Probabilidad

Daniel Fraiman

Maestría en Ciencia de Datos, Universidad de San Andrés

Espacio de Probabilidad

La teoría de probabilidades se ocupa de problemas asociados a un experimento aleatorio.

Ejemplos de experimentos aleatorios

- Saco una carta de un mazo.
- Tiro una moneda dos veces.
- Elijo un alumno del aula al azar.

Espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

A partir del experimento aleatorio se construye el espacio de probabilidad. Los componentes de este espacio son:

- El conjunto que contiene todos los resultados posibles del experimento, Ω.
- La Familia de eventos o sucesos, $\mathcal{F}$.
- La probabilidad, $\mathbb{P}$.

Espacio muestral$\equiv \Omega$

Definición Ω

Ω es el conjunto que contiene todos los resultados posibles del experimento.

Suceso elemental (ω)

Cada resultado del experimento lo denotamos con ω (omeguita) y lo llamamos suceso elemental.

Ejemplos de Ω

- Tiramos un dado $\rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.
- Tiramos una moneda $\rightarrow \Omega = \{cara, ceca\}$.
- Tiramos dos veces una moneda $\rightarrow \Omega = \{(cara, cara), (cara, ceca), (ceca, cara), (ceca, ceca)\}$.
- Elijo un alumno al azar $\rightarrow \Omega = \{Francisco, Juan, \ldots, Wendy\}$.

Omega (Ω)

Otros ejemplos de Ω más raros

- Mido cuánto tiempo dura una bombita de luz $\rightarrow \Omega = \mathbb{R}^+ = \{t \in \mathbb{R} : t > 0\}$.
- Mido cuántas veces tengo que tirar un dado hasta que salga el 6 $\rightarrow \Omega = \mathbb{N} = \{1, 2, 3, \ldots\}$.

Preguntas:

- ¿En qué difieren estos $\Omega's$ de los anteriores?
- ¿En qué difieren entre ellos los dos últimos $\Omega's$?

  Lo que acaban de decir tendrá consecuencias matemáticas...

Eventos

Eventos

- Los eventos son simplemente las preguntas que queremos responder.
- ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra cierto evento?
- Son simplemente subconjuntos de Ω.

Ejemplos de eventos

- ¿Cuál es la probabilidad de que exista al menos una pareja que cumpla el mismo día?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al tirar dos dados la suma de 7?
- ¿Cuál es la probabilidad de que al elegir un auto al azar del estacionamiento este sea negro?

Eventos

Eventos

- Los eventos los denotamos con las primeras letras del abecedario en mayúscula.
- Exp: tiro un dado $\rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$,
  evento $A = \{\text{Dado es par}\} = \{2, 4, 6\}$.
  evento $B = \{\text{Dado mayor a } 8\ \} = \{\} = \emptyset$.

Familia de eventos $\equiv \mathcal{F}$

Definición $\mathcal{F}$

$\mathcal{F}$ es la familia de conjuntos que contiene todos los eventos (o todos los subconjuntos que se pueden formar a partir de Ω).

Ejemplo de $\mathcal{F}$

Tiramos una modeda
$\rightarrow \Omega = \{cara, ceca\} \leftrightarrow \mathcal{F} = \{\{cara\}, \{ceca\}, \{cara, ceca\}, \{\}\}$

Ejemplo de $\mathcal{F}$

Tiramos un dado $\rightarrow \Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\} \leftrightarrow$
$\mathcal{F} = \{\{1\}, \{2\}, \{3\}, \{4\}, \{5\}, \{6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \dots, \Omega, \{\}\}$
Pronto vamos a saber contar cuántos elementos tiene $\mathcal{F}$.

Familia de eventos

Siempre preguntamos: ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra determinado evento?

Ese evento $\in \mathcal{F}$. Por lo tanto si conocemos la probabilidad de cada uno de los eventos de $\mathcal{F}$ responder la pregunta se reduce a reconocer el evento en $\mathcal{F}$.

Conjuntos

Recordemos las operaciones sobre conjuntos

- $\bigcap \equiv$ intersección.
- $\bigcup \equiv$ unión.
- $A^C \equiv$ el conjunto complemento del conjunto A.

