1. Supongamos que la función de densidad de X es

$$f(x) = \begin{cases} 3x^2 & \text{para } 0 \leq x \leq 1 \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases}$$

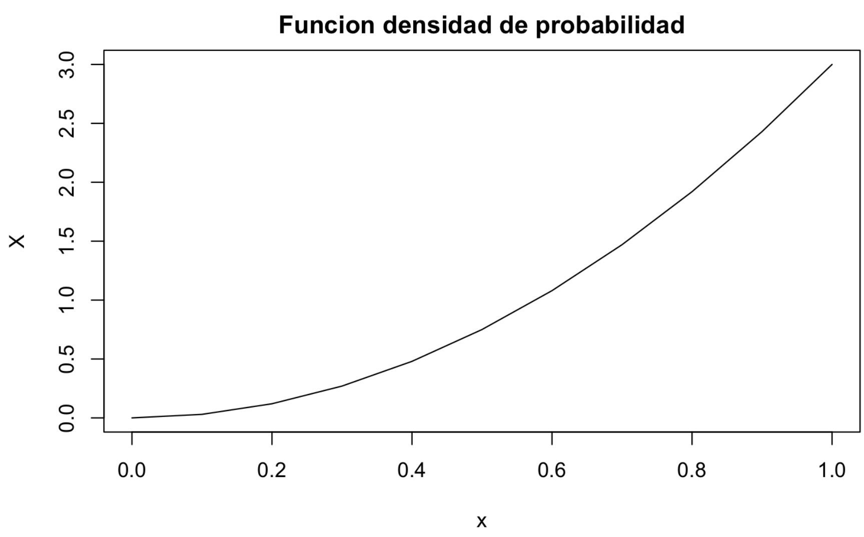
(a) Utilizando R calcular $P(0{,}1 \leq X \leq 0{,}5)$.

````
1)
```{r}
plot(seq(0, 1, 0.1),3 * seq(0, 1, 0.1) ^ 2, main = "Funcion densidad de probabilidad",
                                            xlab = "x",
                                            ylab = "X",
                                            type = "l")

f <- function(x) {
3 * x^2
}

integrate(f, lower= 0.1, upper= 0.5) $value
```

 [1] 0.124
````



2. Sea X una variable aleatoria uniforme en $[a,b]$. Hallar su función de distribución acumulada.

$X \sim$ Uniforme[a,b] si

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } b \leq x \leq a \\ 0 & \text{si } x \notin [a,b] \end{cases}$$

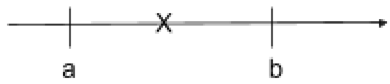
F(x) = P(X <=x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$

<u>Para intervalo ∞<x<a:</u>

F(x) = P(X <=x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ = 0

<u>Para intervalo a<=x<=b:</u>

F(x) = P(X <=x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ = $\int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt \ + \ \int_{a}^{x} f(t)\, dt \ = \frac{x-a}{b-a}$



<u>Para intervalo b<x<∞:</u>

F(x) = P(X <=x) = $\int_{-\infty}^{x} f(t)\, dt$ = $\int_{-\infty}^{a} f(t)\, dt \ + \ \int_{a}^{b} f(t)\, dt \ + \ \int_{b}^{x} f(t)\, dt$

F(x) = P(X <=x) = $\frac{b-a}{b-a}$ = 1

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & \text{si } a <= x <= b \\ 1 & \text{si } x > b \end{cases}$$

3. Supongamos que la duración de un componente electrónico sigue una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 1$. Utilizando R:

   (a) Hallar la probabilidad de que la duración sea menor a 2.

   (b) Hallar la probabilidad de que la duración esté entre 2 y 8.

   (c) Hallar t tal que la probabilidad de que la duración sea mayor a t es 0.25.

```
3 a)
```{r}
pexp(q = 2, rate = 1)
```

 [1] 0.8646647
```

```
3 b)
```{r}
pexp(q = 8, rate = 1) - pexp(q = 2, rate = 1)
```

 [1] 0.1349998
```

```
3 c)
```{r}
qexp(0.25, rate = 1, lower.tail = F)
```

 [1] 1.386294
```

4. Sea T una variable aleatoria exponencial de parámetro λ. Utilizando R, determinar en forma aproximada λ para que se cumpla $P(T < 1) = 0{,}05$.

$$P(X <= x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x <= 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{si } x > 0 \end{cases}$$

