Esta actividad busca incorporar las ideas trabajadas en clase trabajando en grupos reducidos abordando los puntos de a uno. No se espera que sepan automáticamente como hacer las cosas. Si que las piensen y las discutan. Lo que no lleguen a terminar en clase queda como práctica.

Problema

Se cuenta con un dado usual de 6 caras numeradas del 1 al 6. Existe una sospecha de que el dado no es justo. Es decir no todas las caras son igual de probables. Para corroborar la sopecha se realizan n lanzamientos del dado obteniendo una muestra $X_1, \ldots, X_n$ de los resultados de cada tirada. Asumimos que las distintas tiradas son independientes.

Parte 1 – Hipótesis nula y alternativa, distribución bajo H_0 y nivel del test

1. Determinar la función de probabilidad puntual de un dado justo. Calcular su esperanza, la probabilidad de que el resultado sea par, la probabilidad de que el resultado sea menor a 4.

2. Describir la hipótesis nula H_0 : *El dado es balanceado.* En términos de la función de probabilidad puntual del dado.

   Hacer lo mismo para la hipótesis alternativa H_1 : *El dado NO es balanceado.*.

3. Proponer un estadístico que le parezca adecuado para el problema. ¿Es posible determinar su distribución bajo la hipótesis nula? ¿Cuál es? ¿Es posible determinar su distribución bajo la hipótesis alternativa? ¿Por qué?.

   OBS: *No hay un único estadístico posible, la idea es que piensen alguno que les parezca apropiado para el problema y que luego exploren sus propiedades.*

4. Implementar en R una función que tome como argumento una muestra y calcule el estadístico. Generar una muestra de $n = 25$ lanzamientos de dados justos y calcule el estadístico.

   Si vuelve a generar la muestra del estadístico el valor va a ser el mismo? Compruebelo.

5. Generar un total de $N = 1000$ muestras de $n = 25$ lanzamientos de dados justos y guardar en un arreglo los valores obtenidos del estadístico.

6. Graficar un histograma de densidad del estadístico. Sobre este histograma grafique la función de probabilidad puntual (o densidad) del estadístico bajo H_0. ¿Que observa? ¿Por qué cree que pasa esto? ¿Encuentra algún justificativo teórico para esto?

7. Elegir una región de rechazo que le parezca apropiada para el problema. Calcule su nivel. (Si.. Cualquier región que elija está bien)

8. ¿Qué proporción de las $N = 1000$ muestras del estadístico caen en la región de rechazo obtenida? Explique el nivel de un test con sus propias palabras.

9. Elegir otra región de rechazo de manera que tenga nivel menor a la del item anterior. ¿Cual es la relación entre las regiones de rechazo a medida que disminuye el nivel?

Parte 2 – Potencia

Vamos a investigar como el desempeño del test en situaciones en que la hipótesis nula no se cumple.

Implementar los siguientes dados cargados como funciones de R

- Dado 1: El dado está cargado en el 6.

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{2} & k = 6 \\ \frac{1}{10} & k = 1, \ldots, 5 \end{cases}$$

- Dado 2: El dado no toma los valores 1 y 6.

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{4} & k = 2,\ 3,\ 4,\ 5 \\ 0 & k = 1 \text{ o } 6 \end{cases}$$

- Dado 3: El dado sólo toma valores impares.

$$p_X(k) = \begin{cases} \frac{1}{3} & k = 1,\ 3,\ 5 \\ 0 & k = 2,\ 4,\ 6 \end{cases}$$

1. ¿Es la misma distribución del estadístico para cada uno de estos dados?
2. Genere $N = 1000$ muestras de $n = 25$ lanzamientos para cada dado cargado y calcule el valor del estadístico. Grafique el histograma de frecuencias de estos valores. ¿Que está aproximando?

   Calcule la proporción de veces que rechaza con el primer test. ¿Que está aproximando?
3. ¿Considera que el test es bueno para detectar que los dados en cuestión están cargados?
4. Repita de nuevo con la otra región de rechazo. ¿Cuál rechaza más veces? ¿Por qué? ¿Que relación encuentra entre el nivel y la potencia?
5. ¿Cree que la potencia del test cambia si se modifica el tamaño de la muestra? Compruebe su sospecha generando $N = 1000$ muestras de $n = 100$ lanzamientos de cada dado cargado. Calcule la proporción de veces que rechaza con el test de nivel $\alpha = 0{,}05$.

Parte 3 – P-valor

Se realizaron $n = 25$ lanzamientos del dado y se obtuvieron los siguientes valores en cada lanzamiento:

5, 5, 3, 1, 5, 1, 1, 3, 3, 6, 5, 6, 3, 4, 2, 4, 2, 1, 5, 2, 1, 5, 3, 6, 5

Esta muestra se puede resumir en la siguiente tabla de ocurrencias para cada valor

Valor	1	2	3	4	5	6
Ocurrencias	5	3	5	2	7	3

1. Que decisión toma con el test de hipótesis que eligió.
2. Calcular el p valor de la muestra. Para esto obtenga el nivel mas chico bajo el cual el test rechazaría la hipótesis nula.
3. ¿Hay evidencia suficiente para afirmar que el dado es justo a partir de los lanzamientos? ¿En que difiere esta afirmación de decir que no hay evidencia para decir que el dado está cargado?

Opcionales

1. Elija un dado cargado y para un test de tamaño de muestra $n = 25$ grafique la potencia del test estimada para todos los niveles entre 0 y 1. ¿Que observa?
2. Elija un dado cargado y para uno de los tests grafique la potencia en función del tamaño de muestra n. ¿Que observa?
3. Proponga un tipo de dado cargado para el cual crea que el test tenga potencia alta.
4. Proponga un tipo de dado cargado para el cuál el test no funcione bien. ¿Puede pensar algun dado cargado que de una potencia aproximadamente 0,05?
5. Se le ocurre algún otro estadístico para utilizar en el problema que crea que sea mas apropiado? ¿Puede determinar su distribución bajo la hipótesis nula? Si no puede, ¿se le ocurre como sortear el problema de encontrar la region de rechazo? ¿Si? A implementarlo entonces y verificar si funciona mejor que el anterior. ¿Cómo? Eso también hay que pensarlo.

Algunos comandos de R Algunos comandos de R que pueden ser de utilidad. Si necesita mas información puede usar el compando help().

- *sample(x, size, replace = FALSE, prob)*

  Sortea con o sin reposición size elementos del vector x. Con el parametro prob es posible asignar distintas probabilidades a cada elemento.

- *pbinom(q, size, prob)*

  Calcula la probabilidad de que una binomial de parametros size y prob sea menor o igual que q.

- *dbinom(q, size, prob)*

  Calcula la probabilidad de que una binomial de parametros size y prob sea igual que q.

- *qbinom(p, size, prob)*

- *pnorm(q, mean, sd)*

  Calcula la probabilidad de que una normal con media mean y desvio sd sea menor o igual que q.

- *qbinom(p, mean, sd)*

  Calcula el cualtil p de una normal

- *hist(x, freq)*

  Realiza un histograma de frecuencias del vector x. Si freq = FALSE es un histograma de proporciones.

- *replicate(n, expr)*

  Este comando repite n veces la expresión expr. Pruebe por ejemplo
  replicate(5, rnorm(3, mean = 1, sd = 1)).

- Si quiere contar cuantos elementos cumplen una condicíon puede usar un truco como el siguiente que cuenta la cantidad de unos en la muestra.

  sum(c(1, 3, 1, -1, 5, 6) == 1)