# Notas de Variable Compleja

$$\zeta(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$$

*Publicación independiente*

*19 de junio de 2025*

# Índice general

# Índice alfabético

# Capítulo 1

# Preliminares

## 1.1 Topología del Plano Complejo

Los conceptos de *Compacidad* y *Conexidad* se asumen como conocidos.

A lo largo del libro se utilizará la siguiente notación de topología de conjuntos: Si $A$ es un subconjunto de un espacio topológico $X$, su cerradura (adherencia) se denota por $\overline{A}$ y su interior por $\mathring{A}$. Su frontera $\overline{A} \setminus \mathring{A}$ se denota por $\partial A$. Si $X$ es además un espacio métrico con distancia $d$, la distancia de un punto $x \in X$ a un subconjunto $A \subset X$ se denota y se define por $d(x, A) = \inf_{a \in A} d(x, a)$.

### 1.1.1 Conjuntos abiertos de C

**Teorema 1.1.** *Cualquier subconjunto $\Omega$ abierto y no vacío de $\mathbb{C}$ se puede escribir como la unión exhaustiva de una sucesión creciente $(K_n)_{n\geq 1}$ de subconjuntos compactos, es decir,*

$$\Omega = \bigcup_{n=1}^{\infty} K_n, \quad \textit{donde } K_n \subset \mathring{K}_{n+1}, \; \forall n \geq 1.$$

**Demostración. La idea de la demostración es construir una sucesión creciente de conjuntos cerrados y acotados, contenidos en $\Omega$, y que eventualmente cubran todo $\Omega$. Para consideraremos dos conjuntos, un compacto que crezca arbitrariamente, y otro**

Para cada $n \geq 1$, definamos

$$K_n = \{z \in \mathbb{C} \,:\, |z| \leq n\} \bigcap \{z \in \mathbb{C} \,:\, d(z, \Omega^c) \geq 1/n\}.$$

Los $K_n$ forman una sucesión creciente de conjuntos cerrados y acotados (pues para cada $n$ se cumple que $\{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n\} \subset \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq n+1\}$ y también $\{z \in \mathbb{C} : d(z, \Omega^c) \geq 1/n\} \subset \{z \in \mathbb{C} : d(z, \Omega^c) \geq 1/(n+1)\}$), luego por el Teorema de Heine-Borel estos son compactos. Además cada $K_n$ está contenido en $\Omega$ (pues $\{z \in \mathbb{C} : d(z, \Omega^c) \geq 1/n\} \subset \Omega$), entonces $\cup_n K_n \subset \Omega$. Por otro lado, para cualquier $z \in \Omega$, tenemos que $d(z, \Omega^c) > 0$, por lo tanto existe $n_0 \geq 1$ tal que $d(z, \Omega^c) \geq 1/n_0$. También, existe un natural $n_1 \geq 1$ tal que $|z| \leq n_1$, luego tomando $N = \max\{n_0, n_1\}$ se sigue que $d(z, \Omega^c) \geq 1/N$ y $|z| \leq N$, esto es, $z \in K_N \subset \cup_n Kn$. Por lo tanto, $\cup_n K_n = \Omega$.

Ahora probemos que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, $\forall n \geq 1$. Para esto observe que para cada $n$, los conjuntos $\Omega_n = \{z \in \mathbb{C} : |z| < n\} \cap \{z \in \mathbb{C} : d(z, \Omega^c) > 1/n\}$, son abiertos y además

$K_{n-1} \subset \Omega_n \subset K_n$. Ya que el interior de un conjunto es el conjunto abierto más grande contenido él, se sigue que para cada $n$, $K_n \subset \Omega \subset \mathring{K}_{n+1}$.

Por último, que la unión es *exhaustiva* significa que no solamente cualquier punto de $\Omega$ pertenece a alguno de los $K_n$, sino más aún que cualquier subconjunto compacto $K \subset \Omega$ también está contenido en alguno de los $K_n$. Consideremos un compacto $K$ tal que $K \subset \Omega$. De que $K_n \subset \mathring{K}_{n+1}$, se sigue que $\Omega = \cup_n \mathring{K}_{n+1}$, luego tenemos una cubierta abierta para $K$. De aquí el lector puede terminar el argumento usando la compacidad de $K$. ■

### 1.1.2 Conjuntos Conexos de C

Dados un $a \in \mathbb{C}$ y $r > 0$, definimos y denotamos al disco abierto centrado en $a$ y de radio $r$ por:

$$D(a,r) = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z-a| < r\}.$$

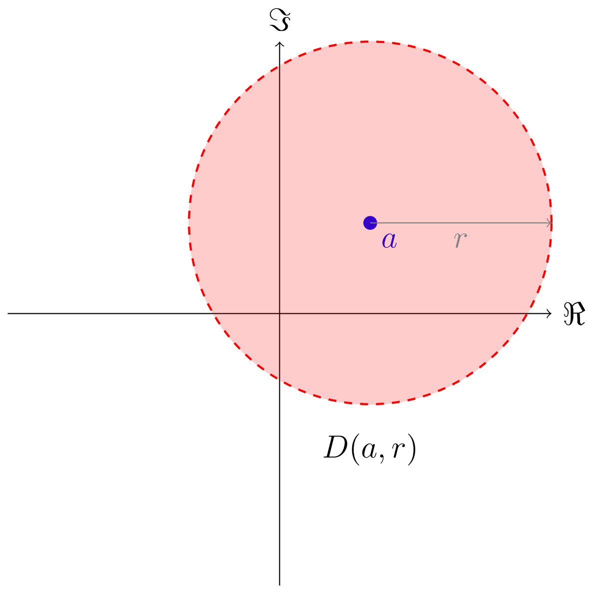


Fig. 1.1: Disco abierto $D(a,r) \subset \mathbb{C}$, centrado en el punto $a$ con radio $r$.

