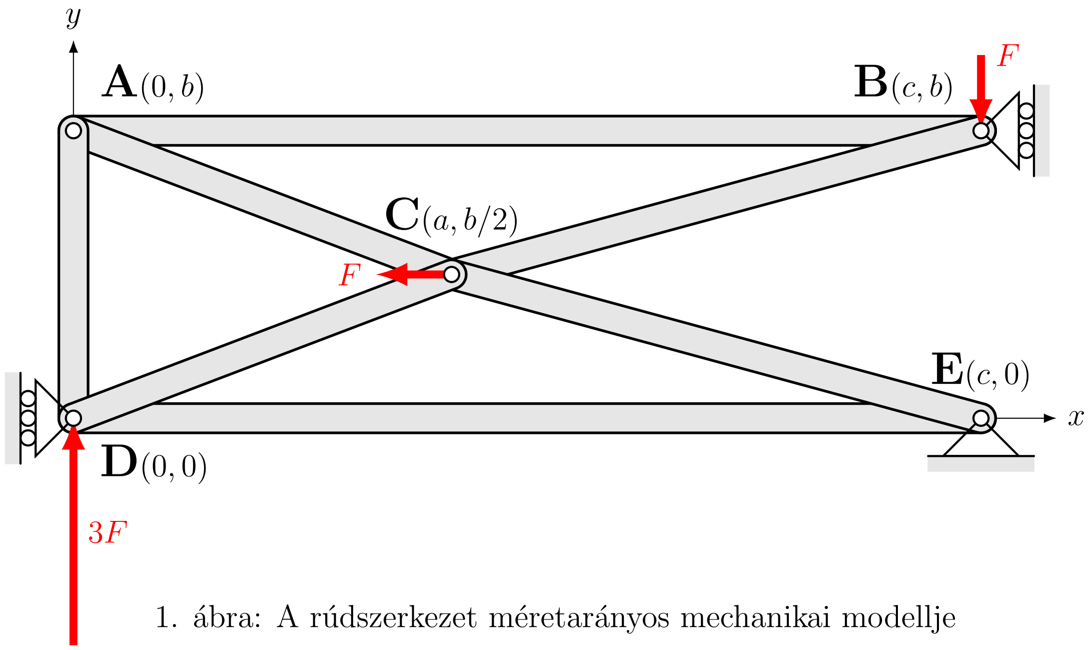
Általános helyzetű síkbeli csuklós rúdszerkezet végeselemes modellje

Csábi-Kis Henrik

2024. március 25.

Adatok



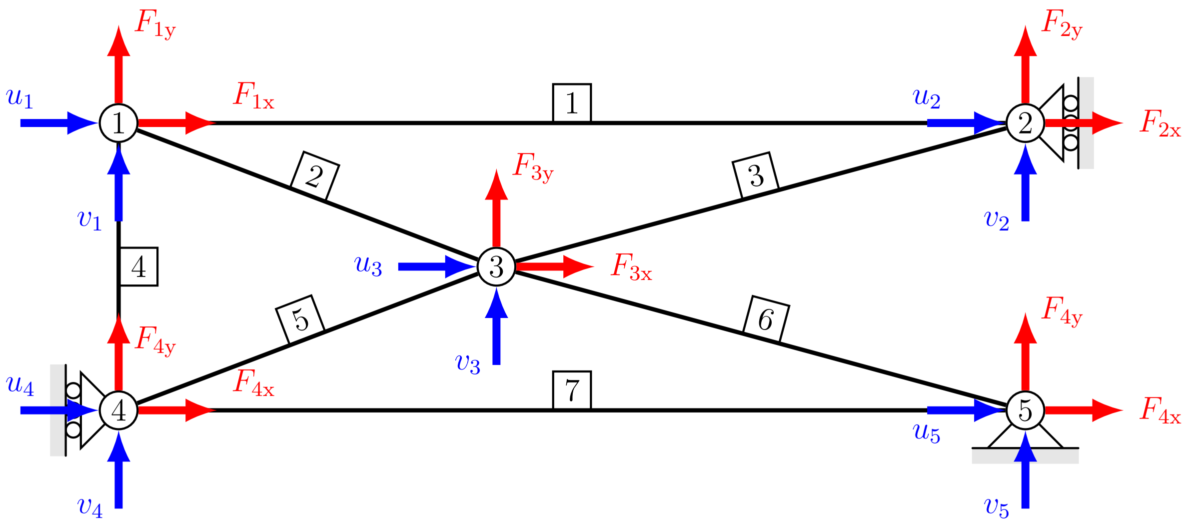
1. ábra: A rúdszerkezet méretarányos mechanikai modellje

