2.7 $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \in R^3$ of $Ax = 12x$

khi $A = \begin{bmatrix} 6 & 4 & 3 \\ 6 & 0 & 9 \\ 0 & 8 & 0 \end{bmatrix}$ và $\sum_{i=1}^{3} x_i = 1$

Giải

$Ax = 12x \Leftrightarrow (A - 12I)x = 0$

$$A - 12I = \begin{bmatrix} 6-12 & 4 & 3 \\ 6 & 0-12 & 9 \\ 0 & 8 & 0-12 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 3 \\ 6 & -12 & 9 \\ 0 & 8 & -12 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A - 12I)x = \begin{bmatrix} -6 & 4 & 3 \\ 6 & -12 & 9 \\ 0 & 8 & -12 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = 0$$

$$\Leftrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} -6x_1 & 4x_2 & 3x_3 & 0 \\ 6x_1 & -12x_2 & 9x_3 & 0 \\ 0 & 8x_2 & -12x_3 & 0 \\ x_1 & x_2 & x_3 & 1 \end{array}\right] = 0$$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 3/8 \\ 3/8 \\ 1/4 \end{bmatrix}$$

2.8 a)

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}, \quad [A \mid I] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\xrightarrow{row1/2} \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1,5 & 2 & 0,5 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1,5 & 2 & 0,5 & 0 & 0 \\ 0 & -0,5 & -1 & -1,5 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} h_2 = h_2 - h_1 3 \\ h_3 = h_3 - 4h_1 \end{matrix}$$

$$= \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -1 & -4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -2 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} h_2 = \frac{h_2}{-0,5} \\ h_3 = h_2 + h_3 \\ h_1 = h_1 - 1,5h_2 \end{matrix}$$

Ta thấy $h_3 = 0 \Rightarrow \det(A) = 0 \Rightarrow$ A không khả nghịch

b)

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow [A \mid I] = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & -1 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & -1 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} h_1 \leftrightarrow h_3 \\ h_3 = h_3 - h_1 \\ h_4 = h_4 - h_1 \end{matrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 1 & -1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} h_3 = h_3 - h_2 \\ h_4 = h_4 - h_2 \end{matrix} = \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{matrix} h_4 = 2h_4 - h_3 \\ h_3 = h_3 + h_4 \end{matrix}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & -2 & 0 & -2 & -2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & -1 & -1 & 2 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ h_2 = 2h_2 + h_3 \\ h_1 = 2h_1 + h_3 \\ \\ \end{array}$$

$$= \left[\begin{array}{cccc|cccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right] \begin{array}{l} h_1 = \frac{1}{2}h_1 \\ h_2 = \frac{h_2}{2} \\ h_3 = -h_3/\cancel{2} \\ h_4 = -h_4 \end{array} = \left[I \mid A^{-1} \right]$$

KL: $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ là ~~ma trận~~ khả nghịch và có ma trận khả nghịch là:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

2.9 Tập hợp S là k° gian con của R^3 nếu khi:
- chứa $\vec{0}$
- Nếu $u, v \in S$ thì $u+v \in S$
- $u \in S$ và $\lambda \in R$ thì $\lambda u \in S$

a) $A = \{(\lambda, \lambda + \mu^3, \lambda - \mu^3) \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$

- Chọn $\lambda = 0$, $\mu = 0$

$(0, 0+0^3, 0-0^3) = (0, 0, 0) \in A$ (1)

- Cho $A_1 = (\lambda_1, \lambda_1 + \mu_1^3, \lambda_1 - \mu_1^3)$

$A + A_1 = (\lambda + \lambda_1, (\lambda+\lambda_1) + (\mu^3 + \mu_1^3), (\lambda+\lambda_1) - (\mu^3 + \mu_1^3))$

do $\mu^3 + \mu_1^3$ có thể k° ~~thuộc~~ biểu diễn được dưới dạng μ^3

$\Rightarrow$ A không phải là k° gian con của R^3

b) $B = \{(\lambda^2, -\lambda^2, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$

- Cho $\lambda = 0$, ta có: $B = (0^2, -0^2, 0) \in B$ (1)
- Cho $B_1 = (\lambda_1^2, -\lambda_1^2, 0)$

$B + B_1 = (\lambda^2 + \lambda_1^2, -(\lambda_1^2 + \lambda^2), 0)$

do $-\lambda - \lambda_1^2$ có thể khác $-\lambda^2$ với $\lambda \in R$

nên $B + B_1 \in B$

$\Rightarrow$ B k° phải k° gian con của R^3

2.11 Ví dụ: $y = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 5 \end{bmatrix}$

$x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Thiết lập hệ pt:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & -1 & -2 \\ 1 & 3 & 1 & 5 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right] \Rightarrow y = -6x_1 + 3x_2 + 2x_3$$

2.13. Xác định cơ sở của: $U_1 \cap U_2$

của 2 k^0 gian con

$$U_1 = \text{Span}\left[\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right]$$

$$U_2 = \text{Span}\left[\begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ -2 \\ -1 \end{bmatrix}\right]$$

a)

Áp dụng Nullity: $\dim(\ker A_2) = 3 - 2 = 1$

b) Tìm cơ sở U_1 và U_2

Vì $\dim U_1 = \dim U_2 = 1 \Rightarrow$ mỗi k^o gian có đúng vecto sinh

· Tìm nghiệm $A_1 x = 0$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

· Tìm nghiệm: $A_2 x = 0$

$$\Rightarrow x = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

KL: $U_1 = U_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

c) Xác định cơ sở của $U_1 \cap U_2$

Vì $U_1 = U_2$ do đó ~~k^o gian sinh~~ giao của hai gian cũng đc sinh ra bởi cùng một vectơ.

$$U_1 \cap U_2 = \text{span}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$$

KL: Cơ sở của $U_1 \cap U_2$ là $\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}\right\}$

2.13: $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ (1), $A_2 = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (2)

a) * Tính rank (A_1)

$$(1) \xrightarrow[h_4 \leftarrow h_4 - h_1]{} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \xrightarrow[h_3 \leftarrow h_3 - 2h_1]{h_2 \leftarrow h_2 - h_1} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_3 = h_3 - h_2]{h_2 \leftarrow -\frac{h_2}{2}} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \operatorname{rank}(A_1) = 2$$

• Áp dụng Nullity:

$\dim(\ker A_1) = n - \operatorname{rank}(A_1) = 3 - 2 = 1$

* Tính rank A_2:

$$(2) \xrightarrow{h_1 = \frac{h_1}{3}} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 2 & 3 \\ 7 & -5 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} \xrightarrow[R_4 \leftarrow R_4 - 3R_1]{R_2 \leftarrow R_2 - R_1,\ R_3 \leftarrow R_3 - 7R_1} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\xrightarrow[h_4 \leftarrow h_4 - \frac{2}{3}h_4]{h_3 \leftarrow h_3 - \frac{2}{3}h_2} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Longrightarrow \operatorname{rank}(A_2) = 2$$