

Korszerű vizsgálati módszerek labor jegyzőkönyv

Compton-effektus vizsgálata

CSÖRNYEI GÉZA

Eötvös Loránd Tudományegyetem
Fizika BSc III. évfolyam



'C' mérőcsoport

Mérés dátuma: 2018.04.05.

Mérés vezetője: Csanád Máté

1. Bevezetés

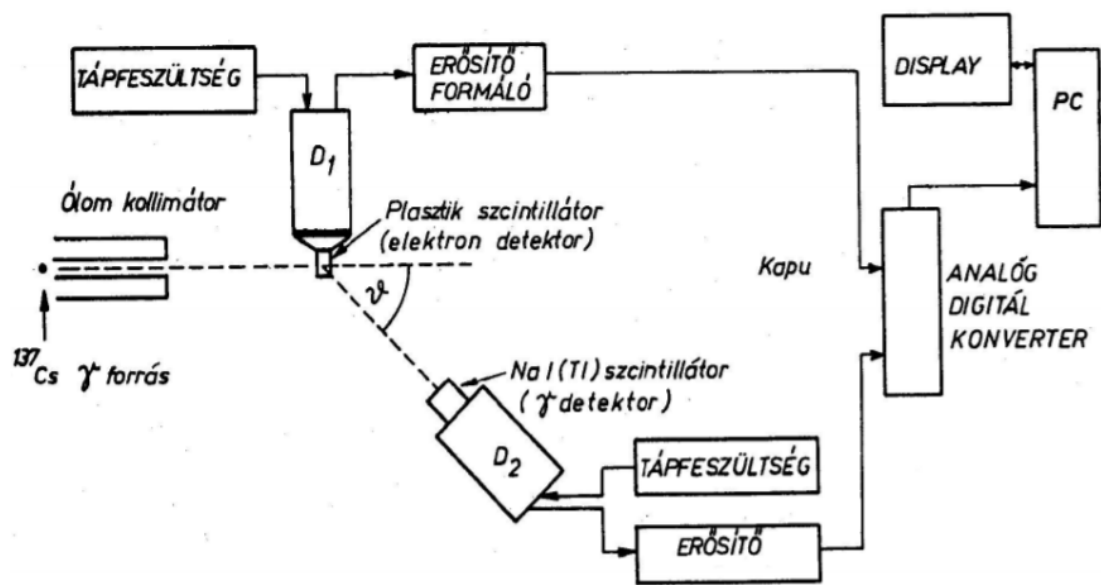
Mérésünk során a Compton-effektus hatáskeresztmetszetének és energiájának szögfüggésének vizsgálatát tűztük ki célul, mellyel az elméleti számításokat voltunk hivatottak alátámasztani. A mérés és kiértékelés során külön figyelmet fordítottunk a számolt értékek hibáinak minél jobb becslésére, így az alapvetően nem becsült szisztematikus hibák minél jobb figyelembevételére is.

2. Méréshez használt eszközök

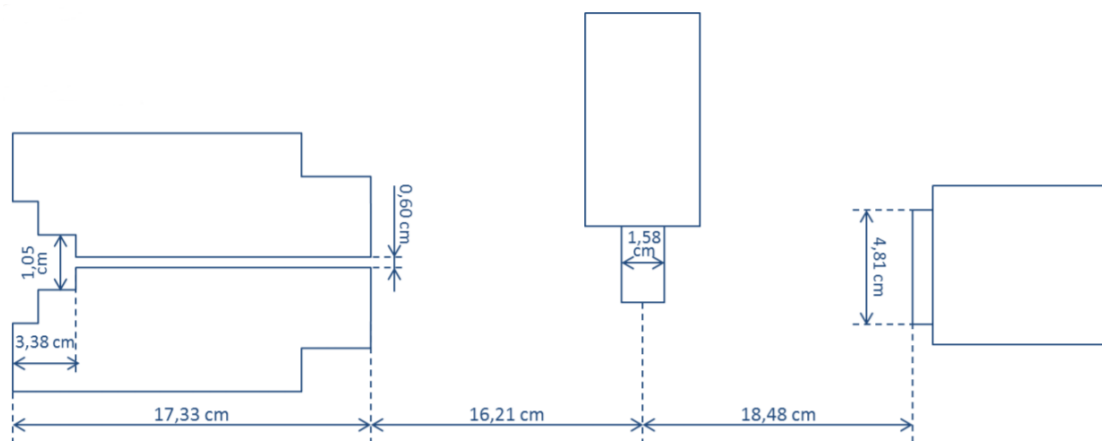
A mérés során használt eszközöket és a fő funkcióikat az alábbiakban sorolom fel:

- ^{137}Cs izotóp, mint γ -foton forrás. A β^- bomlásából származó ≈ 662 keV energiájú fotonjainak szóródását fogjuk vizsgálni. A ^{137}Cs bomlási sémája a 3 . ábrán látható
- Plasztik szcintillációs detektor, mint szóró anyag, valamint a koincidencia-mérés során használt egyik detektor
- NaI szcintillátor, a szórt fotonok detektálásához. Ezen detektor a kiindulási fotonnyaláb irányához képest tetszőleges szögbe elforgatható volt, ezzel vizsgálhattuk a szórt részecskék energiájának szögfüggését
- Feldolgozó egységek: sokcsatornás analízátor (MCA), analóg-digitál konverter
- Számítógép a mérés vezérléséhez, adatok mentéséhez és az előzetes kiértékelés elvégzéséhez

A mérési elrendezés az 1 . ábrán, míg geometriai méreteket feltüntetve, vázaltosan a 2 . ábrán látható.