$a = 2.5$ m
$b = 1.9$ m
$c = 6$ m
$d = 0.04$ m

$F = 130000$ N
$E = 170 \cdot 10^9$ Pa
$\nu = 0.3$ [-]

$$A = \frac{\left((1.3d)^2 - d^2\right)\pi}{4} = 0.0008671 \text{ m}^2$$

Végeselem-modell



2. ábra: A rúdszerkezet végeselemes modellje 2 csomóponotos, egyenes rúdelemekkel

1. táblázat: A csomópontok koordinátái

Csomópont	**x**	**y**
1	0	b
2	c	b
3	a	$b/2$
4	0	0
5	c	0

2. táblázat: Elem-csomópont hozzárendelések

Elem	**Lokális 1. csomópont**	**Lokális 2. csomópont**
1	1	2
2	1	3
3	3	2
4	1	4
5	4	3
6	3	5
7	4	5

Elemi mennyiségek

Az egyes elemekhez tartozó mennyiségeket MatLab-ban számítottam ki, az alábbi összefüggések alkalmazásával:

Rudak hossza:

$$L^{(i)} = \sqrt{\left(x_2^{(i)} - x_1^{(i)}\right)^2 + \left(y_2^{(i)} - y_1^{(i)}\right)^2} \tag{1}$$

Rudak szögei:

$$\cos\alpha^{(i)} = \frac{x_2^{(i)} - x_1^{(i)}}{L^{(i)}} \tag{2}$$

$$\sin\alpha^{(i)} = \frac{y_2^{(i)} - y_1^{(i)}}{L^{(i)}} \tag{3}$$

Elemi merevségi mátrixok:

$$\mathbf{K}^{(i)} = \frac{A^{(i)}E^{(i)}}{L^{(i)}} \begin{bmatrix} \cos^2\alpha^{(i)} & \cos\alpha^{(i)}\sin\alpha^{(i)} & -\cos^2\alpha^{(i)} & -\cos\alpha^{(i)}\sin\alpha^{(i)} \\ \cos\alpha^{(i)}\sin\alpha^{(i)} & \sin^2\alpha^{(i)} & -\cos\alpha^{(i)}\sin\alpha^{(i)} & -sin^2\alpha^{(i)} \\ -\cos^2\alpha^{(i)} & -\cos\alpha^{(i)}\sin\alpha^{(i)} & \cos^2\alpha^{(i)} & \cos\alpha^{(i)}\sin\alpha^{(i)} \\ -\cos\alpha^{(i)}\sin\alpha^{(i)} & -sin^2\alpha^{(i)} & \cos\alpha^{(i)}\sin\alpha^{(i)} & sin^2\alpha^{(i)} \end{bmatrix} \tag{4}$$

