

# 数学专题第二次讲座

## UESTC-XCPC-2024-暑假前集训

UESTC XCPC 集训队

2024 年 6 月 15 日

# 1 Overview

## 2 Easy

## 3 Medium

## 4 Hard

# Overview

本次专题分为两个 Part，其中 Normal 部分一共有二十六道题目，其中有二十道题计入一血；EX 部分一共有七个题目，且全部计入一血。

# Overview

本次专题分为两个 Part，其中 Normal 部分一共有二十六道题目，其中有二十道题计入一血；EX 部分一共有七个题目，且全部计入一血。

截至今日早上十点：

- 一共有 62 名同学报名参加本次专题，有 16 名同学通过了其中至少一道题目

# Overview

本次专题分为两个 Part，其中 Normal 部分一共有二十六道题目，其中有二十道题计入一血；EX 部分一共有七个题目，且全部计入一血。

截至今日早上十点：

- 一共有 62 名同学报名参加本次专题，有 16 名同学通过了其中至少一道题目
- 一共有 9 名同学抢到了一血

# Overview

本次专题分为两个 Part，其中 Normal 部分一共有二十六道题目，其中有二十道题计入一血；EX 部分一共有七个题目，且全部计入一血。

截至今日早上十点：

- 一共有 62 名同学报名参加本次专题，有 16 名同学通过了其中至少一道题目
- 一共有 9 名同学抢到了一血（其中 rzygg 抢了 EX-E 的一血，Orz）

# Overview

本次专题分为两个 Part，其中 Normal 部分一共有二十六道题目，其中有二十道题计入一血；EX 部分一共有七个题目，且全部计入一血。

截至今日早上十点：

- 一共有 62 名同学报名参加本次专题，有 16 名同学通过了其中至少一道题目
- 一共有 9 名同学抢到了一血（其中 rzygg 抢了 EX-E 的一血，Orz）
- yty 同学在 154 次错误提交后终于通过了 Z 题。

① Overview

② Easy

③ Medium

④ Hard



## A - 京东 E 卡

### 题目大意

wwlw 抽奖抽到了一张京东 e 卡，内含  $s$  元，他决定买点小零食。具体而言，现有  $n$  种可以买的小零食，第  $i$  种库存还有  $d_i$  个。所有小零食单价都是 1 元/个。问把这个卡里的钱花光有多少种方案。

# A - 京东 E 卡

## 题目大意

wwlw 抽奖抽到了一张京东 e 卡，内含  $s$  元，他决定买点小零食。具体而言，现有  $n$  种可以买的小零食，第  $i$  种库存还有  $d_i$  个。所有小零食单价都是 1 元/个。问把这个卡里的钱花光有多少种方案。

- 一血：梁育诚
- 分享者：王彬丞
- 知识点：容斥，组合数学



## C - 多项式乘法

### 题目大意

给出两个多项式  $F(x)$  和  $G(x)$ ，求  $F(x)G(x)$ 。

# C - 多项式乘法

## 题目大意

给出两个多项式  $F(x)$  和  $G(x)$ ，求  $F(x)G(x)$ 。

- 本题不计一血
- 知识点：fft



## E - 数学专题签到处

### 题目大意

多次询问，每次给出  $x$ ，求

$$\sum_{i=1}^N \binom{3i}{x}$$

## E - 数学专题签到处

### 题目大意

多次询问，每次给出  $x$ ，求

$$\sum_{i=1}^N \binom{3i}{x}$$

- 一血：余天羽
- 分享者：赵聪
- 知识点：组合数学，加法公式



## J - 简单的模板题

### 题目大意

快速幂，乘法逆元及 BSGS 模版题。

## J - 简单的模板题

### 题目大意

快速幂，乘法逆元及 BSGS 模版题。

- 本题不计一血
- 知识点：exgcd, BSGS





## M - 简单的数列题

### 题目大意

求满足如下递推关系的一个数列

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i}, n \geq 2$$
$$a_0 = a_1 = 1$$