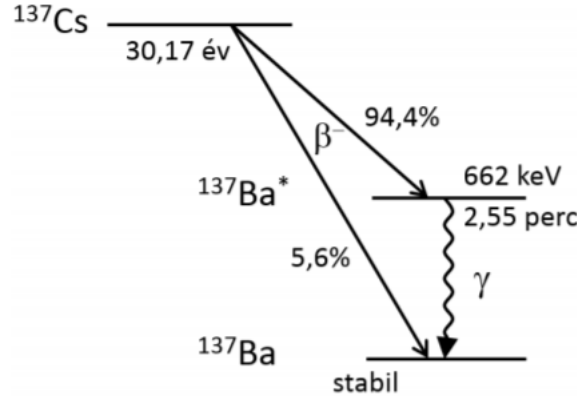


1. ábra. A mérési elrendezés az alkotóelemek megnevezéseivel



2. ábra. A mérési elrendezés vázlata, az egyes mérőeszközök geomteriai adataival

A ^{137}Cs bomlási sémája az alábbi ábrán látható:



3. ábra. A ^{137}Cs bomlási sémája

3. Rövid elméleti összefoglaló

A Compton-effektus a fotonok az atomok lazán kötött elektronjain történő szóródását írja le, melyet elsőként 1922-ben figyeltek meg. A jelenség során megváltozik a szóródó fotonok hullámhossza, mely a klasszikus képben elképzelhetetlen, így a jelenség korábbiaktól különálló leírást igényelt. Mint ismeretes a fotonok energiájára vonatkozó

$$E = \frac{hc}{\lambda}$$

képlet alapján, ahol h a Planck-állandó, c a fénysebesség és λ a foton hullámhossza, a hullámhosszváltozás energiaváltozással is jár.

A szóródás során bekövetkező energiaváltozás leírásához a foton és az elektron ütközése során megmaradó mennyiségek, az impulzus és az energiai, tömörebben a négyesimpulzus megmaradását kell vizsgálnunk. A teljes levezetést itt nem részletezem, ez megtalálható [1]-ben. A számolás eredményeképp megkapjuk a szóródó foton energiájának a szóródás szögétől való függését:

$$\frac{E_1}{E_0} = \frac{1}{1 + \xi(1 - \cos \Theta)} = P,$$

ahol $\xi = \frac{h\nu_0}{m_e c^2}$, E_0 a bemenő foton energiája, mérésünk során 662 keV, E_1 a szórt foton energiája, valamint Θ a szóródás szöge. A fenti képlet alapján a hullámhosszváltozást a

$$\lambda' - \lambda = \frac{h}{m_e c^2}(1 - \cos \Theta)$$

képlet írja le.

A szóródás szögeloszlását, azaz az elméleti differenciális hatáskeresztmetszetet a Klein-Nishina formula írja le, mely a fenti jelöléssel:

$$\frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2}(P - P^2 \sin^2 \Theta + P^3),$$

ahol r_0 a klasszikus elektronsugár, mely a Bohr-elméletből számolható. A mérésünk során ezen összefüggéseket fogjuk megvizsgálni.

4. Mérés menete, kiértékelés

4.1. Aktivitás és Dózis meghatározása

Mint fentebb azt leírtam, mérésünk során röntgenfoton forrásként ^{137}Cs izotópot használtunk, melynek aktivitását 1963. július 1.-i dátumon ismerjük pontosan (hiteles mérési érték), számszerűleg 486.55 MBq. A mérés időpontjában mérhető aktivitás számolásához ismernünk kell az izotóp felezési idejét, mely $T = (11018 \pm 9.5)\text{nap}$. A mérésünket 2018. április 5.-én végeztük, vagyis a fenti dátum óta eltelt napok száma 20002.2. Az aktivitást az exponenciális bomlástörvény felhasználásával tudjuk számolni:

$$A(t) = A_0 2^{-\frac{t}{T}}.$$

Ez alapján a mérés időpontjában a forrás aktivitása $A(t_{\text{mérés}}) = 138.244 \text{ MBq}$.

A sugárzás által másodpercenként közvetített energia meghatározható az ismert aktivitás, a fotonon energiája, valamint a folyamat hatásfokának (mekkora valószínűséggel keletkezik röntgen foton a bomlás során, $\eta \approx 94\%$) szorzataként:

$$\dot{E} = A(t)\eta E_\gamma = 1.387 \cdot 10^{-5} \frac{\text{J}}{\text{s}}$$

A dózis számítását a következő képlet segítségével végezzük:

$$D = \frac{\dot{E} \cdot t}{m}$$

ahol a t a labor mérésének időtartama másodpercben, ez körülbelül 4 órának vehető, vagyis a $t=14400 \text{ s}$, m az elnyelő test tömege. Ez alapján meg tudjuk határozni, mekkora dózist kapott volna szervezetünk, ha különböző távolságokra lettünk volna a forrástól. Az elnyelő test felületét 0.5 m^2 -nek vettük. A számolást három esetre végezzük el: ha inkorporáció történik (lenyeljük a forrást), ha 1 m-re állunk tőle árnyékolás nélkül, majd ólomvédelemmel.

A számításokat a következő képletekkel végeztük:

$$D = \frac{\dot{E} \cdot t}{m}$$

$$D = \frac{\dot{E} \cdot t}{m} \cdot \frac{0.5}{4\pi r^2}$$

$$D = \frac{\dot{E} \cdot t}{m} \cdot \frac{0.5}{4\pi r^2} \cdot e^{-10},$$

ahol a második faktor a beeső fluxushányadot írja le, az exponenciális tag pedig az árnyékolást jellemzi, ez által vesszük figyelembe az ólomárnyékolást.

-	Géza dózis [mSv]	Balázs dózis [mSv]	Bálint dózis [mSv]
D (inkorporáció)	1.884	3.170	2.851
D (1m)	0.075	0.126	0.113
D (1m+Pb)	$3.436 \cdot 10^{-6}$	$5.726 \cdot 10^{-6}$	$5.15 \cdot 10^{-6}$

1. táblázat. Számított elnyelt dózisok a laborgyakorlat résztvevőire számolva

A sugárforrás és a kollimátor geometriájának segítségével (lásd 2 . ábra) kiszámítható a kollimátort elhagyó részecskék száma is:

