网络空间安全数学基础（10）

网络空间安全学院

高莹

2020年 12 月 2日

目录

- 博弈论的基本概念
- 博弈论的分类
- 博弈论的表示方法
- 纳什均衡
- 二人零和博弈

目录

- 博弈论的基本概念
- 博弈论的分类
- 博弈论的表示方法
- 纳什均衡
- 二人零和博弈

博弈论的基本概念

- 参与人player:博弈中的决策主体，其目的是最大化自己的支付
- 环境参数:博弈中不做决策的主体，如囚徒困境中的警察
- 虚拟参与人pseudo-player:对外生状态的概率分布进行决定的主体，博弈论中通常叫“自然”（nature)
- 行动action：参与人的决策变量或决策手段
- 信息information：参与人掌握的有关其他参与人的特征与行动结果、“自然”的选择结果、博弈过程与结果的相关知识
- 信息集information set：所有信息的集合
- 共同知识common knowledge:参与人之间无限循环知道的信息

博弈论的基本概念

- 一致信念concordant belief：在参与人间有限循环知道的信息。如，我知道你是女的，你也知道我是男的，但我并不知道你知道我是男的
- 战略strategy：规定参与人在给定的信息集下采取的行动规则（可能是一个行动组合）
  - **静态博弈中战略=行动；**
  - **动态博弈中战略=一定条件下的行动或行动组合。如：如果美国进攻朝鲜，则朝鲜进行抵抗**
- 结果outcome:参与人感兴趣的所有东西，但一般指在一定博弈阶段或博弈局部的支付结果

博弈论的基本概念

- 支付payoff:即效用或期望效用。参与人的支付不仅取决于自身的战略，而且取决于其他参与人的战略，即

$$u_i = u(s_{1,} s_2, \ldots, s_i, \ldots, s_n)$$

- **均衡equilibrium:即所有参与人的最优战略组合**

目录

- 博弈论的基本概念
- 博弈论的分类
- 博弈论的表示方法
- 纳什均衡
- 二人零和博弈

博弈论的分类

按照形式分类

- 合作博弈（**cooperative game**）**:**参与人之间能达成具有约束力的协议（**binding agreement),**并决定如何分享合作带来的剩余

  特性：强调集体理性，做集体最优化决策

  例如：欧配克组织；串供；团队进步与个人工作量安排

- 非合作博弈（**Non-cooperative game**）**:**参与人之间不能达成**binding agreement**

  特性：强调个体理性，各自做最优化决策，常和集体理性相矛盾

  例如：囚徒困境

博弈论的分类

按照行动顺序分

- 静态博弈
- 动态博弈
  - 动态博弈又分序贯博弈和重复博弈

博弈论的分类

从拥有信息角度

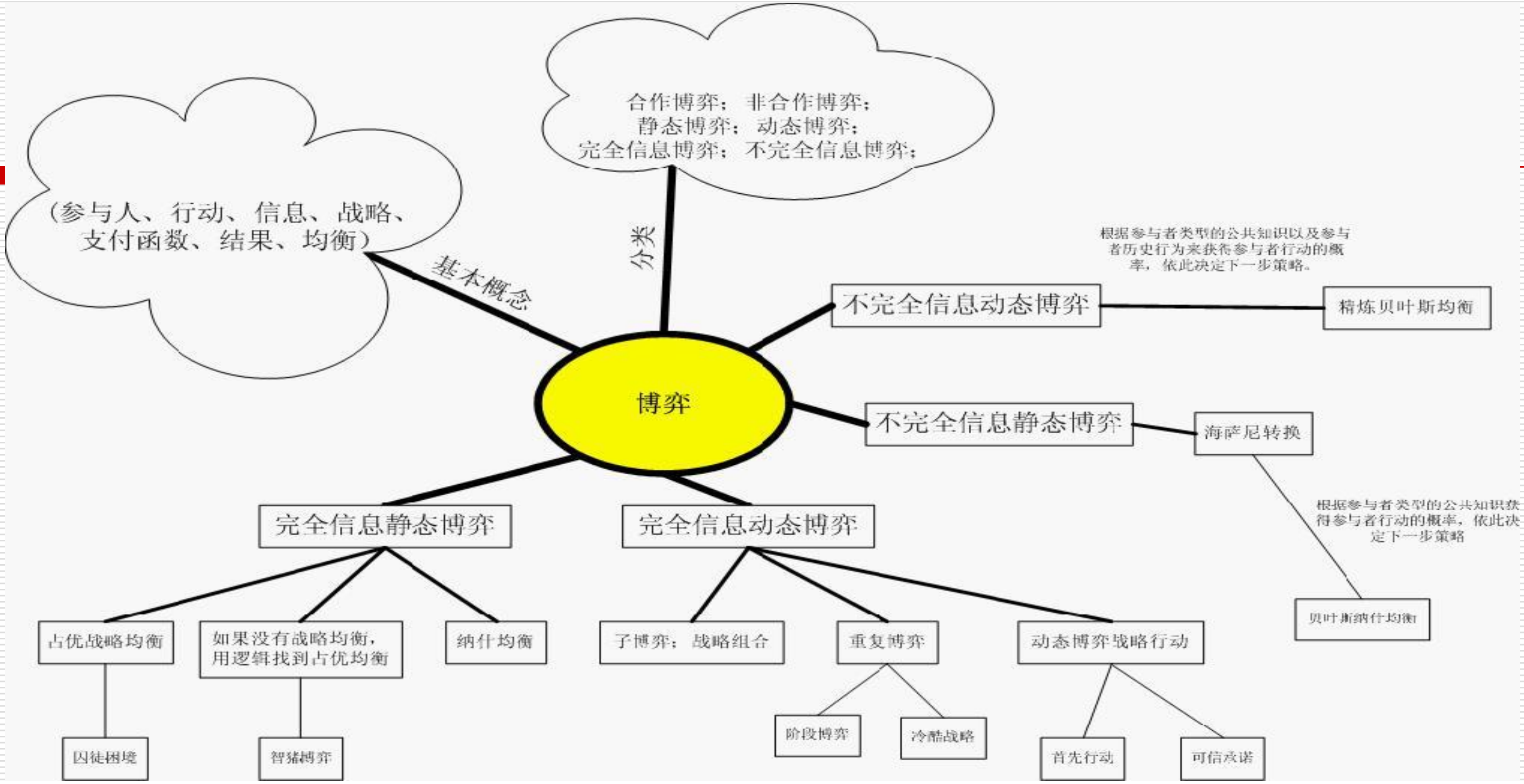
- 完全信息博弈
- 不完全信息博弈

博弈论的分类

- 按信息与时序分
- 完全信息静态博弈-**Nash equilibrum**
- 完全信息动态博弈—**Subgame perfect Nash equi**
- 不完全信息静态博弈-**Bayesian Nash equi**
- 不完全信息动态博弈-**Perfect Bayesian Nash equi**

非合作博弈

	静态	动态
完全信息	完全信息静态博弈 纳什均衡 Nash equilibrium 纳什（1950，1951）	完全信息动态博弈 子博弈精炼纳什均衡 **subgame perfect Nash equilibrium** 泽尔腾（1965）
不完全信息	不完全信息静态博弈 贝叶斯纳什均衡 **Bayesian Nash equilibrium** 海萨尼 （1967－1968）	不完全信息动态博弈 精炼贝叶斯纳什均衡 **perfect Bayesian Nash equilibrium** 泽尔腾（1975） Kreps和Wilson（1982） Fudenberg和Tirole （1991）



