**TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM KỸ THUẬT THÀNH PHỐ HỒ CHÍ MINH**

**KHOA CÔNG NGHỆ THÔNG TIN**



**BÁO CÁO MÔN HỌC**

**MÔ HÌNH TRỘN GAUSS VÀ ỨNG DỤNG**

**MÔN HỌC:** Toán cho Trí tuệ Nhân tạo

**NGƯỜI THỰC HIỆN:**

22110351 – Hồng Anh Khoa

22110315 – Trịnh Tấn Hào

Hồ Chí Minh, ngày 16 tháng 4 năm 2025

**MỤC LỤC**

[**1. Giới thiệu** 1](#_Toc196231345)

[**2. Mô hình trộn Gauss (Gaussian Mixture Model)** 1](#_Toc196231346)

[**2.1. Định nghĩa** 1](#_Toc196231347)

[**2.2. Ý nghĩa toán học** 2](#_Toc196231348)

[**2.3. Giải thích công thức** 2](#_Toc196231349)

[**3. Học tham số bằng hợp lý cực đại (Maximum Likelihood Estimation)** 2](#_Toc196231350)

[**3.1. Hàm hợp lý** 2](#_Toc196231351)

[**3.2. Thách thức** 3](#_Toc196231352)

[**3.3. Giải thích công thức** 3](#_Toc196231353)

[**4. Thuật toán Cực đại Kỳ vọng (Expectation-Maximization)** 3](#_Toc196231354)

[**4.1. Tổng quan** 3](#_Toc196231355)

[**4.2. Bước E** 4](#_Toc196231356)

[**4.3. Bước M** 4](#_Toc196231357)

[**4.4. Giải thích công thức** 5](#_Toc196231358)

[**5. Biến ẩn (Latent Variable Perspective)** 5](#_Toc196231359)

[**5.1. Vai trò của biến ẩn** 5](#_Toc196231360)

[**5.2. Mô hình đồ họa** 6](#_Toc196231361)

[**5.3. Ý nghĩa toán học** 6](#_Toc196231362)

[**6. Ứng dụng mở rộng của GMM** 6](#_Toc196231363)

[**7. Thảo luận và hạn chế** 7](#_Toc196231364)

[**8. Kết luận** 8](#_Toc196231365)

[**Tài liệu tham khảo** 8](#_Toc196231366)

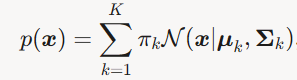
# **1. Giới thiệu**

Ước lượng mật độ là một trong những vấn đề cốt lõi của học máy, nhằm tìm ra một phân phối xác suất mô tả tốt nhất dữ liệu quan sát được. Mô hình trộn Gauss (Gaussian Mixture Model - GMM) là một phương pháp mạnh mẽ để thực hiện ước lượng mật độ, đặc biệt khi dữ liệu có cấu trúc phức tạp và không tuân theo một phân phối đơn giản. Trong báo cáo này, chúng ta sẽ phân tích mô hình trộn Gauss, cách học tham số bằng phương pháp hợp lý cực đại, thuật toán Cực đại Kỳ vọng (Expectation-Maximization - EM), và vai trò của biến ẩn trong mô hình này, dựa trên nội dung từ Chương 11 của cuốn sách \*"Mathematics for Machine Learning"\* (Deisenroth et al., 2020). Ngoài ra, báo cáo sẽ mở rộng các ứng dụng thực tiễn của GMM trong các lĩnh vực như phân cụm, nhận dạng mẫu, và xử lý tín hiệu.

# **2. Mô hình trộn Gauss (Gaussian Mixture Model)**

## **2.1. Định nghĩa**

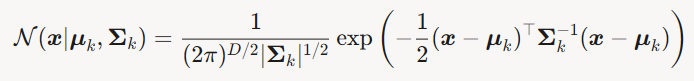
Mô hình trộn Gauss là một mô hình xác suất giả định rằng dữ liệu được tạo ra từ một tổ hợp tuyến tính của nhiều phân phối Gauss. Theo Chương 11 (trang 349), một GMM được định nghĩa như sau:

Cho một tập dữ liệu D = {x1, x2, …, xN}, với **x**n D, mật độ xác suất của **x**n được biểu diễn bằng:

trong đó:

- K: số lượng thành phần Gauss (components).