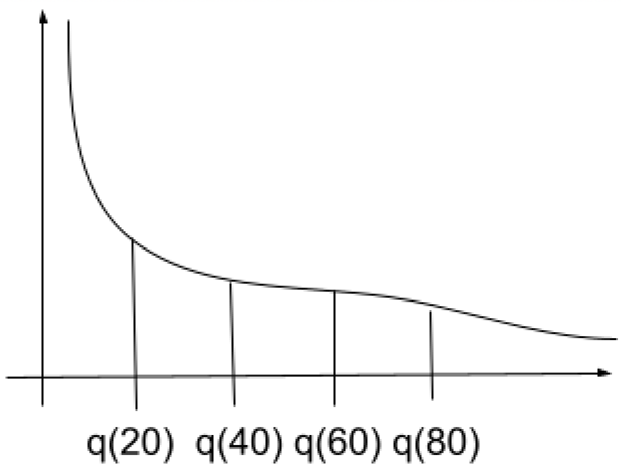
$$P(T <= 1) = 0.05 = 1 - e^{-\lambda}$$

$$0.05 - 1 = e^{-\lambda}$$

$$-0.95 = - e^{-\lambda}$$

$$\ln(0.95) = -\lambda \rightarrow \lambda = 0.0513$$

5. El ingreso anual de los jefes de familia de una cierta ciudad se puede modelar con una distribución exponencial con $\lambda = 0{,}00001$. Para clasificar a los hogares de esa ciudad se ha decidido dividir a la población en 5 grupos igualmente numerosos: clase baja, clase media-baja, clase media, clase media-alta y clase alta de modo que el 20 % de la población pertenezca a cada uno de ellos, es decir, el 20 % de los hogares con menores ingresos entran dentro de la clase baja, el segundo 20 % será clasificado dentro de la clase media-baja, etc. Hallar los salarios que indican el salto de categoría.
Observación: Los valores hallados representan los cuantiles 0.20, 0.40, 0.60 y 0.80 respectivamente.



5)
```{r}
qexp(0.2, rate = 0.00001)
qexp(0.4, rate = 0.00001)
qexp(0.6, rate = 0.00001)
qexp(0.8, rate = 0.00001)
```

```
[1] 22314.36
[1] 51082.56
[1] 91629.07
[1] 160943.8
```

6. Sea X una variable aleatoria normal con $\mu = 5$ y $\sigma = 10$. Hallar con R:

   (a) $P(X < 0)$, $P(X > 10)$, $P(X \geq 15)$.

   (b) $P(-20 < X < 15)$, $P(-5 \leq X \leq 30)$.

   (c) el valor de x tal que $P(X > x) = 0{,}05$.

   (d) el valor de x tal que $P(X < x) = 0{,}23$.

6 a)
```{r}
pnorm(q = 0, mean = 5, sd = 10) # P(X<0)
pnorm(q = 10, mean = 5, sd = 10, lower.tail = F) # P(X>10)
pnorm(q = 15, mean = 5, sd = 10, lower.tail = F) # P(X>=15)
```

```
[1] 0.3085375
[1] 0.3085375
[1] 0.1586553
```

6 b)
```{r}
pnorm(q = 15, mean = 5, sd = 10) - pnorm(q = -20, mean = 5, sd = 10) # P(-20 < X < 15)
pnorm(q = 30, mean = 5, sd = 10) - pnorm(q = -5, mean = 5, sd = 10) # P(-5 < X < 30)
```

```
[1] 0.8351351
[1] 0.8351351
```

6 c)
```{r}
qnorm(p = 0.05, mean = 5, sd = 10, lower.tail = F)
```

```
[1] 21.44854
```

```
6 d)
```{r}
(qnorm(p = 0.23 , mean = 5, sd = 10, lower.tail = T))
```

 [1] -2.388468
```

7. Sea T una variable aleatoria exponencial con parámetro $\lambda = 2$.

(a) Sea X una variable aleatoria discreta definida del siguiente modo:

$$\begin{array}{ll} X = 0 & \text{si } 0 \leq T < 1 \\ X = 1 & \text{si } 1 \leq T < 2 \\ X = 2 & \text{si } T \geq 2 \end{array}$$

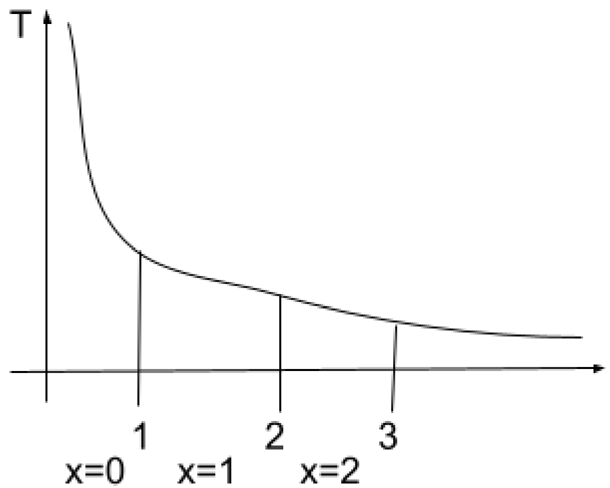
Utilizando R hallar la función de frecuencia de X.