合作博弈；非合作博弈；
静态博弈；动态博弈；
完全信息博弈；不完全信息博弈；
（参与人、行动、信息、战略、
支付函数、结果、均衡）
基本概念
分类
博弈
根据参与者类型的公共知识以及参与
者历史行为来获得参与者行动的概
率，依此决定下一步策略。
不完全信息动态博弈
精炼贝叶斯均衡
不完全信息静态博弈
海萨尼转换
根据参与者类型的公共知识获
得参与者行动的概率，依此决
定下一步策略
贝叶斯纳什均衡
完全信息静态博弈
完全信息动态博弈
占优战略均衡
如果没有战略均衡，
用逻辑找到占优均衡
纳什均衡
子博弈：战略组合
重复博弈
动态博弈战略行动
囚徒困境
智猪博弈
阶段博弈
冷酷战略
首先行动
可信承诺

目录

- 博弈论的基本概念
- 博弈论的分类
- 博弈论的表示方法
- 纳什均衡
- 二人零和博弈

博弈论的表示方法

- 战略式
- 扩展式
- 联盟式（特征函数式）

战略式博弈/策略式博弈

- 战略博弈（strategic game）：规范式博弈（又叫标准式博弈）
- 每个参与人选择且仅选择一次行动计划，并且所有参与人的决策是同时做出（在选择行动计划时每个参与人并不知道其他参与人的行动计划）
- 战略式博弈从本质上来讲是一种静态模型
- 这种建模方式对于描述完全信息的静态博弈问题，如“囚徒困境”、“性别战”等非常适用，也很直观。虽然战略式博弈也可用来对动态博弈问题进行建模，但从所得到的模型中，我们却无法直观地看到博弈问题所具有的动态特性
- 战略式博弈的描述方式是矩阵

战略式博弈/策略式博弈

- 规范式（**normal form**）也称策略式（**strategic form**）表示，并记为 $G=[N,\{S_i\},\{P_i\}]$
- 若局中人的策略允许使用混合策略 X_i，则混合策略集记为 $X_i=\{x_i\}$ 这时，博弈也称为规范式表示，并记为 $G=[N,\{X_i\},\{P_i\}]$

战略博弈三要素

- 局中人集合N，$|N| = n$
- 每个局中人i的行动集A_i
- 每个局中人i在集合A=X A_j 上的偏好关系$\succcurlyeq i$
- 战略博弈中局中人i的偏好关系，可以用支付函数（payoff function）$u_i: A \to \mathbb{R}$ 表示，满足
- $a \succcurlyeq i\ b \Leftrightarrow\ u_i(a) \geq u_i(b)$
- <N，(A_i)，(u_i)>

囚徒困境

警察拘捕了两个犯罪嫌疑人进行隔离审讯，检察官认为他们犯有某项罪行，但又缺乏足够的证据指证他们的罪行。如果两个嫌疑犯中至少有一个供认犯罪，就能确定罪名成立。为了获得所需的口供，警察将两人分别关押以防止他们串供，并分别向两个嫌疑人指出两条路：承认犯罪和不承认。如果两人都承认，则两人都将被判刑，每人各判8个月。如果两个人都不承认，由于检察官没有足够的证据，他们将作为犯小案件处理，分别判刑1个月。如果其中一个人承认，而另一个人不承认，则承认罪行者，将得到立功宽大处理，不判刑而释放，而不承认者将受到严惩，判刑10个月。此时，犯罪嫌疑人将如何采用自己的行动呢？

囚徒困境

- 囚徒困境的支付矩阵

		嫌疑犯 B	
		承认	不承认
嫌疑犯A	承认	(-8，-8)	(0，-10)
	不承认	(-10，0)	(-1，-1)

二人博弈的矩阵表示

- 当行动集为有限时，用行表示一个局中人的行动，另一个局中人的行动则用列表示
- 由行r和列c形成的方框中的两个数，为行局中人选择r和列局中人选择c时两人的支付

$$
\begin{array}{ccc}
 & & P_2 \\
 & & \begin{array}{cc} \text{L} & \text{R} \end{array} \\
P_1 & \begin{array}{c} \text{T} \\ \text{B} \end{array} & \begin{array}{|c|c|} \hline w_1,\ w_2 & x_1,\ x_2 \\ \hline y_1,\ y_2 & z_1,\ z_2 \\ \hline \end{array}
\end{array}
$$

古诺模型

- 现有两个寡头垄断厂商：厂商1和厂商2。他们生产同一种产品，其生产的边际成本分别为 c_1 和c_2。该产品的市场逆需求函数为 $p = a - (q_1 + q_2)$，其中p是该市场出清价格，q_1 和q_2分别是两个厂商对产品的生产数量。a是一个正常数，即市场对该产品的市场最高价。市场需求情况和各厂商可能的收益对两个厂商都是共同知识。厂商1和厂商2在无协商的情况下，独立作出生产数量的决策。问他们各自作出什么样的决策，以使自己利润最大？

古诺模型的战略式表示

- N={厂商1，厂商2}
- 行动集$A_1=[0,\overline{q_1}]$，$A_2=[0,\overline{q_2}]$
- 支付函数为

$$P_1(q_1,q_2)=(p-c_1)q_1=(a-q_1-q_2-c_1)q_1$$

$$P_2(q_1,q_2)=(p-c_2)q_2=(a-q_1-q_2-c_2)q_2$$

扩展博弈

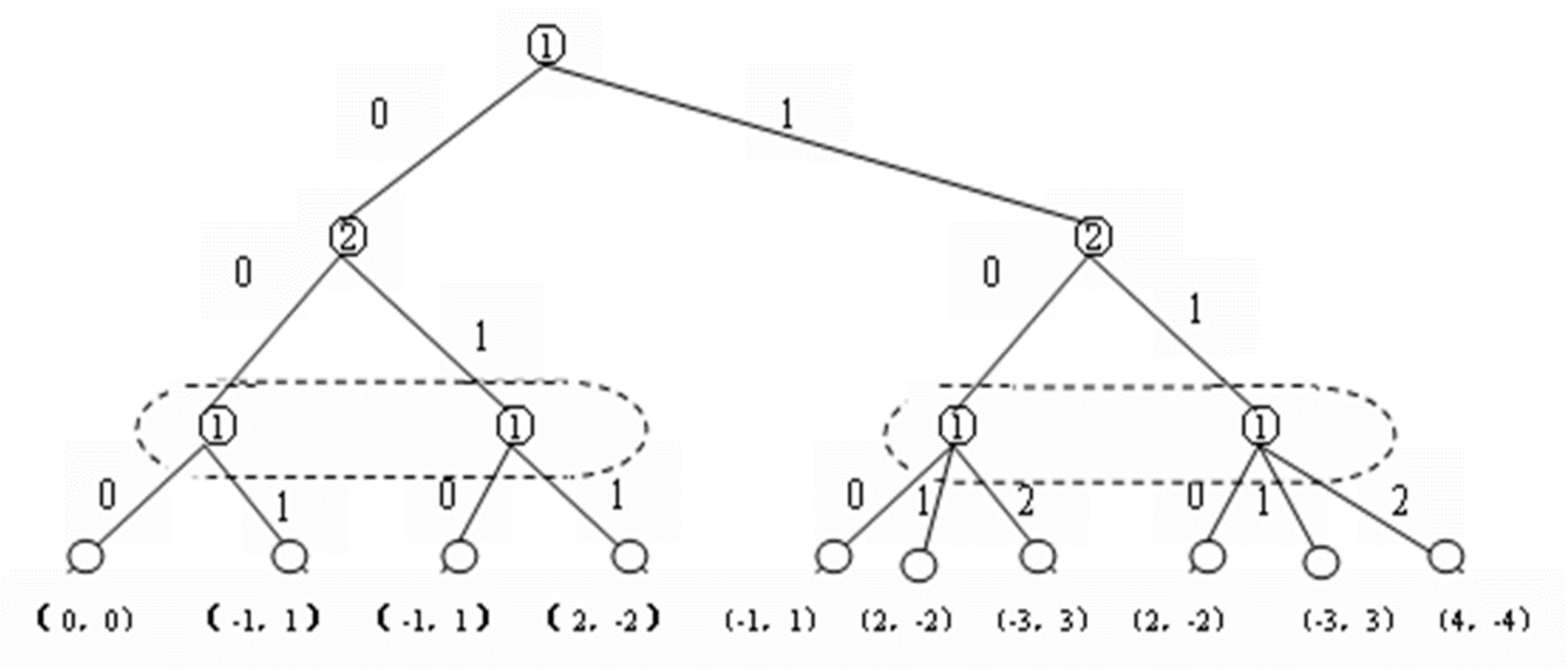
- 扩展博弈（extension game）：具体描述局中人在战略情形中所遇到的决策问题的序列结构
- 强调事情的可能顺序，每个参与人不仅可以在博弈开始时考虑自己的行动计划，并且在他不得不做决策的任何时候，也可以考虑他的行动计划
- 扩展式博弈从本质上来讲是一种动态模型

