Probabilidad

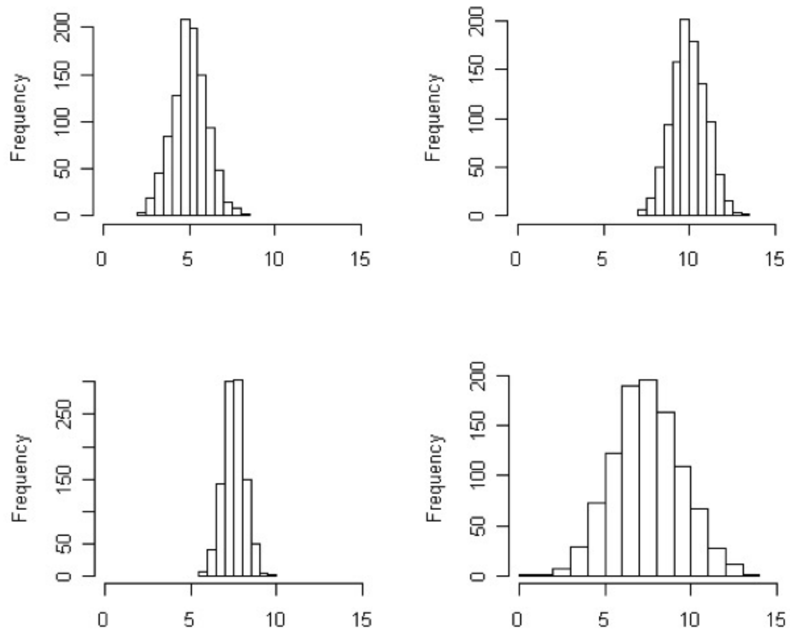
Daniel Fraiman

Maestría en Ciencia de Datos, Universidad de San Andrés

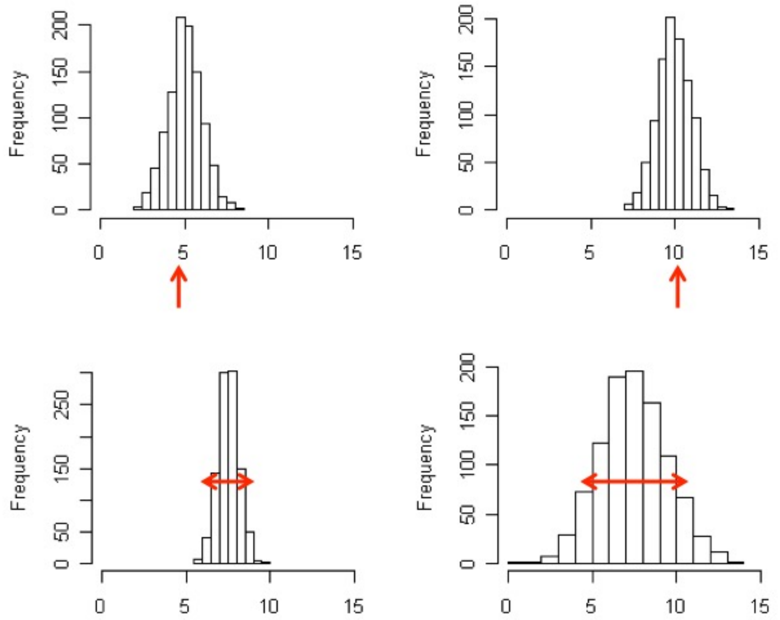
Esperanza y Varianza

- Esperanza: nos dice dónde está “centrada” la variable
- Varianza: nos dice cuán diferentes son los valores que toma.

