vigiar os 12 muros na fronteira do terreno? Justifique sua resposta.

Solução:

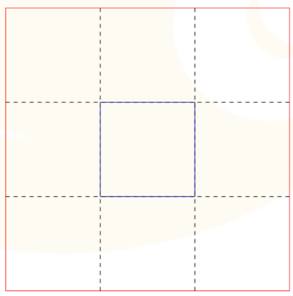
A resposta é **6**. Um exemplo de configuração seria escolher os pontos $(1, 0)$, $(3, 0)$, $(3, 2)$, $(2, 3)$, $(0, 3)$ e $(0, 1)$.

Prova: Um ponto pode cobrir, no máximo, dois muros na fronteira, logo, o mínimo possível de pontos seria 6. Como encontramos uma configuração que satisfaz essa condição, está provado.

c) Encontre o número mínimo de câmeras necessárias para vigiar todos os muros do terreno. Justifique sua resposta.

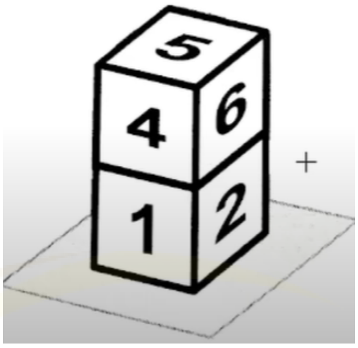
Solução:

A resposta é **8**.
Prova: Considere a seguinte figura:

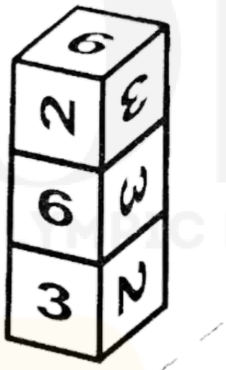


Note que câmeras posicionadas na fronteira não conseguem vigiar os muros em azul, e câmeras no centro não conseguem vigiar os muros em vermelho. Como precisamos de no mínimo 6 câmeras para vigiar a fronteira, e no mínimo 2 câmeras para vigiar os muros em azul, o número mínimo de câmeras é $\geqslant 8$. Um exemplo de configuração seria escolher os pontos (0,0), (2,0), (3,1), (3,3), (1,3), (0,2), (1,1) e (2,2).

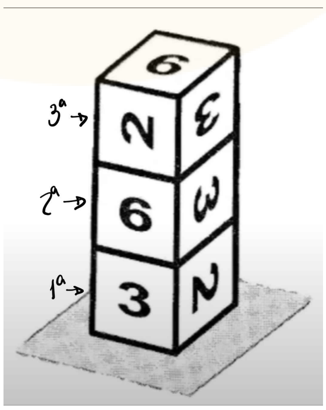
5. Marina tem vários dados idênticos com faces numeradas de 1 a 6. Nesses dados, a soma dos números em faces opostas é sempre igual a 7. Ela junta ou empilha alguns desses dados sobre uma mesa e anota a soma de todos os números que consegue ver ao dar uma volta ao redor da mesa. Por exemplo, para os dados da figura ao lado ela anotou o número 33.



a) Qual é o número que Marina deve anotar para os dados da figura abaixo?



Solução:



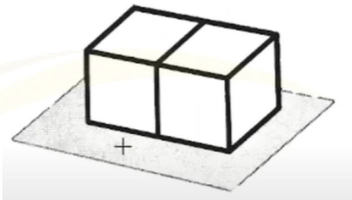
Para a 1ª fila, temos: $3 + 4 + 2 + 5 = 14$;

Para a 2ª fila, temos: $6 + 1 + 3 + 4 = 14$

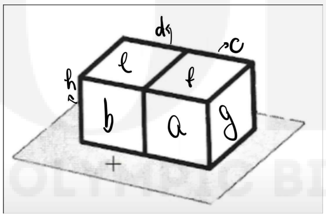
Para a 3ª fila, temos: $2 + 5 + 3 + 4 + 6 = 20$

Portanto, Marina deverá anotar 14+14+20= **48**.

b) Qual é o menor número possível que Marina pode anotar para dois dados juntos sobre a mesa, como indicado na figura abaixo ?



Solução:

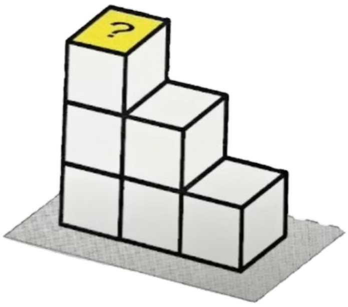


Sejam $a, b, c, d, e, , f, g, h$ números dispostos como na figura, onde a e c são opostos, assim como b e d. Sabemos que $a+c = b+d = 7$ e $f+g \geqslant 1+2 = 3$(são do mesmo cubo e têm valores diferentes) e $e + h \geqslant 1 + 2 = 3$ (são do mesmo cubo e têm valores diferentes).

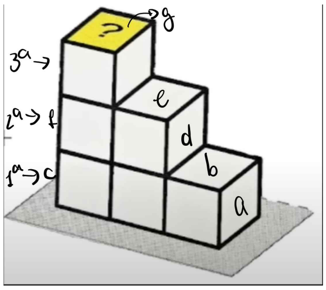
Portanto, a soma mínima será $a+b+c+d+e+f+g+h \geqslant 7+7+3+3 = 20$. E 20 é alcançado quando:

$$\boxed{(e, h) = (f, g) = (1, 2)}$$

c) Marina anotou o número 88 para uma pilha de dados, como indicado na figura abaixo. Quais números podem ficar no topo dessa pilha ? Justifique sua resposta.