二人取数游戏

- 有一个二人参加取数的游戏，游戏分三步进行。
- 第一步，局中人1在{0，1}中取一个数记为 r_1 ，并告知局中人2。
- 第二步，局中人2也在{0，1}中取一个数记为 r_2 ，但不告知局中人1。
- 第三步，又轮到局中人1取数。若局中人1在第一步中取0，则可以在{0，1}中取一个数，若局中人1在第一步中取1,则可以在{0，1，2}中取一个数,记第三步局中人1取得数为 r_3 。三步后取数结束。
- 现记 $S= r_1 + r_2 + r_3$ 。若 S 为偶数，则局中人1赢 S 记分点，局中人2输 S 记分点。若 S 为奇数，则局中人1输 S 记分点，局中人2赢 S 记分点。
- 在这个游戏中，两个局中人各自采取什么行动？若你参加，你愿意当局中人1还是局中人2？

二人取数游戏的博弈树

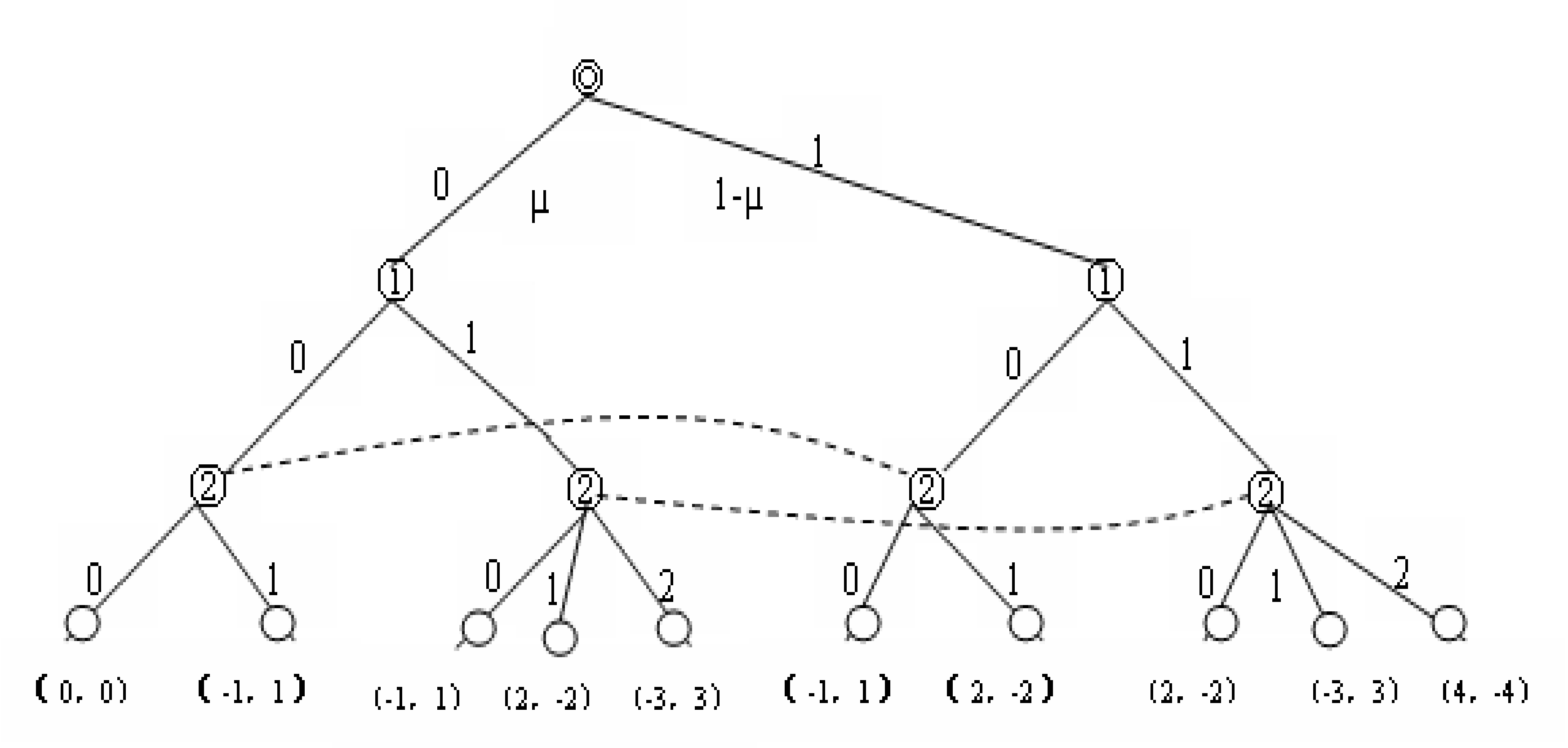
树形图表示



二人取数游戏2

- 将上述二人取数游戏作一个改变，游戏仍然分三步进行。
- 第一步，有一个局外人称为“自然”在{0，1}中取一个数记为 r_1 ，并告知局中人1，但不告知局中人2。
- 第二步，局中人1在{0，1}中取一个数记为 r_2 ，并告知局中人2。
- 第三步，局中人2取数，若看到局中人1取 $r_2=0$,则在{0，1}中取1个数，记该数为 r_3 ；若看到局中人1取$r_2=1$, 在{0，1，2}中取1个数，记该数为 r_3 。三步后取数结束。
- 记 $S=r_1+r_2+r_3$ 。若S 为偶数，则局中人1赢 S 记分点，局中人2 输 S 记分点。若 S 为奇数，则局中人1输 S 记分点，局中人2赢S 记分点。在这个游戏中，两个局中人各自采取什么行动？若你参加，你愿意当局中人1还是局中人2 。

