1 Questão curta - Densidade do Sol

Victor Carvalho é um entusiasta da Astronomia, participando da OBA todos os anos e estudando por meio do Projeto Olympic Birds. Durante uma aula com a professora Rosaline sobre densidade na escola, ele perguntou-se qual seria a densidade média de uma estrela, como o Sol. Como a professora não permite o uso do celular durante sua aula, Victor teve que recorrer a outros meios para acabar com sua curiosidade. Ele não se lembrava do raio e da massa do Sol, mas sabia quanto valia o valor de 1 ano e sabia que o diâmetro angular do Sol visto da Terra era em torno de $31'$. Ajude o pequeno Victor a descobrir a densidade média aproximada do Sol usando apenas os dados que ele se lembra.

Solução:

Temos que:

1) A densidade do Sol (considerando ele uma esfera) é dada por:

$$d = \frac{M}{\frac{4}{3}\pi R^3}$$

2) A Terceira Lei de Kepler nos diz que:

$$\frac{T^2}{A^3} = \frac{4\pi^2}{GMm}$$

3) E por fim, da definição de diâmetro angular, sabemos que o raio angular do Sol visto da Terra vale:

$$\theta_R = \frac{R}{A}$$

Juntando as expressões, encontramos

$$T^2 = \frac{3\pi A^3}{GR^3}$$

Perceba que a razão A/R é o inverso de θ_R. Então podemos escrever a equação sendo

$$T^2 = \frac{3\pi}{Gd\theta_R^3} \Rightarrow d = \frac{3\pi}{GT^2}\frac{1}{\theta_R^3}$$

Logo, o valor da densidade do Sol encontrado por Victor é de $\boxed{1410 \cdot kg/m^3}$

2 Questão média - Expedição Kilimanjaro

John Oliveira é um renomado biólogo brasileiro que realiza diversas expedições pelo mundo, com fins de registro de novas espécies. Em 2036, John iniciou uma expedição de 4 meses pelo continente africano, com o objetivo principal de realizar pesquisas por 2 meses nos arredores do Lago Vitória, ficando hospedado em Kampala. capital da Uganda. Ele também pretende revisitar o monte Kilimanjaro, o pico mais alto do continente, ficando na região onde John realizou pesquisas para seu doutorado em 2014. O ponto de partida da viagem foi a cidade, na costa do Índico, de Melinda, no Quênia. Essa cidade histórica foi fundada no século XIV, tendo contato com diversas culturas. Foi inclusive nessa cidade que os registros dizem que Vasco da Gama encontrou o piloto árabe que o guiou até Calicute. Responda os itens abaixo, desconsiderando qualquer efeito atmosférico.

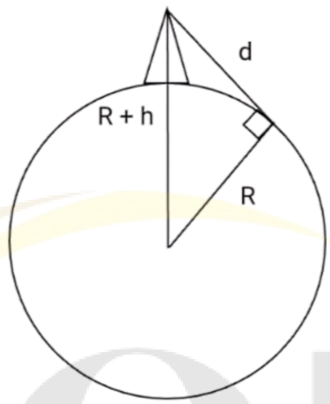
(a) Após 8 dias de escalada, John chegou no topo do Kilimanjaro. Sabendo que altura do monte é de 5,895 metros, determine, considerando um cenário hipotético em que os arredores do monte estão no nível do mar, a distância de John ao horizonte.

(b) Comparando a esfera celeste visível no topo do Kilimanjaro e em Melinda, é possível afirmar que no primeiro caso é possível vizualizar possíveis corpos celestes com uma declinação maior?

(c) Qual seria a diferença de declinação limite visível do Kilimanjaro e de Melinda? Considere que a latitude de Melinda é de $3^{º}13´25´´$ S e a latitude do Kilimanjaro é de $3^{º}03´55´´$ S

Solução:

a) Temos o seguinte esquema da situação:



d = Distância ao horizonte; R = Raio da Terra; h = Altura do pico.