Esperanza y Varianza

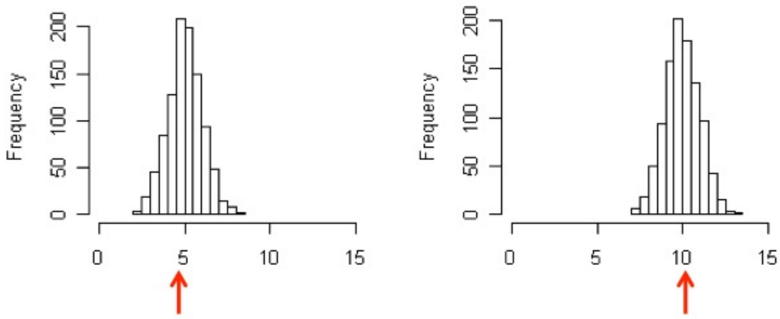


Esperanza y Varianza



Esperanza de variables aleatorias

Esperanza



Esperanza

Variables Discretas

Sea X una v.a. discreta que toma los valores $x_1, x_2, \ldots,$ con probabilidades $p_X(x_1), p_X(x_2), \ldots,$, denominamos esperanza ó valor esperado de X al número

DISCRETAS

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_X(x_i),$$

CONTINUAS

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x . f(x)\, dx$$

Esperanza(DISCRETAS) —> Suma de los valores, multiplicado por su probabilidad

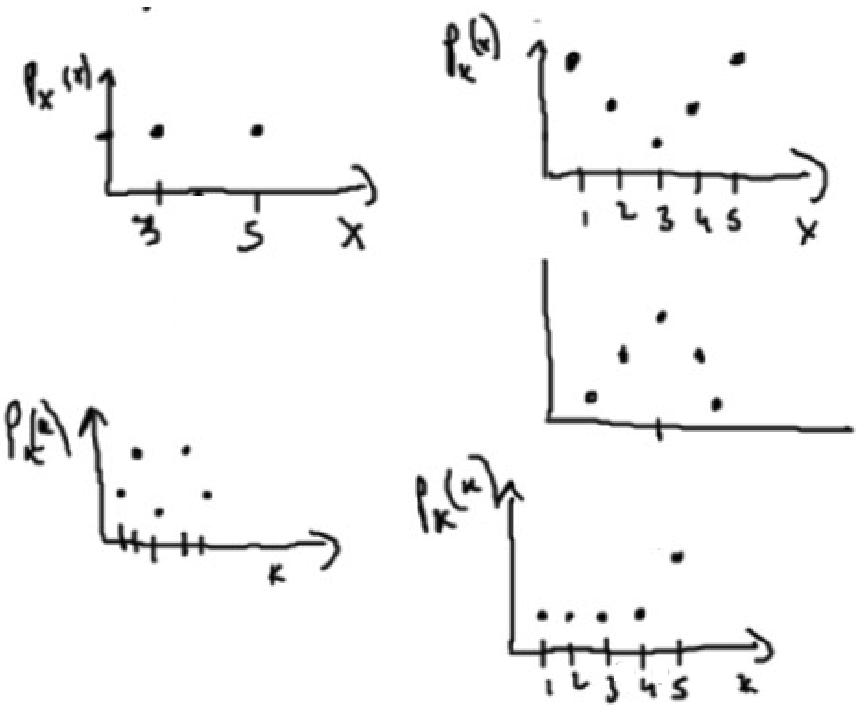
siempre que $\sum_i |x_i| p_X(x_i) < \infty$. Si diverge, la esperanza no está definida.