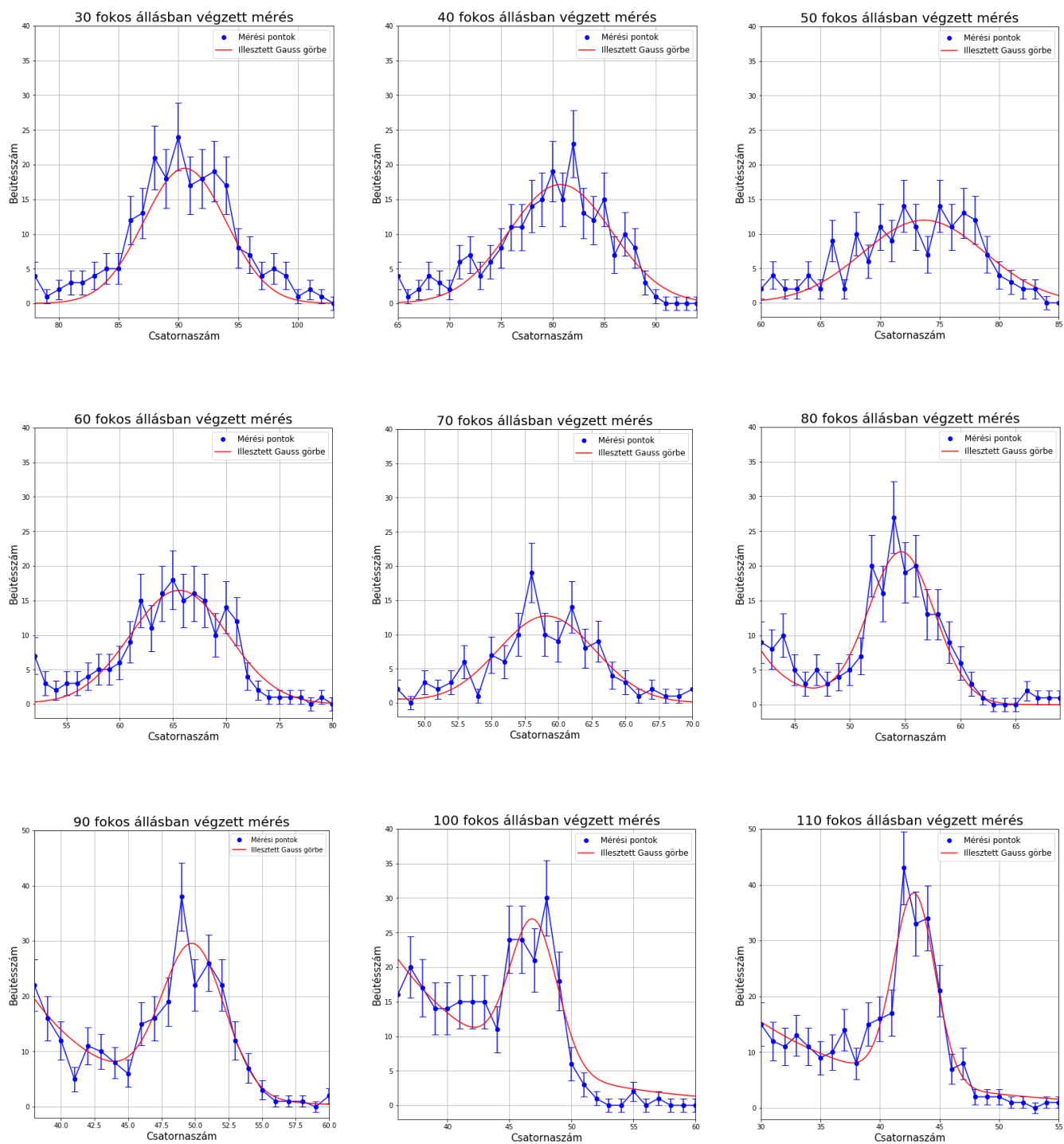
$$N_{fotonszam, \theta=0} = \frac{A \cdot F \cdot 1s}{4\pi L^2} = \frac{138244000 \cdot 0.3^2}{4 \cdot (17.33 - 3.38)^2} = 15984,$$

ahol A a sugárforrás aktivitása, F pedig a kollimátor nyílásának keresztmetszete.

4.2. Az energia szögfüggésének vizsgálata

A Compton-effektus során szóródott foton energiájának szögfüggésének vizsgálatához a detektor rendszert koincidenencia módba állítottuk. Ez azt jelenti, hogy csak azokat a részecske detektálásokat fogjuk számolni, melyek mind a két detektort megszólaltatták, ezzel csak a Compton-effektus során szóródott fotonokra szűrtük a beérkező részecskéket. A mérés során sokcsatornás analizátorral számláltuk a fotonokat energia szerint, ezzel lehetőségünk nyílt az energia szögfüggésének vizsgálatára. A méréseket 30° és 110° között végeztük 10° -os lépésközzel. Minden szög esetén 10-15 perces mérést végeztünk. A kapott spektrumokban látható, a Compton-effektushoz tartozó csúcsokra Gauss-görbét illesztettünk exponenciális háttérrel. Az illesztések a 4 . ábrákon láthatók, míg az illesztésből származó paramétereket a 2 tartalmazza. Az illesztett függvény alakja:

$$f(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} + a \cdot e^{-bx+c}$$



4. ábra. A Compton-effektus miatt létrejött csúcsok illesztései, exponenciális háttér feltételezése mellett

Illesztési paraméterek							
Θ [°]	Idő [s]	x_0	Δx_0	σ	$\Delta\sigma$	A	ΔA
30	873	90.554	0.204	3.450	0.204	168.314	8.616
40	1068	80.757	0.330	4.985	0.331	214.058	12.267
50	978	73.689	0.490	5.14	0.505	154.213	12.861
60	1000	65.589	0.287	4.603	0.288	190.004	10.282
70	700	59.118	0.381	3.623	0.382	115.223	10.498
80	1009	54.674	0.249	2.993	0.249	164.252	11.853
90	1228	49.855	0.249	2.215	0.249	143.305	13.926
100	1044	46.941	0.222	1.902	0.222	99.928	10.085
110	963	42.874	0.129	1.747	0.129	147.674	9.413

2. táblázat. Az egyes Gauss-görbék illesztési paraméterei. Az exponenciális háttér illesztési paramétereit itt nem soroltuk fel, mivel ezek a további kiértékeléshez nem szükségesek.