## M - 简单的数列题

### 题目大意

求满足如下递推关系的一个数列

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i}, n \geq 2$$
$$a_0 = a_1 = 1$$

- 本题不计一血
- 知识点：生成函数，卡特兰数



# O - 模线性方程组

## 题目大意

模意义下高斯消元模版题。

# O - 模线性方程组

## 题目大意

模意义下高斯消元模版题。

- 本题不计一血
- 知识点：高斯消元



# R - 奥日与风袭废墟

## 题目大意

欧拉筛求积性函数模版题。

# R - 奥日与风袭废墟

## 题目大意

欧拉筛求积性函数模版题。

- 本题不计一血
- 知识点：线性筛，积性函数



# Y - 有序对

## 题目大意

求有序对  $(a, b)$  的个数，满足：

- ①  $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor = a \bmod b$
- ②  $1 \leq a \leq p$  且  $1 \leq b \leq q$

# Y - 有序对

## 题目大意

求有序对  $(a, b)$  的个数, 满足:

- ①  $\lfloor \frac{a}{b} \rfloor = a \bmod b$
- ②  $1 \leq a \leq p$  且  $1 \leq b \leq q$

- 一血: 陈治臻
- 分享者: 王东坡
- 知识点: 整数分块





1 Overview

2 Easy

3 Medium

4 Hard

## B - 删删乐

### 题目大意

给定一棵  $n$  个点的树，现执行以下操作  $n$  次：

- ① 任选一个未被删除的点  $u$ ，令  $a_u$  等于与  $u$  相连且未被删除的边的条数。
- ② 将点  $u$  及与  $u$  相连的所有边删除。

对于每个  $k \in [1, n]$ ，求最终能得到多少个不同的序列  $\{a\}$ ，满足  $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = k$ 。

## B - 删删乐

### 题目大意

给定一棵  $n$  个点的树，现执行以下操作  $n$  次：

- ① 任选一个未被删除的点  $u$ ，令  $a_u$  等于与  $u$  相连且未被删除的边的条数。
- ② 将点  $u$  及与  $u$  相连的所有边删除。

对于每个  $k \in [1, n]$ ，求最终能得到多少个不同的序列  $\{a\}$ ，满足  $\gcd(a_1, a_2, \dots, a_n) = k$ 。

- 一血：余天羽
- 分享者：什么都没有:(
- 知识点：数论，分类讨论



## D - 随机排列

### 题目大意

现在有一个长为  $n$  随机排列  $p$ , 定义一个排列  $q$  是好的当且仅当  $\forall i(1 \leq i < n), \max_{j=1}^i q_j \neq \max_{j=1}^i p_j$ , 求好排列的个数。

## D - 随机排列

### 题目大意

现在有一个长为  $n$  随机排列  $p$ , 定义一个排列  $q$  是好的当且仅当  $\forall i(1 \leq i < n), \max_{j=1}^i q_j \neq \max_{j=1}^i p_j$ , 求好排列的个数。

- 一血: ?
- 分享者: ?
- 知识点: 容斥



# F - 树上序列

## 题目大意

给定一棵  $n$  个点且以 1 为根的有根树，及常数  $V$ 。求序列  $\{a_n\}$  的个数，满足

- ①  $\forall i \in [1, n], a_i \in [1, V]$
- ②  $\forall i \in [2, n], a_i \leq a_{fa_i}$

# F - 树上序列

## 题目大意

给定一棵  $n$  个点且以 1 为根的有根树，及常数  $V$ 。求序列  $\{a_n\}$  的个数，满足

- ①  $\forall i \in [1, n], a_i \in [1, V]$
- ②  $\forall i \in [2, n], a_i \leq a_{fa_i}$

- 一血：余天羽
- 分享者：什么都没有:(
- 知识点：拉格朗日插值



# G - 矩阵翻转

## 题目大意

给出一个  $n \times m$  的 01 矩阵，即矩阵的所有元  $e_{ij} \in \{0, 1\}$ 。  
每次操作可以将一行或一列的所有元取反，操作可以执行任意次。  
求最终矩阵至少有多少个 1。