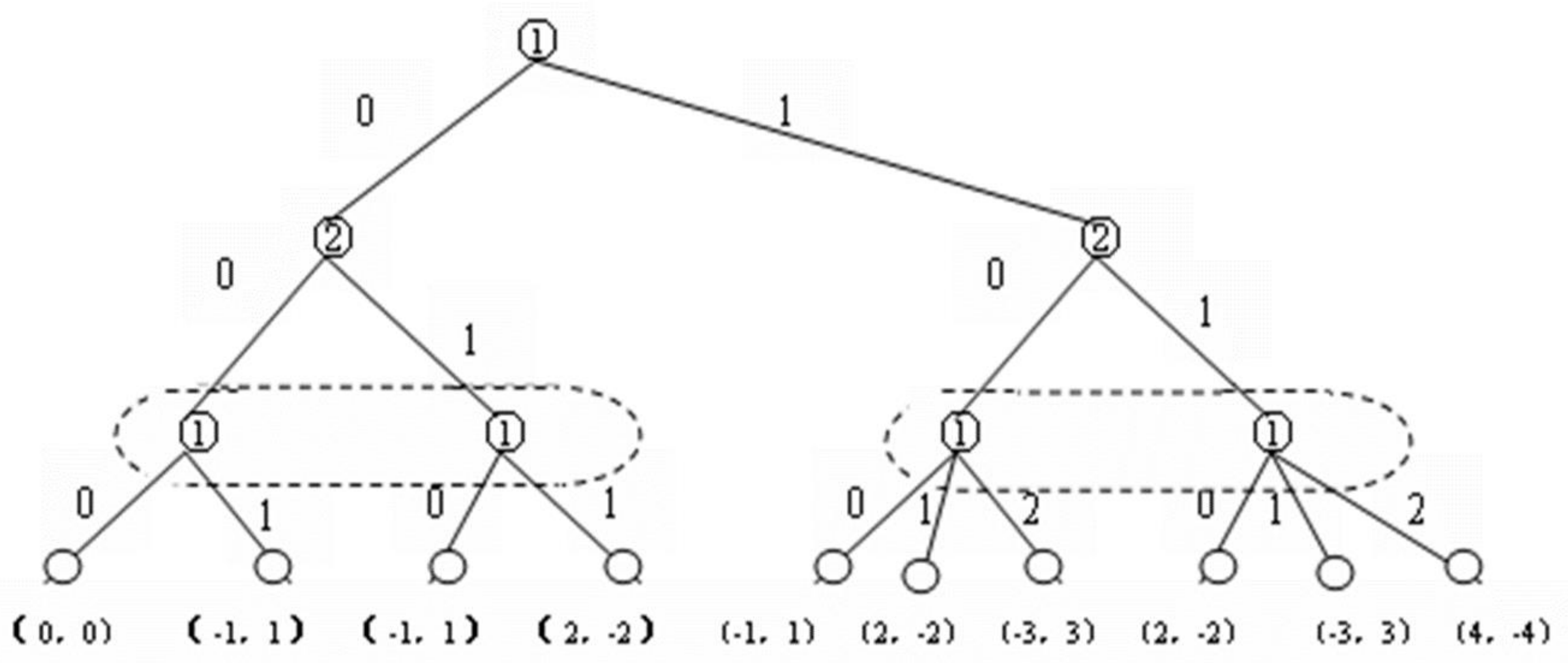
二人取数游戏2的博弈树



扩展式表示博弈的六要素

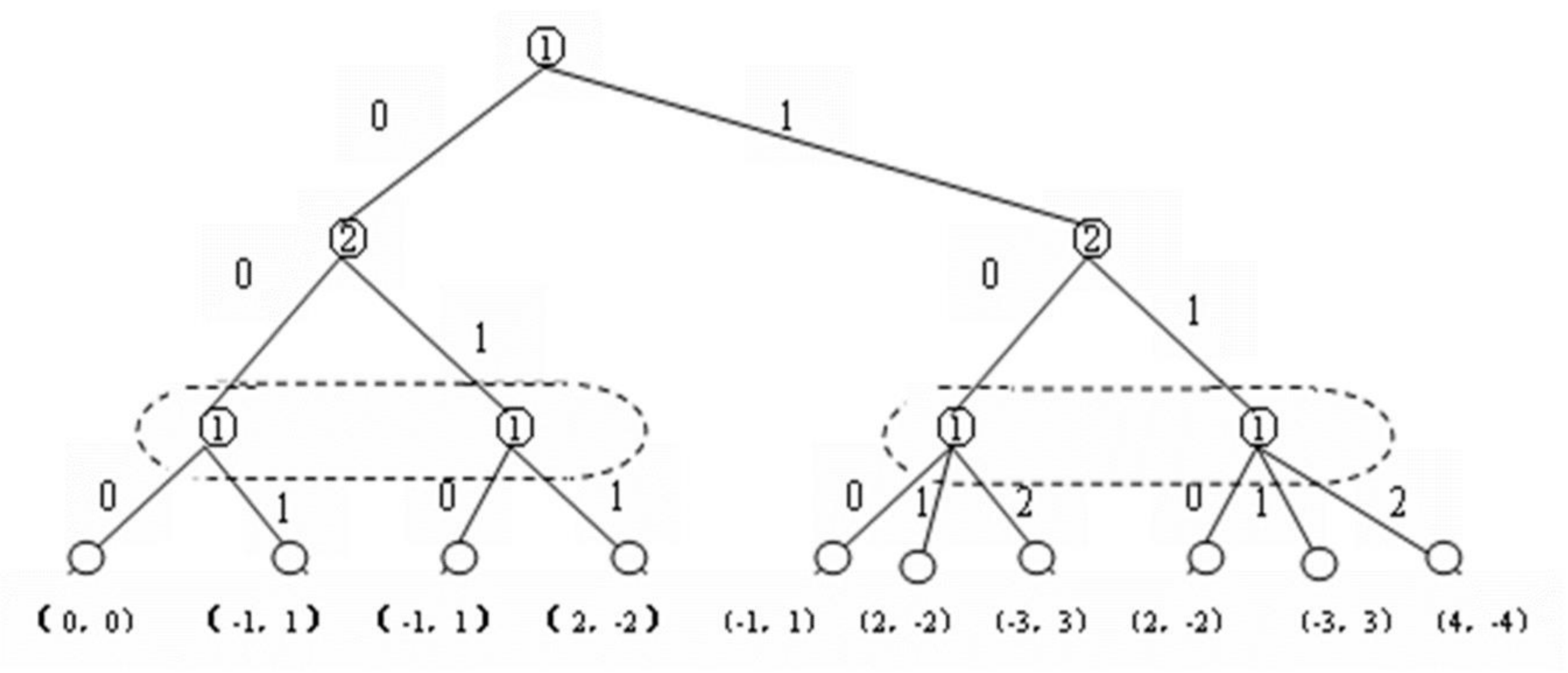
- 局中人集合N
- 局中人的行动顺序/博弈顺序
- 局中人的行动空间（行动集）
- 局中人的信息集
- 局中人的损益函数支付函数
- “自然”的概率分布

战略和行动



- 局中人的战略和行动是两个不同的概念
- 局中人的战略式其在整个博弈全过程中行动计划的描述
- 在扩展博弈中，每个结点下面的边代表行动。该结点行动的局中人有多少种可行行动，该结点下面就由多少条边
- 对无限博弈，不能用扩展博弈表示

局中人的信息集



- 局中人的信息集

表示在每次行动时，局中人知道什么

- 当局中人行动时，他对自己应在的结点位置不清楚，则把这些结点集归为一个信息集
- 当局中人在自己行动中明确知道自己的位置，这是信息集由一个单结点组成，称为单结点的信息集
- 在扩展博弈中，信息集由一个虚线框围住所含同一信念的结点来表示，或者用虚线将同一信息集中的结点连接起来

自然

- “自然”是扩展博弈中引入的一个虚拟局中人
- “自然”一般记为“0”
- “自然”可能表现出不同的状态，这些状态出现的可能情况即是“自然”选择行动的概率分布
- “自然”选择的概率分布可以是外生的，也可以是内生的，视具体情况而定