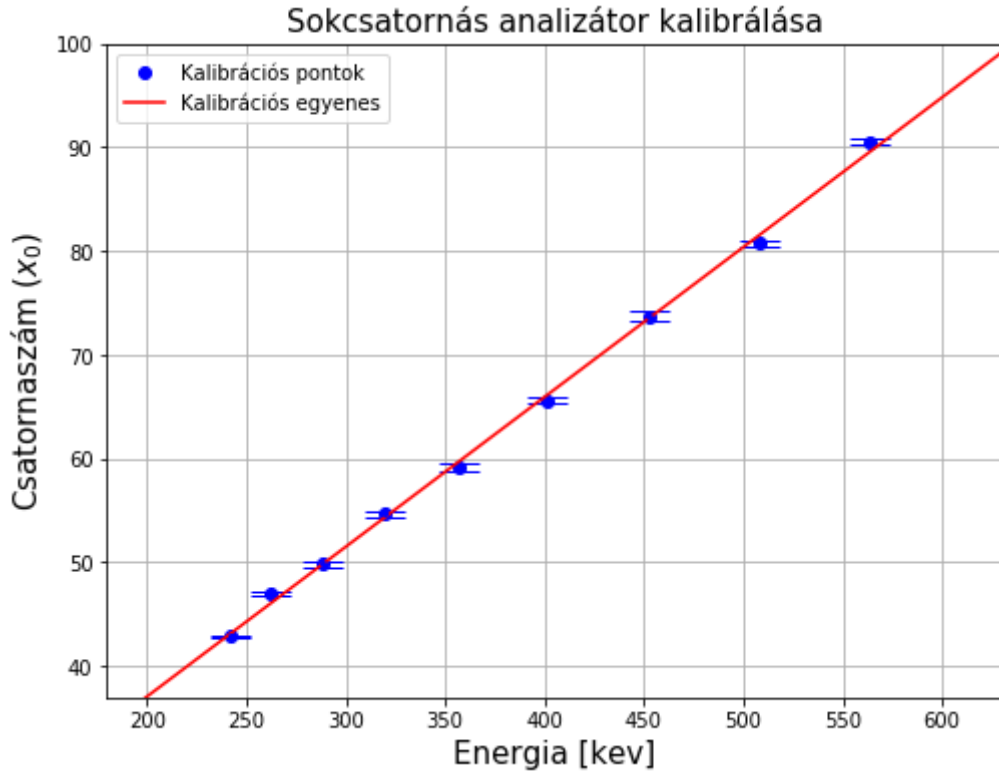
Az elméleti összefoglalóban leírt 3 . képlet alapján ki tudjuk számolni az egyes csúcsokhoz tartozó energiákat, ezzel kalibrálni tudjuk a sokcsatornás analizátort. A kalibráláshoz használt számolt, illetve az illesztésből kapott értékeket a 3 . táblázat tartalmazza.

x_0	Δx_0	E [keV]
90.554	0.204	564.094
80.757	0.330	508.024
73.689	0.490	452.567
65.589	0.287	401.760
59.118	0.381	357.372
54.674	0.249	319.724
49.855	0.249	288.390
46.941	0.222	262.650
42.874	0.129	241.731

3. táblázat. Kalibrációs egyenes illesztéséhez használt értékek

A fent látható pontokra $a \cdot x + b$ egyenletű egyenest illesztettünk (az energia függvényében, hogy a hibasávok a konvenciónak megfelelően jelenjenek meg), mely illesztés a 5 . ábrán látható. A kalibrációs egyenes egyenlete:

$$f(x) = (0.144 \pm 0.002) \frac{1}{\text{keV}} \cdot x + (8.212 \pm 0.824).$$



5. ábra. A sokcsatornás analízátor kalibrációs egyenese

A kapott együtthatókból kiszámítható a csatornaszám-energia átváltás két együtthatója is, a kalibrációs egyenes invertálásával. Eszerint, a kalibrációs egyenes két paraméterét a -val és b -vel jelölve az átváltáshoz szükséges két paraméter $A \cdot f + B = x$ alak esetén

$$A = \frac{1}{a} \quad B = -\frac{b}{a}$$

alakban állnak elő. Ez alapján az átváltási paraméterek:

$$A = 6.929 \pm 0.101 \text{ keV}$$

$$B = -56.906 \pm 5.713 \text{ keV}$$

Ezen értékek segítségével visszaszámolhatjuk a mért csúcsok helyeit energiaértékekre és leellenőrizhetjük a kalibrációhoz használt energia-szög összefüggés helyességét. Az elméleti és számolt energiaértékek, valamint a hozzájuk az alábbi

$$\chi^2 = \sum_i \frac{(E_{\text{mért},i} - E_{\text{elméleti},i} + \alpha \delta E_{\text{szisztematikus},i})^2}{\Delta E_{\text{mért},i}^2}$$

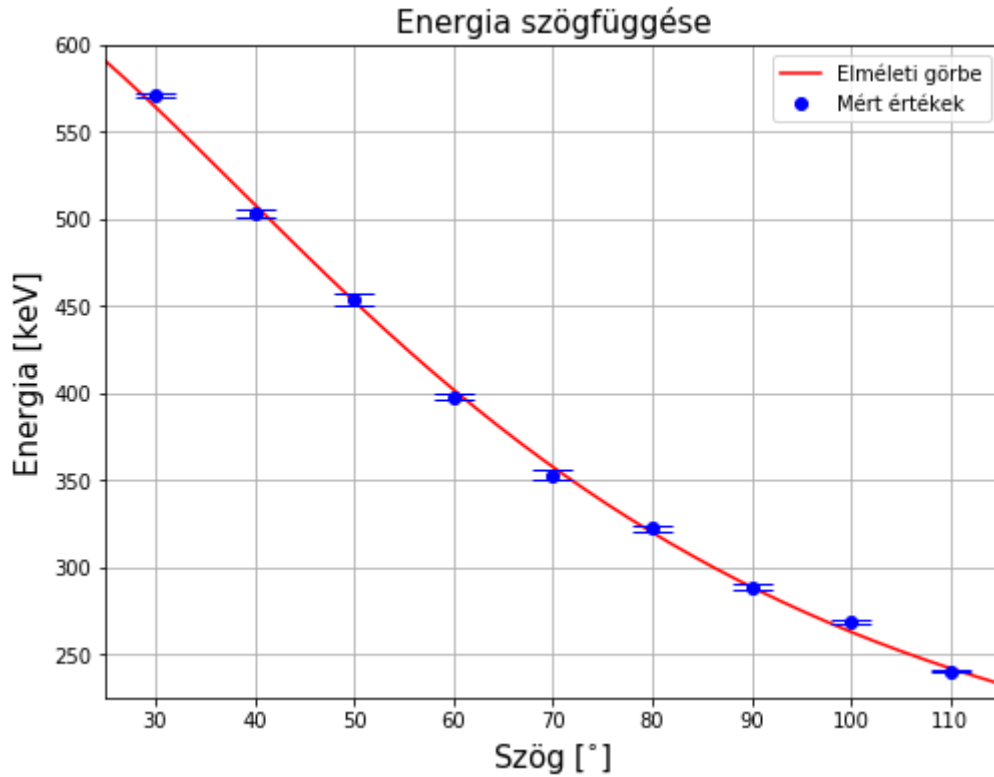
képlettel számolt értékeket a 4. táblázat tartalmazza.

