L-繁星点点

林子豪

2024 年 6 月 16 日

介绍

- 求有多少个阶为n的方阵$[a_{ij}]$，满足至少有一行或者一列的元全部相等。
- $a_{ij} \in \{0, 1, 2\}$

利用容斥原理

选有行/列总共有一个满足, 去掉有行/列总共有两个满足...

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}$$
$$\times(2\times\binom{n}{i}\times 3^{i+(n-i)*n}$$
$$+\sum_{j=1}^{i-1}\binom{n}{i-j}\binom{n}{j}\times 3^{n^2-n\times i+\min(i-j,j)^2+1})$$

利用容斥原理

选有行/列总共有一个满足, 去掉有行/列总共有两个满足...

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1}$$
$$\times(2\times\binom{n}{i}\times 3^{i+(n-i)*n}$$
$$+\sum_{j=1}^{i-1}\binom{n}{i-j}\binom{n}{j}\times 3^{n^2-n\times i+\min(i-j,j)^2+1})$$

复杂度 $O(n^2)$, 不对

将行列分开看，分为有行相等的情况和没有行相等的情况

有行相等的情况为 $n^2 - (3^n - 3)^n$
无行相等的情况为: 有 (1到n) 列相等, 并且行不相等, 使用容斥原理

$$\sum_{i=1}^{n}(-1)^{i-1} \times \binom{n}{i}(3 \times (3^{n-i} - 1)^n + (3^i - 3) \times 3^{n\times(n-i)})$$

$3 \times (3^{n-i} - 1)^n$ 为所有被选中的列两两相等的情况
$(3^i - 3) \times 3^{n\times(n-i)}$ 为所有被选中的列不两两相等的情况