- : trọng số trộn (mixture weight) của thành phần thứ k, thỏa mãn và .

- ): phân phối Gauss đa biến với trung bình Dvà ma trận hiệp phương sai DxD , được định nghĩa là:

## **2.2. Ý nghĩa toán học**

Mỗi thành phần Gauss đ ại diện cho một cụm (cluster) trong dữ liệu, và trọng số thể hiện xác suất a priori rằng một điểm dữ liệu thuộc về cụm thứ k. Tổng hợp các thành phần này cho phép GMM mô hình hóa các phân phối phức tạp, không đối xứng, hoặc đa đỉnh (multimodal), điều mà một phân phối Gauss đơn lẻ không thể thực hiện được.

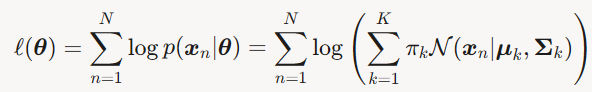
## **2.3. Giải thích công thức**

- **Hàm mật độ Gauss**: Hằng số đảm bảo rằng tổng xác suất bằng 1. Phần lũy thừa exp()T đo lường khoảng cách Mahalanobis từ **x** đến , điều chỉnh bởi ma trận hiệp phương sai .

- **Trọng số trộn**: kiểm soát mức độ đóng góp của mỗi thành phần Gauss vào mật độ tổng thể. Điều kiện đảm bảo rằng p(**x**) là một hàm mật độ xác suất hợp lệ.

# **3. Học tham số bằng hợp lý cực đại (Maximum Likelihood Estimation)**

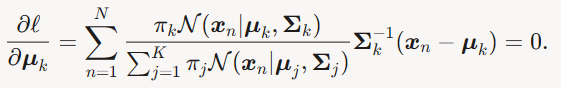
## **3.1. Hàm hợp lý**

Để học các tham số của GMM , chúng ta sử dụng phương pháp hợp lý cực đại (MLE). Theo trang 350, hàm log-likelihood của dữ liệu được định nghĩa như sau:

Mục tiêu là tối ưu hóa để tìm sao cho hàm này đạt giá trị lớn nhất.

## **3.2. Thách thức**

Việc tối ưu hóa trực tiếp gặp khó khăn do sự hiện diện của tổng bên trong logarit, làm cho hàm mục tiêu không có dạng đóng (closed-form). Đạo hàm của đối với hoặc dẫn đến các phương trình phi tuyến phức tạp. Ví dụ, nếu lấy đạo hàm đối với :



Phương trình này không thể giải trực tiếp vì phụ thuộc vào tất cả các tham số khác. Do đó, chúng ta cần một phương pháp lặp để xấp xỉ lời giải.

## **3.3. Giải thích công thức**

- **Log-likelihood**: Logarit được sử dụng để biến tích thành tổng, giúp tính toán dễ dàng hơn. Tuy nhiên, tổng bên trong logarit làm cho việc tối ưu hóa trở nên phức tạp.

- **Đạo hàm**: Hệ số: chính là xác suất có điều kiện

(responsibility) rằng xn thuộc cụm k, như sẽ được giải thích trong thuật toán EM.

# **4. Thuật toán Cực đại Kỳ vọng (Expectation-Maximization)**

## **4.1. Tổng quan**

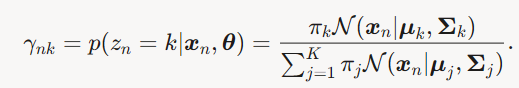
Thuật toán EM là một phương pháp lặp để tối ưu hóa hàm hợp lý khi mô hình có biến ẩn. Trong GMM, biến ẩn **z**n biểu thị chỉ số cụm mà xn thuộc về, với . Theo trang 360, thuật toán EM bao gồm hai bước chính:

1. **Bước E (Expectation)**: Tính xác suất có điều kiện của biến ẩn dựa trên tham số hiện tại.