Ejemplo

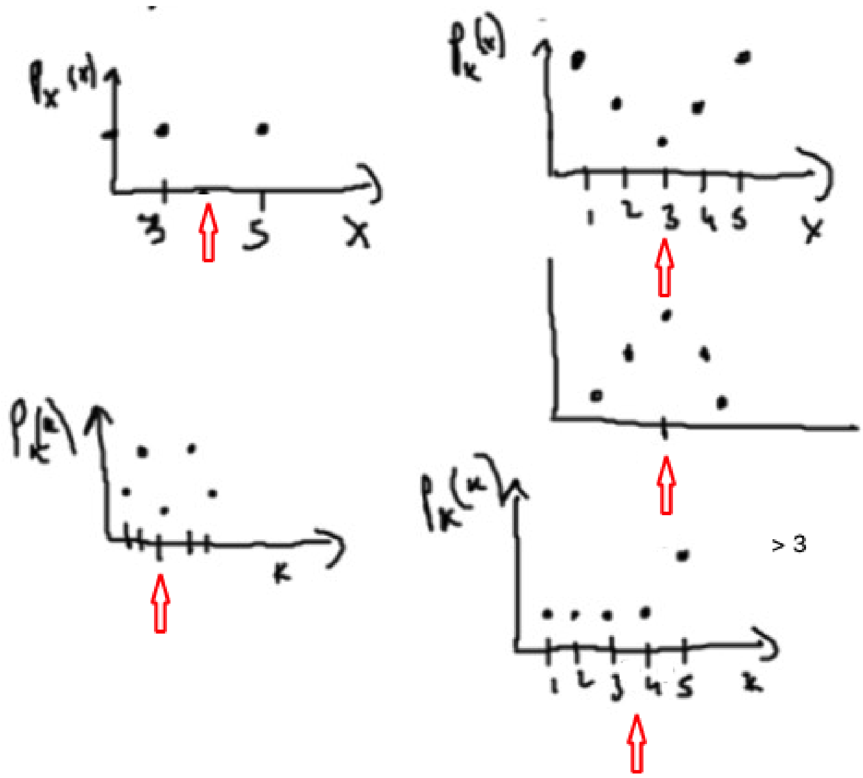
$X = \{0, 2, 4\}$ con $\mathbb{P}(X = 0) = 0{,}2 \mathbb{P}(X = 2) = 0{,}5, \mathbb{P}(X = 4) = 0{,}3$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}3 = 2{,}2$$

Esperanza: “centro de gravedad”



Esperanza: “centro de gravedad”



Esperanza

CONTINUAS

Variables ~~Discretas~~

Sea X una v.a. continua con densidad $f_X(x)$ denominamos esperanza ó valor esperado de X al número

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx,$$

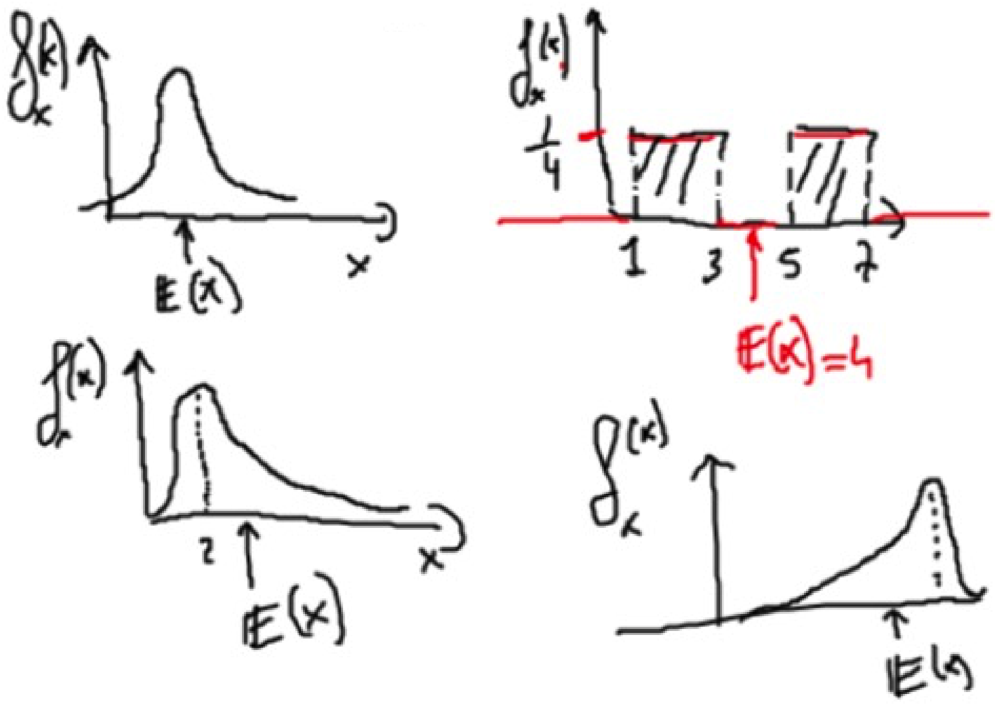
siempre que $\int_{-\infty}^{\infty} |x| f_X(x) dx < \infty$. Si diverge, la esperanza no está definida.