**Teorema 1.2.** *Sea $\Omega$ un subconjunto abierto de $\mathbb{C}$. Entonces las componentes conexas de $\Omega$ son abiertas, y la colección de estas componentes conexas es a lo más numerable.*

**Demostración.** Veamos primero que las componentes conexas son conjuntos abiertos. Sea $C$ una componente conexa arbitraria de $\Omega$, y sea $a \in C$ un elemento arbitrario.
P.D. Existe $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset C$.
En efecto, como $a \in C \subset \Omega$, y $\Omega$ es abierto se sigue que existe $r > 0$ tal que $D(a,r) \subset \Omega$. Por otro lado, $D(a,r)$ es conexo, y $D(a,r) \cap C \neq \emptyset$, luego $D(a,r) \cup C$ es conexo. Como $C$ es una componente conexa por definición es maximalmente conexo, con lo que $D(a,r) \subset C$ (de lo contrario tendriamos $C \subsetneq D(a,r) \cup C$).

Para ver que la colección de componentes conexas de $\Omega$ es a lo más numerable basta con checar que podemos elegir un punto con coordenadas racionales en cada componente. Esto se garantiza gracias a que cada componente es abierta, y que $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{C}$. ■

Por lo que hemos visto hasta el momento podemos intuir que los conjuntos abiertos, los conjuntos compactos y los conjuntos conexos serán de particular importancia, y que en lo sucesivo debemos prestar mucha atención en cómo sacarles provecho. El siguiente resultado nos señala que también los complementos de los conjuntos compactos son de gran interés, así pues también debemos mantenerlos bajo nuestro radar, y aprender a aprovechar sus bondades.

**Teorema 1.3.** *Sea $K$ un compacto de $\mathbb{C}$ y $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$. Entonces*

1. *De las componentes conexas del abierto $\Omega$ solo una es no acotada, $C_\infty$.*
2. *Si $C$ es una componente conexa de $\Omega$, entonces $\partial C \subset K$.*

**Demostración.** Veamos primero que de las componentes conexas de $\Omega = \mathbb{C} \setminus K$ solo hay una que es no acotada. En efecto, como $K$ es compacto, es cerrado y acotado, luego existe $R > 0$ tal que $K \subset D(O, R) =: D$. Observemos que $D^c$ es conexo y no acotado. Por otro lado, $R \in \Omega$ y $R \in D^c$, entonces $D^c$ está contenido en la componente conexa de $\Omega$ que contiene a $R$, $C_R$. Observando que todas las otras posibles componentes conexas de $\Omega$ se encuentran dentro de $D$, se sigue que $C_R$ es la única que es no acotada, la cuál se denotará por $C_\infty$.

Por último, consideremos una componente conexa arbitraria, $C$, de $\Omega$. Por el teorema anterior se sigue que $C$ es abierto en $\mathbb{C}$ y cerrado en $\Omega$, pues $C = \overline{C} \cap \Omega$ (por ser $C$ un subconjunto de maximalmente conexo $\Omega$). Luego,

$$\partial C = \overline{C} \setminus C = \overline{C} \setminus (\overline{C} \cap \Omega) = \overline{C} \cap (\overline{C} \cap \Omega)^c = \overline{C} \cap (\overline{C}^c \cup \Omega^c) = \overline{C} \cap K \subset K.$$

■

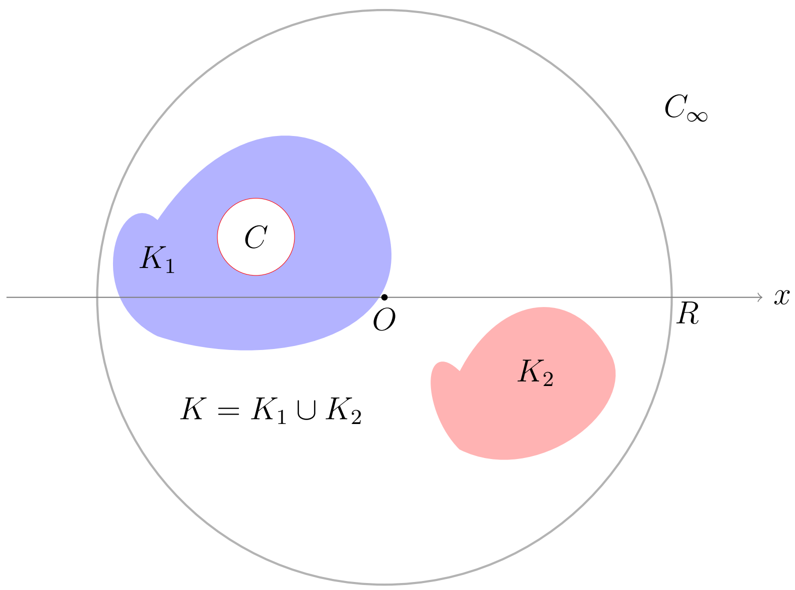


Fig. 1.2: El conjunto $K = K_1 \cup K_2$ es un compacto de $\mathbb{C}$.