$\Theta[^\circ]$	$E_{\text{számolt}} [\text{keV}]$	$E_{\text{mért}} [\text{keV}]$	χ^2
30	564.094	570.573 ± 1.413	21.012
40	508.024	502.681 ± 2.284	5.476
50	452.567	453.705 ± 3.397	0.112
60	401.760	397.583 ± 1.993	4.396
70	357.372	352.743 ± 2.640	3.077
80	319.724	321.945 ± 1.728	1.649
90	288.390	288.552 ± 1.722	0.086
100	262.650	268.365 ± 1.536	13.835
110	241.731	240.181 ± 0.891	3.032

4. táblázat. Számolt és mért energiaértékek összevetésére szolgáló táblázat. A hibák az illesztésből és a kalibrációs paraméterek hibáiból lettek számolva.

A χ^2 -ek összegét kiszámolva közelítőleg 52.6-t kapunk, ez meglehetősen nagy érték, az ennek megfelelő konfidenciaszint (9-2) szabadság fokú rendszerre a *scipy* programcsomag függvénye alapján mindössze $4.448 \cdot 10^{-5}\%$, amely meglehetősen alacsony. Ennek oka vélhetően a beütésszám mérésekor a rendszerbe jutó statisztikus hiba, valamint az illesztési hibák összessége. Hosszabb időtartamú mérés esetén ezek mind a jelen mérésnél tapasztaltnál kisebbek lennének, ezáltal a konfidencia szint is valószínűleg nagyobb lenne. Fontos megjegyezni, a χ^2 számolásakor $\alpha=0$ -át vettünk, de a szisztematikus hibák közel sem elhanyagolhatók, számításaink alapján közelítőleg 7.1 keV-es értékű, mely önmagában elegendő a mérés elrontásához.

Ábrázoltuk a mért energiákat a szög függvényében, majd összevetettük az elméleti görbével. Az ábrázolás a 6 . ábrán látható. Látható, hogy az általunk mért értékek közelítőleg az elméleti görbét követik.



6. ábra. Az energia szögfüggésének ábrázolása

4.3. A Klein-Nishina formula vizsgálata

A mérésekből illesztéssel kapott beütésszámok felhasználásával lehetőségünk nyílik a Klein-Nishina formula vizsgálatára. Ehhez az

$$\frac{1}{\eta} \cdot \frac{\Delta N}{\Delta t} = \frac{1}{K} \cdot \frac{d\sigma}{d\Omega} = \frac{r_0^2}{2K} (P - P^2 \sin^2 \Theta + P^3)$$

összefüggést használjuk, melynek bal oldalán a mérésekből származtatható mennyiségek állnak (ezen kifejezés levezetése megtalálható [1]-ben), míg a jobb oldalon a teljesen elméleti úton számított formula áll, a már korábban bevezetett jelölések alkalmazásával. A számításainkhoz még fel kell használnunk a detektálás hatásfokának energiafüggését is, melyet az alábbi képlettel írhatunk le:

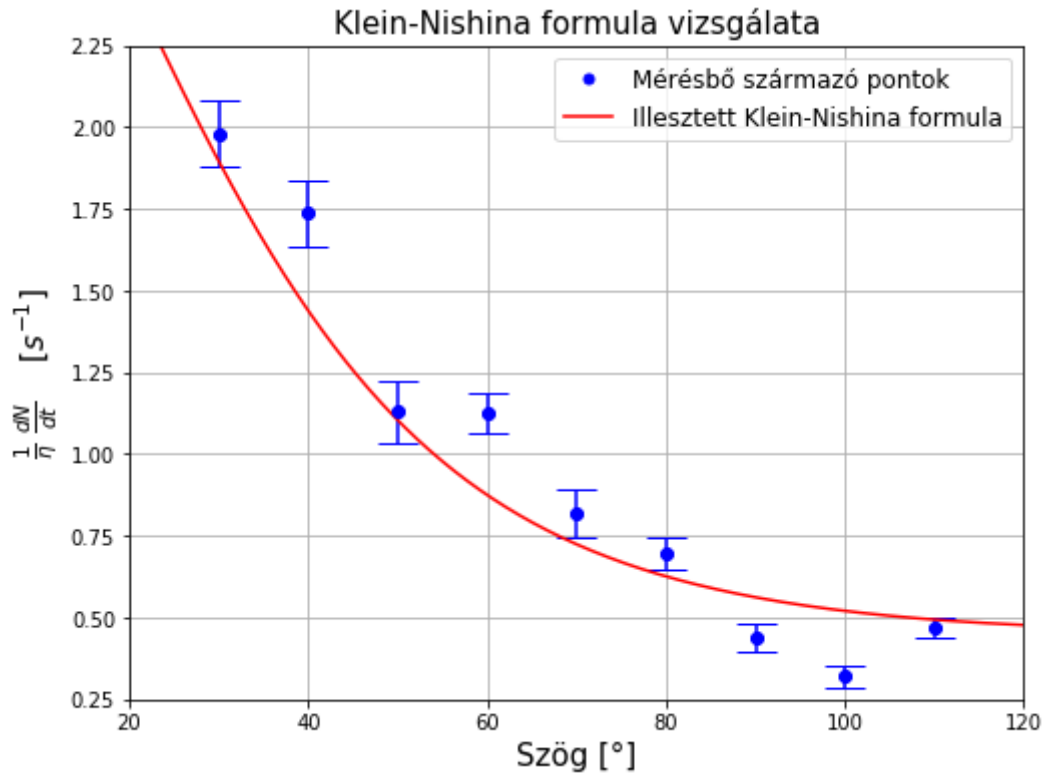
$$\eta = 0.98e^{-4.7E} + 0.05E$$

Mindezek figyelembevételével a mérésekből számított értékeket a 5 . táblázat tartalmazza.