Globális mennyiségek

A globális merevségi mátrix 2x2-es almátrixai az 1-5-ig számozott csomópontok közti merevséget írják le. Ugyanígy az elemi merevségi mátrixok az adott elemhez tartozó 2 csomópont közti merevséget írják le, 2x2-es almátrixaikat az ennek megfelelő sorokba és oszlopokba rendezve állítható össze a globális merevségi mátrix:

$$\mathbf{K}\left[\frac{\mathrm{N}}{\mathrm{m}}\right] = \begin{bmatrix} 7.273e7 & -1.83e7 & -2.457e7 & 0 & -4.816e7 & 1.83e7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.83e7 & 8.454e7 & 0 & 0 & 1.83e7 & -6.955e6 & 0 & -7.758e7 & 0 & 0 \\ -2.457e7 & 0 & 6.242e7 & 1.028e7 & -3.786e7 & -1.028e7 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1.028e7 & 2.789e6 & -1.028e7 & -2.789e6 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -4.816e7 & 1.83e7 & -3.786e7 & -1.028e7 & 1.72e8 & 0 & -4.816e7 & -1.83e7 & -3.786e7 & 1.028e7 \\ 1.83e7 & -6.955e6 & -1.028e7 & -2.789e6 & 0 & 1.949e7 & -1.83e7 & -6.955e6 & 1.028e7 & -2.789e6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -4.816e7 & -1.83e7 & 7.273e7 & 1.83e7 & -2.457e7 & 0 \\ 0 & -7.758e7 & 0 & 0 & -1.83e7 & -6.955e6 & 1.83e7 & 8.454e7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -3.786e7 & 1.028e7 & -2.457e7 & 0 & 6.242e7 & -1.028e7 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1.028e7 & -2.789e6 & 0 & 0 & -1.028e7 & 2.789e6 \end{bmatrix} \tag{5}$$

A globális elmozdulásvektor:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ u_2 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ u_4 \\ v_4 \\ u_5 \\ v_5 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{A kényszerek figyelembevételével:}} \mathbf{U} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ 0 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ 0 \\ v_4 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{6}$$

A globális erővektor a reakció- és aktív külső erővektorok összege:

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} F_{1x} \\ F_{1y} \\ F_{2x} \\ F_{2y} \\ F_{3x} \\ F_{3y} \\ F_{4x} \\ F_{4y} \\ F_{5x} \\ F_{5y} \end{bmatrix} = \mathbf{F_r} + \mathbf{F_k} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{2x} \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ F_{4x} \\ 0 \\ F_{5x} \\ F_{5y} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ -F \\ -F \\ 0 \\ 0 \\ 3F \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ F_{2x} \\ -F \\ -F \\ 0 \\ F_{4x} \\ 3F \\ F_{5x} \\ F_{5y} \end{bmatrix} \tag{7}$$

Globális szerkezeti egyenlet megoldása

A globális szerkezeti egyenlet:

$$\mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{F} \tag{8}$$

Mivel az elmozdulás- és erővektorban is vannak ismeretlenek, az egyenlet kondenzációval oldható meg. Eltávolítom azokat a sorokat, amelyekben az elmozdulás 0, így az elmozdulásvektor ismeretlenjei kifejezhetők:

$$\widetilde{\mathbf{U}} = \begin{bmatrix} u_1 \\ v_1 \\ v_2 \\ u_3 \\ v_3 \\ v_4 \end{bmatrix} = \widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \cdot \widetilde{\mathbf{F}} = \widetilde{\mathbf{K}}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -F \\ -F \\ 0 \\ 3F \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} 7.273e7 & -1.83e7 & 0 & -4.816e7 & 1.83e7 & 0 \\ -1.83e7 & 8.454e7 & 0 & 1.83e7 & -6.955e6 & -7.758e7 \\ 0 & 0 & 2.789e6 & -1.028e7 & -2.789e6 & 0 \\ -4.816e7 & 1.83e7 & -1.028e7 & 1.72e8 & 0 & -1.83e7 \\ 1.83e7 & -6.955e6 & -2.789e6 & 0 & 1.949e7 & -6.955e6 \\ 0 & -7.758e7 & 0 & -1.83e7 & -6.955e6 & 8.454e7 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -130000.0 \\ -130000.0 \\ 0 \\ 390000.0 \end{bmatrix} =$$