Leyes de Morgan

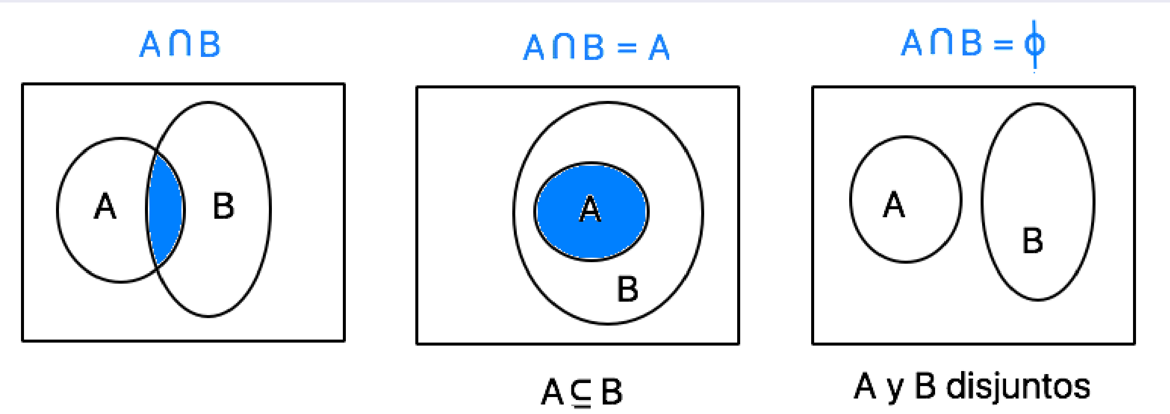
- $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$
- De la anterior sale $(A \cap B)^C = A^C \cup B^C$

Eventos disjuntos

Diremos que dos eventos A y B son disjuntos si $A \cap B = \emptyset$.

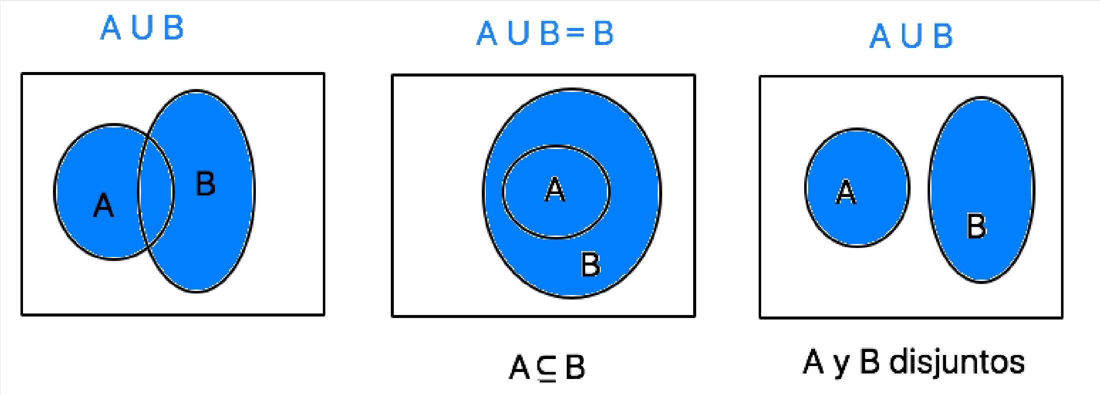
Eventos (= Conjuntos)

$A \cap B$



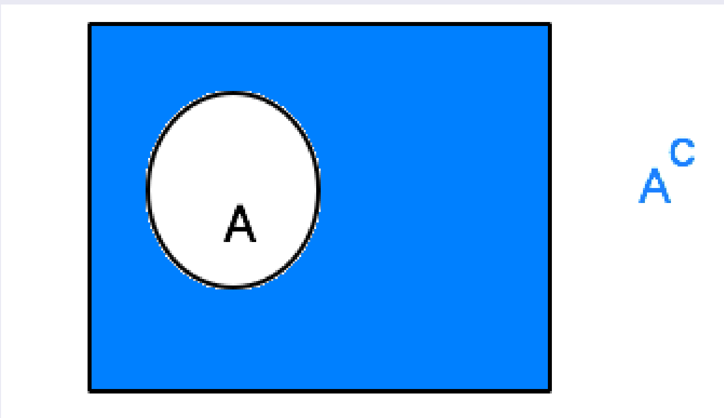
Eventos (= Conjuntos)

