

问题

求有多少个小于等于 $\lfloor \frac{n}{m} \rfloor$ 的数，满足其最大质因子不大于 m 的最小质因子。

解法

假设 $N = \lfloor \frac{n}{m} \rfloor, d = \lfloor \sqrt{N} \rfloor$, m 的最小质因子为 p .

case 1

若 $p > d$, 那么 N 以内的数最多只会会有一个大于等于 p 的质因子, 因此答案为:

$$\sum_{i>p} [i \text{ 是质数}] \lfloor \frac{N}{i} \rfloor$$

考虑容斥原理, 记 $f(n) = \sum_{i=2}^n [i \text{ 是质数}] \lfloor \frac{N}{i} \rfloor$ (注意是 $\frac{N}{i}$), 答案为 $f(N) - f(p)$.

考虑求解 $f(n)$, 显然可以通过数论分块解决。假设我们有块 $[l, r]$, 那么这个块的答案为 $(g(r) - g(l-1)) \lfloor \frac{N}{r} \rfloor$, 其中 $g(n)$ 表示 n 以内的质数个数, 可以通过高级筛求解(min25, 洲阁筛...)

case 2

若 $p \leq d$, 爆搜即可通过本题, 可能需要一点点剪枝, 也可能不需要。