~~A05~~ 8

2.1 $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$

$a * b := ab + a + b$, $a, b \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

a) 1. Closesure

1 kiểm tra $a * b := ab + a + b \neq -1$

$\Rightarrow ab + a + b + 1 \neq 0$

$\Leftrightarrow a(1+b) + (1+b) \neq 0$

$\Leftrightarrow (a+1)(1+b) \neq 0$

$\Leftrightarrow \begin{cases} a \neq -1 \\ b \neq -1 \end{cases}$

Ta thấy $a * b \neq -1$

Do đó phép $*$ có tính đóng

2. Ass

Check $(a * b) * c = a * (b * c)$, $\forall a, b, c \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$

Ta có $\begin{cases} a * b := ab + a + b \\ b * c := bc + b + c \end{cases}$

Xét : $(a * b) * c = (ab + a + b)c + (ab + a + b) + c$

$= abc + ac + bc + ab + ac + b + c$ (1)

$a * (b * c) = (bc + b + c).a + (bc + b + c) + a$

$= abc + ac + b + bc + a + b + c$ (2)

Do (1) = (2) $\Rightarrow (a * b) * c = a * (b * c)$

$\Rightarrow (\mathbb{R} \setminus \{-1\}, *)$ có tính liên kết

Kết luận: $(\mathbb{R} \setminus \{-1\}, \star)$ thoả 5 tính chất ⇒ là nhóm Abelian

b) Giải $3 \star x \star x = 15$

$(3 \star x) \star x = 15$

$\Leftrightarrow (3x + 3 + x) \star x = 15$

$\Leftrightarrow (3x + 3 + x)x + 3x + 3 + x + x = 15$

$\Leftrightarrow 3x^2 + 3x + x^2 + 3x + 3 + x + x = 15$

$\Leftrightarrow 4x^2 + 8x - 12 = 0 \Rightarrow \left[\begin{array}{l} x = 8 \\ x = -3 \end{array}\right.$

2.4. Tính:

a) ~~AB~~ kích thước $(3 \times 2) \cdot (3 \times 3) \to$ không nhân được

b) $C_{ij} = A_{ik} + B_{kj}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+3 & 1+2 & 2+3 \\ 4+6 & 4+5 & 5+6 \\ 7+9 & 7+8 & 8+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 5 \\ 10 & 9 & 11 \\ 16 & 15 & 17 \end{bmatrix}$$

c.

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1+4 & 2+5 & 3+6 \\ 4+7 & 5+8 & 6+9 \\ 1+7 & 2+8 & 3+9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 7 & 9 \\ 11 & 13 & 15 \\ 8 & 10 & 12 \end{bmatrix}$$

d. $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2+2+10 & 3-2+1+4 \\ 1-2-20 & 12-1-1-8 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} 14 & 6 \\ -21 & 2 \end{bmatrix}$

e. $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 1 & -1 \\ 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 1 & -1 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 12 & 3 & -3 & -15 \\ -3 & 1 & 2 & 6 \\ 6 & 5 & 1 & 0 \\ 13 & 12 & 3 & 2 \end{bmatrix}$

C2.5. a)

$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & -1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 \\ 2 & -1 & 1 & 3 \\ 5 & 2 & -4 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 6 \end{bmatrix}$

$Ax = b$: $\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 5 & -7 & -5 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 3 & 4 \\ 5 & 2 & -4 & 2 & 6 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -4 \\ 0 & -3 & 3 & 5 & 2 \\ 0 & -3 & 1 & 7 & 1 \end{array}\right]$

$\longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & -4 & +4 & -3 \end{array}\right] \longrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -5 & -3 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 2 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$

Ta thấy $0x_0 + 0x_1 + 0x_2 + 0x_3 = 1$ (vô lí)

KL: PT vô nghiệm.

2.6 $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}$

Ma pt mở rộng

$$\left[\begin{array}{cccccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \Rightarrow \begin{cases} x_2 + x_5 = 2 \\ x_4 + x_5 = -1 \\ x_2 + x_6 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 2 - x_5 \\ x_4 = -1 - x_5 \\ x_6 = 1 - x_2 = -1 + x_5 \end{cases}$$

Đặt $x_1 = a, x_3 = b, x_5 = c$

Với $a, b, c \in \mathbb{R}$, ta có:

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 2 - c \\ x_3 = b \\ x_4 = -1 - c \\ x_5 = c \\ x_6 = 1 + c \end{cases}$$

Nghiệm tổng quát: $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a \\ 2-c \\ b \\ -1-c \\ c \\ 1+c \end{bmatrix}$

2.10 a. $x_1 = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 3 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \\ 8 \end{bmatrix}$

Tập các vectơ x_1, x_2, x_3 độc lập tuyến tính nếu phương trình sau chỉ có n° duy nhất là $c_1 = c_2 = c_3 = 0$:

$$c_1x_1 + c_2x_2 + c_3x_3 = 0$$

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix}$$

Tập các vectơ sẽ độc lập tuyến tính nếu ma trận A có hạng bằng số cột (3)

Biến đổi Gauss

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & 1 & -3 \\ 3 & -2 & 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -3 \\ 0 & -5 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$rank(A) = 2 <$ ~~colum~~ $cột(A) = 3$

$\Rightarrow$ Tập vectơ phụ thuộc tuyến tính

b. $x_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $x_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $x_3 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow Rank(A) = 3$$

$\Rightarrow$ ~~RA~~ $Rank(A) = 3 = col(A)$

$\Rightarrow$ Tập vectơ độc lập tuyến tính.