“LA LÓGICA ES EL ESTUDIO DE LAS TAUTOLOGÍAS”

Hernán Rivas, h.javier.rivas@gmail.com

Universidad Nacional Experimental de Guayana
Área: Matemática. Proyecto: Ingeniería en Informática. Asignatura: Lógica

Lectura Complementaria:
Resumen del Capítulo I: “Introducción a la Lógica Proposicional” del libro “Matemáticas para Estudiantes de Administración y Economía” de Cesar R. Gallo P., Tomo I, 3ra. Edición.

DEFINICIÓN DE LÓGICA PROPOSICIONAL

La Lógica es la ciencia que se encarga de estudiar las formas, estructuras o esquemas de razonamientos formales. Establece los principios fundamentales y proporciona los métodos necesarios que permiten determinar lo que hace que cierto razonamiento sea válido o no lo sea. La parte de la lógica que se encarga específicamente de las proposiciones recibe el nombre de Lógica Proposicional.

VARIABLES PROPOSICIONALES

Ahora bien, se entiende que las proposiciones son oraciones o enunciados susceptibles de ser calificadas, inequívocamente, de verdaderas o falsas. Por consiguiente, son proposiciones sólo aquellas expresiones que afirman algo, para la cual se dispone de algún criterio que nos permita establecer, sin lugar a dudas, si tal afirmación es verdadera o falsa, es decir, su valor de verdad o valor veritativo (“V” o “F”). Para la lógica proposicional, una proposición puede ser el resultado o composición de otras proposiciones. La primera se llamaría proposición resultante y las otras proposiciones componentes. Una proposición podrá ser representada por medio de una letra minúscula (p, q, r, s), o bien una letra minúscula con subíndice, de ser necesario. Las letras o símbolos utilizados para este fin, se conocen como variables proposicionales.

CONECTIVOS LÓGICOS

Las relaciones entre proposiciones componentes se obtiene por medio de los conectivos lógicos: Negación, Conjunción, Disyunción, Condicional y Doble condicional o Equivalencia, cuyos símbolos respectivos son: “¬”, “&”, “v”, “→”, “↔”. A continuación se explica brevemente cada uno de ellos.

La Negación (¬), el cual es un conectivo lógico unario dado que se aplica a una proposición, llamada “alcance”, y que da lugar a otra con valor veritativo contrario al de la proposición original, es decir contrario al valor de su alcance. Por ejemplo, sí p = V, entonces ¬p = F y viceversa. El resto de conectivos lógicos son de tipo binario, ya que involucran dos proposiciones.

La Conjunción (&), es un conectivo lógico que aplicado a dos proposiciones, llamadas “factores”, y que da lugar a una nueva proposición, la cual es verdadera cuando los factores son, ambos, verdaderos, y falsa en los demás casos. Por ejemplo, p & q = V, si y solo sí, p=V y q=V.

La Disyunción (v), o más específicamente, disyunción inclusiva, es el conectivo lógico que aplicado a dos proposiciones, conocidas en este caso como “términos”, dará lugar a una nueva proposición que será falsa solo cuando los términos o proposiciones componentes sean, ambos, falsos. En otro caso, la composición resultante será verdadera.

La Condicional (→) entre p y q se representa por p → q y se lee “si p, entonces q”, donde a “p” se le llama antecedente y a “q” consecuente. El conectivo lógico condicional es verdadero en todos los casos, excepto en el que el antecedente es verdadero y el consecuente es falso. Es necesario advertir aquí, que el condicional entre dos proposiciones no es conmutativo.

Doble condicional (Bicondicional o Equivalencia) (↔), aplicado a dos proposiciones da lugar a una nueva proposición, la cual es verdadera cuando las dos componentes tienen el mismo valor veritativo y falso cuando tienen valores contrarios. Dados dos proposiciones p y q, el bicondicional entre ellas se escribe p ↔ q y se lee “p, si y sólo si, q”. Para este conectivo lógico, ambas proposiciones pueden jugar el papel de antecedente y consecuente alternadamente, y en consecuencia se permite que p y q sean conmutativas.

FORMULAS PROPOSICIONALES

Utilizando la notación adecuada se pueden construir expresiones, en las cuales intervienen un número finito de variables proposicionales, conectivos lógicos y signos de agrupación. A estas expresiones se les llama fórmulas proposicionales. Por ejemplo, (p v (q & r)) → q

Las fórmulas proposicionales obedecen a una sintaxis para su construcción o formulación. Cualquier combinación de símbolos no representa una fórmula bien construida. Por ejemplo, (¬p v) → q no es una fórmula lícita. Las fórmulas proposicionales son solamente aquellas que están bien construidas.

