Práctica 1

Ejercicio 1. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución $N(\mu, \sigma^2)$. Supongamos que σ es conocido. Calcular el estimador de máxima verosimilitud de $\theta = \mu^2$, $\widehat{\theta}_{MV}$. Calcular la distribución asíntotica de $\sqrt{n}(\widehat{\theta}_{MV} - \theta)$.

Ejercicio 2. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria con distribución Binomial de parametros k y p. Si k es un número conocido

1. Encontrar el estimador de momentos y el de máxima verosimilitud de p.
2. Encontrar el estimador de máxima verosimilitud de las odds

$$O = \frac{p}{1-p}.$$

   ¿Es un estimador consistente?

3. Utilizando el método delta obtener la distribución aproximada de $\widehat{O}_{mv}$.
4. Estimar el valor de las odds y del error estandar de estimación para una muestra con $k = 3$ que se observaron un total de 16 ceros, 10 unos, 3 dos y 1 tres.

Ejercicio 3. Una empresa que fabrica autopartes necesita comprar láminas de acero. Para que una lámina de acero sea útil para el fabricante debe pasar un control de calidad que realiza la misma empresa. Dos proveedores de láminas de acero, llamados A y B, le ofrecen al fabricante de autopartes las láminas al mismo precio. Para decidir cuál proveedor contratar, un directivo de la empresa autopartista sugiere el siguiente plan. Llamemos p a la probabilidad de que una lámina de acero producida por el proveedor A, elegida al azar, pase el control de calidad del fabricante de autopartes y q a la probabilidad de que una lámina de acero producida por el proveedor B, elegida al azar, pase el control de calidad del fabricante de autopartes. El directivo de la empresa autopartista sugiere contratar al proveedor A si $p - q \geq 0$ y contratar al proveedor B si $p - q < 0$. Como p y q son desconocidos, el directivo le pide a cada una de los proveedores una muestra de n láminas de acero y verifica si cada lámina pasa el control de calidad.

Llamemos X_i, $i = 1, \ldots, n$ a la variable aleatoria que vale 1 si la i-ésima lámina de acero del proveedor A pasa el control de calidad y que vale 0 si la i-ésima lámina de acero del proveedor A no pasa el control de calidad. Llamemos Y_i, $i = 1, \ldots, n$ a la variable aleatoria que vale 1 si la i-ésima lámina de acero del proveedor B pasa el control de calidad y que vale 0 si la i-ésima lámina de acero del proveedor B no pasa el control de calidad. Supongamos que $X_1, \ldots, X_n$ forman una muestra aleatoria, que $Y_1, \ldots, Y_n$ forman otra muestra aleatoria y que $X_1, \ldots, X_n, Y_1, \ldots, Y_n$ son independientes entre si. Finalmente, llamemos

$$\widehat{d}_n = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)}{n}.$$

1. Mostrar que $\widehat{d}_n$ es un estimador consistente de $p - q$.

2. Calcular el desvío estándar de $\widehat{d}_n$. Mostrar que el desvío estándar de $\widehat{d}_n$ es menor o igual que
$$\sqrt{\frac{1}{2n}}.$$

3. ¿Qué tamaño de muestra se necesita para garantizar que, con probabilidad al menos 0.95, el error de estimar $p - q$ usando $\widehat{d}_n$ sea menor a 0,1? Resolver este inciso de dos maneras: usando la desigualdad de Tchebyshev primero y el TCL despues (obteniendo en este último caso una respuesta aproximada).

4. Mostrar que
$$\widehat{v}_n = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - Y_i)^2}{n} - (\widehat{d}_n)^2}.$$
es un estimador consistente de el desvío standard de $X_1 - Y_1$.

5. Calcular el límite en distribución de
$$\sqrt{n}\frac{\left(\widehat{d}_n - (p - q)\right)}{\widehat{v}_n}.$$

Ejercicio 4. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con parámetro θ. Sea $\widehat{\theta}_n$ un estimador de θ con varianza finita e insesgado. Demuestre que

$$ECM\left(\widehat{\theta}_n\right) = Var\left(\widehat{\theta}_n\right)$$

Ejercicio 5. (Opcional) Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con un parámetro de interés asociado θ. Mostrar que si

$$ECM\left(\widehat{\theta}_n\right) \to 0$$

entonces $\widehat{\theta}_n$ es consistente para θ.
Sugerencia: Escribir la definición de convergencia en probabilidad y considerar usar la desigualdad de Markov de manera conveniente.

Ejercicio 6. Sea $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de una distribución con esperanza finita igual a μ y varianza finita, $Var(X)$.

1. Es $(\bar{X}_n)^2$ un estimador insesgado de $E(X)^2$?

2. Es $(\bar{X}_n)^2$ un estimador consistente de $E(X)^2$?

3. Para qué valores de k es $(\bar{X}_n)^2 - kS^2$ un estimador insesgado y consistente de $E(X)^2$?

Ejercicio 7. Una investigadora quiere estimar la fracción de estudiantes en cierta universidad que ha violado el código ético de la institución. Para esto obtiene una muestra aleatoria de n estudiantes. La investigadora se da cuenta que preguntarles directamente a los estudiantes si han violado el código ético probablemente de lugar a algunas respuestas deshonestas. Considera entonces la siguiente técnica, llamada respuesta aleatorizada.

La investigadora arma un mazo de 100 cartas, donde 50 cartas tienen escrita la pregunta 'Ha usted violado el código ético de la universidad?' y las otras 50 cartas tienen escrita la pregunta 'Es el último dígito de tu número de teléfono 0, 1 o 2?'

A cada estudiante en la muestra aleatoria se le pide que mezcle el mazo de cartas, saqué una carta y responda a la pregunta en la carta elegida. Cómo la mitad de las cartas tienen escrita una pregunta irrelevante, responder que sí ya no estigmatiza a los alumnos.

Sea p la proporción de alumnos de la universidad que han violado el código ético y llamemos q a la probabilidad de que un alumno responda Si en la técnica de respuesta aleatorizada.

1. Usando la Ley de Probabilidad Total, mostrar que $q = 1/2 \times p + 1/2 \times 3/10$.
2. Sea Y la variable aleatoria que cuenta el número de respuestas positivas. Mostrar que Y/n es un estimador insesgado de q. Usando esto, proponer un estimador insesgado de p basado en Y. Si $n = 80$ e $y = 20$, ¿cúanto vale el estimador propuesto?

Ejercicio 8. Sean $X_1, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria de variables aleatorias que se distribuyen $N(\theta, \theta^2)$. Encuentre los estimadores del método de momentos que podrían obtenerse a partir del primer y segundo momento.