$A \cup B$

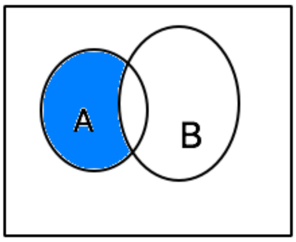


Eventos (= Conjuntos)

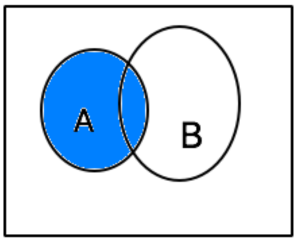
A^C



Eventos (= Conjuntos)

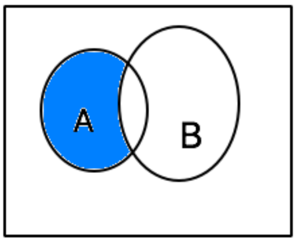


$A \cap$?

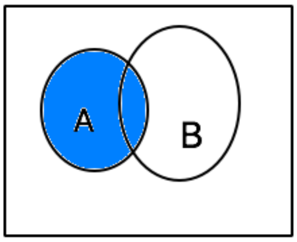


$A =$ (A ? ?) $\cup$ (A ? ?)

Eventos (= Conjuntos)



$A \cap B^c$



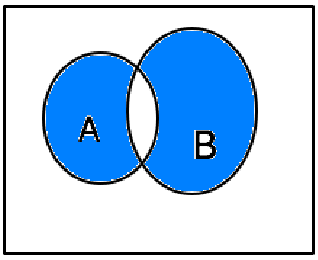
$A = (A \cap B^c) \cup (A \cap B)$

$\Downarrow \qquad \Downarrow$

Además se cumple
que son disjuntos

Eventos (= Conjuntos)

$A \cap B$



Ejercicio: Describa de dos maneras distintas la región celeste. Recuerde solamente se pueden utilizar operaciones elementales entre conjuntos: intersección, unión, y complemento.

Probabilidad$\equiv \mathbb{P}$

Definición $\mathbb{P}$

$\mathbb{P}$ es una función que parte del espacio $\mathcal{F}$ y va a los $\mathbb{R}$ ($\mathbb{P} : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$) que cumple:

1. $\mathbb{P}(A) \geq 0$ para todo $A \in \mathcal{F}$.
2. $\mathbb{P}(\Omega) = 1$.
3. $\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbb{P}(A_i)$ cuando los $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$.

Eventos disjuntos

Entonces 3) dice que si A y B son disjuntos
$\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B)$.

Probabilidad

A partir de la definición de $\mathbb{P}$ surgen las siguientes propiedades:

(a) $\mathbb{P}(\emptyset) = 0$

(b) $0 \leq \mathbb{P}(A) \leq 1$.

(c) Si $A \subseteq B \rightarrow \mathbb{P}(A) \leq \mathbb{P}(B)$.

(d) $\mathbb{P}\left(A^C\right) = 1 - \mathbb{P}(A)$.

(e) $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - \mathbb{P}(A \cap B)$.

Preguntas

- ¿Por qué aparece el término $\mathbb{P}(A \cup B)$ restando en (e)?
- $\mathbb{P}(A \cup D \cup E) =$ ¿ ?

Probabilidad

Principio de inclusión exclusión

$$\mathrm{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{P}(A_i) - \sum_{i,j\,:\,i<j} \mathbb{P}(A_i \cap A_j) + \sum_{i,j,k\,:\,i<j<k} \mathbb{P}(A_i \cap A_j \cap A_k) - \cdots + (-1)^{n-1}\,\mathbb{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right)$$

Espacio de Probabilidad

Espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$

A partir del experimento aleatorio se construye el espacio de probabilidad. Los componentes de este espacio son:

- El conjunto que contiene todos los resultados posibles del experimento, Ω.
- La Familia de eventos o sucesos, $\mathcal{F}$.
- La probabilidad, $\mathbb{P}$.