$\Theta [^\circ]$	η	$\frac{1}{\eta} \frac{dN_{mrt}}{dt} [\frac{1}{s}]$	$\Delta \frac{1}{\eta} \frac{dN_{mrt}}{dt} [\frac{1}{s}]$	Illesztett függvény $[\frac{1}{s}]$	χ^2
30	0.097	1.980	0.101	1.895	0.703
40	0.115	1.737	0.100	1.439	8.975
50	0.139	1.131	0.094	1.104	0.083
60	0.168	1.128	0.061	0.875	17.205
70	0.201	0.821	0.075	0.724	1.661
80	0.234	0.695	0.050	0.626	1.913
90	0.267	0.437	0.042	0.562	8.695
100	0.298	0.321	0.032	0.520	37.987
110	0.327	0.469	0.030	0.494	0.662

5. táblázat. A Klein-Nishina formula vizsgálatához készített táblázat

Az illesztésből a fent K -val jelölt mennyiség értékére 1.711 ± 0.124 -et kaptunk $\chi^2 = 77.9$ mellett, ami azonban óriási érték. Ilyen nagy hiba mellett a konfidencia szint mindössze $1.302 \cdot 10^{-11}\%$, mely erőteljesen cáfolat jellegű. Mindazonáltal észrevehető a 7. ábráról, hogy a mérési pontok alapvetően egy meredekebb trendet követnek, ezt csupán a 90° és 100° -hoz tartozó értékek rontják el erőteljesen. Ha ezen két értéket hibásnak bélyegezzük és újraszámoljuk a táblázat értékeit, akkor az alábbiakat kapjuk (6. táblázat).

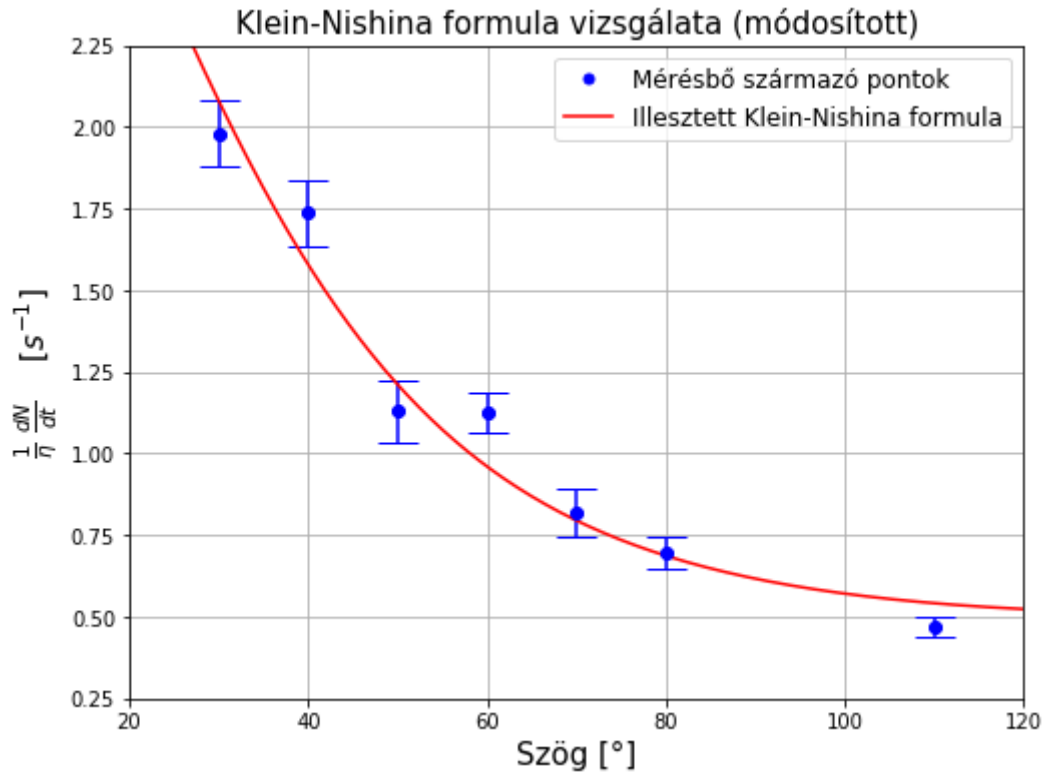


7. ábra. A hatáskeresztmetszet értékekre történő illesztés

$\Theta [^\circ]$	η	$\frac{1}{\eta} \frac{dN_{mrt}}{dt} [\frac{1}{s}]$	$\Delta \frac{1}{\eta} \frac{dN_{mrt}}{dt} [\frac{1}{s}]$	Illesztett függvény $[\frac{1}{s}]$	χ^2
30	0.097	1.980	0.101	2.079	0.954
40	0.115	1.737	0.100	1.578	2.539
50	0.139	1.131	0.094	1.211	0.720
60	0.168	1.128	0.061	0.960	7.599
70	0.201	0.821	0.075	0.795	0.122
80	0.234	0.695	0.050	0.687	0.030
110	0.327	0.469	0.030	0.542	5.835

6. táblázat. A Klein-Nishina formula vizsgálatához készített táblázat a két hibásnak bélyegzett pont kihagyásával

Az így számolt K paraméter értéke 1.877 ± 0.078 lett $\chi^2 = 17.8$ -os érték mellett, ami az előzőnél sokkal jobb, ám még mindig cáfolat jellegű 0.676 %-os konfidenciaszintet eredményez. Az ezen pontokra kapott illesztés (8 . ábra) már abból a szempontból is jobban megfelel, hogy nagyjából egyenlő arányban oszlanak meg a pontok az illesztett görbe két oldala között. Jelen konfidencia szint mellett azt viszont bizonyosan elértük, hogy nem lehet 3σ bizonyossággal cáfolni az elméletet.



8. ábra. A hatáskeresztmetszet értékekre történő újraillesztés

5. Diszkusszió

Bár a mérésünk során az elméleti trendeket nagyjából követő mérési értékeket kaptunk, igazolni nem tudtuk azokat, ugyanis az illesztésből és magának a mérőrendszerből származó hibának összességéből az igazolást megghiúsító mérési hiba állt elő. A mérésünk pontosabb lehetett volna, amennyiben hosszabb ideig végeztük volna, valamint ha lehetőségünk lett volna a mérőműszer pontosabb, nem csupán szemmérték alapján történő beállítására.