联盟博弈（coalitional game）

- 集中讨论哪个局中人集合而不是哪个单个局中人能做什么
- 不考虑局中人集合内部作用的具体细节

联盟博弈的两要素

- **局中人集N**
- **特征函数**

特征函数的含义是联盟S的全体成员所能创造的最大价值

- 局中人集合N的任意一个子集S，即$S \subseteq N$，称为该博弈中的一个联盟,若 $S = N$，称N为一个大联盟。特征函数指对任一个联盟S 对应一个实数：$v(S)$，并要求：

$$v(\phi) = 0$$

若联盟是空集，则不能创造任何价值

$$\sum_{i=1}^{n} v(\{i\}) \le v(N)$$

大联盟所创造的价值不能低于每个局中人单干创造的价值之和

投票博弈

- 现有一个董事会由4名董事组成：董事长、副董事长、董事、董事（下面简称为局中人1，2，3，4)
- 在董事会进行议题表决时，董事长有3票，副董事长有2票，两名董事各有1票，4个人分别独立投票；并且投票规则规定，赞成票超过半数，表决的议题通过。问4个人的权势各有多大？

投票博弈的联盟式表示

- 若我们规定，议题被投票通过记为实数1，未通过记为实数0，第i个局中人所拥有的票数为q_i，则特征函数为：

$$V(S)=\begin{cases}0 & \sum_{i\in S} q_i < 4\\ 1 & \sum_{i\in S} q_i \ge 4\end{cases}$$

不同的联盟S具有不同的特征函数值。这里

$$v(\phi)=v(\{1\})=v(\{2\})=v(\{3\})=v(\{4\})=0$$

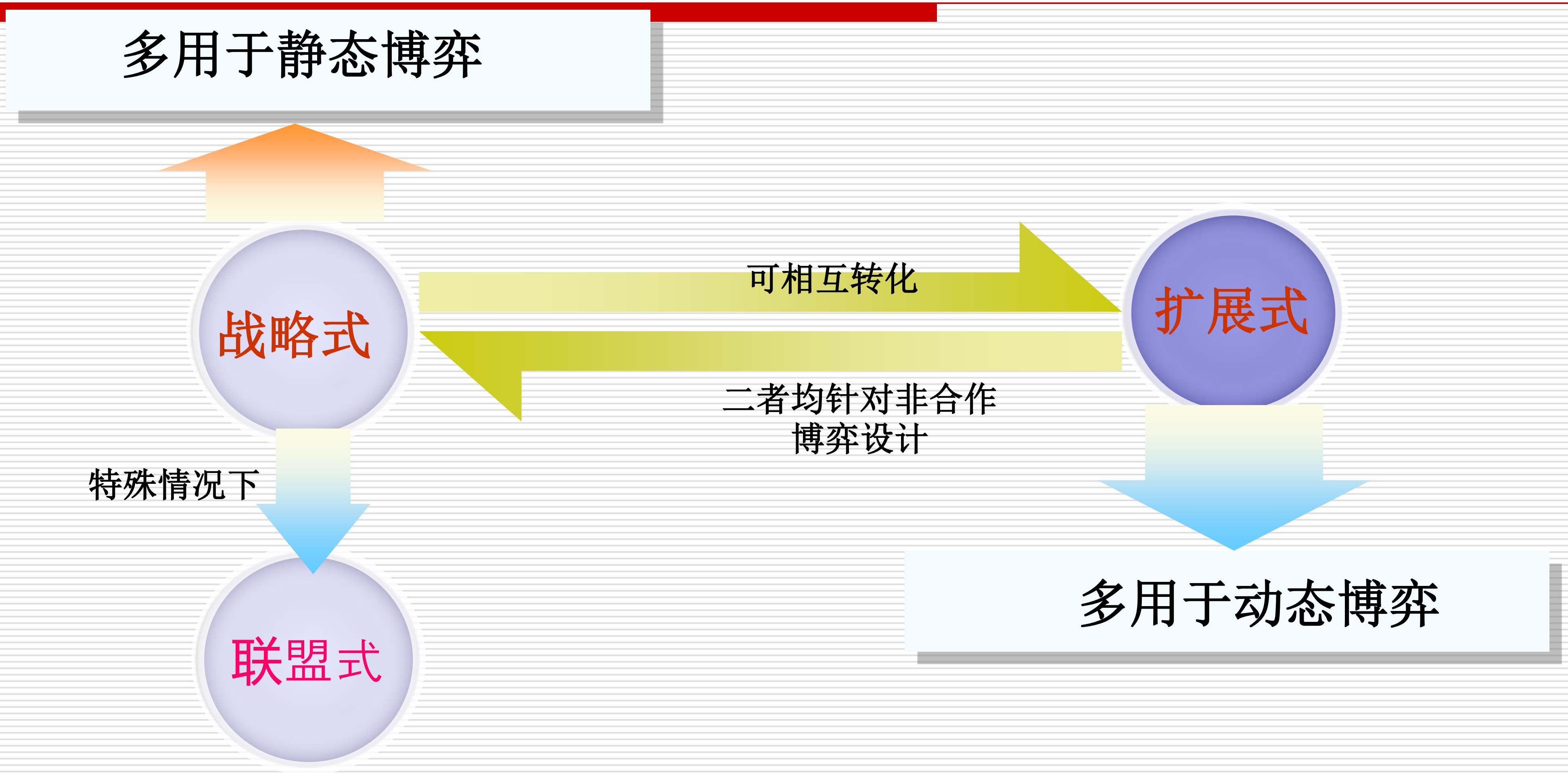
$$v(\{2,3\})=v(\{2,4\})=v(\{3,4\})=0 \qquad v(\{1,2\})=v(\{1,3\})=v(\{1,4\})=1$$

$$v(\{1,2,3\})=v(\{1,2,4\})=v(\{1,3,4\})=v(\{2,3,4\})=v(\{1,2,3,4\})=1$$

联盟博弈

- 一个n人参加的合作博弈在分析并给出特征函数$v(S)$后，记该合作博弈为$G = [N, v]$
- 在合作博弈中，外生的合作机构已经形成，要研究的问题是对合作后总收益如何进行分配，或分析每个局中人在合作结构中的权势大小，这两个问题是等价的
- 此处隐含了一个假定：联盟S的所得$v(S)$可以用任意方式分配给S中的成员，这称为具有旁支付(with side-payments)的合作博弈，也称为具有转移效用(Transformable utility,TU)的合作博弈，本书只考虑这种假定之下的联盟博弈

