1 Questão: Álgebra na mesa

Marcos Vinicius Burdzinski

Encontre todas as triplas de não negativos inteiros (a, b, c) tais que

$$a^2 + b^2 + c^2 = abc + 1$$

Solução:

É fácil ver que a tripla $(0, 0, 1)$ e suas permutações são solução do sistema. Se $a = b = c$, então

$$3a^2 = a^3 + 1 \Rightarrow a^2(3 - a) = 1$$

Um absurdo, visto que a pertence aos inteiros não negativos. Se $a = b$, então

$$2a^2 + c^2 = a^2c + 1 \Rightarrow (c-1)(c+1) = a^2(c-2) \Rightarrow \frac{(c-1)(c+1)}{(c-2)} \in \mathbb{N}$$

$$mdc(c-1, c-2) = 1 \Rightarrow c - 2 | c + 1$$

Com isso, chegamos que $c \in 1, 3, 5$. Testando, o único caso que funciona é quando $c = 1$ e encontramos $(0, 0, 1)$ e suas permutações. Agora, assuma que exista uma solução (a_0, b_0, c_0) com $a_0 > b_0 > c_0 > 1$ com $a_0 + b_0 + c_0$ mínimo. Rearranje a equação da seguinte forma:

$$a_0^2 - a_0(b_0c_0) + (b_0^2 + c_0^2 - 1) = 0$$

Essa equação do segundo grau em a_0 tem como soluções a_0 e a_1, e como assumimos minimalidade no início, então $a_1 \geqslant a_0$. As relações de Girard nos garantem que

$$a_0 + a_1 = (b_0c_0) \Rightarrow a_1 \in \mathbb{Z}$$

$$a_0a_1 = (b_0^2 + c_0^2 - 1) \Rightarrow a_0 \leqslant a_1 = \frac{(b_0^2 + c_0^2 - 1)}{a_0} \in \mathbb{Z}$$

Então,

$$(b_0^2 + c_0^2 - 1) \geqslant a_0^2$$

Utilizando as nossas condições iniciais impostas

$$\implies a_0^2 > b_0^2 \geqslant a_0^2 - c_0^2 + 1 > a_0^2 - 3a_0 + 1 \geqslant (a_0 - 2)^2$$

Por conta do fato que $a \geqslant 3$. Assim, $b_0 = a_0 - 1$. Colocando esse resultado na equação original, encontramos que:

$$a_0^2 + (a_0 - 1)^2 + c_0^2 = a_0(a_0 - 1)c_0 + 1 \implies 2a_0^2 - 2a_0 + c_0^2 = a_0^2 c_0 - a_0 c_0$$

Rearranjando,

$$c_0^2 = a_0(a_0 - 1)(c_0 - 2) > c_0^2(c_0 - 2) \implies c_0 \in \{1, 2\}$$

Testando na equação original, não encontraremos nada de novo. Logo, as únicas soluções são $(0, 0, 1); (0, 1, 0); (1, 0, 0)$

2 Questão: Um rei preguiçoso

Pedro Henrique de Abreu Duailibe

Um rei de um país distante um dia estava entediado e decidiu criar uma cidade nova para seu reino, que teria n bairros. Como o rei era muito preguiçoso e não gostava de pensar, decidiu aprovar o projeto de uma estrada entre quaisquer dois bairros com um lançamento de moeda (ou seja, com probabilidade $p = \frac{1}{2}$). Depois dessa decisão, os engenheiros ficaram preocupados com o tamanho máximo de um subconjunto S de bairros tal que qualquer par de bairros em S não possuem uma estrada que os conecta. Mostre que $|S| \leqslant 4 \log n$, com alta probabilidade.