## 1.2 La Función Exponencial

Para un número complejo $z \in \mathbb{C}$, llamamos *representación cartesiana* de $z$ a su expresión como $z = x + iy$, donde $x = \mathtt{Re}(z)$, $y = \mathtt{Im}(z) \in \mathbb{R}$. Recordemos también que si

$z = x + iy$, entonces su conjugado es $\overline{z} = x - iy$, y se cumple que

$$z\overline{z} = x^2 + y^2 = |z|^2, \quad |z| \text{ es el módulo de } z.$$

Es indispensable también familiarizarnos con la *representación polar* $z = re^{i\theta}$. Para justificar la expresión de $z$ mediante su módulo y argumento necesitaremos introducir antes la función exponencial compleja.

### 1.2.1 Definición

**Definición.** La función exponencial (que temporalmente denotaremos por $E$) se define por la siguiente serie de potencias de radio de convergencia infinito:

$$E(z) := \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}\,. \tag{1.1}$$

El siguiente resultado será de utilidad más adelante, y nos muestra como obtener el producto de Cauchy de dos series con factoriales como denominadores.

**Lema 1.4.** *El producto de Cauchy de dos series absolutamente convergentes* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!}$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!}$ *es la serie* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}$*, donde los coeficientes* $c_n$ *están dados por*

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}. \tag{1.2}$$

*En particular, si las series de potencias* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n$ *y* $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n$ *son absolutamente convergentes en* $x \in \mathbb{C}$*, su producto de Cauchy está dado por*

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{b_n}{n!} x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!} x^n,$$

*donde los* $c_n$ *son como en* (1.2).

**Demostración.** Aplicando la regla para el producto de Cauchy de dos series absolutamente convergentes tenemos que $\frac{c_n}{n!} = \sum_{k=0}^{n} \frac{a_k}{k!} \frac{b_{n-k}}{(n-k)!}$. Por lo tanto,

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!(n-k)!} a_k b_{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a_k b_{n-k}\,.$$

La aplicación al caso de series de potencias se sigue de reemplazar $a_n$ y $b_n$ por $a_n x^n$ y $b_n x^n$, respectivamente. ■

Con la ayuda del lema anterior y del teorema del binomio podemos demostrar fácilmente la siguiente ecuación funcional de la función exponencial.

**Teorema 1.5 (Ecuación Funcional).** *Se verifica la siguiente identidad*

$$E(z + w) := E(z)E(w), \quad \forall z, w \in \mathbb{C}. \tag{1.3}$$

**Demostración.** Haciendo $a_n = z^n$ y $b_n = w^n$ en el Lema 1.4, tenemos

$$E(z)E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{c_n}{n!}, \quad \text{con} \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} z^k w^{n-k} = (z+w)^n.$$

Por lo tanto,

$$E(z)E(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}(z+w)^n = E(z+w).$$

■

Como un corolario a la ecuación funcional enunciamos el siguiente teorema, en el cual entre otras cosas se prueba que $E$ es diferenciable con $E' = E$.

**Teorema 1.6.** *La función exponencial verifica lo siguiente:*

1. $E(z) \neq 0$ *para todo* $z \in \mathbb{C}$.
2. $\overline{E(z)} = E(\overline{z})$.
3. $\displaystyle\lim_{h\to 0} \frac{E(z+h) - E(z)}{h} = E(z)$.
4. *Sean* $f : [0,1] \to \mathbb{C}$ *de clase* $C^1$, *y* $F = E(f)$. *Entonces,* $F$ *también es de clase* $C^1$ *en* $[0,1]$, *con* $F' = f' \cdot E(f)$.

**Demostración.** De la ecuación funcional se sigue que para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple $E(z)E(-z) = E(0) = 1$. Por lo tanto, $E(z) \neq 0$, para todo $z \in \mathbb{C}$. La segunda propiedad es consecuencia de que el conjugado se distribuye en sumas y productos, pues

$$\overline{E(z)} = \overline{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\overline{z}^n}{n!} = E(\overline{z}).$$

Para la tercera propiedad observemos que cuando $h \to 0$:

$$E(z+h) = E(z)E(h) = E(z)\left(1 + h + \frac{h^2}{2!} + \frac{h^3}{3!} + \cdots\right) = E(z)\left(1 + h + O(h^2)\right),$$

luego,

$$\frac{E(z+h) - E(z)}{h} = E(z) + O(h) \to E(z).$$

Por último, si $f \in C^1[0,1]$, entonces

$$f(t+h) = f(t) + hf'(t) + o(h) =: f(t) + k.$$

De este modo tenemos

$$F(t+h) - F(t) = E(f(t+h)) - E(f(t)) = E(f(t)+k) - E(f(t)) = E(f(t))\left(E(k) - 1\right).$$

Luego,

$$\begin{aligned} F(t+h) - F(t) = F(t)(E(k) - 1) = F(t)\left(k + \frac{k^2}{2!} + \cdots\right) &= F(t)(k + o(k)) \\ &= hf'(t)F(t) + o(h), \end{aligned}$$

de donde se sigue el resultado. ■

### 1.2.2 La Exponencial Real

La definición mediante serie de potencias de la exponencial nos permite demostrar el siguiente resultado de la exponencial real.

