# Solution

### --by lcrh

题目来源:

- USACO21JAN Telephone G P7297
- USACO21FEB StoneGame G P7413
- USACO21FEB Modern Art 3 G P7414
- USACO21OPEN Permutation G P7529

## T1

显然是一个最短路问题，但是由于无法将所有的边建出，我们需要考虑别的方法计算代价。注意到$K$并不大，我们可以另外建立$K$张$N$个点的图，每一张这样的图代表一种颜色，同一层的点之间依次连边，代价均为1.这样就可以计算传达消息的代价了。

另外，我们应该让原图的第$i$个节点对第$b_i$层的第$i$个节点连边，表示选择消息的传入方，如果$b_{i,j}=1$我们就把第$i$层所有满足$a_x=j$的节点$x$向原图的第$x$个节点连边，这里就表示选择了消息的接收方。由于边的代价只有0/1，这里其实可以使用BFS计算。理论上最低的复杂度就是$O(NK)$。$std$是使用DIJKSTRA算法的，代价为$O(NK\log{(NK)})$。

## T2

这道题难度适中。首先我们可以注意到，如果任意数目对应的石子堆都只有两堆，那么后手就已经必胜了。由于小$B$的操作是我们要枚举计数的，我们可以发现，小$A$想要做到这一点是比较简单的。

我们将一次取石子操作看成将所有石子堆的数量除上$s_i$向下取整，随后取任意数量的石子。小$B$一轮操作之后，我们将所有的石子堆内的石子数向下堆$s_1$取整，此时，小$A$显然可以取尝试找到石子数最多的奇数数量的石子堆，取出所有的该堆内所有的石子，那么小$A$就必胜了。

因此，小$B$必须在第一步操作之后使得任意数目的石子对应的石子堆的数量都是偶数，想要做到这一点，必须保证在对$s_1$做除法之后，只有一个数目对应的石子堆为奇数且这个数字为1或者有两个数字对应的石子堆数目为奇数且这两个数目为$x,x-1$。

我们可以枚举第一步取的石子的数量，堆原本石子的数量记录一个cnt数组。时间复杂度可以做到$O(M\log M)$，$M$是$a_i$的最大值。

## T3

数据范围非常区间DP。容易发现，如果你希望一次粉刷对于最终结果产生不止一个格子的影响，则会将一个大的染色问题拆解城若干个区间的染色问题。看起来就可以区间$DP$了，不过由于可能会拆成非常多个区间，极难枚举分割点，代价过高。

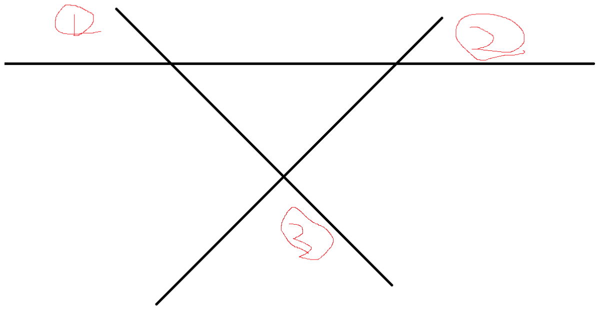
于实我们考虑换一种方法，将一个区间划分为多个子区间拆解成很多子区间的逐步合并，每一次合并，会使得答案减一。那么我们就变成了另一种区间$DP$。区间之间要么包含，要么$x$相同且共用一个端点，要么不存在任何交集。每一个这样的区间会使得答案减一，最终答案为$N-dp_{1,N}$。

转移方程较为简单：

$$if(a[i]==a[j])dp_{i,j}=\max(dp_{i,j},dp_{i+1,j-1}+1)$$
$$dp_{i,j}=\max(dp_{i,k}+dp_{k,j})$$

## T4

对于一个排列，我们首先会发现，前三个点一定组成一个三角形（不存在三点共线），随后我们会发现，如果第四个点在三角形内，那么它一定满足条件(不存在三点共线)。如果在三角形外，那么其范围如下图：




在1,2,3区内才能合法，随后，你会获得一个大的三角形，之后，要么你在图上所示区域内对三角形进行扩充，要么就选择一个三角形内部的点。

考虑进行DP，首先我们肯定需要$i,j,k$三个数字表示当前状态的三个顶点，可以确定地是三角形外地点一定还没有加入排列，问题在于三角形内的点，由于我们不需要关系其实际坐标，我们只需要一个额外的维度记录以下三角形内已经有了多少个点。

因此状态即为$dp_{i,j,k,l}$，$i,j,k$表示三个点的坐标，$l$表示有多少个三角形内的点已经被加入矩形中了。

进行转移时需要首先对$l$进行枚举，随后枚举$i,j,k$，花费$O(N)$的时间计算出内部和外部的点。随后对下一个排列中的点在内部的情况进行转移，随后枚举扩展三角形的情况，枚举之后需要再次统计三角形内的点，转移的代价位$O(N^2)$，总复杂度为$O(N^6)$，达到了$10^9$复杂度过大，需要优化，我们可以记录$f_{i,j,k}$为三角形$i,j,k$内部的点的数目，这样转移的代价就可以压到$O(N)$。复杂度为$O(N^5)$，理论数量级也达到了$10^9$级别。不过我们可以令$i,j,k$有序，使得常数降为$\frac{1}{6}$。