

# Inferencia estadística

## Test de hipótesis - Introducción

San Andrés

June 6, 2022

## Introducción

Sea  $X_1, \dots, X_n$  una muestra aleatoria con distribución  $F$  y sea  $\theta$  un parámetro de la distribución. Algunos de los problemas que aborda la inferencia estadística son

- Estimación puntual.
- Estimación por intervalos.
- Test de hipótesis.

Frecuentemente el objetivo de una investigación no es estimar el parámetro sino decidir cuál de dos afirmaciones excluyentes sobre el parámetro es verdadera. Para esto se utiliza el test de hipótesis.

# Test de hipotesis

## Ejemplos

- Decidir si una vacuna experimental genera un incremento en las defensas contra una enfermedad.
- Decidir si una moneda es justa o favorece a la cara.
- Decidir si un paciente hospitalizado continúa enfermo o ya está curado.

# Test de hipotesis

## Hipótesis

Las **hipótesis estadísticas** son afirmaciones sobre el valor de un parámetro, o valores de varios parámetros.

Queremos decidir entre dos **hipótesis** excluyentes que compiten:

Hipótesis nula,  $H_0$ : Usualmente el status quo.

Hipótesis alternativa,  $H_1$ : Usualmente lo que queremos probar o afirmar.

# Planteo de hipótesis

## Ejemplos $H_0$

La hipótesis nula muchas veces codifica el 'status quo':

- 1 La vacuna no genera un aumento en los anticuerpos.
- 2 La moneda que estamos testeando es balanceada.
- 3 El paciente está enfermo.

## Ejemplos $H_1$

En estos casos, hipótesis alternativa codifica un 'descubrimiento', informalmente, que encontramos algo nuevo que no sabíamos antes.

- 1 La vacuna genera un aumento en los anticuerpos.
- 2 La moneda que estamos testeando favorece a la cara.
- 3 El paciente está sano.

# Planteo de hipótesis

## Observación

- La hipótesis nula y alternativa tienen roles distintos en el test de hipótesis y no son intercambiables.
- La carga de la prueba cae sobre la hipótesis alternativa  $H_1$ .
- Hablaremos de rechazar o no rechazar la hipótesis nula  $H_0$ . Cuando no podemos rechazar la nula, no es que aceptamos que esta vale, simplemente decimos que no hay evidencia para rechazarla.

# Planteo de hipótesis

El espíritu del test de hipótesis es análogo al de un juicio legal. En este caso las hipótesis nula y alternativa son:

$H_0$ : el acusado es inocente

$H_1$ : el acusado es culpable

La acusación proviene de una sospecha de culpabilidad. La hipótesis  $H_0$  se establece en oposición a  $H_1$  y se mantiene a menos que la evidencia apoye a  $H_1$ . Por defecto, la hipótesis *el acusado es inocente* es cierta. La hipótesis nula será rechazada en favor de la hipótesis alternativa *el acusado es culpable* si hay suficiente evidencia.

- **Se rechaza  $H_0$**  cuando el jurado encuentra evidencia suficiente para afirmar que el acusado es culpable.
- Si **no se rechaza  $H_0$** , esto no implica que el acusado sea inocente sino que la evidencia fue insuficiente para lograr una condena. El jurado no necesariamente acepta  $H_0$  sino que no rechaza  $H_0$ .

# Tipos de error

## Ejemplo médico

Un médico debe decidir si dar de alta a un paciente hospitalizado.

$H_0$  : El paciente está enfermo.

$H_1$  : El paciente está sano.

	Rechaza $H_0$ Da de alta	No rechaza $H_0$ No da de alta
$H_0$ : Enfermo	<b>Error Tipo I</b>	✓
$H_1$ : Sano	✓	<b>Error Tipo II</b>



# Tipos de error

## Ejemplo médico

Un médico debe decidir si dar de alta a un paciente hospitalizado.

$H_0$  : El paciente está enfermo.

$H_1$  : El paciente está sano.

	Rechaza $H_0$ Da de alta	No rechaza $H_0$ No da de alta
$H_0$ : Enfermo	<b>Error Tipo I</b>	✓
$H_1$ : Sano	✓	<b>Error Tipo II</b>

# Tipos de errores

## Definiciones

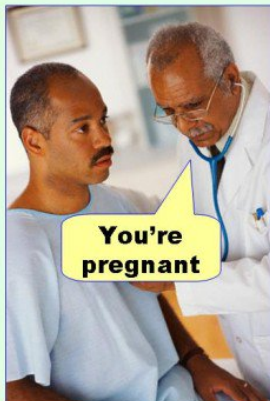
**Error de tipo I** Rechazar la hipótesis nula cuando esta es verdadera. (Falso positivo)

**Error de tipo II** No rechazar la hipótesis nula cuando esta es falsa. (Falso negativo)

Cada error tiene consecuencias diferentes.

# Tipos de errores

**Type I error**  
(false positive)



**Type II error**  
(false negative)



# Nivel y potencia del test

## Definición de nivel

**Nivel:** Llamamos nivel del test a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando esta es verdadera, i.e:

$$\text{"Nivel"} = P(\textbf{Error tipo I}) .$$

**Potencia:** Llamamos potencia del test a la probabilidad de rechazar la hipótesis nula cuando esta es falsa, i.e:

$$\text{"Potencia"} = 1 - P(\textbf{Error tipo II})$$

# Nivel y potencia del test

## Interpretación

Si el test del médico tiene nivel  $\alpha$  y potencia  $1 - \beta$

- Dará de alta a  $\alpha \times 100\%$  de los pacientes enfermos.
- Dará de alta a  $(1 - \beta) \times 100\%$  de los pacientes que estén sanos.