Espacios de Probabilidad

Espacio muestral

- Finito.
- Infinito.

Espacio muestral finito

Espacio muestral finito

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\}$.

Pregunta

Definimos el evento $A = \{w_4, w_5, w_9\}$, ¿$\mathbb{P}(A)$?

Respuesta

$$\mathbb{P}(A) \overset{(3)}{=} \mathbb{P}(\omega_4) + \mathbb{P}(\omega_5) + \mathbb{P}(\omega_9)$$

Espacio muestral finito

Espacio muestral finito

Se separan en:

- $\mathbb{P}(w_1) = \mathbb{P}(w_2) = \cdots = \mathbb{P}(\omega_n)$ (Espacio de equiprobabilidad)
- Existe al menos un ω que tiene distinta probabliidad.

Espacio de equiprobabilidad

Espacio de equiprobabilidad

Espacio de equiprobabilidad

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\} \to \mathbb{P}(w_i) = \frac{1}{n}$ para todo i entre 1 y n.

Demostración.

$1 \stackrel{(1)}{=} \mathbb{P}(\Omega) = \mathbb{P}(\omega_1 \cup \omega_2 \cup \cdots \cup \omega_n) \stackrel{(3)}{=}$
$\mathbb{P}(\omega_1) + \mathbb{P}(\omega_2) + \cdots + \mathbb{P}(\omega_n) = n\mathbb{P}(\omega_i) \Longleftrightarrow \mathbb{P}(\omega_i) = \frac{1}{n}$ $\square$

Pregunta

Definimos el evento $A = \{w_2, w_5, w_9\}$, ¿$\mathbb{P}(A)$?

Respuesta

$$\mathbb{P}(A) \stackrel{(3)}{=} \mathbb{P}(\omega_2) + \mathbb{P}(\omega_5) + \mathbb{P}(\omega_9) \stackrel{equip}{=} \frac{1}{n} + \frac{1}{n} + \frac{1}{n} = \frac{3}{n}$$

Espacio de equiprobabilidad

Espacio de equiprobabilidad

$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n\} \rightarrow \mathbb{P}(w_i) = \frac{1}{n}$ para todo i entre 1 y n.

Probabilidad de un evento A

$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\text{cuántos elementos tiene } A}{\text{cuántos elementos tiene } \Omega}.$

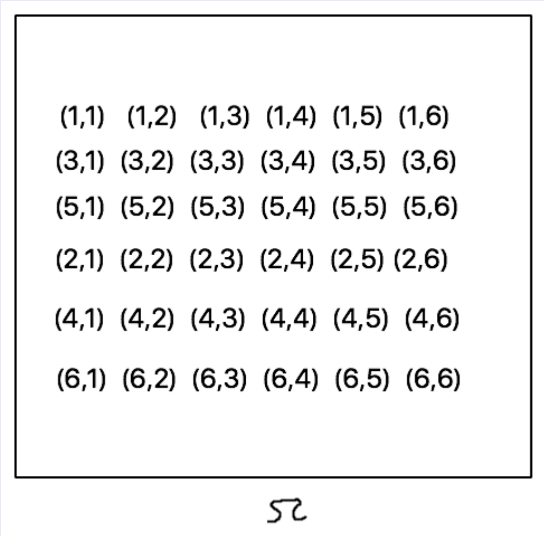
Espacio de equiprobabilidad

Ejemplo

Exp: Tiro 2 dados secuencialmente $\rightarrow \Omega = \{(1,1),(1,2),\ldots,(6,6)\}$
$\#\Omega = 36$
$A = \{$La suma de los dos dados es $\geq 6\}$=
=$\{(1,5),(1,6),(2,4),(2,5),(2,6),\ldots,(6,6)\}$
$B = \{$El primer dado es impar$\}$=
=$\{(1,1),(1,2),\ldots,(1,6),(3,1),\ldots(3,6),(5,1),\ldots(5,6)\}$
¿$\mathbb{P}(A \cup B)$?