三种表示式的关系

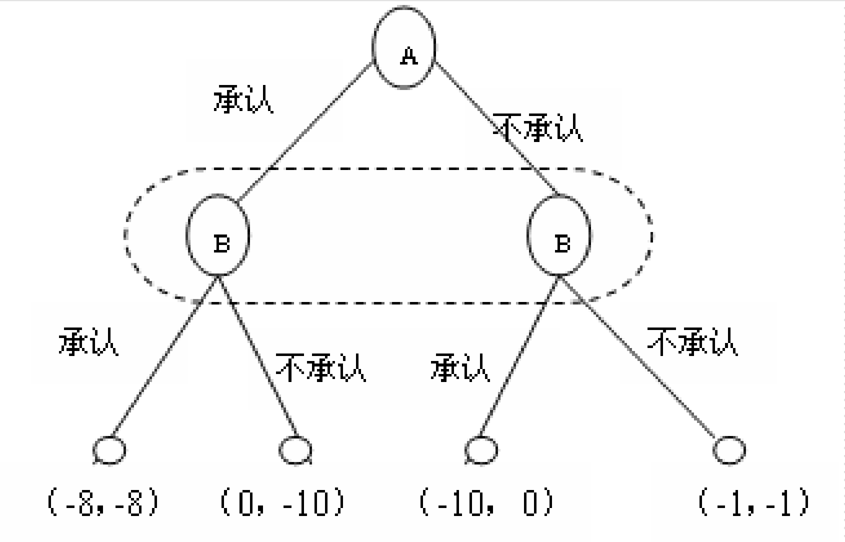


囚徒困境

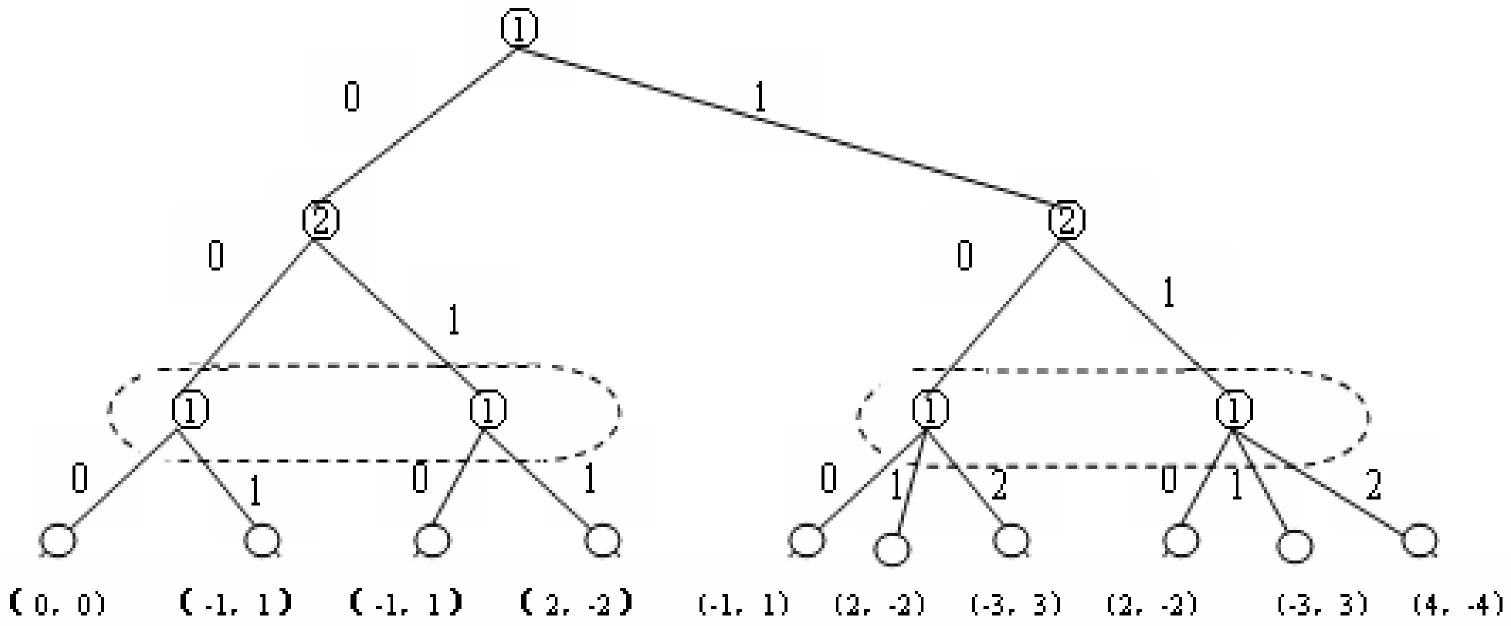
囚徒困境的战略式描述

		嫌疑犯 B	
		承认	不承认
嫌疑犯A	承认	(-8，-8)	(0，-10)
	不承认	(-10，0)	(-1，-1)