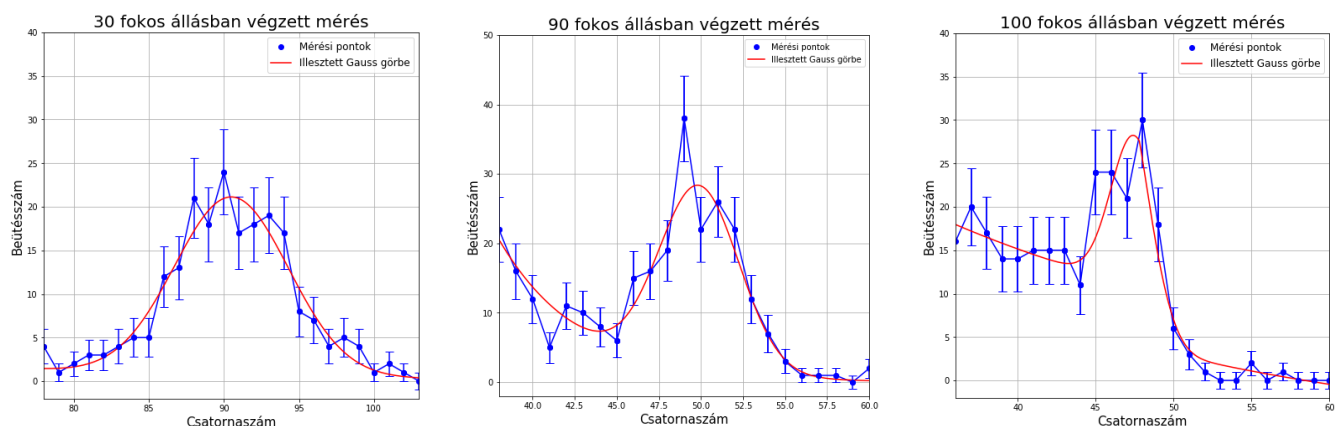
Hivatkozások

[1] : *Méréshez kiadott jegyzet:*

<http://atomfizika.elte.hu/kvml/compton/compton.pdf>

Függelék

Megpróbálkoztunk a mérés újrakiértékelésével, illetve a az egyes mérésekből kapott csúcsok pontosabb megillesztésével, azonban hosszú távon ez nem javított a kiértékelés eredményén. Legfőképp a 30° , 90° és 100° fokos állások eseteiben történő illesztéseket igyekeztem feljavítani, az így készült ábrák alább láthatók: Az így kapott illesztési paraméterek:



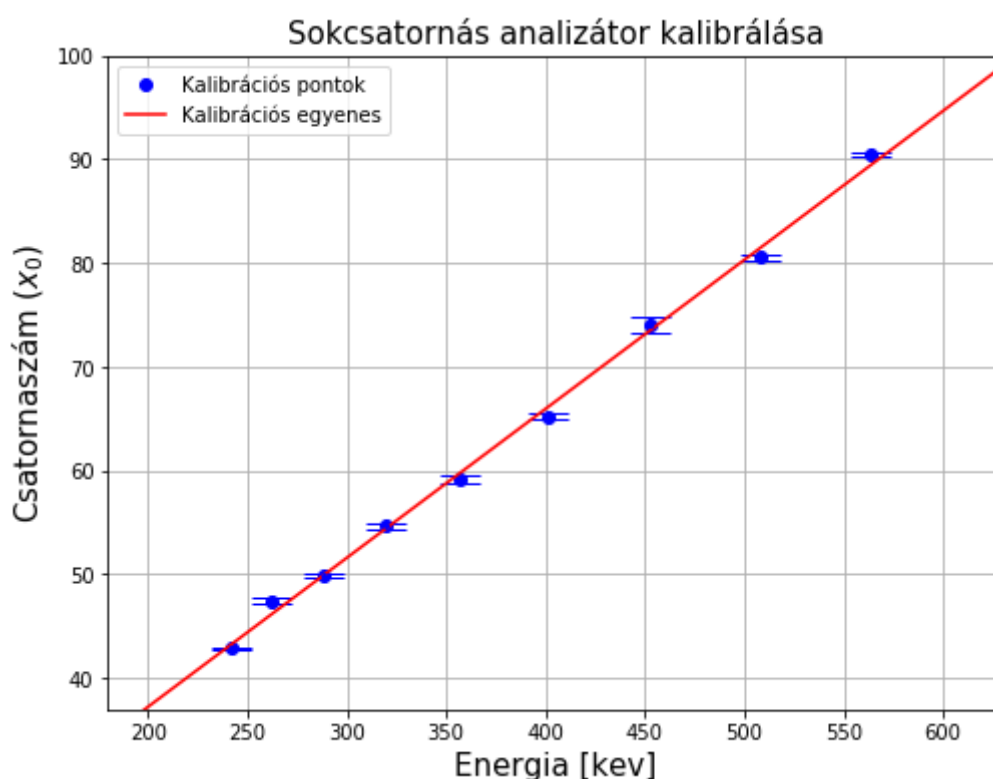
$\Theta [^\circ]$	x_0	Δx_0	σ	$\Delta \sigma$	A	ΔA
30.0	90.515	0.200	3.797	0.200	195.041	8.894
90.0	49.874	0.190	2.376	0.149	157.811	11.310
100.0	47.453	0.286	1.470	0.233	63.405	10.175

7. táblázat. Javított illesztésből kapott paraméterek

A 100°-os szöghöz tartozó illesztés esetén látványosan nem volt elegendő az exponenciális háttér, a csúcs után sokkal erősebben lecsengő függvényre volt szükség. Többféle függvény kipróbálása után az alábbi illesztése mellett döntöttem:

$$f(x) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-x_0)^2}{2\sigma^2}} + a \cdot e^{-bx+c} - d \cdot \tanh(x-f).$$

Ezzel a függvénnyel lényegében egy d nagyságú ugrást tudtam bevinni az illesztésbe az f -el egyenlő csatornaszám után, miközben az öt szorzó tényező megőrizte a görbe törésmentességét. Fontos, hogy ezt úgy illesztettem, hogy csak a f feletti értékekre legyen jelen ez a levágás, előtte $d = 0$ legyen. Az ok, ami miatt ezen sorokat nem a kiértékeléshez írtam, az a hibák megváltozása volt, ugyanis azok jelentősen megnőttek.