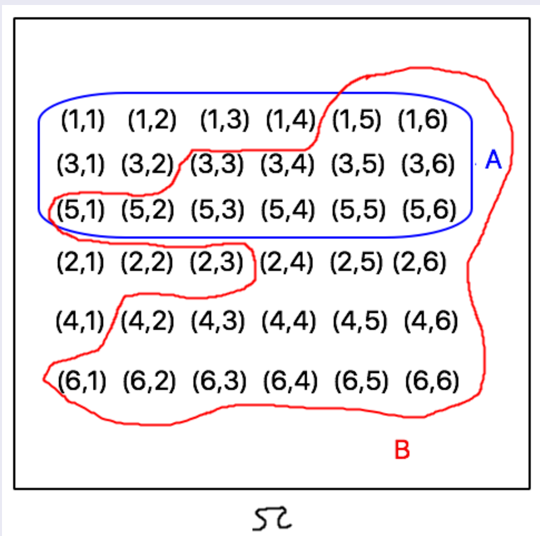
Espacio de equiprobabilidad

Exp: Tiro 2 dados secuencialmente



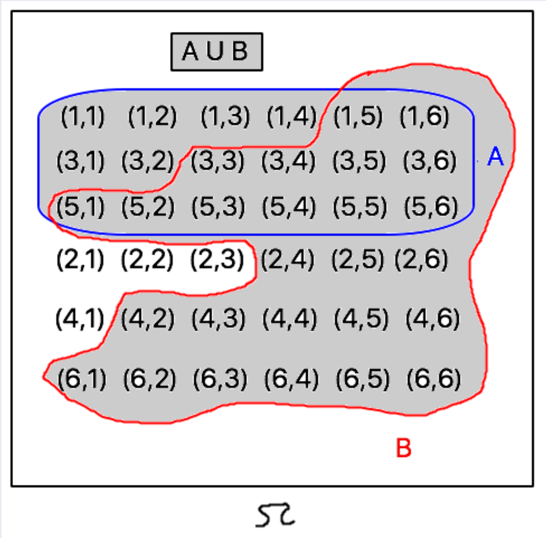
Espacio de equiprobabilidad

Exp: Tiro 2 dados secuencialmente



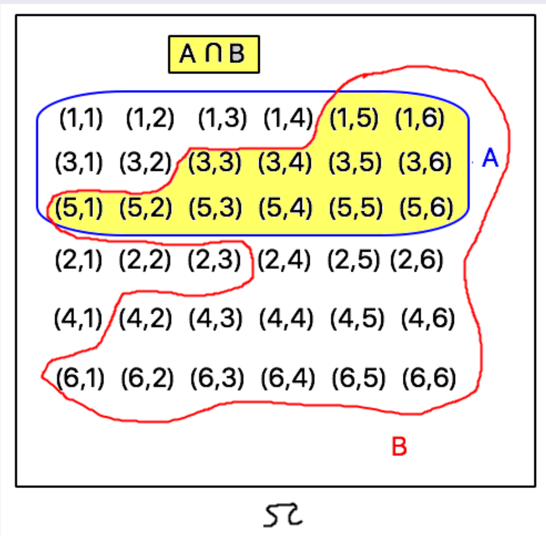
Espacio de equiprobabilidad

Exp: Tiro 2 dados secuencialmente

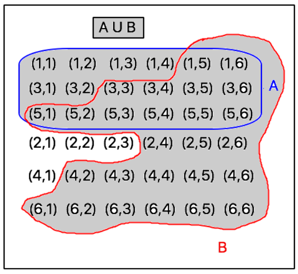


Espacio de equiprobabilidad

Exp: Tiro 2 dados secuencialmente



Espacio de equiprobabilidad



Ω

¿$\mathbb{P}(A \cup B)$?

Opción 1 $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{\#A \cup B}{36}$.