Pelo Teorema de Pitágoras, pode-se concluír que:

$$(R+h)^2 - R^2 = d^2$$

Considerando R = 6380km, d $\cong$ 274,33 km.

b) Sim, como ele está em uma maior altitude, a esfera celeste visível tem seu horizonte de visibilidade aumentado.

c) Pela geometria da situação, concluímos que:

$$cos\theta = \frac{R}{R+h}$$

Logo, $\theta \cong 1^\circ$.

A declinação limite visível em Melinda é de $86,77^\circ$ (basta subtrair o valor da latitude de 90°) e a de um ponto no nível do mar na latitude do Kilimanjaro seria de $86,93^\circ$. Calculando a difença desses valores e considerando a diferença de 1° da altitude do Kilimanjaro, é encontrado a diferença de declinação em aproximadamente $1,16^\circ$.

3 Questão avançada - Órbita estranha

Um certo sistema realiza uma órbita estranha. O planeta realiza uma órbita circular aonde a estrela (de massa muito maior do que a do planeta) pertence ao circulo.
A figura abaixo ilustra a órbita.

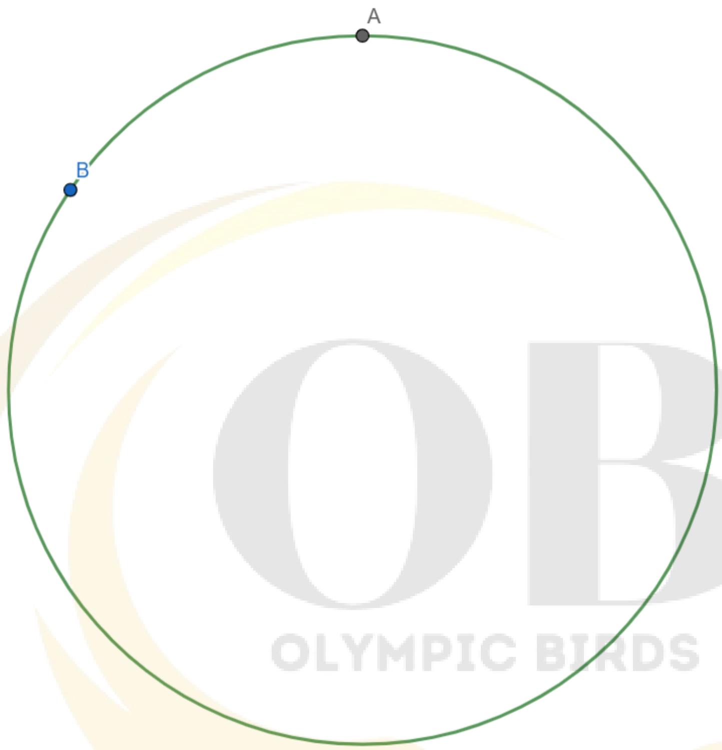


Figura 1: Representação da órbita

O ponto A representa a estrela e o ponto B o planeta. Com base nisso, responda:

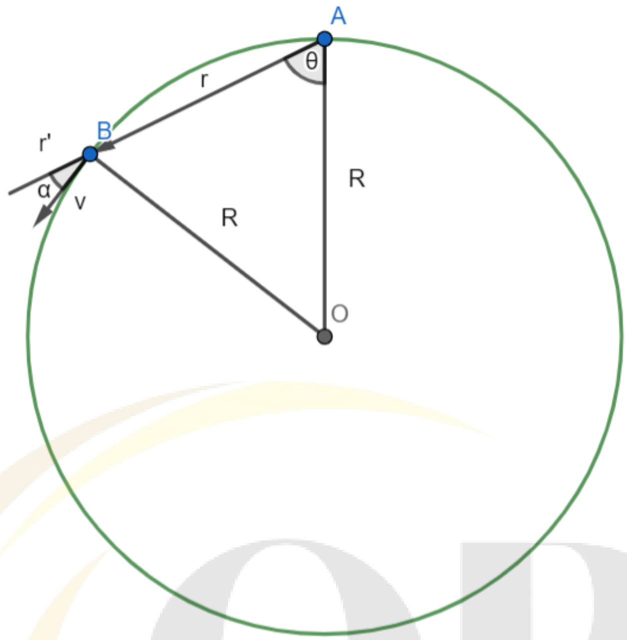
a) Qual a relação de proporcionalidade entre a Força ($\mathbf{F}$) e o vetor posição entre o planeta e a estrela ($\mathbf{r}$).

b) Qual é a Lei de Força que rege esse sistema?

