Trabajo Práctico II: Bootsrap e intervalos de confianza.

Aclaraciones:

- El TP se puede hacer en grupos de **tres o cuatro personas**.
- La resolución del mismo debe incluir los razonamientos, gráficos y código necesario. Se debe presentar en formato Notebook. Todo el código debe correr sin errores y dar los mismos resultados. Los desarrollos teóricos se pueden escribir en en Latex o si no la notebook debe incluir con una fotodel desarrollo teórico.
- La fecha límite de entrega es el **Miércoles 15 de Junio**.

Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución Laplace $\mathcal{L}(\mu, b)$ es decir

$$f_X(t) = \frac{1}{2b} e^{-\frac{|t-\mu|}{b}}.$$

1. Calcular analíticamente los estimadores de momentos para μ y b. Puede utilizar que $E(X) = \mu$ y $Var(X) = 2b^2$.
2. Hallar analíticamente el logaritmo de la función de verosimilitud.
3. Definir una función en `R` que calcule los estimadores de momentos.
4. Definir en `R` una función que tome como argumento una muestra y calcule los estimadores de máxima verosimilitud de μ y b. Para esto
   (a) Definir una función que tome como argumentos una muestra y un array `par` y calcula menos el logaritmo de la verosimilitud de la muestra, $\mu =$ `par[1]` y $b =$ `par[2]`. Llame a esta funcion `m.log.likelihood(muestra, par)`.
   (b) Utilice la función `optim` para calcular el EMV de los parámetros. Como punto inicial de la función utilice el estimador de momentos de la muestra.
   Sugerencias: Recuerde que `optim` minimiza funciones en vez de maximizar.
   Revise lo que hicimos en clase con el estimador de máxima verosimilitud de los parámetros de una distribución Gamma.
5. En archivo `laplace.csv` se encuentran los resultados de una muestra Laplace.
   (a) Obtener las estimaciones de momentos y máxima verosimilitud para μ y b.
   (b) Con la muestra dada, estime por máxima verosimilitud el coeficiente de variación de los datos
   $$CV(X) = \frac{SD(X)}{E(X)}.$$
6. Calcular el intervalo asintótico usual del 95% para la media.
   $$\left[\overline{X}_n - 1.96 \frac{S}{\sqrt{n}} \, ; \, \overline{X}_n + 1.96 \frac{S}{\sqrt{n}} \right].$$

7. Estimar el desvío del estimador de máxima verosimilitud de μ utilizando bootstrap paramétrico. Construya el intervalo asintótico del 95% para μ con la forma

$$\left[\widehat{\mu}_{mv} - 1.96\widehat{SD}(\widehat{\mu}_{mv})\,;\, \widehat{\mu}_{mv} + 1.96\widehat{SD}(\widehat{\mu}_{mv})\right].$$

¿Que propiedad debe tener un estimador para que este intervalo sea válido?

Aclaración: Para generar una muestra con distribución Laplaces puede usar la función `rLaplace` *del paquete* `ExtDist`*.*

8. Obtenga una muestra bootstrap por resampleo del estimador $\widehat{\mu}_{mv}$ y estime los cuantiles 0.025 y 0.975 de la distribución del mismo. Construya un intervalo asintótico del 95% de μ de la forma

$$[\hat{q}_{0.025}\,;\,\hat{q}_{0.975}].$$

¿Tiene alguna intuición de por que este tipo de intervalos debería funcionar?

9. Defina funciones que tomen como argumento una muestra y devuelvan los intervalos descriptos en los items anteriores.

10. Mediante una simulación aproxime la cobertura de cada uno de los intervalos y su longitud. Para esto

    (a) Genere una muestra aleatoria Laplace con $n = 30$, $\mu = 0$ y $b = 2$.

    (b) Para la muestra obtenida calcule los tres intervalos de confianza.

    (c) Repite (a) y (b), $Nrep = 1000$ veces. (Esto puede tardar un rato si N_{boot} es grande)

    (d) Con los intervalos obtenidos calcule la cobertura aproximada y la longitud media de cada metodología.

11. ¿Que intervalo prefiere? ¿Cree que lo observado cambiará para distintos valores de μ y b? Justifique.