Ejemplo

$f_X(x) = 2 \cdot x \cdot 1_{\{0<x<1\}}$ $f(x) = \begin{cases} 2x * 1 \text{ si } 0 < x < 1 \\ 0 \end{cases}$

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{\infty} x f_X(x) dx = \int_0^1 x 2x dx = 2 \int_0^1 x^2 dx = \frac{2}{3}$$

Esperanza: “centro de gravedad”



Algunos resultados sobre la Esperanza

La esperanza de la suma de varias variables aleatorias, es igual a la suma de las esperanzas de ellas. SIN IMPORTAR SI SON O NO INDEPENDIENTES ambas v.a.

Esperanza de una suma de v.a.

Sean $X_1, X_2, \ldots X_n$ v.a. y $a_0, a_1, \ldots, a_n$ constantes,

$$\mathbb{E}\left(a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i X_i\right) = a_0 + \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{E}\left(X_i\right)$$

Binomial

Sea $X \sim Bi(n, p)$, $X = X_1 + X_2 + \ldots X_n$ con $X_i \sim Bernoulli(p)$

$$\mathbb{E}\left(X\right) = \mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}\left(X_i\right) = np$$

Algunos resultados sobre la Esperanza

Esperanza de una función de una variable aleatoria

Sea X una variable aleatoria y sea $Y = g(X)$.

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(g(X)) = \begin{cases} \sum_i g(x_i) p_X(x_i) & \text{v.a. discreta} \\ \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx & \text{v.a. continua} \end{cases}$$

Ejemplo

Sea $X \sim U[1,3]$, e $Y = X^2$, hallar $\mathbb{E}(Y)$.

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(X^2\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f_X(x) dx = \int_1^3 x^2 \frac{1}{2}\, dx = \frac{26}{6}$$

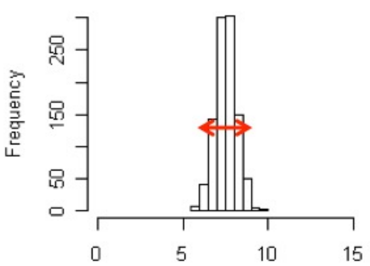
Esperanza

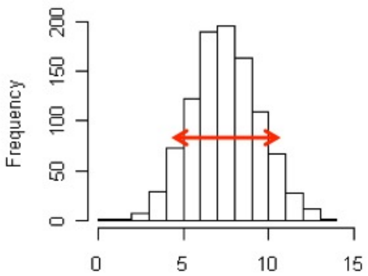
Por las dudas

1. $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.
2. Sean X e Y v.a. $\quad \mathbb{E}(aX + bY + c) = a\mathbb{E}(X) + b\mathbb{E}(Y) + c$.

Varianza de variables aleatorias

Varianza





Varianza

Definición

Si X es una variable aleatoria que tiene esperanza, se define su varianza como el número

$$Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right)$$

siempre que esta esperanza exista.

- $Var(X) \geq 0$.

Definición

Se denomina desviación estándar de X a

$$SD(X) = \sqrt{Var(X)}.$$

Varianza

Ejemplo v.a. discreta

$X = \{0, 2, 4\}$ con $\mathbb{P}(X = 0) = 0{,}2 \mathbb{P}(X = 2) = 0{,}5, \mathbb{P}(X = 4) = 0{,}3$

$$\mathbb{E}(X) = 0 \times 0{,}2 + 2 \times 0{,}5 + 4 \times 0{,}3 = 2{,}2$$

$$\begin{aligned} Var(X) =& \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left((X - 2{,}2)^2\right) \\ =& (0 - 2{,}2)^2 \times 0{,}2 + (2 - 2{,}2)^2 \times 0{,}5 + (4 - 2{,}2)^2 \times 0{,}3 \\ =& 1{,}96 \end{aligned}$$

Varianza

Ejemplo v.a. continua

$X \sim U[0,2]$, entonces $\mathbb{E}(X) = 1$.

$$\begin{aligned} Var(X) =& \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}(X))^2\right) = \mathbb{E}\left((X-1)^2\right) \\ =& \int_0^2 (x-1)^2 \frac{1}{2} dx \\ =& \frac{1}{3} \end{aligned}$$

valor de la funcion densidad
de probabilidad

¿Hace sentido este valor? ¿cuánto vale el desvío estándar?