**Teorema 1.7.** *La función exponencial real $E : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$, es una biyección creciente. En particular,*

$$x < 0 \implies E(x) < E(0) = 1, \qquad y \qquad x > 0 \implies E(x) > E(0) = 1.$$

**Demostración.** Por el teorema anterior sabemos que $E : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ es continua (de hecho diferenciable), y además $E(x) \neq 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$, de este modo, por el Teorema de los Valores Intermedios, $E$ es de signo constante (su gráfica nunca cruza el eje $x$). Como también sabemos que $E(0) = 1$, entonces $E(x) > 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Además, para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple $E'(x) = E(x) > 0$, por lo tanto $E$ es estrictamente creciente, y por tanto inyectiva. Por último, para mostrar que el rango de $E$ es $(0, \infty)$, observemos que $E(x) = 1/E(-x)$, entonces como $\lim\limits_{x\to\infty} E(x) = \lim\limits_{x\to\infty}(1 + x + \frac{x^2}{2} + \cdots) = \infty$, se sigue que $\lim\limits_{x\to\infty} E(-x) = \lim\limits_{x\to-\infty} E(x) = 0$. ■

### 1.2.3 La Exponencial Compleja

El siguiente Lema jugará un rol importante en la prueba del Teorema que le sigue.

**Lema 1.8.** *Sea $\varphi : [0, 1] \to \mathbb{C}^* := \mathbb{C} \setminus \{0\}$, de clase $C^1$, tal que $\varphi(0) = 1$. Y sea $f : [0, 1] \to \mathbb{C}$ definida por*

$$f(x) = \int_0^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt.$$

*Entonces, $E(f(x)) = \varphi(x)$ para todo $x \in [0, 1]$ y, en particular, $\varphi(1) = E(f(1))$.*

**Demostración.** Multiplicando por $E(-f(x))$ en ambos lados de la igualdad, notamos que $E(f(x)) = \varphi(x)$ es equivalente a que $1 = \varphi(x)E(-f(x)) =: g(x)$. Basta pues, con demostrar que $g(x) = 1$ para todo $x \in [0, 1]$. Comencemos por observar que $f(x)$ es de clase $C^1$ (Ejercicio: ¿Por qué?), entonces $\varphi(x)E(-f(x))$ es diferenciable y aplicando el punto 4 del Teorema 1.6 tenemos que para todo $x \in [0, 1]$:

$$g'(x) = E(-f(x)) \left( \varphi'(x) - \varphi(x) \times \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)} \right) = 0.$$

Por tanto, la función $g(x)$ es constante en $[0, 1]$. La demostración termina observando que $g(0) = \varphi(0)E(-f(0)) = 1 \times E(-\int_0^0 \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt) = E(0) = 1$. ■

**Teorema 1.9.** *La función exponencial $E$ admite las tres propiedades siguientes.*

1. *Para todo $z \in \mathbb{C}$ se cumple que $|E(z)| = E(\mathtt{Re}(z))$.*

2. *$E$ es una función sobreyectiva de $\mathbb{C}$ sobre $\mathbb{C}^*$.*

3. *La función $h : \mathbb{R} \to \mathbb{T} := \{|z| = 1\}$, definida por $h(t) = E(it)$ es un homomorfismo sobreyectivo. Además se cumple que $Ker(h) = 2\pi\mathbb{Z}$, donde $\pi$ es un número positivo.*

**Demostración.** **(1)** Notemos primero que si $y \in \mathbb{R}$, entonces

$$|E(iy)|^2 = E(iy)\overline{E(iy)} = E(iy)E(-iy) = E(iy - iy) = E(0) = 1.$$

Entonces, si $z = x + iy$, se tiene que

$$|E(z)| = |E(x)E(iy)| = E(x)\,|E(iy)| = E(x).$$

**(2)** Es en la demostración de este punto que necesitaremos del Lema anterior. Consideremos un $w \in \mathbb{C}^*$ arbitrario. Vamos a proceder mostrando que existe una curva $\varphi : [0,1] \to \mathbb{C}^*$ de clase $C^1$ tal que $\varphi(0) = 1$ y $\varphi(1) = w$, luego el Lema nos permite concluir la veracidad del punto **(2)**. Es claro que si $w$ no es un real $< 0$, entonces el segmento $[1, w]$ no contiene al 0, y podemos parametrizar este segmento mediante $\varphi(t) = 1 + t(w-1)$, $0 \leq t \leq 1$. Por el Lema anterior tenemos que