Opción 2 $\mathbb{P}(A \cup B) = \frac{\#A}{36} + \frac{\#B}{36} - \frac{\#A \cap B}{36}$.

Opción 3 $\mathbb{P}(A \cup B) = 1 - \mathbb{P}\left((A \cup B)^C\right) = 1 - \mathbb{P}\left(A^C \cap B^C\right) = 1 - \frac{\#A^C \cap B^C}{36}$.

Opción 4 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(A) + \mathbb{P}\left(B \cap A^C\right) = \frac{\#A}{36} + \frac{\#B \cap A^C}{36}$.

Opción 5 $\mathbb{P}(A \cup B) = \mathbb{P}(B) + \mathbb{P}\left(A \cap B^C\right) = \frac{\#B}{36} + \frac{\#A \cap B^C}{36}$.

...

Espacio de equiprobabilidad

Probabilidad de un evento A

$\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$.

Por lo tanto debemos aprender a contar (sin usar los dedos) cuántos elementos tiene un conjunto. La combinatoria nos ayudará en este sentido.

Combinatoria

- Regla de multiplicación.
- Permutaciones.
- Combinaciones.

Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Regla de multiplicación

Si se realizan r experimentos tal que el primero tiene n_1 resultados posibles, y para cada uno de los resultados existen n_2 resultados posibles del segundo experimento, y para cada uno de los dos primeros resutlados existen n_3 resultados para el tercero, y así sucesivamente $\rightarrow$ Existen $n_1 \times n_2 \times n_3 \times \cdots \times n_r$ resultados de los r experimentos.

Ejemplos

- Tiro dos dados secuencialmente $\rightarrow \#\Omega = 6 \times 6 = 36$.
- Tiro un dado y un moneda $\rightarrow \#\Omega = 6 \times 2 = 12$. $\Omega = \{(1, cara), (2, cara), \ldots, (6, cara), (1, ceca), (2, ceca), \ldots, (6, ceca)\}$
- Tiro una moneda 8 veces $\rightarrow \#\Omega = 2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^8$.

Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Ejemplo raro

- ¿Cuántos números de 3 cifras se pueden formar con las fichas [2], [4] y [6]?

$$\underset{1^{er}}{\_}\quad \underset{2^{do}}{\_}\quad \underset{3^{er}}{\_}$$

$$\frac{3}{1^{er}} \times \frac{2}{2^{do}} \times \frac{1}{3^{er}}$$

- ¿Por qué vale el principio de multiplicación?
- Los números son: 246, 264, 426, 462, 624, 642.
- ¿Cuántos números de 9 cifras se pueden formar con las fichas [1], [2], ... y [9]?
- ¿Cuántos anagramas se pueden formar con las fichas [A], [B], [C], [D], [E]?

Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Permutaciones

Al fijar un número n de objetos entre ellos todos distintos, ¿de cuántas maneras se pueden ordenar?
Hay n! secuencias de n objetos distintos.

0!=1

Ejemplos

- Cinco amig@s van a jugar al futbol 5. ¿De cuántas maneras se pueden formar?
- Cuatro personas forman un hilera, ¿de cuántas maneras se puede hacer?

Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Quiero seleccionar 2 alumnos de un grupo de 42.
¿Cuántos grupos distintos existen? Hint: $\underset{1^{er}}{-}\ \underset{2^{do}}{-}$

- ¿Por qué no son 42×41? ¿Estaríamos contando de más?
- (Juan, María), (María, Juan) [MAL] Juan-María [BIEN]
- ¿Cómo arreglarlo?
- $$\frac{42 \times 41}{2} = \frac{42 \times 41}{2!}$$

Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Quiero seleccionar 3 alumnos de un grupo de 42.
¿Cuántos grupos distintos existen?

- $\frac{42\times41\times40}{3!}$
- ¿Por qué dividimos por 3!?
  (A,B,C), (A,C,B), (B,A,C), (B,C,A), (C,A,B), (C,B,A) [MAL]
  A-B-C [BIEN]

Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Quiero seleccionar n alumnos de un grupo de N.
¿Cuántos grupos distintos existen?