**¡Queremos nivel bajo y potencia alta!**

# Nivel y potencia del test

## Observación

Siempre existe un intercambio entre potencia y nivel. Si disminuyo el nivel del test baja la potencia. Si aumento la potencia aumenta el nivel.

**En la práctica del test de hipótesis se suele elegir el test prefijando un valor para el nivel y luego se calcula su potencia.**

**Si se quiere aumentar la potencia y mantener el nivel se debe aumentar el tamaño de muestra.**

# ¿Está cargada la moneda?

## Ejemplo (moneda)

Queremos determinar si una moneda está cargada. Tiramos  $n = 20$  veces la moneda. Sea

$$X_i = \begin{cases} 1 & \text{Si el } i\text{-ésimo lanzamiento fue cara,} \\ 0 & \text{Si el } i\text{-ésimo lanzamiento fue ceca.} \end{cases}$$

Si obtenemos la siguiente realización de la muestra

1 1 1 0 1 1 0 1 1 0 1 1 0 0 1 1 0 1 0 1 1

¿Es suficiente evidencia para concluir que la moneda estaba cargada?

# Planteo de hipótesis

## Ejemplo (moneda)

Enunciamos las hipótesis en términos de parámetros poblacionales.

Como  $X_i \sim \mathcal{B}(p)$

$H_0$ : La moneda es justa:  $p = 1/2$

$H_1$ : La moneda favorece la cara:  $p > 1/2$



# ¿Está cargada la moneda?

## Ejemplo (moneda)

¿Cuántas caras esperaríamos obtener si la moneda fuera justa?

- ¿obtendremos ese valor en cada experimento?
- ¿es 14 un valor posible si la moneda es justa?
- ¿es 14 un valor extraño de obtener si la moneda es justa?
- Si hubiéramos obtenido 19 caras en las 21 tiradas, ¿tendríamos evidencia más fuerte para apoyar nuestra sospecha?

Queremos decidir entre dos **hipótesis** excluyentes que compiten:

Hipótesis nula,  $H_0$ : la moneda es justa,

Hipótesis alternativa,  $H_1$ : la moneda favorece la cara.

# Planteo de hipótesis

Rechazaremos la hipótesis nula en favor de la alternativa cuando observemos una muestra que es difícil de esperar si la hipótesis nula es cierta y que apoya la hipótesis alternativa.

- 1 ¿Qué esperamos de una muestra cualquiera cuando  $H_0$  es cierta? (anterior a tomar una muestra).
- 2 La muestra que observamos, ¿resulta muy extraña si  $H_0$  es cierta?
- 3 Si la muestra observada es poco esperable bajo  $H_0$ , ¿favorece  $H_1$ ?

# Hipótesis alternativa y región de rechazo

Un test está especificado por:

- 1 el **estadístico del test**, una función de la muestra sobre la que basaremos la decisión de rechazar o no  $H_0$ .
- 2 una **región de rechazo**, el conjunto de aquellos valores del estadístico del test que nos llevan a rechazar  $H_0$ .

La hipótesis nula es rechazada si y solo si el valor observado del estadístico del test cae en la región de rechazo.

# Confección de un test de hipótesis

## Ejemplo (moneda)

- Consideremos las hipótesis  $H_0 : p = \frac{1}{2}$  y  $H_1 : p = \frac{3}{4}$
- Consideremos el estadístico

$T = \text{Cantidad de caras en la muestra}$

$$= \sum_{i=1}^{21} X_i$$

¿Qué eventos consideraríamos como raros bajo  $H_0$  que apoyen a la hipótesis alternativa?

Por ejemplo, si en 21 tiradas de una moneda salen más de 15 caras.

- La **región de rechazo**  $\mathcal{R}$  está definida por  $\mathcal{R} = \{T \geq 16\}$

# Ejercicio

## Ejemplo (moneda)

- 1 Determinar la distribución del estadístico bajo  $H_0$
- 2 Calcular el nivel del test.
- 3 Generar una muestra de  $N = 10000$  replicaciones del estadístico bajo  $H_0$ . ¿Qué proporción de veces se rechaza la hipótesis nula?
- 4 Calcular la distribución del estadístico bajo  $H_1$
- 5 Calcular la potencia del test.
- 6 Generar una muestra de  $N = 10000$  replicaciones del estadístico bajo  $H_1$ . ¿Qué proporción de veces se rechaza la hipótesis nula?
- 7 Encontrar un test de nivel menor o igual a 0.1 y calcular su potencia

## Ejemplo (moneda)

- 1 ¿Qué decisión se toma respecto a la muestra con ambos test?
- 2 ¿Cuál es el nivel más chico para el cuál se rechaza la hipótesis nula con esta muestra?

## Definición

**P-Valor** Se define el p-valor de una muestra como el nivel más chico para el cual el test rechazaría  ~~$H_0$~~   
 $H_0$

- El p-valor depende de la realización de la muestra obtenida
- Mientras mas chico sea el p-valor mayor es la evidencia en contra.
- El p-valor es la probabilidad de que el estadístico sea tan o más extremo que el valor observado.
- El p-valor **NO** es la probabilidad de que la hipótesis nula sea verdadera.

# Tipos de test

## Tipos de hipótesis

- Hipótesis simple:  $\theta = \theta_0$ .
- Hipótesis compuesta:  $\theta < \theta_0$ ,  $\theta > \theta_0$ ,  $\theta \neq \theta_0$ .

## Tipos de test

- Test bilateral

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_1: \theta \neq \theta_0$$

- Tests unilaterales

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_1: \theta > \theta_0$$

$$H_0: \theta = \theta_0$$

$$H_1: \theta < \theta_0$$