$$w = \varphi(1) = E\left(\int_0^1 \frac{w-1}{1+t(w-1)}dt\right).$$

Para el caso en que $w$ sea un real negativo podemos pensar que basta con tomar $\varphi(t)$ como una parametrización de un arco de circunferencia que una a 1 con $w$, evitando así pasar por el 0. Efectivamente con esto y el Lema anterior se seguiría la prueba. Desafortunadamente todavía no hemos definido lo que son el seno y coseno complejos. Procederemos por otro camino, pero de igual manera terminaremos con un complejo tal que su imagen bajo $E$ es $w$. Digamos que $w = -r$ con $r > 0$, comenzamos por observar que $i \notin (-\infty, 0)$, luego por lo que recién hemos demostrado existe $z_0 \in \mathbb{C}^*$ tal que $E(z_0) = i$. Además por el punto (1) se sigue que $\mathtt{Re}(z_0) = 0$, por lo tanto existe $\theta_0 \in \mathbb{R}$ tal que $z_0 = i\theta_0$, es decir, $i = E(i\theta_0)$. Por lo tanto, $-1 = i^2 = E(2i\theta_0)$, entonces $w = -r = rE(2i\theta_0)$. Por el Teorema 1.7 tenemos que existe $x \in \mathbb{R}$ tal que $E(x) = r$, por tanto, $w = E(2i\theta_0 + x)$.

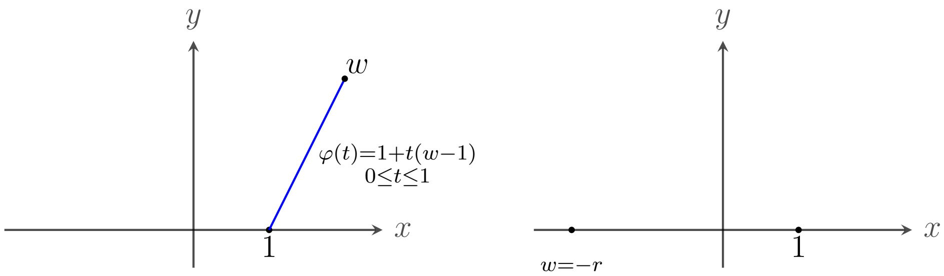


Fig. 1.3: Para todo $w \in \mathbb{C}^*$ existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $E(z) = w$.

**(3)** Por **(1)** tenemos que $h$ envía $\mathbb{R}$ a $\mathbb{T}$. Recíprocamente, para $w \in \mathbb{T}$ por **(2)** tenemos que existe $z \in \mathbb{C}$ tal que $E(z) = w$. Por **(1)** tenemos que $E(\mathtt{Re}(z)) = |w| = 1$, de donde $\mathtt{Re}(z) = 0$, y por tanto, $z = i\theta$ para algún $\theta \in \mathbb{R}$. Con lo que $h$ es sobreyectiva. Ahora que $h$ es un homomorfismo se sigue de la ecuación funcional de $E$. Además, $h$ es continua luego su kernel de $Ker(h) = \{t \in \mathbb{R} : h(t) = 1\}$ es un *subgrupo cerrado* de $\mathbb{R}$. Por lo tanto, $Ker(h) = \mathbb{R}$ o $Ker(h) = a\mathbb{Z}$ para algún $a > 0$. El primer caso es imposible, pues hemos visto que existe $\theta_0 \in R$ tal que $E(i\theta_0) = i$. De aquí se sigue que $Ker(h) = a\mathbb{Z}$, finalmente definamos $2\pi = a$. ■

***Notación.*** A partir de ahora la función exponencial $E(z)$ la denotaremos por $e^z$.

***Observación***. $\mathbb{T}$ no puede ser homeomorfo a un intervalo $\mathcal{I}$. En efecto, por compacidad tenemos que $\mathcal{I}$ tendría que ser cerrado, digamos $\mathcal{I} = [\alpha, \alpha + 2\pi]$, y de ser homeomorfos entonces también lo serían $\mathbb{T} \setminus \{t\}$ e $\mathcal{I} \setminus \beta$, donde $\beta$ es un punto interior de $\mathcal{I}$ y $t$ es su preimagen bajo el supuesto homeomorfismo. Pero ahora tenemos que $\mathbb{T} \setminus \{t\}$ es conexo pero $\mathcal{I} \setminus \beta$ no lo es. Esto contradice que $\mathbb{T}$ y $\mathcal{I}$ puedan ser homeomorfos. Dicho esto, el siguiente resultado jugará un papel importante en el estudio del logaritmo.