- $\frac{N\times(N-1)\times\ldots(N-n+1)}{n!}$
- ¿Se puede escribir de forma más compacta? Hint: $8\times7\times6=\frac{8!}{5!}$
- $\frac{N!}{(N-n)!n!}$

Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Combinaciones

Estamos interesados en extraer n elementos simultáneamente (o no pero no importa el orden) de una población total de N elementos distintos.
Existen $\frac{N!}{(N-n)!n!} \equiv \binom{N}{n}$ grupos distintos de n objetos.

Ejemplo

¿Cuántos colores se pueden formar combinando dos colores primarios? ¿El orden es relevante?

Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Ejemplos donde mezclamos un poco todo...

En el aula hay 17 mujeres y 15 hombres. Se eligen 2 alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el grupo sea de dos mujeres?

- ¿Experimento?
- ¿El espacio es de equiprobabilidad? Diga un ω.
- $A = \{\text{dos mujeres}\}$. $\mathbb{P}(A) = \frac{\#A}{\#\Omega}$
- $\#\Omega = \binom{32}{2}, \quad \#A = \binom{17}{2}, \quad \mathbb{P}(A) = \frac{\binom{17}{2}}{\binom{32}{2}} = \frac{17\times 16}{32\times 31}$

Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Ejemplos donde mezclamos un poco todo...

En el aula hay 17 mujeres y 15 hombres. Se eligen 3 alumnos al azar, ¿cuál es la probabilidad de que el grupo sea de dos mujeres y un hombre?

- ¿Experimento?
- ¿El espacio es de equiprobabilidad? Diga un ω.
- $B = \{\text{dos mujeres y un hombre}\}$. $\mathbb{P}(B) = \frac{\#B}{\#\Omega}$
- $\#\Omega = \binom{32}{3}$, $\quad \#B \underset{\text{ppio. multipl.}}{=} \binom{17}{2} \times \binom{15}{1}$,
  $\mathbb{P}(A) = \frac{17\times16\times15\times3}{32\times31\times30}$

Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Ejemplos donde mezclamos un poco todo...

¿Cuál es la probabilidad de que en existe al menos una pareja que cumpla el mismo día?
¿Quién es Ω? ¿Es razonable suponer que el espacio es de que equiprobabilidad?

Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Grupo de 5 personas

$A = \{$Al menos una pareja de las 5 personas cumple el mismo día$\}$
¿$\mathbb{P}(A)$?

- ¿Quién es Ω? En Ω están todos los vectores de dimensión 5 en cuyas coordenadas se pueden poner cualquier número entre 1 y 365 (días del año). Cada coordenada representa el cumpleaños de cada una de las 5 personas. ¿El espacio es de equiprobabilidad?
- $\#\Omega \underset{\text{pp. multipl.}}{=} 365 \times 365 \times \cdots \times 365 = 365^5$
- Calcular $\#A$ es difícil, ¿por qué?
- $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(A^C\right)$, donde $A^C = \{$Todos cumplen en diferentes días$\}$
- $\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}\left(A^C\right) \underset{equip}{=} 1 - \frac{\#A^C}{\#\Omega}$, ¿$\#A^C$?
- $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{\#A^C}{\#\Omega} = 1 - \frac{\binom{365}{5}5!}{365^5} = 1 - \frac{365x364x363x362x361}{365^5}$

Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Grupo de 5 personas

$A = \{$Al menos una pareja de las 5 personas cumple el mismo día$\}$
¿$\mathbb{P}(A)$?

- $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{\#A^C}{\#\Omega} = 1 - \frac{\binom{365}{5}5!}{365^5} = 1 - \frac{365x364x363x362x361}{365^5}$

Grupo de n personas

$A = \{$Al menos una pareja de las n personas cumple el mismo día$\}$
¿$\mathbb{P}(A)$?