9. ábra. A sokcsatornás analízátor újrakalibrálása

Az új kalibrációs egyenes egyenlete:

$$f(x) = (0.143 \pm 0.002) \frac{1}{\text{keV}} \cdot x + (8.531 \pm 1.063)$$

$\Theta[^\circ]$	$E_{\text{számolt}} [\text{keV}]$	$E_{\text{mért}} [\text{keV}]$	χ^2
30	564.094	571.155 ± 1.261	25.701
40	508.024	501.831 ± 1.974	7.862
50	452.567	456.089 ± 4.510	0.477
60	401.760	394.929 ± 1.553	14.600
70	357.372	352.420 ± 2.271	3.481
80	319.724	321.456 ± 1.466	0.994
90	288.390	288.022 ± 1.096	0.078
100	262.650	271.156 ± 1.633	18.255
110	241.731	239.253 ± 0.717	7.658

8. táblázat. A újraillesztett adatokra történt újrakalibrációval meghatározott energiaértékek

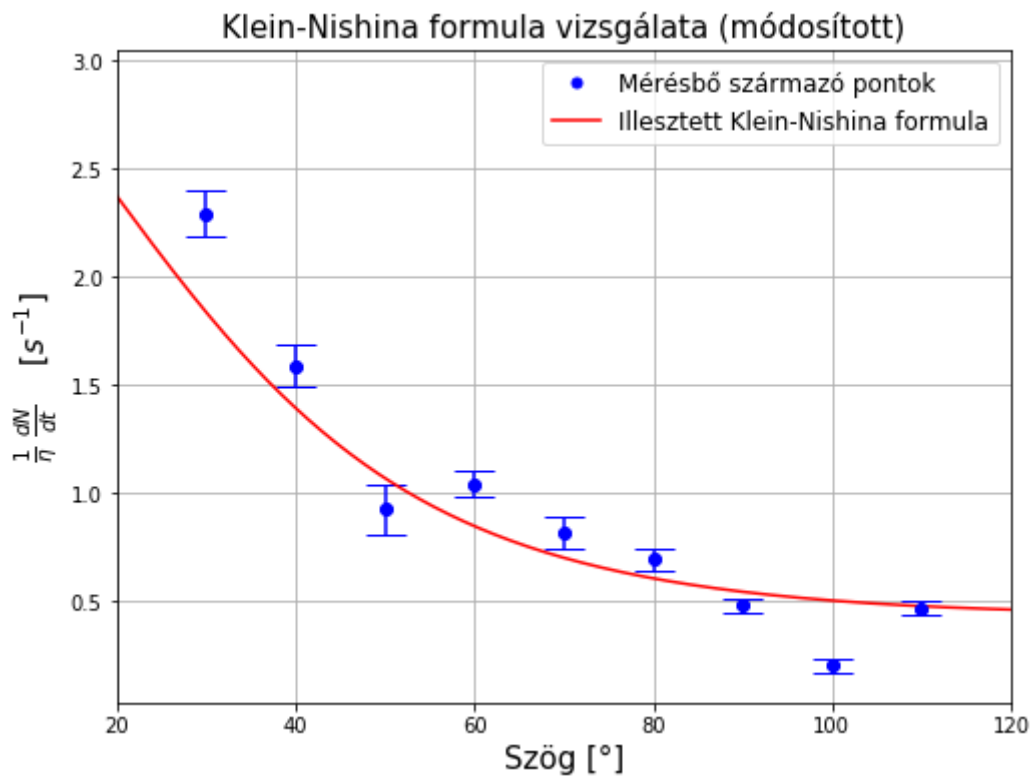
A táblázatban szereplő χ^2 -ek összege 79.1, ami sokkal rosszabb mint a korábban számolt volt. A számolt szisztematikus hiba is megnőtt, a program által számolva 7.420 keV volt az értéke. Ennek okát a mérés során elkövetett hibákban vélem sejteni, ugyanis a csúcsok közepei egyértelműen magasabb csatornaszámok felé találhatók, melyeket ezen illesztések jobban eltaláltak, viszont az adott szögökhez ezeknél kisebb csatornaszámot várnánk. További probléma, hogy a 100°-os mérés újraillesztésénél több új paramétert is bevitettem a rendszerbe, mely szintúgy ronthatta a számítási pontosságot. Ez a Klein-Nishina formula vizsgálatánál még szembeötlőbb volt, ahol ugyanis a számolt értékek:

$\Theta[^\circ]$	η	$\frac{1}{\eta} \frac{dN_{mrt}}{dt} [\frac{1}{s}]$	$\Delta \frac{1}{\eta} \frac{dN_{mrt}}{dt} [\frac{1}{s}]$	Illesztett függvény $[\frac{1}{s}]$	χ^2
30.0	0.097	2.295	0.104	1.838	19.276
40.0	0.115	1.591	0.099	1.395	3.859
50.0	0.139	0.927	0.114	1.071	1.593
60.0	0.168	1.042	0.059	0.849	10.830
70.0	0.201	0.821	0.075	0.703	2.496
80.0	0.234	0.695	0.050	0.607	3.089
90.0	0.267	0.481	0.034	0.545	3.455
100.0	0.298	0.204	0.033	0.505	85.007
110.0	0.327	0.469	0.030	0.479	0.101

9. táblázat. A Klein-Nishina formula újrvizsgálása

A χ^2 értékek látható megugrottak több helyen, főleg 100° esetén, ahol extra illesztési paramétereket vittem a rendszerbe. A konfidencia szint ezen értékek estére ábrázolási pontosságon belül nulla volt.

Elvégeztem az újraillesztést is, de már a χ^2 értékekből is látszik, hogy a korábbinál rosszabb pontosságú értékekről van szó.



10. ábra. A hatáskeresztmetszet értékekre történő újraillesztés

Konklúzióként tehát levonható, hogy bár az illesztések pontosabbak, a számolt értékek rosszabbak, tehát valamely, a mérési értékekhez számolt, illetve hozzárendelt elméleti értékkel lesz a probléma, ugyanis a hibák a pontosabb illesztéssel erősen nőttek, míg a hibásnak történő bélyegzéssel csökkentek. Ez nagy valószínűséggel a mérőműszer pontatlan beállításából származik, mely inkább általunk okozott, mintsem instrumentális eredetű hiba volt.