Es importante destacar el papel que juegan los signos de agrupación en las fórmulas, ya que ellos nos permiten indicar, en forma inequívoca, el proceso de construcción de la fórmula, eliminando toda ambigüedad.

Por otra parte, las fórmulas proposicionales, atendiendo a su estructura, se clasifican en dos tipos:

a) **Fórmulas Atómicas**: aquellas en las que interviene, como único elemento, una variable proposicional. Por ejemplo, p es una fórmula atómica.
b) **Fórmulas Moleculares**: aquellas en las que interviene, por lo menos, un conectivo lógico. Por ejemplo, ¬p, o bien, p & q.

Las fórmulas proposicionales se representan, generalmente, mediante letras mayúsculas, tales como P, Q, R, etc.

Por definición, se puede decir que:

1) Toda variable proposicional es una fórmula.
2) Si P es una fórmula, entonces ¬P es una fórmula.
3) Si P y Q son fórmulas, entonces P & Q, P v Q, P → Q y P ↔ Q son fórmulas.
4) Sólo son fórmulas las expresiones obtenidas mediante 1), 2) y 3).

Las fórmulas proposicionales también pueden clasificarse atendiendo a los valores de verdad que puede asumir. De acuerdo a este criterio, las fórmulas proposicionales se clasifican en:

a) **Tautología**: Una fórmula es tautológica, si y sólo si, ella es siempre verdadera, no importa cuáles sean los valores de verdad de sus componentes.
b) **Contradicción**: Se dice que una fórmula es una contradicción, si y sólo si, ella es siempre falsa, no importa cuáles sean los valores de verdad de sus componentes.
c) **Indeterminación**: Una fórmula es indeterminada, si y sólo si, ella es verdadera en unos casos y falsas en otros, no importa en qué proporción.

TABLAS DE LA VERDAD

Las tablas de la verdad parten del principio que a toda variable proposicional le corresponden sólo dos posibilidades o valores lógicos (Verdadero y Falso) y que el valor veritativo de una fórmula molecular depende de los valores de las variables proposicionales. Por consiguiente, la tabla consistirá en un arreglo bidimensional en el que las columnas representan variables o fórmulas proposicionales y las filas o renglones se utilizan para indicar cada uno de los posibles valores que toman las fórmulas en función de las variables o proposiciones que las componen.

Por ejemplo, para construir la tabla de la verdad de las fórmulas correspondientes a los conectivos lógicos binarios, se tiene:

P	**Q**	**¬P**	**P & Q**	**P V Q**	**P → Q**	**P ↔ Q**
V	V	F	V	V	V	V
V	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	F
F	F	V	F	F	V	V

FÓRMULAS EQUIVALENTES

Otra definición importante es el de equivalencia entre fórmulas. Así decimos que: dos fórmulas proposicionales son equivalentes, si y sólo si, en ellas intervienen las mismas variables proposicionales y, en sus tablas de la verdad, las columnas correspondientes a dichas fórmulas son idénticas entre sí.

Para indicar que dos fórmulas son equivalentes entre sí, se utiliza el símbolo “ ≡ “. Así, por ejemplo, P ≡ Q, se lee “la fórmula P es equivalente a la fórmula Q”. En caso contrario, si estas fórmulas no son equivalentes, entonces escribimos: P ≢ Q, que se lee “la fórmula P **no** es equivalente a la fórmula Q”.

Por ejemplo, sean las fórmulas: ¬p → ¬q , p v ¬q y ¬p & q. Las tablas de la verdad correspondientes serán:

p	**q**	**¬p**	**¬q**	**¬p → ¬q**	**p v ¬q**	**¬p & q**
V	V	F	F	V	V	F
V	F	F	V	V	V	F
F	V	V	F	F	F	V
F	F	V	V	V	V	F

Resulta evidente que (¬p → ¬q) ≡ (p v ¬q), mientras que (p v ¬q) ≢ (¬p & q).

Si dos fórmulas P y Q son equivalentes, entonces decimos que P es expresable en términos de los conectivos en Q y viceversa. Esta implicación es importante porque hace posible que una fórmula pueda ser reemplazada por otra equivalente al momento de estudiar su validez.

RELACIÓN ENTRE EL CONDICIONAL Y LA IMPLICACIÓN

Es de particular interés el estudio del condicional y la implicación, dado que juegan un rol primordial en las demostraciones matemáticas y en el desarrollo de nuevos conceptos. En primer lugar, señalaremos las principales formas derivadas de un condicional:

a) Forma Directa: **P → Q**, es la forma en la que viene expresado el condicional original.
b) Forma Recíproca: **Q → P**, se obtiene intercambiando en antecedente y el consecuente en el condicional original.
c) Forma Contraria al Directo: **¬ P → ¬Q**, también llamado Forma Inversa, consiste en negar el antecedente y el consecuente del condicional original.
d) Forma Contraria al Recíproco: **¬Q → ¬P**, también llamado Contrarrecíproca, es aquella que se deriva al negar el antecedente y el consecuente del recíproco.

