1 Derivadas

- Sean $a = (a_1, a_2)$ y $b = (b_1, b_2)$, vectores en $\mathbb{R}^2$. Luego,

$$\langle a, b \rangle = a\dot{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

  Planteamos,

$$\frac{\partial \langle a, b \rangle}{\partial b},$$

  derivar un escalar respecto de un vector.

  Se deriva $\langle a, b \rangle$ respecto de cada coordenada de b, obteniendo un vector de derivadas.

$$\frac{\partial \langle a, b \rangle}{\partial b} = \begin{pmatrix} \frac{\partial \langle a,b \rangle}{\partial b_1} \\ \frac{\partial \langle a,b \rangle}{\partial b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = a.$$

- Sean $A = \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$ y $b = (b_1, b_2)$. Donde $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}$ y $b \in \mathbb{R}^2$.

  Luego, $b'Ab = b_1^2 A_{11} + b_2^2 A_{22} + 2b_1 b_2 A_{12} \in \mathbb{R}$. Estoy asumiendo A simétrical luego $A_{12} = A_{21}$.

$$\frac{\partial b'Ab}{\partial b} = \begin{pmatrix} \frac{\partial b'Ab}{\partial b_1} \\ \frac{\partial b'Ab}{\partial b_2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2b_1 A_{11} + 2b_2 A_{12} \\ 2b_2 A_{12} + 2b_2 A_{22} \end{pmatrix} = 2Ab.$$

2 Propiedades de la traza de matrices

- $Tr(AB) = Tr(BA)$
- $Tr(A + B) = Tr(A) + Tr(B)$
- $Tr(kA) = kTr(A)$ para $k \in \mathbb{R}$
- $Tr(B^{-1}AB) = Tr(A)$
- Si A es un matriz simétrica de orden p y sus autovalores son $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, luego,
  - $tr(A) = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$
  - $tr(A^{-1}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{\lambda_i}$

3 Propiedades del rango de matrices

- $rg(AB) \leq \min rg(B), rg(B)$.
- $rg(AA') = rg(A'A) = rg(A) = rg(A')$
- Si A es un matriz simétrica de orden p y sus autovalores son $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$, luego $rg(A) =$ número de autovalores no nulos de A

4 Propiedades de matrices ortogonales

- $|det(A)| = 1$
- Si λ es autovalor de A $1/\lambda$ también lo es.
- Si A es simétrica todas sus potencias son si mismas o la identidad.

5 Matrices idempotentes

Decimos que A es una **matriz idempotente** si $A\dot{A} = A$, luego $A^n = A$. Si A es idempotente y simétrica entonces

- Los autovalores de A son 0 y 1.
- $rg(A) = tr(A)$
- $I - A$ es idempotente.
- $rg(A) = rg(I - A)$
- si $det(A) = p$ entonces $A = I$

6 Matrices semidefinidas positivas

Decimos que la matriz A es **semidefinida positiva** si para todo $x \in \mathbb{R}^p$ tenemos $x'Ax \geq 0$, y es **definida positiva** si para todo $x \in \mathbb{R}^p$ tenemos $x'Ax > 0$.

- Si A es simétrica y semidefinida positiva entonces todos sus autovalores son no negativos.

- Si A es simétrica y definida positiva entonces todos sus autovalores son positivos.
- Si A es simétrica y semidefinida positiva A^{-1} también.