囚徒困境的扩展式描述

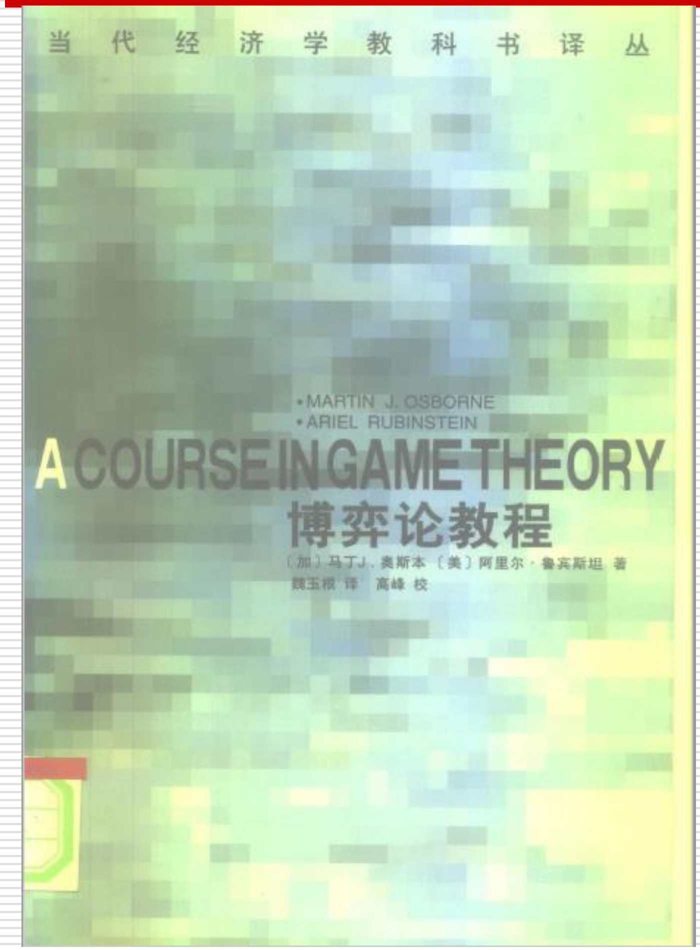


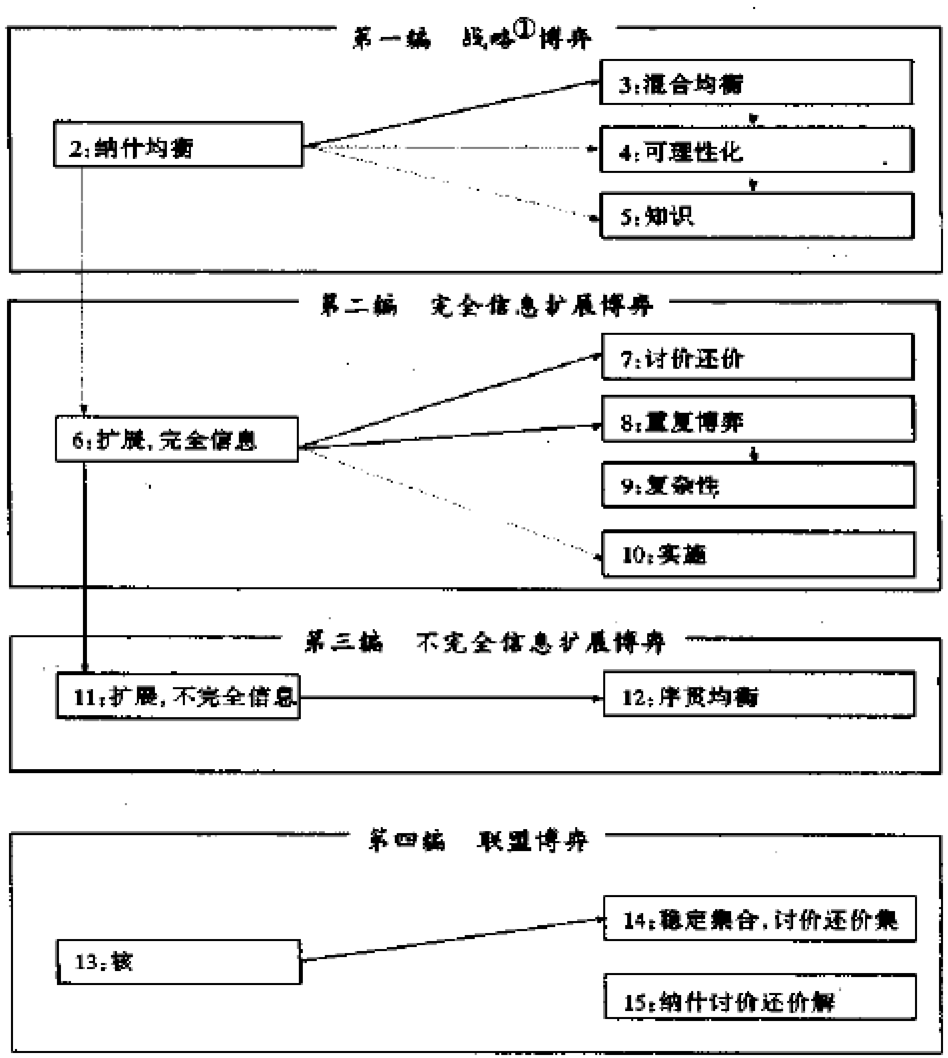
取数博弈



		局中人 2			
		永远取 0	取与局中人 1 相同	取与局中人 1 相同	永远取 1
局中人1	(0，0)	(0，0)	(0，0)	(-1，1)	(-1，1)
	(0，1)	(-1，1)	(-1，1)	(2，-2)	(2，-2)
	(1，0)	(-1，1)	(2，-2)	(-1，1)	(2，-2)
	(1，1)	(2，-2)	(-3，3)	(2，-2)	(-3，3)
	(1，2)	(-3，3)	(4，-4)	(-3，3)	(4，-4)

推荐教材





战略式博弈

扩展式博弈

联盟式博弈

博弈论的特点

- 博弈论是一个分析工具包，它被设计用来帮助我们理解所观察到的决策主体相互作用时的现象。这种理论隐含的基本假设是：决策主体追求确定的外部目标（他们是理性的）并且考虑他们自身的知识或其他决策主体行为的期望（他们的推理具有战略性）
- 博弈论模型是对各种现实生活状况的高度抽象概括。这种抽象性使得它们可被用来研究范围更广的现象
- 在博弈论中，纯理论与应用理论之间的界限是模糊的，某些纯理论方面的发展是由应用方面的问题引起的。但作者相信这个界限仍然存在。本书意图在“纯”理论的领域
- “集中精力于理论的概念方面并且提供一个主要思想的样本”

目录

- 博弈论的基本概念
- 博弈论的分类
- 博弈论的表示方法
- 纳什均衡
- 二人零和博弈

术语和标记

- 递增函数
- 非递减函数
- 凹函数
- 最大值集合：给定一个函数$f: X \to \mathbb{R}$，用$argmax_{x \in X} f(x)$表示f的最大值集合
- $x_{-i} = (x_j)_{j \in N \setminus \{i\}}$

凸集

- 凸集

设集合 $D \subset R^n$，若对于任意两点 $x, y \in D$，及实数 $\alpha\,(0 \le \alpha \le 1)$，都有：

$$\alpha x + (1-\alpha) y \in D,$$

则称集合 D 为凸集.

常见的凸集：单点集 $\{x\}$，空集 $\emptyset$，整个欧氏空间 R^n

拟凹函数

- 拟凹函数(quasi-concave function)

设 u 是凸集 $X \in R^n$ 上的函数，对任意 $x_1, x_2 \in X$

及任意 $\lambda \in [0,1]$ ，若有：

$$u(\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2) \geq \min(u(x_1), u(x_2))$$

则 u 为 X 上的拟凹函数。

- 若不等号为严格不等号，则称为严格拟凹函数
- 拟凹函数有唯一的最大值，严格拟凹函数有唯一的极大值

偏序关系

- 集合A上的二元关系称为偏序关系
  - 完备性
  - 自反性
  - 传递性
- 偏好关系的连续性

  集合A中的任何序列$(a^k)_k$和$(b^k)_k$，对所有的k有$a^k \succcurlyeq b^k$，若$(a^k)_k$和$(b^k)_k$分别收敛于a和b，仍有$a \succcurlyeq b$

纳什均衡的定义

- 定义1：战略博弈$<N,(A_i),(\succcurlyeq i)>$的纳什均衡是一个行动组合$a^* \in A$，满足
  对每个参与人$i \in N$，$(a^*_{-i}, a^*_i) \succcurlyeq (a^*_{-i}, a_i)$ 对所有的$a_i \in A_i$成立

- 定义1′：战略博弈$<N,(A_i),(u_i)>$的纳什均衡是一个行动组合$a^* \in A$，满足
  对每个参与人$i \in N$，$u_i(a^*_{-i}, a^*_i) \geq u_i(a^*_{-i}, a_i)$对所有的$a_i \in A_i$成立

例：囚徒困境

参与人2 参与人1	不坦白	坦白
不坦白	**3，3**	**0，4**
坦白	**4，0**	**1，1**

对参与人1而言，u_1 坦白，坦白）$=1 > u_1$ 不坦白，坦白）$=0$
对参与人2而言，u_2 坦白，坦白）$=1 > u_2$ 坦白，不坦白）$=0$
由纳什均衡的定义即知（坦白，坦白）是一个纳什均衡

例：BoS（性别战）

参与人2 参与人1	Bach	Stravinsky
Bach	2，1	0，0
Stravinsky	0，0	1，2

对参与人1而言，u_1（B，B）=2 > u_1（S，B）=0 对参与人2而言，u_2（B，B）=1 > u_2（B，S）=0 由纳什均衡的定义即知（Bach，Bach）是一个纳什均衡 对参与人1而言，u_1（S，S）=1 > u_1（B，S）=0 对参与人2而言，u_2（S，S）=2 > u_2（S，B）=0 由纳什均衡的定义即知（Stravinsky，Stravinsky）是一个纳什均衡

例：猜谜博弈（matching game）

参与人2 参与人1	头	尾
头	-1，1	1，-1
尾	1，-1	-1，1

四个行动组合都不是纳什均衡，代入定义中验证即可知道

问题：为什么说纳什均衡是一个稳定状态

- 按照定义，给定了其他参与人的最优行动之下，每个参与人如果选择其他行动则带来收益受损，这实际说明每个参与人的行动是其他参与人行动的最优反应。
- 纳什均衡的另一种表述：最优反应函数

最优反应函数

- 对任一$a_{-i} \in A_{-i}$，定义$B_i(a_{-i})$为参与人i在给定a_{-i}下最佳行动集合。那么纳什均衡是一个行动组合$a^* \in A$，满足$a^*_i \in B_i(a_{-i})$，对所有$i \in N$

$$B_i(a_{-i}) = \{a_i \in A_i : (a_{-i}, a_i) \succsim_i (a_{-i}, a_i'), \text{对所有} a_i' \in A_i\}$$

$$= \{a_i \in A_i : u_i(a_{-i}, a_i) \geq u_i(a_{-i}, a_i'), \text{对所有} a_i' \in A_i\}$$

$$= \left\{a_i \in A_i : u_i(a_{-i}, a_i) = \max_{a_i' \in A_i} u_i(a_{-i}, a_i')\right\}$$