A continuación se muestran las tablas de la verdad de estas formas derivadas:

P	Q	¬P	¬Q	P → Q	Q → P	¬P → ¬Q	¬Q → ¬P
V	V	F	F	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V	F
F	V	V	F	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V	V	V

De la tabla anterior se puede observar que el Directo y el Contrarecíproco son equivalentes (P → Q ≡ ¬Q → ¬P). También lo son el Recíproco y el Contrario (Q → P ≡ ¬P → ¬Q).

Por otra parte, **la Implicación** hace referencia a aquellos casos en que un condicional genera una fórmula proposicional que sea siempre verdadera, es decir, cuando genera una tautología. Ya habíamos dicho que los razonamientos, en su mayoría, se presentan como un condicional que tiene la forma "Si P, entonces Q", es decir **P → Q**, y la lógica está interesada en determinar qué hace un razonamiento válido o no.

Por lo tanto, la validez de los razonamientos estará asociada con la verdad del condicional. Debido a esto, nos interesa, de manera especial, la implicación, la cual se representa con el símbolo "⇒". De este modo, dadas dos proposiciones P y Q, escribimos P ⇒ Q, lo cual se lee "P implica Q", si el condicional P → Q es una tautología; por lo que su tabla de la verdad será como la mostrada a continuación:

P	Q	P ⇒ Q
V	V	V
F	V	V
F	F	V

Véase el siguiente ejemplo. Sea la fórmula proposicional [(p → q) & p] → q. Su tabla de la verdad es:

p	q	p → q	(p → q) & p	[(p → q) & p] → q
V	V	V	V	V
V	F	F	F	V
F	V	V	F	V
F	F	V	F	V

Como es un condicional que resulta siempre verdadero, se trata, entonces, de una implicación y debemos escribir **[(p → q) & p]** ⇒ **q**.

Ha de resaltarse aquí que este resultado obtenido para la condicional dada, es independiente del contenido de las proposiciones p y q. Esto se debe, exclusivamente, a la forma en que está construido dicho condicional, es decir, debido a su estructura.

Otros condicionales, sin embargo, son siempre verdaderos, porque podemos constatar que no es posible que siendo el antecedente verdadero, el consecuente resulte falso. Y en consecuencia, podemos decir que ellos son también implicaciones. Por ejemplo:

“Si hoy es sábado, entonces mañana será domingo”

“Si un número es múltiplo de 25, entonces es múltiplo de 5”

“Si un número es menor que 1, entonces es menor que 3”

A diferencia de las condicionales anteriores, estos condicionales son verdaderos debido al contenido de las proposiciones componentes. En otras palabras, son implicaciones por su contenido. Tales implicaciones, en matemáticas, son llamadas **Teoremas** y en ellas el antecedente recibe el nombre de **hipótesis** y al consecuente se le llama **tesis**. Así, dado el teorema P ⇒ Q, P es la hipótesis y Q es la tesis.

Otra definición importante, relacionada con la implicación, es la de Necesidad y Suficiencia. Así se define que:

Dada la implicación P ⇒ Q, decimos que P es condición suficiente para Q y que Q es condición necesaria para P.

Queda como ejercicio para el lector, comprobar el enunciado de esta definición analizando los renglones de la tabla de la verdad de la implicación.

Ejemplo: Dada la implicación “Si llueve, entonces está nublado”. Podemos decir que es suficiente que llueva para que esté nublado. Mientras que es necesario que esté nublado para que llueva. Desde luego, no es suficiente que esté nublado para que llueva.

DOBLE IMPLICACIÓN

La doble implicación ocurre cuando, dadas las proposiciones P y Q, se cumple que los condicionales P → Q y Q → P son ambos, siempre verdaderos.

La doble implicación se representa mediante el símbolo “⇔“ y escribimos P ⇔ Q, que se lee, al igual que el bicondicional, “P si y sólo si Q”. Dada una doble implicación P ⇔ Q, decimos que P es condición necesaria y suficiente para Q y viceversa.

VERDAD FORMAL Y VERDAD EMPIRICA

Toda fórmula proposicional es verdadera o falsa. Sin embargo, podemos distinguir las que lo son por su forma lógica, como son las tautologías y las contradicciones, de las que lo son de acuerdo con las variaciones de su contenido, estas son las indeterminaciones. La verdad de las primeras es una **verdad formal**, es decir, una verdad que depende, exclusivamente, de la forma en que se relacionan entre sí las proposiciones componentes, independientemente de su significado.