**Teorema 1.10.** *Sea $\alpha \in \mathbb{R}$. La función $h : t \mapsto e^{it}$ es un homeomorfismo entre el intervalo abierto $(\alpha, \alpha + 2\pi)$ y $\mathbb{T} \setminus \{e^{i\alpha}\}$.*

**Demostración.** S.p.g. podemos suponer que $\alpha = 0$. Por lo que hemos visto hasta el momento sabemos que $h$ es continua (Teorema 1.6: 3), y biyectiva (Teorema 1.9: 3). Solo falta demostrar que $h^{-1} : \mathbb{T} \setminus \{1\} \to (0, 2\pi)$ es continua. Utilizando la caracterización de continuidad por sucesiones, basta con demostrar la siguiente implicación:

$$\left( e^{it_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{it} \text{ con } t_n, t \in (0, 2\pi) \right) \implies (t_n \xrightarrow[n\to\infty]{} t).$$

Consideremos pues una sucesión $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ y un $t \in (0, 2\pi)$ que satisfacen la hipótesis de la implicación anterior, veamos que también se da la conclusión. En efecto, como $(t_n)_{n=1}^{\infty}$ es acotada, existe un punto de adherencia $\phi$ de $(t_n)$, luego también existe una subsucesión $(t_{n_k})$ que converge a $\phi$. De que $e^{it_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{it}$ se sigue que $e^{it_{n_k}} \xrightarrow[n\to\infty]{} e^{it}$. Por unicidad del límite tenemos que $\lim_{n\to\infty} e^{it} = e^{i\phi}$. Luego por el punto (3) del Teorema 1.9 tenemos que $t = \phi + 2\pi k$ para algún $k \in \mathbb{Z}$.

**P.D.** $k = 0$.

Como $t_n, t \in (0, 2\pi)$ para todo $n$, se sigue que $|t_n - \pi|, |t - \pi| < \pi$. De aquí se sigue que $|\phi - \pi| \leq \pi$. Por lo tanto,

$$|2k\pi| = |t - \phi| \leq |t - \pi| + |\pi - \phi| < 2\pi.$$

Esto implica que $\phi = t$. Por lo tanto, la sucesión $(t_n)$ posee un único punto de adherencia, luego $(t_n)$ converge, y lo hace a tal punto adherente, es decir, a $t$. ■

Estamos ahora en la posición de definir las funciones trigonométricas.

**Definición.** las funciones *seno* y *coseno* son definidas en $\mathbb{R}$ mediante:

$$\cos t = \mathtt{Re}(e^{it}) = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!},$$
$$\sin t = \mathtt{Im}(e^{it}) = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

Recordemos que estas funciones son reales, $2\pi$-periódicas, admiten un desarrollo en serie de potencias de radio infinito, y que a partir de este desarrollo se pueden extender al plano complejo:

$$\cos t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n}}{(2n)!} = \frac{e^{it} + e^{-it}}{2}, \qquad \sin t = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e^{it} - e^{-it}}{2i}.$$

### 1.2.4 Módulo y Argumento de un Número Complejo

Las propiedades de la exponencial compleja nos permite probar el siguiente teorema.

**Teorema 1.11 (Módulo y Argumento).** 1. *Cualquier número complejo $w \neq 0$ se puede escribir como*

$$w = re^{i\theta}, \quad \textit{donde} \quad r > 0 \quad y \quad \theta \in \mathbb{R}.$$

*Además, $r = |w|$ y $\theta$ está determinado* $\pmod{2\pi}$.

2. *Si $w = re^{i\theta} \neq 0$ y si $n$ es un entero $\geq 1$, entonces $w$ posee exactamente $n$ raíces $n$-ésimas $z_k$, $z_k^n = w$, dadas por*

$$z_k = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{2i\frac{k\pi}{n}}, \quad 0 \leq k \leq n-1.$$

**Demostración.** **(1).** Consideremos el complejo $u = w/r$, con $r = |w|$. Por el Teorema 1.9, página 6, sabemos que existe $\theta$ tal que $e^{i\theta} = u$, de donde se sigue que $w = re^{i\theta}$. Que $\theta$ está determinado $\pmod{2\pi}$ se sigue del hecho que el kernel del homomorfismo de $\mathbb{R}$ en $\mathbb{T}$ dado por $h : t \mapsto e^{it}$ es $2\pi\mathbb{Z}$.

**(2).** Es claro que los $z_k$ son raíces $n$-ésimas de $w$. También es claro que los $n$ valores son diferentes, pues si tuviéramos $z_j = z_k$ con $0 \leq j < k \leq n-1$, entonces de $e^{2i\frac{k\pi}{n}} = e^{2i\frac{j\pi}{n}}$ se seguiría que $(2\frac{k\pi}{n} - 2\frac{j\pi}{n}) \in 2\pi\mathbb{Z}$. Lo que a su vez implicaría que $\frac{k-j}{n} = m$, para algún $m \in \mathbb{Z}$. Esto es, $n|k-j$ con $1 \leq k-j \leq n-1$. Lo cual es una contradicción (¿Por qué?). Finalmente, para ver que no hay más raíces $n$-ésimas fuera de las listadas supongamos que $z = \rho e^{i\varphi}$ es tal que $z^n = w$. Entonces $\rho^n = r$, así $\rho = r^{\frac{1}{n}}$, también $e^{in\varphi} = e^{i\theta}$, de donde $n\varphi - \theta = 2\pi l$ para algún $l \in \mathbb{Z}$. Dividiendo $l$ entre $n$ tenemos que $l = nq + k$, con $0 \leq k \leq n-1$. Por tanto, $n\varphi = \theta + 2\pi(nq + k)$, esto es, $\varphi = \theta/n + 2\pi q + 2\pi k/n$. De todo lo anterior obtenemos que

$$z = \rho e^{i\varphi} = r^{\frac{1}{n}} e^{i(\theta/n + 2\pi q + 2\pi k/n)} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{2i\frac{\pi k}{n}} e^{2\pi q i} = r^{\frac{1}{n}} e^{i\frac{\theta}{n}} e^{2i\frac{\pi k}{n}},$$

con $0 \leq k \leq n-1$. Port lo tanto, $z = z_k$. ■

### 1.2.5 Hacia el Logaritmo Complejo

Una vez establecida la sobreyectividad de $E : \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$, una generalización del Lema 1.8, página 6, que nos será muy útil es la siguiente.