(b) Sea Y una variable aleatoria discreta definida del siguiente modo:

$$Y = k \quad \text{si} \quad k \leq T < k + 1, \quad k = 0, 1, 2 \ldots$$

Utilizando R hallar la función de probabilidad de Y. ¿Le suena conocida la variable Y?, ¿qué ley tiene Y?

P(puntual) = P(frecuencia)



````
7 a)
```{r}
pexp(1, rate = 2) #P(X=0) = P(T<=1)
pexp(2, rate = 2) - pexp(1, rate = 2) # P(X=1) = P(T<=2) - P(T<=1)
pexp(2, rate = 2, lower.tail = F)  # P(X=2) = P(T>=2) = P(T>2)
```

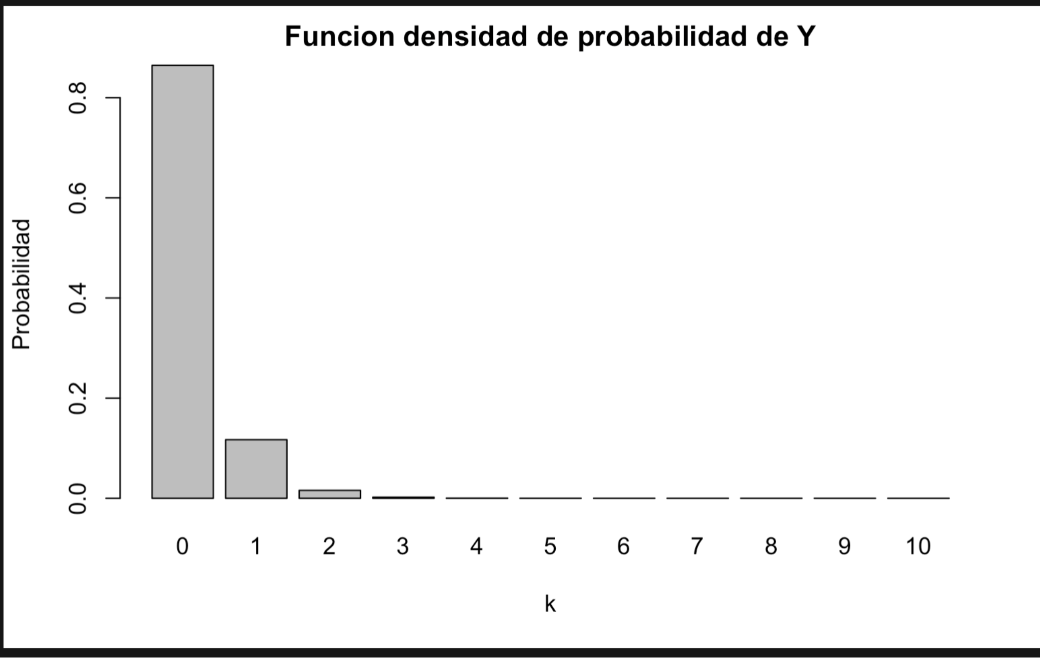
 [1] 0.8646647
 [1] 0.1170196
 [1] 0.01831564
````

7 b)

$$
y(k)=\begin{cases}
0 \text{ si } 0 <= T < 1 \\
1 \text{ si } 1 <= T < 2 \\
2 \text{ si } 1 <= T < 3 \\
\quad . \\
\quad . \\
\quad . \\
k \text{ si } k <= T < k+1
\end{cases}
$$

