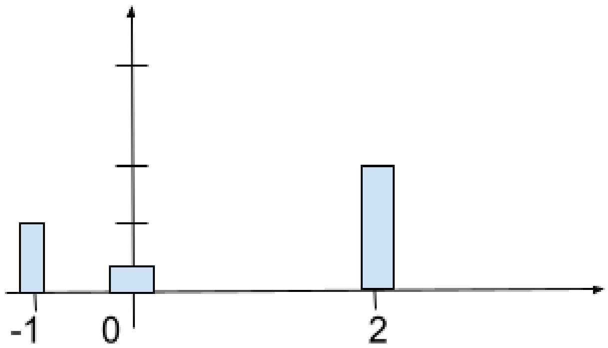
1. Sea X una v.a. discreta con $P(X = -1) = 1/3$, $P(X = 0) = 1/6$ y $P(X = 2) = 1/2$. Hallar la esperanza y la varianza de X.



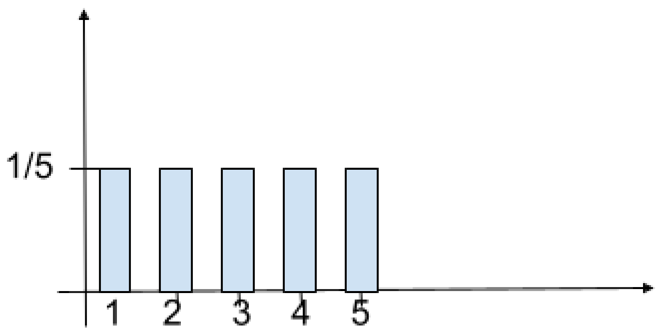
$$\mathbb{E}(X) = \sum_i x_i p_X(x_i)$$

E(x) = $-1 * (\frac{1}{3}) + 0 * (\frac{1}{6}) + 2 * (\frac{1}{2}) = \frac{2}{3}$

$$\mathrm{Var}(X) = \sum_{x \in R_X} (x - \mu)^2 \, \mathrm{P}[X = x]$$

Var(x) = $(-1 - \frac{2}{3})^2 * (\frac{1}{3}) + (0 - \frac{2}{3})^2 * (\frac{1}{6}) + (2 - \frac{2}{3})^2 * (\frac{1}{2})))=\frac{17}{9}$

2. Sea X una v.a. discreta uniforme entre 1 y 5, es decir, $P(X = k) = 1/5$ para $k = 1, 2, ..., 5$. Hallar la esperanza y la varianza de X.



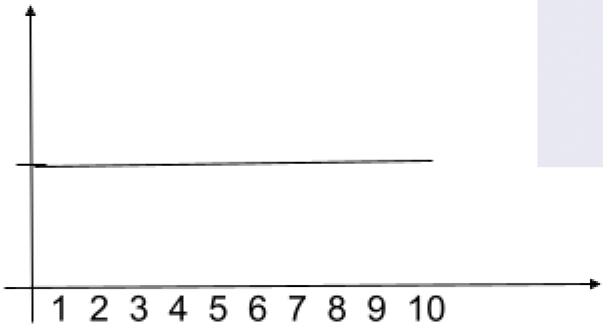
E(x) = ⅕ * (1 + 2 + 3 + 4 + 5) = 3

Var(x) = (1 - 3)^2 * ⅕ + (2 - 3)^2 * ⅕ + (3 - 3)^2 * ⅕ + (4 - 3)^2 * ⅕ + (5 - 3)^2 * ⅕ =2

3. Sea X una variable aleatoria Uniforme[0,10].

   a) Hallar $\mathbb{E}(X)$.

   b) Hallar $Var(X)$ con R.



$X \sim$ Uniforme[a,b] si

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } b \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } x \notin [a,b] \end{cases}$$

X∼Unif (0, 10)

E(x) = $\int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x)\, dx$

E(x) = $\int_a^b x * \frac{1}{b-a} dx = \frac{1}{10} * \frac{10^2}{2} = 5$

$$\mathrm{Var}(X) = \int_{R_X} (x-\mu)^2 f(x) dx$$

Var(x) = $E(x^2) - E^2 =$

$E(x^2) = \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 f(x)\, dx = \frac{1}{10} * \frac{10^3}{3}$ =33,33

Var(x) = $E(x^2) - E^2$ = 33,3 - 5^2 = 8,33

```
```{r}
f <- function(x) {
  x * 1/10
}


f2 <- function(x) {
  (x^2) * 1/10
}

integrate(f2, lower = 0, upper = 10) $value - (integrate(f, lower = 0, upper = 10) $value)^2

```
```

```
[1] 8.333333
```

4. Sea X una variable aleatoria continua cuya función de densidad es

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x & 0 \leq x \leq 1. \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

Hallar $\mathbb{E}(X)$ y $\text{Var}(X)$ con R.

```{r}
s <- function(x) {
  2*x^2
}

(esperanza <- integrate(s, upper = 1, lower = 0) $value)
```

```
[1] 0.6666667
```

```{r}
s <- function(x) {
  2*x^3
}

(b<- integrate(s, upper = 1, lower = 0) $value)
```

```
[1] 0.5
```

```{r}
(var <- b - esperanza^2)
```

```
[1] 0.05555556
```

5. Sea X una v.a. con $\mathbb{E}(X) = 2$ y $Var(X) = 36$, e Y otra v.a. que es independiente de X con $\mathbb{E}(Y) = 3$ y $Var(Y) = 25$. Hallar
   (a) $\mathbb{E}(X+Y)$ y $\mathbb{E}(2X-4Y)$
   (b) $Var(X+Y)$ y $Var(2X-4Y)$.