**Teorema 1.12 (Levantamiento).** *Consideremos una función $\varphi : [a, b] \to \mathbb{C}^*$, continua y de clase $C^1$ a trozos, un complejo $\mu \in \mathbb{C}$, y la función $f : [a, b] \to \mathbb{C}$ definida por*

$$f(x) = \int_a^x \frac{\varphi'(t)}{\varphi(t)} dt + \mu.$$

*entonces podemos elegir un $\mu$ de forma tal que $E(f(x)) = \varphi(x)$ para todo $x \in [a, b]$.*

**Demostración.** Que $\varphi$ sea de clase $C^1$ a trozos significa que existe una partición $a = t_0 < t_1 < \cdots < t_n = b$ tal que $\varphi$ es de clase $C^1$ en cada subintervalo $[t_j, t_{j+1}]$, pero con posiblemente $\varphi'(t_j - 0) \neq \varphi'(t_j + 0)$.

Eligiendo $\mu$ de tal manera que $E(\mu) = \varphi(a)$, lo cual es posible gracias al Teorema 1.9, página 6. Vamos a proceder para cada $j \in \{0, 1, 2, \ldots, n-1\}$. Para cada $x$ en el segmento $[t_j, t_{j+1}]$ tenemos que $f'(x) = \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$. Por el Teorema 1.6, página 5, la función $g(x) = \varphi(x)E(-f(x))$ satisface que $g'(x) = \varphi'(x)E(-f(x)) + \varphi(x)(-f'(x)E(-f(x))) = f'(x)\varphi(x)E(-f(x)) - \varphi(x)f'(x)E(-f(x)) = 0$ para $x \in [t_j, t_{j+1}]$. De aquí se sigue que la función $g(x)$ es constante en cada intervalo $[t_j, t_{j+1}]$, y de aquí es constante en todo el intervalo $[a, b]$. Pero $g(a) = \varphi(a)E(-f(a)) = \varphi(a)E(-\mu) = 1$, de donde podemos deducir que $g(x) = \varphi(x)E(-f(x)) = 1$. Por último, para concluir basta con multiplicar por $E(f(x))$ ■

***Observación.*** El Teorema 1.12 afirma que la función $\varphi$ admite un *logaritmo continuo.*

## 1.3 Recordatorio de Análisis de Fourier

El análisis de Fourier y el análisis complejo explotan las propiedades de la función exponencial que hemos estudiado. Estos están intimamente ligados gracias a lo siguiente: Consideremos una serie de potencias de radio de convergencia 1, $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$. Si $|z| = 1$, podemos escribir $z = e^{it}$ con $t \in \mathbb{R}$, y formalmente nuestra serie de potencias deviene en la siguiente serie trigonométrica $\sum_{n=0}^{\infty} a_n e^{int}$. Este tipo series son delicadas de estudiar, nosotros nos contentaremos con presentar algunos resultados simples pero robustos. Denotaremos por $\mathcal{C}$ al espacio vectorial de funciones continuas y $2\pi$-periódicas $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$. Dotaremos a $\mathcal{C}$ con la norma infinito definida por $\|f\|_\infty := \sup_{0 \le t \le 2\pi} |f(t)|$. Para $f \in \mathcal{C}$ y $n \in \mathbb{Z}$, el $n$-ésimo coeficiente de Fourier, denotado por $c_n(f)$ o $\hat{f}(n)$ se define por

$$c_n := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t) e^{-int} dt.$$

Diremos que una serie trigonométrica $\sum_{n \in \mathbb{Z}} a_n e^{int}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$ si la siguiente sucesión de sumas parciales simétricas

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$$

converge uniformemente en $\mathbb{R}$ cuando $N \to \infty$. Estamos en condiciones de establecer el siguiente teorema.

**Teorema 1.13.** *Sea $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ una serie trigonométrica uniformemente convergente en $\mathbb{R}$, de suma $F$. Entonces, $F \in \mathcal{C}$ y, además,*

$$c_n(F) = a_n, \quad \forall n \in \mathbb{Z}.$$

**Demostración.** El argumento de la demostración descansa en la ortonormalidad de las exponenciales $e^{ijt}$ cuando $j$ recorre $\mathbb{Z}$:

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ijt} e^{-ikt} dt = \begin{cases} 0, & \text{si} \quad j \neq k, \\ 1, & \text{si} \quad j = k. \end{cases}$$

Fijemos un $n \in \mathbb{Z}$ arbitrario. Para $N \geq |n|$, utilizando la ortogonalidad de $e^{ijt}$ tenemos que:

$$c_n(S_N) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{j=-N}^{N} a_j e^{ijt} e^{-int} dt = \sum_{j=-N}^{N} a_j \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{ijt} e^{-int} dt = a_n.$$

Haciendo tender $N \to \infty$ y utilizando la convergencia uniforme se concluye la veracidad del teorema. ■

Enunciaremos ahora una versión simple de la identidad de Parseval, que nos será suficiente en esta obra.