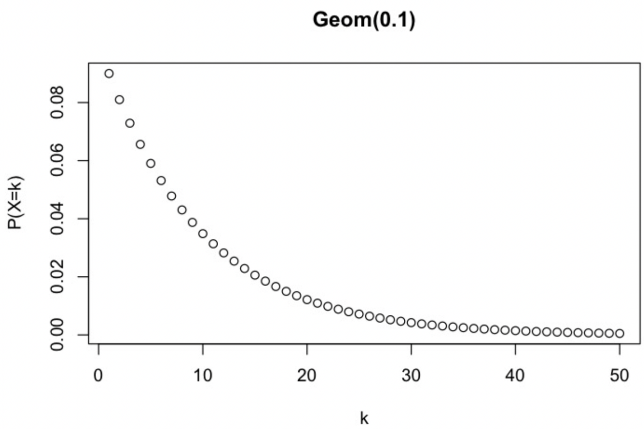
```
7 b)
```{r}
k = 0:10
vector_prob <- pexp(k+1, rate = 2)  - pexp(k, rate = 2)


barplot(vector_prob ~ k, main = "Funcion densidad de probabilidad de Y",
                         ylab = "Probabilidad")
```
```



La variable aleatoria discreta Y, tiene una ley muy semejante a la Distribución Geométrica

Distribución Geométrica



8. La función de distribución acumulada de Cauchy es

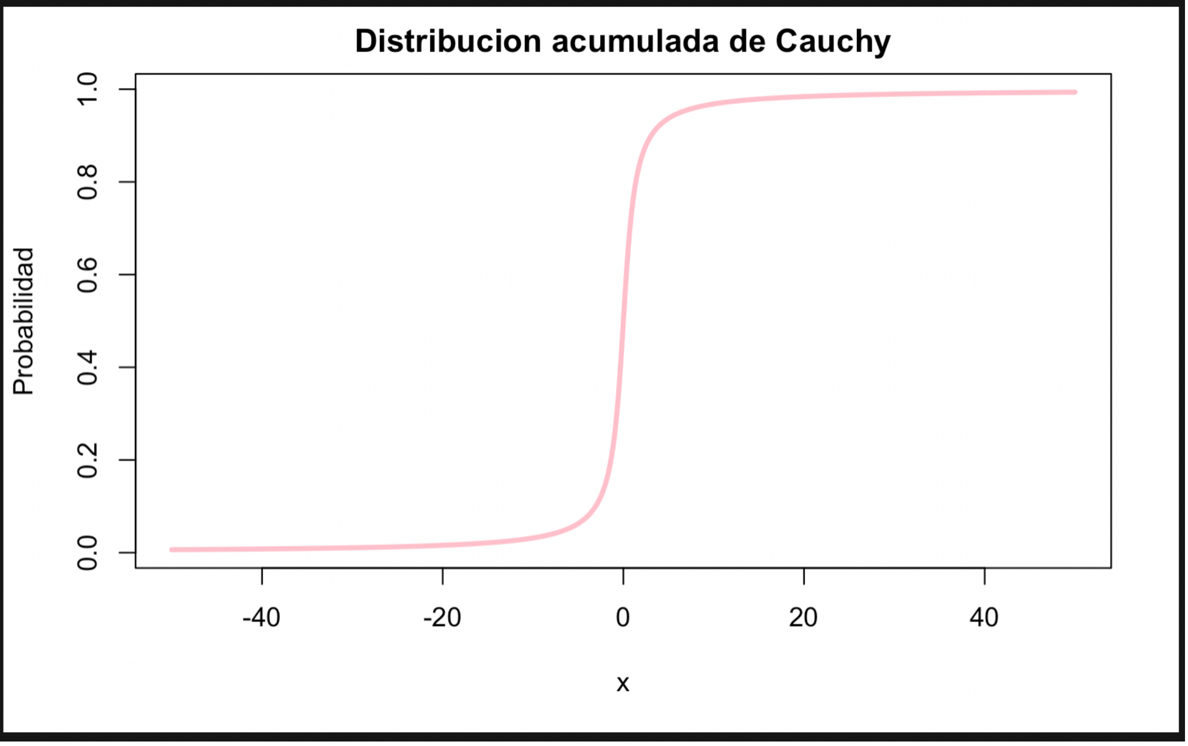
$$F(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \arctan(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

(a) Graficar en R para probar que efectivamente es una función de distribución acumulada.

(b) Hallar x tal que $P(X > x) = 0{,}1$.

8 a)

````
```{r}
x <- seq(-50, 50, 0.1)
plot(1/2 + (1/pi) * atan(x) ~ x, main = "Distribucion acumulada de Cauchy",
                                 ylab = "Probabilidad",
                                 type = "l",
                                 lwd = 3,
                                 col = "pink")
```
````



8 b)

````
```{r}
qcauchy(0.1, location = 0, scale = 1, lower.tail = F, log.p = FALSE)
```
````

```
[1] 3.077684
```