Solução:

Seja G um grafo com n vértices tal que as arestas representam estradas entre dois bairros. Note que a probabilidade de um subconjunto T do conjunto de vértices $V(G)$ não ter nenhuma aresta é

$$(1-p)^{\binom{|T|}{2}} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{|T|}{2}},$$

pois $p = \frac{1}{2}$. Logo, defina $\alpha(G) = |S|$, como no enunciado. Dessa forma,

$$\mathbb{P}\left(\alpha(G) \geqslant k\right) \leqslant \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{\binom{k}{2}},$$

para algum inteiro k, pois contamos todos os subconjuntos de $V(G)$ com tamanho k. Nós usamos as seguintes aproximações, que serão usadas sem prova.

$$\binom{n}{k} < \frac{1}{e}\left(\frac{en}{k}\right)^k; \quad (1-p)^m \leqslant e^{-pm},$$

onde e é o número de Euler e $p \in (0,1)$. Assim,

$$\mathbb{P}(\alpha(G) \geqslant k) < \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{en}{k} \cdot e^{\frac{-(k-1)}{4}}\right)^k.$$

Agora suponha que $k \geqslant 4 \log n$. Então,

$$\frac{en}{k} \cdot e^{\frac{-(k-1)}{4}} \leqslant \frac{5}{k} \Rightarrow \mathbb{P}(\alpha(G) \geqslant k) < \frac{1}{e} \cdot \left(\frac{5}{k}\right)^k,$$

Que tende a zero bem rapidamente quanto maior for n.

3 Questão: Inversão e condições estranhas de ângulos

Marcos Vinicius Burdzinski Seja $ABCD$ um quadrilátero convexo, e seja P e Q pontos dentro de $ABCD$ de forma que $ADQP$ e $PQCB$ sejam cíclicos. Seja E um ponto no segmento $\overline{PQ}$ de modo que $\angle PAE = \angle QDE$ e $\angle PBE = \angle QCE$. Mostre que $ABCD$ é cíclico

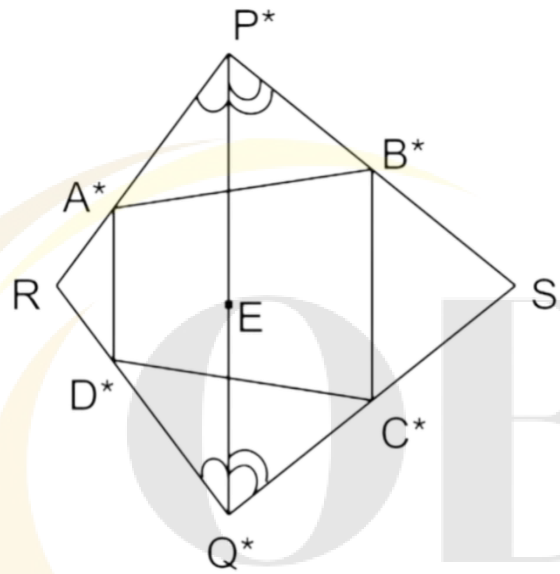

Figura 1: Figura após a inversão

Solução:

Geralmente tomamos uma inversão em pontos por onde passam muitos círculos ou linhas. Entretanto, invertendo por P ou Q (pois por eles passam dois círculos), perdemos as estranhas relações de ângulos que envolvem o ponto E. Assim, vamos inverter por E com um raio arbitrário: Seja $R = \overline{P^*A^*} \cap \overline{Q^*D^*}$ e $S = \overline{P^*B^*} \cap \overline{Q^*C^*}$. Como $PADQ$ é cíclico e não passa por E, então $P^*A^*Q^*D^*$ também é cíclico. De forma análoga, $P^*B^*C^*Q^*$ também é cíclico. Ademais,

$$\angle PAE = \angle EP^*A^* = \angle QDE = \angle EQ^*D^*$$

Então RP^*Q^* é isóceles. Com um raciocínio análogo, chegamos que SP^*Q^* também é isóceles. Como $P^*A^*Q^*D^*$ é cíclico e $\angle Q^*P^*A^* = \angle D^*Q^*P^*$, então $P^*A^*Q^*D^*$ é um trapézio isóceles. Analogamente, $P^*B^*C^*Q^*$ é um trapézio isóceles, então $A^*D^*//P^*Q^*//B^*C^*$. Ademais, podemos concluir que os triângulos $P^*A^*B^*$ e $Q^*D^*C^*$ são congruentes, então $A^*B^* = D^*C^*$, então $A^*B^*C^*D^*$ é um trapézio isóceles e, portanto, cíclico. Se $A^*B^*C^*D^*$ é cíclico e não passa por E, então $ABCD$ também é cíclico.