2. **Bước M (Maximization)**: Cập nhật các tham số để tối đa hóa hàm hợp lý kỳ vọng.

## **4.2. Bước E**

Trong bước E, chúng ta tính xác suất có điều kiện (responsibility), biểu thị xác suất rằng **x**n thuộc cụm k:



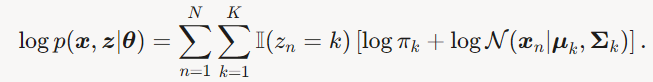
Công thức này sử dụng định lý Bayes, trong đó tử số là xác suất chung của **x**n và , và mẫu số là xác suất biên của **x**n.

## **4.3. Bước M**

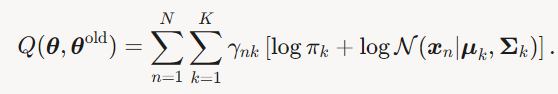
Trong bước M, chúng ta tối ưu hóa hàm hợp lý kỳ vọng:



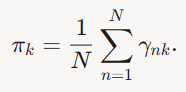
Cụ thể, hàm log-likelihood hoàn chỉnh là:



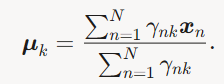
Lấy kỳ vọng theo phân phối của , ta được:



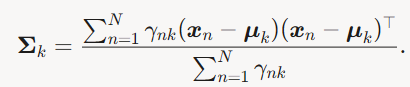
Tối ưu hóa đối với , ta cập nhật các tham số:



- **Trọng số trộn**:



- **Trung bình**:



- Ma trận hiệp phương sai:

## **4.4. Giải thích công thức**

- **Responsibility :** Đây là trọng số mềm (soft assignment) của xn vào cụm k, khác với phân cụm cứng (hard clustering) như k-means.

- **Cập nhật tham số:** Các công thức cập nhật tương tự như tính trung bình trọng số và hiệp phương sai, nhưng sử dụng để cân nhắc mức độ đóng góp của mỗi điểm dữ liệu.

- **Tính lặp**: Thuật toán lặp lại giữa bước E và M cho đến khi hàm hợp lý hội tụ hoặc đạt số vòng lặp tối đa.

# **5. Biến ẩn (Latent Variable Perspective)**

## **5.1. Vai trò của biến ẩn**

Biến ẩn trong GMM đóng vai trò như một chỉ số cụm ẩn, giúp đơn giản hóa việc mô hình hóa dữ liệu. Theo trang 363, mô hình có thể được diễn giải như sau:

- Mỗi xn được sinh ra từ một trong ***K*** cụm, với xác suất .

- Biến tuân theo phân phối đa thức (multinomial distribution):

- Dữ liệu xn được sinh ra từ phân phối Gauss có điều kiện:



## **5.2. Mô hình đồ họa**

Mô hình GMM có thể được biểu diễn như một mô hình đồ họa có hướng (directed graphical model), trong đó , và các tham số điều khiển phân phối. Điều này giúp trực quan hóa mối quan hệ giữa biến ẩn và dữ liệu quan sát.

## **5.3. Ý nghĩa toán học**

Biến ẩn cho phép GMM phân tách dữ liệu thành các cụm mà không cần gán nhãn cứng. Thay vì giả định mỗi điểm thuộc một cụm duy nhất, GMM sử dụng xác suất có điều kiện để biểu thị mức độ thuộc về của mỗi điểm dữ liệu vào các cụm khác nhau. Điều này làm tăng tính linh hoạt của mô hình, đặc biệt khi các cụm có sự chồng lấn.

# **6. Ứng dụng mở rộng của GMM**

Ngoài các nội dung trong sách, GMM có nhiều ứng dụng thực tiễn trong các lĩnh vực khác nhau:

**6.1. Phân cụm (Clustering):**

- GMM được sử dụng trong các bài toán phân cụm mềm, chẳng hạn như phân tích dữ liệu khách hàng trong tiếp thị hoặc phân cụm hình ảnh trong thị giác máy tính.