Solução:



Sejam a, b, c, d, e, f, g números dispostos como na imagem. Primeiramente, vamos contar a quantidade de "pares"de faces opostas que somam 7 por fila:

1ª fila: 3 (1 para cada cubo)

2ª fila: 2 (1 para cada cubo)

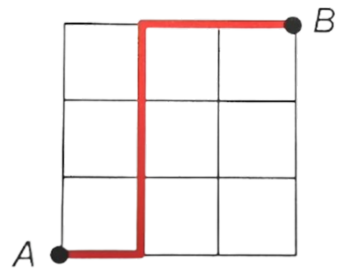
3ª fila: 2

Daí, a soma de Marina fica: $7(3+2+2)+a+b+c+d+e+f+g = 88 \implies a+b+c+d+e+f+g = 39$.

Note agora que $a+b \leqslant 5+6 = 11$ (estão no mesmo cubo); $e+d \leqslant 5+6 = 11$ (estão no mesmo cubo) e $c+f \leqslant 6+6 = 12$. Logo, $39 = a+b+c+d+e+f+g \leqslant 11+11+12+g \implies g \geqslant 5$.

Como $g \in \{1,2,3,4,5,6\} \implies \boxed{\text{g=5 ou 6}}$

6. Duas formigas caminham sobre as linhas do quadriculado da figura. No mesmo instante, uma parte do ponto A e a outra, do ponto B. A velocidadeda formiga que parte de B é dois terços da velocidade da formiga que parte de A. A formiga que parte de A sempre caminha para a direita ou para cima, e a formiga que parte de B sempre caminha para a esquerda ou para baixo. Cada vez que uma delas tem duas direções para prosseguir, cada uma dessas tem probabilidade 1/2 de ser escolhida. Por exemplo, a probabilidade de que a formiga que parte de A siga o caminho indicado na figura é $\frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{16}$, pois ela tem que fazer 4 escolhas de direções.



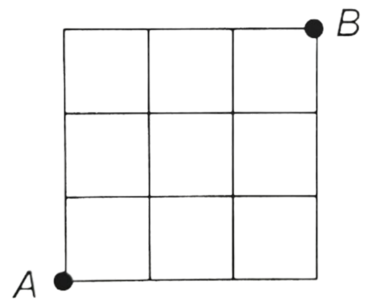
a) Qual é a probabilidade de que a formiga que parte de A passe por o lado marcado em X?

Solução:

A formiga A tem 2 caminhos (casos favoráveis) para passar pelo segmento marcado com X: ↑→↑ e →↑↑. Perceba que ela teve que fazer 3 escolhas de caminho, por isso o total de casos é $2 \times 2 \times 2 = 8$. Portanto, a probabilidade desejada é:

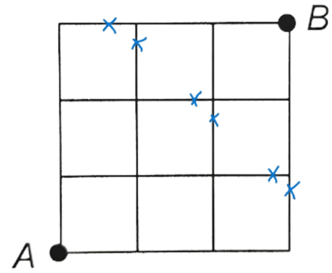
$$\boxed{\frac{1}{4}}$$

b) Marque abaixo, com um X, os lados do quadriculado onde as formigas podem se encontrar.



Solução:

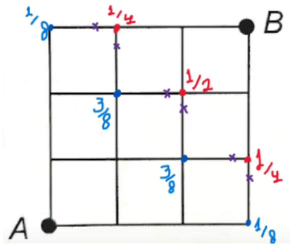
Suponha que tanto a formiga A quanto a formiga B deixem um rastro vermelho por onde passam. Quando elas se encontram, esse rastro forma um caminho do canto inferior esquerdo até o canto superior direito. Um exemplo desse caminho pode ser visto na imagem da questão 6. Esse caminho tem comprimento fixo, pois, partindo do canto inferior esquerdo, ele chega ao canto superior direito indo apenas para cima e para a direita. Logo, o caminho consiste em 3 movimentos para cima e 3 para a direita (em alguma ordem). Como a velocidade da formiga B é $\frac{2}{3}$ da velocidade da formiga A, elas se encontrarão em $\frac{2}{5}$ o trajeto (de B até A). Esses pontos estão marcados na figura abaixo.



c) Qual a probabilidade das formigas se encontrarem?

Solução:

Em azul, estão representadas as probabilidades de a formiga A chegar a cada um dos pontos. Em vermelho, estão as probabilidades de a formiga B chegar a cada um dos pontos, conforme mostra a figura.



Seja $a_1, a_2, ..., a_6$ os possíveis pontos de encontro das formigas, onde a_1 é o ponto "mais acima"e a_6 é o ponto "mais embaixo", e a mesma lógica se aplica aos demais pontos. A probabilidade de se encontrarem em a_1 é $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$. De se encontrarem em a_2 é $\frac{3}{16} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{128}$. De se encontrarem em a_3 é $\frac{3}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$. De se encontrarem em a_4 é $\frac{3}{16} \times \frac{1}{4} = \frac{3}{64}$. De se encontrarem em a_5 é $\frac{3}{16} \times \frac{1}{8} = \frac{3}{128}$. E de se encontrarem em a_1 é $\frac{1}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{64}$. Somando todos esses casos, descobrimos que a probabilidade das formigas se encontrarem é de

$$\boxed{\frac{11}{64}}$$