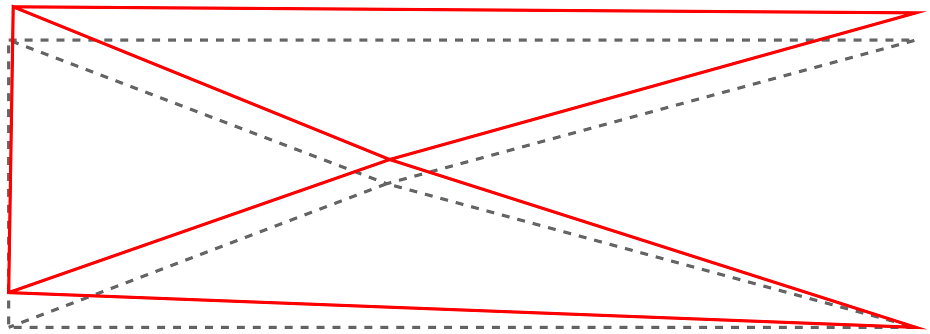
$$\begin{bmatrix} 0.02799 \\ 0.22367 \\ 0.18114 \\ 0.018257 \\ 0.16049 \\ 0.22704 \end{bmatrix} \text{m} = \begin{bmatrix} 27.99 \\ 223.67 \\ 181.14 \\ 18.257 \\ 160.49 \\ 227.04 \end{bmatrix} \text{mm} \tag{9}$$

A kapott értékeket az eredeti vektorba visszaírva:

$$\mathbf{U} = \begin{bmatrix} 27.99 \\ 223.67 \\ 0 \\ 181.14 \\ 18.257 \\ 160.49 \\ 0 \\ 227.04 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \text{mm} \tag{10}$$

Az elmozdulásvektor teljes ismeretében már az erővektor is kiszámítható:

$$\mathbf{F} = \mathbf{K} \cdot \mathbf{U} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1166578.9 \\ -130000.0 \\ -130000.0 \\ 0 \\ 338684.21 \\ 390000.0 \\ 957894.74 \\ -260000.0 \end{bmatrix} \text{N} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -1166.58 \\ -130.0 \\ -130.0 \\ 0 \\ 338.684 \\ 390.0 \\ 957.895 \\ -260.0 \end{bmatrix} \text{kN} \tag{11}$$



3. ábra: A deformált alak

Melléklet

A végeselemes modell implementálásához az alábbi MatLab kódot írtam:

csomopont.m

```
classdef csomopont
   properties
      %koordinatak
      x double
      y double
      %terhelesek
      Fx double
      Fy double
      %kenyszerek
      kenyszerX logical
      kenyszerY logical
   end
   methods
       %konstruktor
       function obj = csomopont(x,y,Fx,Fy,kenyszerX,kenyszerY)
           obj.x=x;
           obj.y=y;
           obj.Fx=Fx;
           obj.Fy=Fy;
           obj.kenyszerX=kenyszerX;
           obj.kenyszerY=kenyszerY;
       end
       %egyenloseg operator a kereseshez
       function r = eq(obj1,obj2)
           r = (obj1.x==obj2.x) & (obj1.y==obj2.y);
       end
   end
end
```

elem.m

```
classdef elem
   properties
      csuklo1 csomopont
      csuklo2 csomopont
      A double
      E double
      L
      ca
      sa
      K
   end
   methods
       %konstruktor
       function obj = elem(csomopont1,csomopont2,A,E)
            obj.csuklo1 = csomopont1;
            obj.csuklo2 = csomopont2;
            obj.A = A;
```

```
            obj.E = E;
            %elemi mennyisegek
            obj.L = sqrt((obj.csuklo2.x-obj.csuklo1.x)^2+(obj.csuklo2.y-obj.csuklo1.y)^2);
            obj.ca = (obj.csuklo2.x-obj.csuklo1.x)/obj.L;
            obj.sa = (obj.csuklo2.y-obj.csuklo1.y)/obj.L;
            obj.K=[obj.ca^2 obj.ca*obj.sa -obj.ca^2 -obj.ca*obj.sa;
                   obj.ca*obj.sa obj.sa^2 -obj.ca*obj.sa -obj.sa^2;
                   -obj.ca^2 -obj.ca*obj.sa obj.ca^2 obj.ca*obj.sa;
                   -obj.ca*obj.sa -obj.sa^2 obj.ca*obj.sa obj.sa^2]*obj.A*obj.E/obj.L;
        end
    end
end
```