**Teorema 1.14 (Parseval).** *Sea $\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{int}$ una serie trigonométrica uniformemente convergente en $\mathbb{R}$, con suma $S(t)$. Entonces,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 < \infty$$

*y, además,*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S(t)|^2\, dt.$$

*Si $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ es una serie de potencias de radio de convergencia $R$, tenemos que para todo $0 \leq r < R$:*

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right|^2 dt.$$

**Demostración.** Utilizaremos la ortonormalidad de las exponenciales $e^{ijt}$ cuando $j$ recorre $\mathbb{Z}$. Sea $S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} a_n e^{int}$. Ya que tenemos que $|S_N(t)| \leq \sum_{n=-N}^{N} |a_n|$, y que existe $N_0$ tal que $|S_N(t)| \leq |S(t)| + 1$ para $N \geq N_0$, y que la función continua y $2\pi$-periódica $S$ es acotada en $\mathbb{R}$, se sigue que $|S_N(t)| \leq M$, para algún $M$ que es independiente de $N$ y $t$. Además, por ortogonalidad antes mencionada tenemos:

$$M^2 \geq \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_N(t)|^2\, dt = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum_{n=-N}^{N} a_j \overline{a_k} e^{ijt} e^{-ikt} dt = \sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2 .$$

De aquí se sigue que la serie $\sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2$ converge, y además $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|^2 \leq M^2$. Ahora podemos justificar el paso al límite cuando $N \to \infty$ en la igualdad $\sum_{n=-N}^{N} |a_n|^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |S_N(t)|^2\, dt$, pues $S_N$ converge uniformemente y la desigualdad $|S_N(t)| \leq M$, por lo tanto la identidad de Parseval queda establecida. Ahora, para la especialización a las series de potencias consideremos un $r < R$ y $z = re^{it}$ arbitrarios. Basta con demostrar que la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n r^n e^{int}$ converge uniformemente en $\mathbb{R}$. Esto se sigue por la prueba $M$ de Weierstrass, y de que las series de potencias convergen absolutamente dentro de su disco de convergencia, ya que

$$\left|a_n r^n e^{int}\right| \leq |a_n|\, r^n, \quad \text{y} \quad \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|\, r^n < \infty.$$

■

Un resultado elemental está vinculado al kernel de Poisson $P_r \in \mathcal{C}$, el cual resultará ser de importancia fundamental tanto para el análisis de Fourier como para el análisis complejo. Este kernel está definido como sigue, para $0 < r < 1$:

$$P_r(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r^{|n|} e^{int} = \frac{1 - r^2}{1 - 2r\cos t + r^2}. \tag{1.4}$$

Definiendo, para $f \in \mathcal{C}$:

$$\|f\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(t)|\, dt.s$$

Una propiedad fundamental es que $\|P_r\|_1 = 1$. En efecto, la segunda igualdad en 1.4 implica que $P_r \geq 0$ (Ejercicio: Probarlo), entonces $\|P_r\|_1 := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt$. Y la primera igualdad en 1.4 demuestra que

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P_r(t)dt = c_0(P_r) = r^{|0|} = 1.$$

**Definición. (Convolución).** Definimos la convolución de dos funciones $f, g \in \mathcal{C}$ como:

$$(f * g)(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x-t)g(t)dt.$$

# Capítulo 2

# Polinomios y Series de Potencias

Usar indices: k

# Apéndice A

# Demostraciones Adicionales

## A.1 Demostración del TFC

Aquí puedes agregar demostraciones adicionales.

# Apéndice B

# Pruebas de newcommands, index, glossary, etc

Este es el capítulo 1 de tu libro de matemáticas.

## B.1 Ejemplo de Teorema

**Teorema B.1 (Pitagoras).** *En un triángulo rectángulo, el cuadrado de la hipotenusa es igual a la suma de los cuadrados de los catetos.*

**Demostración.** Sea un triángulo con lados $a$, $b$ y $c$, donde $c$ es la hipotenusa. Según el Teorema de Pitágoras:

$$c^2 = a^2 + b^2.$$

■

***Afirmación***. Esta es una afirmación.

***Observación***. Esta es una observación

**Definición.** Esta es una definición

**Lema B.2.** *Este es un lema.*

**Corolario B.3.** *Este es un corolario valor absoluto:* $|x|$, *norma:* $\|x\|$, *conjunto*

$$A = \{a_1, a_2, a_3\}$$

**Ejemplo B.1.** *Este es un ejemplo*

## B.2 Ejemplo de índice

Este es un ejemplo de cómo usar el comando para generar índices.

## B.3 Ejemplo de glosario

**Teorema B.4.** *Este teorema es importante.*

Un Teorema es un concepto fundamental.

# Bibliografía

[1] Hervé Queffélec y Martine Queffélec, *Analyse complexe et applications*, Calvage Mounet, 2017.