- $\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{\#A^C}{\#\Omega} = 1 - \frac{\binom{365}{n}n!}{365^n} = 1 - \frac{365x364x\ldots x(365-n+1)}{365^n}$

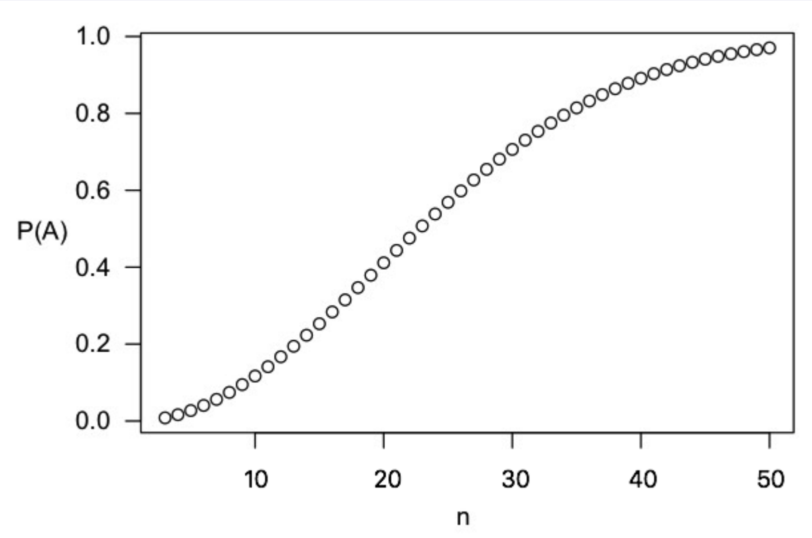
Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Grupo de n personas

$A = \{\text{Al menos una pareja de las } n \text{ personas cumple el mismo día}\}$

¿$\mathbb{P}(A)$?

$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{\#A^C}{\#\Omega} = 1 - \frac{\binom{365}{n} n!}{365^n} = 1 - \frac{365x364x...x(365-n+1)}{365^n}$



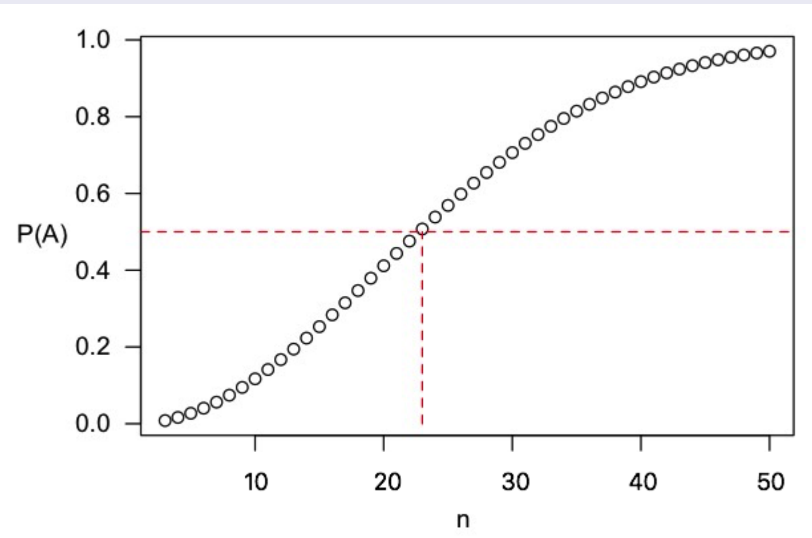
Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Grupo de n personas

$A = \{\text{Al menos una pareja de las } n \text{ personas cumple el mismo día}\}$

¿$\mathbb{P}(A)$?

$\mathbb{P}(A) = 1 - \frac{\#A^C}{\#\Omega} = 1 - \frac{\binom{365}{n} n!}{365^n} = 1 - \frac{365x364x...x(365-n+1)}{365^n}$



Espacio de equiprobabilidad y Combinatoria

Importantísimo cuando separamos en casos

- Cada uno de los casos tienen que ser subconjuntos disjuntos de Ω
- La unión de estos casos tiene que ser el evento de interés.

Espacio de equiprobabilidad y R

Comandos en R

- $\binom{N}{n} \leftrightarrow choose(N,n)$
- $n! \leftrightarrow factorial(n)$

Comando interesante en R

- library(gtools); permutations(n=4,r=2,v=x)