E(x) = 2	E(y) = 3
Var(x) = 36	Var(y) = 25
v.a. X	v.a. Y

a) E(x+y) = E(x) + E(y)=2+3 = 5
   E(2x - 4y) = 2E(x) - 4E(y) = -8

b) Var(x+y) = Var(x) + Var(y) = 36+25=61 (dado que son ind.)
   Var(2x - 4y) = (2^2)*Var(x) + $(-4)^2$*Var(y) = 4*(36) + 16*(25) = 544

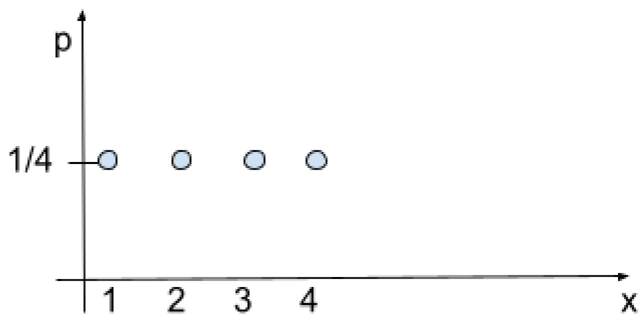
6. Un experimento consiste en arrojar 10 veces un dado de 4 caras (con los números del 1 al 4). Llamemos X_1 al resultado del primer dado dado, X_2 al resultado del segundo y así sucesivamente.
   (a) Hallar $\mathbb{E}(X_1 + X_2 + ... + X_{10})$.
   (b) ¿Las variables aleatorias $X_1, X_2, ..., X_{10}$ son independientes entre ellas?
   (c) Hallar $V(X_1 + X_2 + ... + X_{10})$.

v.a. → discreta → X1 = Resultado del 1er lanzamiento del dado
X2 = Resultado del 2do lanzamiento del dado
.
.
X10 = Resultado del 10mo lanzamiento del dado

a) E(x1) = ¼(1+2+3+4) = 5/2
   E(x1+x2+..+x10) = E(x1)+E(x2)+...+E(x10) = 10*E(x1) = 25

b) Sí, dado que los diferentes lanzamientos no aportan informacion entre ellos. Por ejemplo, el resultado del 2do lanzamiento no afecta el del 1ero.

c) Var(x1) = ¼ *$[(1-\frac{5}{2})^2+(2-\frac{5}{2})^2+(3-\frac{5}{2})^2+(4-\frac{5}{2})^2] = \frac{5}{4}$
   Var(x1+x2+x3+...+x10) = Var(x1)+Var(x2)+...+Var(x10) = 10* $\frac{5}{4} = \frac{25}{2}$



7. Supongamos que $\mathbb{E}(X) = \mu$ y $\mathrm{Var}\, X = \sigma^2$. Sea $Z = (X-\mu)/\sigma$. Mostrar que $\mathbb{E}(Z) = 0$ y $\mathrm{Var}\, Z = 1$. Luego, la transformación hecha sobre X convierte a la variable aleatoria X en una que tiene media cero y varianza igual a 1 (aunque la distribución de X no sea normal).

E(x) = μ; Var(x) =σ^2
Z=$\frac{(x-\mu)}{\sigma}$
E(z) = E($\frac{(x-\mu)}{\sigma}$) = $\frac{-\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} * E(x) = \frac{-\mu}{\sigma} + \frac{1}{\sigma} * \mu = 0$
Var(z)=Var($\frac{(x-\mu)}{\sigma}$) = Var($\frac{x}{\sigma}$)=($\frac{1}{\sigma^2}$)*σ^2 = 1

8. Se toman dos mediciones independientes, X e Y, de una cantidad μ. $E(X) = E(Y) = \mu$ pero σ_X y σ_Y no son iguales. Las dos mediciones se combinan a través de un promedio ponderado para dar

$$Z = \alpha X + (1 - \alpha)Y$$

donde α es un escalar y $0 \leq \alpha \leq 1$.

(a) Mostrar que $E(Z) = \mu$.

(b) Hallar α, en términos de σ_X y σ_Y, que minimice la $Var(Z)$.

a) $E(z) = E(\alpha x) + E((1-\alpha)*y) = \alpha*E(x) + (1-\alpha)*E(y)=\alpha * E(x) + (1-\alpha)*E(x) = E(x)*(\alpha+(1-\alpha))$

$E(z) = \mu(\alpha +1-\alpha)$

$E(z) = \mu$

b) $Var(z) = Var(\alpha x + (1-\alpha)y) = \alpha^2 * Var(x) + (1 - \alpha)^2*Var(y) =$

$$Var(z) = \alpha^2 *\sigma_x^2 + (1 - \alpha)^2* \sigma_y^2$$

$$\frac{d(Var(z))}{d\alpha} = 2 \alpha \sigma_x^2 - 2 (1 - \alpha) \sigma_y^2$$

$$0 = 2 \alpha \sigma_x^2 - 2 (1 - \alpha) \sigma_y^2$$

$$0 = 2\alpha \sigma_x^2 - 2 \sigma_y^2 + 2 \alpha \sigma_y^2$$

$$0 = \alpha(2 \sigma_x^2 + 2 \sigma_y^2) - 2 \sigma_y^2$$

$$\alpha = \frac{2 \sigma_y^2}{(2 \sigma_x^2 + 2 \sigma_y^2)}$$