# G - 矩阵翻转

## 题目大意

给出一个  $n \times m$  的 01 矩阵，即矩阵的所有元  $e_{ij} \in \{0, 1\}$ 。  
每次操作可以将一行或一列的所有元取反，操作可以执行任意次。  
求最终矩阵至少有多少个 1。

- 一血：李昌泽
- 分享者：李昌泽
- 知识点：FWT



## H - 米奇妙妙程序

### 题目大意

lh3k 摆烂了，在这里丢一个原题链接：

<https://codeforces.com/problemset/problem/838/D>。

# H - 米奇妙妙程序

## 题目大意

lh3k 摆烂了，在这里丢一个原题链接：

<https://codeforces.com/problemset/problem/838/D>。

- 一血：余天羽
- 分享者：什么都没有:(
- 知识点：组合数学，构造双射，对称性



## K - 谦让是种美德

### 题目大意

给定分别有  $n$  个白碎片和  $m$  个黑碎，每次操作一名玩家可以选择从某一堆中拿出偶数个碎片（不为零），将所选数量的一半放入另一堆中。问  $(n, m)$  是否为必胜态。

# K - 谦让是种美德

## 题目大意

给定分别有  $n$  个白碎片和  $m$  个黑碎，每次操作一名玩家可以选择从某一堆中拿出偶数个碎片（不为零），将所选数量的一半放入另一堆中。问  $(n, m)$  是否为必胜态。

- 一血：余天羽
- 分享者：雷昊
- 知识点：博弈论



# L - 繁星点点

## 题目大意

求有多少个阶为  $n$  的方阵  $[a_{ij}]$ , 满足至少有一行或者一列的元全部相等。其中  $a_{ij} \in \{0, 1, 2\}$ 。答案对 998244353 取模。

# L - 繁星点点

## 题目大意

求有多少个阶为  $n$  的方阵  $[a_{ij}]$ , 满足至少有一行或者一列的元全部相等。其中  $a_{ij} \in \{0, 1, 2\}$ 。答案对 998244353 取模。

- 一血: 林子豪
- 分享者: 林子豪
- 知识点: 二项式反演



# N - 嘴大疑惑盒

## 题目大意

给定序列  $\{a_n\}$ ,  $Q$  次询问。每次给定  $L, R$ , 求

$$\max_{S \subseteq [L, R]} \{\oplus_{i \in S} a_i\}$$

$\oplus$  表示异或。



## N - 嘴大疑惑盒

### 题目大意

给定序列  $\{a_n\}$ ,  $Q$  次询问。每次给定  $L, R$ , 求

$$\max_{S \subseteq [L, R]} \{\oplus_{i \in S} a_i\}$$

$\oplus$  表示异或。

- 一血: 余天羽
- 分享者: 什么都没有:(
- 知识点: (前缀) 线性基, 线段树



## P - 超能粒子炮 · 改

### 题目大意

超能粒子炮 · 改有两个参数  $n, k$ , 表示这门炮会向每个编号为  $0$  到  $k$  (包含两端) 的位置  $i$  发射威力为  $\binom{n}{i} \bmod 2333$  的粒子流。求其发射的粒子流的威力之和除以  $2333$  所得的余数。

# P - 超能粒子炮 · 改

## 题目大意

超能粒子炮 · 改有两个参数  $n, k$ , 表示这门炮会向每个编号为  $0$  到  $k$  (包含两端) 的位置  $i$  发射威力为  $\binom{n}{i} \bmod 2333$  的粒子流。求其发射的粒子流的威力之和除以  $2333$  所得的余数。

