复变 2017.6.18

1　考题

1. 写出高阶导数公式并证明:

   (a) 若 $M(r) = \max_{|z|=r} |f(x)|$，求证 $|f^{(n)}(0)| \le \frac{n!M(r)}{r^n}$

   (b) 若 $f(z)$ 有界，即 $\exists M > 0, \forall Z \in \mathbb{C}, |f(z)| \le M$，则 $f(z)$ 是常数（Liouville 定理）

2. 求 $\max\limits_{|z|\le r} |3z^n + \alpha|$，并给出 z 的取值范围

3. 求 $\sin(x+iy)$ 的实部和虚部，并证明:

   $\forall A, B \in \mathbb{R}$，$\sin(z) = \sin(x+iy) = A + iB$ 有无穷多解

4. 求 $I = \oint\limits_{|z|=r>1} \frac{e^{\frac{1}{z}}}{1+z^n} \mathrm{d}z$，其中 $n \in \mathbb{N}$

5. 求 $I_{a,b} = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{a+b\cos\theta}$，其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a > |b|$

   并求 $I = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{A^2\cos^2\theta + B^2\sin^2\theta}$, 其中 $A, B \in \mathbb{R}$ 且 $A, B > 0$

6. 求 $I_n = \int_0^{+\infty} \frac{x^3 \sin kx \mathrm{d}x}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)}$，其中 $a, b \in \mathbb{R}$ 且 $a, b, k > 0$

7. 求图形 $|z - A| > A$ 与 $|z - B| < B$ 之间的部分到单位圆盘 $\omega < 1$ 的一个映射,

   其中 $0 < A < B$

8. 求半径为 3，角度为 $\theta = \frac{\pi}{8}$ 的扇形到单位圆盘 $\omega < 1$ 的一个映射

9. 求单位圆盘 $|z| < 1$ 到单位圆盘 $|\omega| < 1$ 的分式线性映射的一般表达式,

   并证明不变式 $\frac{|\mathrm{d}\omega|}{1-|\omega|^2} = \frac{|\mathrm{d}z|}{1-|z|^2}$,

   并指出该映射将 z 的圆外，上，内分别映射到 ω 的圆外，上，内

10. 二选一

    (a) 求 $I_{r,n} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{r^{2n}+x^{2n}}$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 且 $r > 0$

    (b) 求 $I_{r,n} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(r^2+x^2)^n}$，其中 $n \in \mathbb{N}$ 且 $r > 0$