VEM-rudszerkezet-szamolas.m

```
clear
close all
clc

%ADATOK:
a=2.5;
b=1.9;
c=6;
d=40/1000;
f=130*1000;
E=170e9;
nu=0.3;

%SZAMOLAS:
%Keresztmetszet
A=((1.3*d)^2-d^2)*pi/4;

%Csomopontok megadasa (koordinatak,terhelesek,kenyszerek)
Csomopontok(1) = csomopont(0,b,0,0,false,false);
Csomopontok(2) = csomopont(c,b,0,-f,true,false);
Csomopontok(3) = csomopont(a,b/2,-f,0,false,false);
Csomopontok(4) = csomopont(0,0,0,3*f,true,false);
Csomopontok(5) = csomopont(c,0,0,0,true,true);

cspontSzam = size(Csomopontok);
cspontSzam = cspontSzam(2);

%Elemek megadasa - elemi mennyisegek szamitasa az osztaly konstruktoraban
Elemek(1) = elem(Csomopontok(1),Csomopontok(2),A,E);
Elemek(2) = elem(Csomopontok(1),Csomopontok(3),A,E);
Elemek(3) = elem(Csomopontok(3),Csomopontok(2),A,E);
Elemek(4) = elem(Csomopontok(1),Csomopontok(4),A,E);
Elemek(5) = elem(Csomopontok(4),Csomopontok(3),A,E);
Elemek(6) = elem(Csomopontok(3),Csomopontok(5),A,E);
Elemek(7) = elem(Csomopontok(4),Csomopontok(5),A,E);

elemSzam = size(Elemek);
elemSzam = elemSzam(2);

%K globalis merevsegi matrix eloallitasa
K = zeros(cspontSzam*2,cspontSzam*2);
for n = 1:elemSzam
    for k = 1:cspontSzam
        if (Csomopontok(k)==Elemek(n).csuklo1)
            row=k;
        end
    end
    for k = 1:cspontSzam
        if (Csomopontok(k)==Elemek(n).csuklo2)
            col=k;
        end
    end
    K([2*row-1 2*row],[2*row-1 2*row]) = K([2*row-1 2*row],[2*row-1 2*row]) + Elemek(n).K([1 2],[1 2]);
    K([2*row-1 2*row],[2*col-1 2*col]) = K([2*row-1 2*row],[2*col-1 2*col]) + Elemek(n).K([1 2],[3 4]);
    K([2*col-1 2*col],[2*row-1 2*row]) = K([2*col-1 2*col],[2*row-1 2*row]) + Elemek(n).K([3 4],[1 2]);
    K([2*col-1 2*col],[2*col-1 2*col]) = K([2*col-1 2*col],[2*col-1 2*col]) + Elemek(n).K([3 4],[3 4]);
end
```

```
%Kondenzalt valtozok eloallitasa
Fhullam=zeros(cspontSzam*2,1);
Khullam=K;
seged=eye(cspontSzam*2);
for k = cspontSzam:-1:1
    Fhullam(2*k-1)=Csomopontok(k).Fx;
    Fhullam(2*k)=Csomopontok(k).Fy;
    if(Csomopontok(k).kenyszerY)
        Khullam(2*k,:)=[];
        Khullam(:,2*k)=[];
        seged(:,2*k)=[];
        Fhullam(2*k,:)=[];
    end
    if(Csomopontok(k).kenyszerX)
        Khullam(2*k-1,:)=[];
        Khullam(:,2*k-1)=[];
        seged(:,2*k-1)=[];
        Fhullam(2*k-1,:)=[];
    end
end

%Szerkezeti egyenlet megoldasa
Uhullam=Khullam^-1*Fhullam;
U=seged*Uhullam;
F=K*U;
```