- Ví dụ: Phân cụm người dùng dựa trên hành vi mua sắm, nơi mỗi cụm đại diện cho một nhóm khách hàng có đặc điểm tương tự.

**6.2. Nhận dạng mẫu (Pattern Recognition):**

- GMM thường được sử dụng trong nhận dạng giọng nói và chữ viết tay, nơi dữ liệu có thể được mô hình hóa như một tổ hợp của nhiều phân phối Gauss.

- Ví dụ: Trong nhận dạng giọng nói, GMM có thể mô hình hóa phổ âm thanh của các âm vị khác nhau.

**6.3. Xử lý tín hiệu và hình ảnh:**

- GMM được áp dụng để phân đoạn hình ảnh, nơi các pixel được gán vào các vùng (regions) dựa trên đặc trưng màu sắc hoặc kết cấu.

- Ví dụ: Phân đoạn hình ảnh y tế để xác định các vùng mô khác nhau trong ảnh MRI.

**6.4. Học sâu (Deep Learning):**

- GMM được tích hợp vào các mô hình học sâu như Variational Autoencoders (VAEs), nơi phân phối ẩn được mô hình hóa bằng tổ hợp Gauss để tạo ra dữ liệu mới.

- Ví dụ: Sinh ảnh hoặc văn bản trong các mô hình sinh (generative models).

**6.5. Phát hiện bất thường (Anomaly Detection):**

- GMM có thể được sử dụng để mô hình hóa dữ liệu bình thường, và các điểm dữ liệu có xác suất thấp được xem là bất thường.

- Ví dụ: Phát hiện gian lận tài chính dựa trên các giao dịch bất thường.

# **7. Thảo luận và hạn chế**

Mặc dù GMM là một công cụ mạnh mẽ, nó cũng có một số hạn chế:

- **Khởi tạo tham số:** Thuật toán EM nhạy cảm với giá trị khởi tạo của và . Khởi tạo không tốt có thể dẫn đến hội tụ vào cực trị cục bộ.

- **Số lượng cụm K:** Việc chọn K thường dựa vào các tiêu chí như BIC (Bayesian Information Criterion) hoặc thử nghiệm chéo (cross-validation), nhưng không có phương pháp hoàn toàn tự động.

- **Giả định Gauss:** GMM giả định rằng mỗi cụm tuân theo phân phối Gauss, điều này có thể không đúng với dữ liệu có cấu trúc phức tạp hơn.

Để khắc phục, các phương pháp mở rộng như mô hình trộn phi Gauss (non-Gaussian mixture models) hoặc sử dụng mạng nơ-ron để học phân phối ẩn đã được đề xuất.

# **8. Kết luận**

Mô hình trộn Gauss là một công cụ quan trọng trong ước lượng mật độ, cung cấp một cách linh hoạt để mô hình hóa dữ liệu phức tạp. Dựa trên nội dung từ Chương 11 của cuốn sách \*"Mathematics for Machine Learning"\*, chúng ta đã phân tích chi tiết cách xây dựng mô hình GMM, học tham số bằng hợp lý cực đại, áp dụng thuật toán EM, và vai trò của biến ẩn. Các công thức toán học được giải thích rõ ràng để làm sáng tỏ cơ chế hoạt động của mô hình. Ngoài ra, các ứng dụng thực tiễn như phân cụm, nhận dạng mẫu, và xử lý tín hiệu cho thấy tiềm năng rộng lớn của GMM. Trong tương lai, việc tích hợp GMM với các phương pháp học sâu và cải tiến thuật toán EM có thể mở ra những hướng nghiên cứu mới.

# **Tài liệu tham khảo**

- Deisenroth, M. P., Faisal, A. A., & Ong, C. S. (2020). \*Mathematics for Machine Learning\*. Cambridge University Press.

- Bishop, C. M. (2006). \*Pattern Recognition and Machine Learning\*. Springer.

- Murphy, K. P. (2012). \*Machine Learning: A Probabilistic Perspective\*. MIT Press.