最优反应函数

- 当$u_i(\alpha_{-i},\alpha_i)$对于任意$\alpha_{-i}\in A_{-i}$是拟凹函数时，其有唯一最大值，即此时$B_i(\alpha_{-i})=\alpha_i$，这时最优反应函数为$\alpha_i=f(\alpha_{-i})$
- 每个参与人都有一个最优反应函数，组成含有n个未知数n个方程的方程组

$$\begin{cases}\alpha_1=f_1(\alpha_{-1})\\ \alpha_2=f_2(\alpha_{-2})\\ \qquad\cdots\\ \alpha_n=f_n(\alpha_{-n})\end{cases}$$

- 求解方程组则可得到纳什均衡
- 几何意义：n条反应函数曲线找交点

纳什均衡的存在性

- 主要思想是将Kakutani不动点定理（即角谷（日本人）不动 点定理）应用到参与人的最优反应函数上进行证明。
- 角谷不动点定理的四个条件：

1. 欧式空间的一个紧、凸集X到自身的一个函数f
2. $f\ (X)$非空
3. $f\ (X)$为凸的
4. f的图形是闭的

- 角谷不动点定理的结论：存在x^*，使得$f(x^*)= x^*$

纳什均衡存在性定理

- 纳什均衡存在的假设：

1. 行动集合A是欧式空间的一个非空紧凸子集；
2. 偏好关系是连续的，且是拟凹的

- 证 明 中 令 $f = B$为每个参与人的最优反应函数$\mathrm{B}_i(a_{-i})$的笛卡尔积
- 一个博弈具有纳什均衡即存在行动组合$a^* \in \mathrm{A}$，满足$a^*_i \in B_i(\alpha^*_{-i})$对所有的$\mathrm{i} \in \mathrm{N}$
- 写成向量的形式则有$a^* \in B(a^*)$，转化为不动点存在问题

逐条对应角谷不动点定理

2. $f(X)$非空

- 第二条要说明$B(a)$非空，即说明每个$B_i(a_{-i})$非空
- 由于偏好关系是连续的，即回到第一章的定义，两个序列$(a^k)_k$ $(b^k)_k$满足偏好关系，且各自收敛于a和b，则a和b也满足相同的偏好关系
- 注意A是紧集，紧集的定义是从这种集合中取出的任何点的序列都有收敛的子序列。因此从收敛的子序列出发，必然有收敛点满足偏好关系，从而每个$B_i(\alpha_{-i})$非空

逐条对应角谷不动点定理

3. $f(X)$为凸的

- 由假设偏好关系是拟凹的，从而$B_i(\alpha_{-i})$是凸的，这是因为拟凹函数定义在凸集上

4. f的图形是闭的

- 图形是闭的由偏好关系连续保证

纳什均衡的存在性注解

- 这个结论只是保证了满足一定条件的战略博弈至少有一个纳什均衡解，但是并没有说在什么条件下仅有一个纳什均衡
- 当行动集是有限个行动构成的集合时，显然不满足凸集条件，无法用这个定理保证纳什均衡解的存在性，但是并不意味着这样的博弈就没有纳什均衡解。实际上前面的例子中可以看到有限个行动的行动集时当存在纳什均衡时其纳什均衡解是可以用定义很快求出的

目录

- 博弈论的基本概念
- 博弈论的分类
- 博弈论的表示方法
- 纳什均衡
- 二人零和博弈

帕累托最优

- 看第二个例子，性别战BoS，其有两个纳什均衡，则哪一个更好？
- 从集体理性的角度，如果有一个均衡使得所有人的结果都比另一个均衡要好，集体也许会同意不使用后一个均衡，那个较差的均衡是帕累托劣势的，前者称为帕累托占优的
- 这个概念一般出现在具有多个纳什均衡场景的模型中，但是并不是说帕累托占优就是最好的选择
- 还有风险占优的选择

风险占优的例子

价格战

参与人2 参与人1	高价	低价
高价	9，9	0，8
低价	8，0	7，7

- （高价，高价）是一个帕累托占优纳什均衡，但（低价，低价）对商家而言更有吸引力。
- 因为（高价，高价）具有风险，当参与人1选择高价，而参与人2选择低价时，参与人1没有收益
- 反之亦然
- 而参与人1选择低价，其收益至少为7

目录

- 博弈论的基本概念
- 博弈论的分类
- 博弈论的表示方法
- 纳什均衡
- 二人零和博弈

二人零和博弈

- 二人零和博弈，其特征是参与人集合只含有两个人，且他们的偏好是正好相反的，用收益函数表示就是他们的收益正好为互为相反数
- 这个博弈很常见。比如国际象棋，大量掷骰子的博弈
- 生活中也经常会说零和这个概念。此类博弈中参与人之间毫无合作的空间，其有用性还在于它可以分离博弈的特定方面，考查哪些结果来自合作的考虑，哪些来自博弈的其他方面。简单的模型但是可以用于分析以后复杂的模型

二人零和博弈的纳什均衡

- 严格竞争博弈，直观上是不是没有纳什均衡解？即达不到一 种稳定状态？
- 比如前面的猜谜博弈就是一个二人零和博弈，不存在纳什均 衡
- 答案是：二人零和博弈可能存在纳什均衡
- 下面举例说明

二人零和博弈存在纳什均衡的例子

参与人2 参与人1	L	C	R
T	3，-3	-5，5	-2，2
M	1，-1	4，-4	1，-1
B	6，-6	-3，3	-5，5

求解二人零和博弈的纳什均衡

- 最大最小化行动

DEFINITION 21.2 Let $\langle\{1,2\},(A_i),(u_i)\rangle$ be a strictly competitive strategic game. The action $x^* \in A_1$ is a **maxminimizer for player 1** if

$$\min_{y\in A_2} u_1(x^*,y) \geq \min_{y\in A_2} u_1(x,y) \text{ for all } x \in A_1.$$

Similarly, the action $y^* \in A_2$ is a **maxminimizer for player 2** if

$$\min_{x\in A_1} u_2(x,y^*) \geq \min_{x\in A_1} u_2(x,y) \text{ for all } y \in A_2.$$

- 每个参与人都将选择对他自己而言最好的行动，即便是不管他选择什么行动另一个参与人都将选择使他损失尽可能大的行动。即在最坏的基础上选择最好的

求解二人零和博弈的纳什均衡

- 参与人1的目标为 $\max_x \min_y u_1(x, y)$
- 参与人2的目标为 $\max_y \min_x u_2(x, y)$
- 由于$u_1 = -u_2$

$$\max_{y\in A_2} \min_{x\in A_1} u_2(x, y) = -\min_{y\in A_2} \max_{x\in A_1} u_1(x, y).$$

- 参与人2的目标可以看成是最小最大化参与人1的收益

命题22.2的含义

- 1.一个纳什均衡的行动组合中，对参与人1而言是最大最小化行动，对参与人2而言也是最大最小化行动
- 2.若一个行动组合是纳什均衡，则对参与人1的最大最小化行动的收益等于对参与人2的最小最大化行动的收益，且所有的纳什均衡的收益值相同
- 3.若参与人1的最大最小化行动的收益等于对参与人2的最小最大化行动的收益，则相应的行动组合构成一个纳什均衡

回到例子

参与人2 参与人1	L	C	R	min
T	3，-3	-5，5	-2，2	-5
M	1，-1	4，-4	1，-1	1
B	6，-6	-3，3	-5，5	-5
min	-6	-4	-1	1，-1


感谢聆听！