La verdad de las indeterminaciones es relativa. Para su comprobación debemos constatar con los hechos, con la experiencia. Por esto decimos que es una **verdad empírica**.

Para determinar si una fórmula es verdadera formalmente, sólo necesitamos analizar su forma; para decidir, en cambio, si una fórmula es verdadera empíricamente, hemos de comparar los hechos de la realidad con el contenido de la fórmula.

La lógica no es una ciencia que permita decidir si una fórmula es empíricamente verdadera, lo cual, es el propósito de las ciencias fácticas, que estudian los hechos de la realidad. La lógica se ocupa de estudiar las verdades formales, sus estructuras y sus leyes, de manera que sea posible determinar si una fórmula proposicional cualquiera es verdadera o falsa formalmente.

De todo lo dicho puede deducirse la importancia de las tautologías. Por ello, podemos incluso afirmar que: *"La lógica es el estudio de las tautologías"*.

INFERENCIA LÓGICA

Hacer inferencia consiste en obtener, a partir de un conjunto de proposiciones, llamadas **premisas**, que se aceptan como verdaderas, otra proposición, llamada **conclusión**, que también será verdadera.

Las premisas pueden ser:

a) Verdades obtenidas de la experiencia, tal como ocurre en las ciencias fácticas,
b) Verdades presupuestas, que son llamadas **axiomas** o
c) Verdades previamente demostradas, que son llamadas **teoremas.**

Para poder llegar a la conclusión a partir de las premisas, es necesario utilizar una serie de reglas que llamamos **reglas de inferencia**.

Al proceso de obtener una conclusión verdadera a partir de las premisas, que también lo son, utilizando reglas de inferencia, se le llama **razonamiento deductivo.**

La lógica se encarga, entonces, de proporcionarnos los criterios que nos permitan establecer la validez de estos razonamientos. Tales criterios sólo deben atender a la forma en que ellos se presentan, independientemente del contenido de las proposiciones que los constituyen.

Dado que las tautologías son ciertas, no por el contenido de las proposiciones, sino justamente por la forma en que se combinan las proposiciones, podemos darnos cuenta del muy importante papel que ellas van a jugar en la inferencia, precisamente por estar desprovistas de contenido empírico.

LEYES DE LA LÓGICA

Toda fórmula tautológica es una **ley de la lógica proposicional**. En tal sentido, éstas constituyen las bases teóricas que dan fundamento a las reglas de razonar correctamente, las cuales hemos llamado reglas de inferencia.

De tal modo que, sí un razonamiento deductivo, constituido por las premisas $\{P_1, P_2, \ldots, P_n\}$ y la conclusión 'C', puede expresarse mediante la implicación $(P_1 \,\&\, P_2 \,\&\ldots\&\, P_n) \Rightarrow C$, diremos que se trata de un **razonamiento correcto o válido**. Recordemos que ya se había definido la implicación como una condicional que solo podía tomar valores verdaderos y por tanto representaba una tautología.

En consecuencia, para afirmar que una conclusión es verdadera, partiendo de la verdad de unas premisas, es necesario y suficiente que el condicional que se obtiene colocando como antecedente la conjunción de todas las premisas y como consecuente a la conclusión resulte en una tautología.

Alguna de las reglas de inferencia más importantes para establecer la validez de un razonamiento son:

REGLA DE INFERENCIA	FORMA
Modus Ponendo Ponens (P.P.). Se traduce como "método que afirma afirmando".	$P \rightarrow Q$ $\underline{P}$ $\therefore Q$
Modus Tollendo Tollens (T.T.). Método que niega negando.	$P \rightarrow Q$ $\underline{\neg Q}$ $\therefore \neg P$
Modus Tollendo Ponens (T.P.). Método que afirma negando.	$P \vee Q$ $\underline{\neg P}$ $\therefore Q$ $P \vee Q$ $\underline{\neg Q}$ $\therefore P$
Silogismo Hipotético (S.H.)	$P \rightarrow Q$ $\underline{Q \rightarrow R}$ $\therefore P \rightarrow Q$
Silogismo Disyuntivo (S.D.)	$P \rightarrow R$ $Q \rightarrow S$ $\underline{P \vee Q}$ $\therefore R \vee S$
Doble Negación (D.N.)	$\underline{P}$ $\therefore \neg(\neg P)$
Simplificación (S)	$\underline{P \,\&\, Q}$ $\therefore P$ $\underline{P \,\&\, Q}$ $\therefore Q$
Conjunción (C)	P $\underline{Q}$ $\therefore P \,\&\, Q$
Adición (A)	$\underline{P}$ $\therefore P \vee Q$