Para treinar suas habilidades, faça essa questão de três maneiras, a primeira, utilizando conservação de energia e momento angular, utilizando a equação de Binet e por fim, escrevendo $\mathbf{F} = m\frac{d^2}{dt^2}\mathbf{r}$.
Dados: Massa do planeta m, raio da órbita R, momento angular do planeta L.

Solução:

Para um maior entendimento da resolução, vamos utilizar a seguinte "imagem-guia"



Agora, aplicando lei dos cossenos em AOB fica fácil de ver que $r = 2R\cos\theta$. Aqui temos um resultado importante: $r \propto \cos\theta$.
Agora, aplicando conservação de momento angular e energia temos:

$$L = m\mathbf{r} \times \mathbf{v} \quad , \quad E = U + \frac{mv^2}{2}$$

O valor do módulo da multiplicação vetorial $\mathbf{r} \times \mathbf{v}$ é $vr\,\mathrm{sen}\,\alpha$, porém, porceba que $\alpha + \pi/2 + \theta = \pi$, uma vez que a velocidade é sempre tangente ao círculo. Com isso, temos $\alpha = \pi/2 - \theta$, portanto $\mathrm{sen}\,\alpha = \cos\theta$.

Isolando a velocidade e substituindo na fórmula da energia, temos:

$$E = U + \frac{L^2}{2mr^2\cos^2\theta} \equiv U + \frac{L^2}{8mR^2\cos^4\theta}$$

Como a energia total E é constante, temos que $U \propto \frac{1}{\cos^4\theta} \propto \frac{1}{r^4}$, portanto:

$$\boxed{F \propto \frac{1}{r^5}}$$

b) Isolando U na expressão do item anterior, temos:

$$U = E - \frac{L^2}{8mR^2\cos^4\theta}$$

Utilizando que $F = -\frac{d}{dr}U$, temos que:

$$F = \frac{L^2}{8mR^2}\frac{d}{dr}\sec^4\theta$$

Para resolver $\frac{d}{dr}\sec^4\theta$ vamos utilizar que:

$$\frac{d}{dr}\sec^4\theta = \frac{d\theta}{dr}\frac{d}{d\theta}\sec^4\theta$$

Como $r = 2R\cos\theta$, temos que $d\theta = \frac{-dr}{2R\,\mathrm{sen}\,\theta}$, então:

$$\frac{d}{dr}\sec^4\theta = -\frac{1}{2R\,\mathrm{sen}\,\theta}\frac{d}{d\cos\theta}\frac{1}{\cos^4\theta}\frac{d\cos\theta}{d\theta} = \frac{-2}{R\cos^5\theta}$$

Substituindo o resultado encontrado na nossa equação para F, temos:

$$F = \frac{L^2}{8mR^2}\frac{-2}{R\cos^5\theta} = -\frac{L^2}{4mR^3\cos^5\theta}$$

Por fim, temos que $\cos\theta = \frac{r}{2R}$, ou seja:

$$\boxed{F = -\frac{8R^2L^2}{mr^5}}$$

Os outros métodos de resolução sugeridos na questão como exercício ao leitor são análogos e devem chegar ao mesmo resultado.
A equação de Binet é dada por:

$$\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = -\frac{mF}{L^2u^2}$$

Onde $u = 1/r$. A demonstração fica como exercício ao leitor.
Nota do Autor: Decorar a equação de Binet, não é algo necessário, tendo em vista que em questões como essa, há diversos jeitos de resolver sem a mesma (assim como está feito no gabarito), porém é uma carta na manga que pode servir como diferencial para ganhar tempo durante as provas, tendo em vista que sem a equação de Binet, um bom aluno, deveria demorar algo em torno de 20 mituos para fazer essa questão, porém com a mesma, ela saí em menos de 10.