- 一血: 李昌泽
- 分享者: 李昌泽
- 知识点: 卢卡斯定理



## V - 派对

### 题目大意

马上就是你的生日了，你打算举办一个生日派对。你向  $n$  个朋友发送了派对邀请。但是恰逢期末，大家都很忙，你不确定他们会不会来。具体而言，每个人都有 0.5 的概率来，或者不来。假若最后一共来了  $x$  个人，那么你预计会花费  $x^k$  的钱在这次派对上。 $k$  是一个一开始假定的数。你想知道举办这次派对的期望花费，于是开始了计算……

# V - 派对

## 题目大意

马上就是你的生日了，你打算举办一个生日派对。你向  $n$  个朋友发送了派对邀请。但是恰逢期末，大家都很忙，你不确定他们会不会来。具体而言，每个人都有 0.5 的概率来，或者不来。假若最后一共来了  $x$  个人，那么你预计会花费  $x^k$  的钱在这次派对上。 $k$  是一个一开始假定的数。你想知道举办这次派对的期望花费，于是开始了计算……

- 一血：郑智馨
- 分享者：什么都没有:(
- 知识点：斯特林数



# W - 移除奶牛

## 题目大意

游戏设置为有  $n$  堆奶牛，第  $i$  堆包含  $a_i$  奶牛。在每个玩家的回合中，该玩家调用神奇的力量，并将其用于以下选项之一：

- ① 从选定的非空堆中取出一头牛。
- ② 选择一堆大小均匀为  $2 \cdot x$  ( $x > 0$ ) 的奶牛，并将其替换为  $k$  堆，每堆  $x$  头奶牛。

移除最后一头牛的玩家获胜。给定  $n$ ,  $k$  和序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，问先手是否获胜？

# W - 移除奶牛

## 题目大意

游戏设置为有  $n$  堆奶牛，第  $i$  堆包含  $a_i$  奶牛。在每个玩家的回合中，该玩家调用神奇的力量，并将其用于以下选项之一：

- ① 从选定的非空堆中取出一头牛。
- ② 选择一堆大小均匀为  $2 \cdot x$  ( $x > 0$ ) 的奶牛，并将其替换为  $k$  堆，每堆  $x$  头奶牛。

移除最后一头牛的玩家获胜。给定  $n$ ,  $k$  和序列  $a_1, a_2, \dots, a_n$ ，问先手是否获胜？

- 一血：张博轩
- 分享者：张博轩
- 知识点：SG 定理



## X - 野猫绝赞散步中

### 题目大意

给定一棵树，一个人在  $s_a, t_a$  两点不断地来回走，另一个人在  $s_b, t_b$  两点不断地来回走。问它们最早相遇的位置。



# X - 野猫绝赞散步中

## 题目大意

给定一棵树，一个人在  $s_a, t_a$  两点不断地来回走，另一个人在  $s_b, t_b$  两点不断地来回走。问它们最早相遇的位置。

- 一血：梁育诚
- 分享者：什么都没有:(
- 知识点：扩展中国剩余定理



① Overview

② Easy

③ Medium

④ Hard

# I - 数树

## 题目大意

给定  $n$  个点的完全图  $G$ ，以及其一棵生成树  $T$ 。求  $G$  有多少棵生成树  $T'$ ，满足  $T'$  和  $T$  的交集恰好包含  $k$  条边。对每个  $i \in [0, n-1]$  依次求出答案。答案对  $10^9 + 7$  取模。

# I - 数树

## 题目大意

给定  $n$  个点的完全图  $G$ ，以及其一棵生成树  $T$ 。求  $G$  有多少棵生成树  $T'$ ，满足  $T'$  和  $T$  的交集恰好包含  $k$  条边。对每个  $i \in [0, n-1]$  依次求出答案。答案对  $10^9 + 7$  取模。

- 一血：？
- 分享者：？
- 知识点：矩阵树定理，高斯消元，二项式反演，prufer 序列



## Q - 斐波那契数列

### 题目大意

有一个  $n \times m$  大小的方格，行和列从 1 开始标号，其中第  $i$  行第  $j$  列里面有数字  $f_{\gcd(i,j)}$ 。（其中  $f_i$  表示斐波拉契数列第  $i$  项）求这个格子里面的数的乘积是多少。