Esperanzas y Varianzas

X	$\mathbb{E}(X)$	$Var(X)$
Discretas		
$Bernoulli(p)$	p	$p(1-p)$
$Bi(n,p)$	np	$np(1-p)$
$Ge(p)$	$1/p$	$(1-p)/p^2$
$Poisson(\lambda)$	λ	λ
Continuas		
$U[a,b]$	(a+b)/2	$(b-a)^2/12$
$Exp(\lambda)$	$1/\lambda$	$1/\lambda^2$
$\Gamma(\alpha,\lambda)$	α/λ	α/λ^2
$N(\mu,\sigma^2)$	μ	σ^2

Algunos resultados sobre la Varianza

Teorema

Sea X una v.a. con $\mathbb{E}(X)$, se cumple:

- $Var(X) = \mathbb{E}\left(X^2\right) - \mathbb{E}(X)^2$ (otra forma de calcular $Var(X)$)
- $Var(a + bX) = b^2 Var(X)$

Algunos resultados sobre la Varianza

Definición: variables independientes

Decimos que las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes si para todo $x_1, x_2, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ vale

$$P(X_1 \leq x_1 \cap \cdots \cap X_n \leq x_n) = P(X_1 \leq x_1) \cdots P(X_n \leq x_n).$$

Varianza de una suma de v.a *independientes*

Vale siempre que 2 v.a. son INDEPENDIENTES

Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son v.a. *independientes* $\rightarrow Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i)$

Binomial

Sea $X \sim Bi(n, p)$, $X = X_1 + X_2 + \ldots X_n$ con $X_i \sim Bernoulli(p)$

$$Var(X) = Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) = np(1-p)$$

Promedios y Sumas de variables aleatorias

Esperanza y varianza de un promedio

A partir de las variables aleatorias $X_1, X_2, \ldots, X_n$ construimos una nueva v.a.:

$$\overline{X}_n = \frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n} =: \frac{S_n}{n}$$

"suma de "n" variables"

Por las propiedades,

$$\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right) = \frac{\mathbb{E}\left(X_1\right) + \mathbb{E}\left(X_2\right) + \cdots + \mathbb{E}\left(X_n\right)}{n}.$$

$$\mathbb{E}\left(S_n\right) = \mathbb{E}\left(X_1\right) + \mathbb{E}\left(X_2\right) + \cdots + \mathbb{E}\left(X_n\right).$$

Si todas las variables tienen la misma esperanza, $\mathbb{E}\left(X_i\right) = \mu$, entonces

$$\mathbb{E}\left(\overline{X}_n\right) = \mu \quad \text{y} \quad \mathbb{E}\left(S_n\right) = n\mu$$

.

Promedios y Sumas de variables aleatorias

Esperanza y varianza de un promedio

Si además $X_1, X_2, \ldots, X_n$ son independientes entonces,

$$Var(\overline{X}_n) = Var\left(\frac{X_1 + X_2 + \cdots + X_n}{n}\right) = \frac{Var(X_1 + \cdots + X_n)}{n^2}$$
$$= \frac{Var(X_1) + \cdots + Var(X_n)}{n^2}.$$

$Var(S_n) = Var(X_1) + \cdots + Var(X_n)$. Si además todas las variables tienen la misma varianza, $Var(X_i) = \sigma^2$, entonces

$$Var(\overline{X}_n) = \frac{\sigma^2}{n} \quad \text{y} \quad Var(S_n) = n\mu.$$

Nota: Cuanto mas grande es el "n", mas chica sera la varianza de esa v.a.