# Q - 斐波那契数列

## 题目大意

有一个  $n \times m$  大小的方格，行和列从 1 开始标号，其中第  $i$  行第  $j$  列里面有数字  $f_{\gcd(i,j)}$ 。（其中  $f_i$  表示斐波拉契数列第  $i$  项）求这个格子里面的数的乘积是多少。

- 一血：梁育诚
- 分享者：什么都没有:(
- 知识点：莫比乌斯反演



# S - 关于抽象

## 题目大意

给出  $n, a, b, c$ , 求

$$\sum_{i=0}^n \left\lfloor \frac{ai+b}{c} \right\rfloor, \sum_{i=0}^n i \left\lfloor \frac{ai+b}{c} \right\rfloor, \sum_{i=0}^n \left\lfloor \frac{ai+b}{c} \right\rfloor^2$$

# S - 关于抽象

## 题目大意

给出  $n, a, b, c$ , 求

$$\sum_{i=0}^n \left\lfloor \frac{ai+b}{c} \right\rfloor, \sum_{i=0}^n i \left\lfloor \frac{ai+b}{c} \right\rfloor, \sum_{i=0}^n \left\lfloor \frac{ai+b}{c} \right\rfloor^2$$

- 本题不计一血
- 知识点：万能欧几里得





## T - 我喜欢芭 ~ 菲 ↑

## 题目大意

对于一个长度为  $n$  的序列  $\{a_i\}$   $0 \leq a_i < m$ , 你可以做如下操作任意次:

- 循环平移: 将  $\{a_i\}$  向右循环平移 1 次。
- 将  $\{a_i\}$  替换为序列  $\{a_i + 1 \bmod m\}$

如果两个序列可以通过上述操作变成相同的序列, 则认为它们本质相同。问有多少本质不同的序列?

## T - 我喜欢芭 ~ 菲 ↑

## 题目大意

对于一个长度为  $n$  的序列  $\{a_i\}$   $0 \leq a_i < m$ , 你可以做如下操作任意次:

- 循环平移: 将  $\{a_i\}$  向右循环平移 1 次。
- 将  $\{a_i\}$  替换为序列  $\{a_i + 1 \bmod m\}$

如果两个序列可以通过上述操作变成相同的序列, 则认为它们本质相同。问有多少本质不同的序列?

- 一血: 梁育诚
- 分享者: 什么都没有:(
- 知识点: Burnside 引理, 莫比乌斯反演



## U - 要乐奈的拨片

### 题目大意

有  $n$  个物品，第  $i$  个物品的价值为  $v_i$ ，每个物品都有无限个。凑出价值恰好为  $[1, m]$  的方案各有多少个？

# U - 要乐奈的拨片

## 题目大意

有  $n$  个物品，第  $i$  个物品的价值为  $v_i$ ，每个物品都有无限个。凑出价值恰好为  $[1, m]$  的方案各有多少个？

- 一血：梁育诚
- 分享者：什么都没有:(
- 知识点：OGF，Eulur 变换/  
MSET 构造，多项式 exp



## Z - 基础 LCM 练习题

### 题目大意

给定长为  $n$  的数列  $\{a\}$ ，求两两 LCM 的最大值，即：

$$\max_{1 \leq i < j \leq n} \text{LCM}(a_i, a_j)$$

其中 LCM 指的是最小公倍数。

## Z - 基础 LCM 练习题

### 题目大意

给定长为  $n$  的数列  $\{a\}$ ，求两两 LCM 的最大值，即：

$$\max_{1 \leq i < j \leq n} \text{LCM}(a_i, a_j)$$

其中 LCM 指的是最小公倍数。

- 一血：王东坡
- 分享者：王东坡
- 知识点：莫比乌斯函数，单调栈



# 没啦！

要好好补题哦