

X P Z 题解

幸旭鑫

电子科技大学信息与软件工程学院

2024 年 5 月 18 日



1 P 利萨斯陷落

2 X 魔法守护

3 Z 偏差认知

Outline

1 P 利萨斯陷落

2 X 魔法守护

3 Z 偏差认知

P 利萨斯陷落

题意

求一个无向图中的最小字典序欧拉路径。

一血：伍柏霖同学。

题解：模板题，使用 Hierholzer 算法解决即可。

Hierholzer 算法实际上就相当于一个模拟我们人进行一笔画来求解欧拉路径的过程。我们从一个点出发，对图进行遍历。每次走过一条边就把这条边从图中删掉，之后递归进这条边对应的点。如果某个点没有边连着了，就把它存到答案里，最后倒序输出即可。

我们发现这就是个一笔画的过程，每次画一笔进入下一个点，从下一个点再选一个边画一笔进入下一个点，直到我们找不到能画的点，那么那个点就是终点了。而我们递归遍历图的时候，在某个点没有边可以遍历的时候将其记录进答案，很自然地就存了一条终点到起点的路径。我们倒序输出就可以得到正确的路径了。

那么考虑，最小字典序怎么解决，也很简单。我们最开始将每个点引出的所有边排序，这样遍历每个点的出边的时候就最先遍历到编号最小的点，得到的路径字典序自然最小。记录边有没有走过可以用 map。

再考虑一些细节问题。本题，我们要求解的可能是欧拉通路或者是欧拉回路。二者都要求图联通，所以我们可以提前判断一下图是否连通。我们也需要统计一下结点度数，来判断究竟要求解欧拉通路还是欧拉回路，以决定起点。如果是欧拉回路，由于要求字典序最小，所以一定是 1 号节点。如果是欧拉通路那就要找编号最小的奇度数结点了。

时间复杂度 $O(n + m \log m)$ 。瓶颈其实在给边排序。

Outline

1 P 利萨斯陷落

2 X 魔法守护

3 Z 偏差认知

X 魔法守护

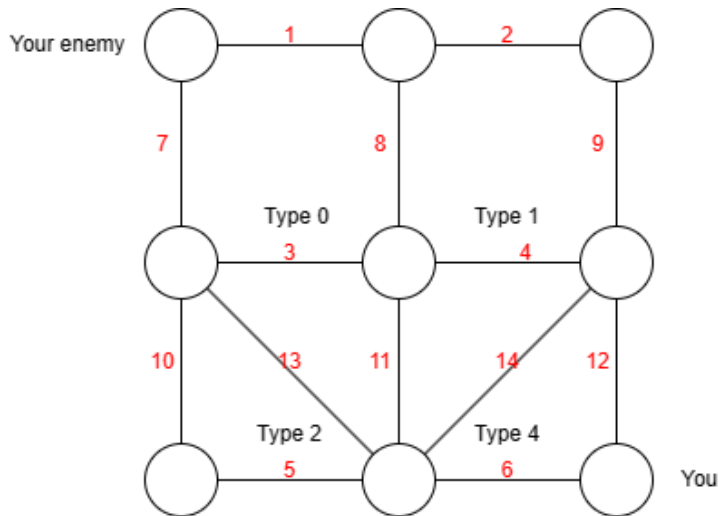
题意

给定一个 $n \times m$ 的方形网格，敌人从 $(0,0)$ 向你所在 (n,m) 处袭来。网格有四种状态：

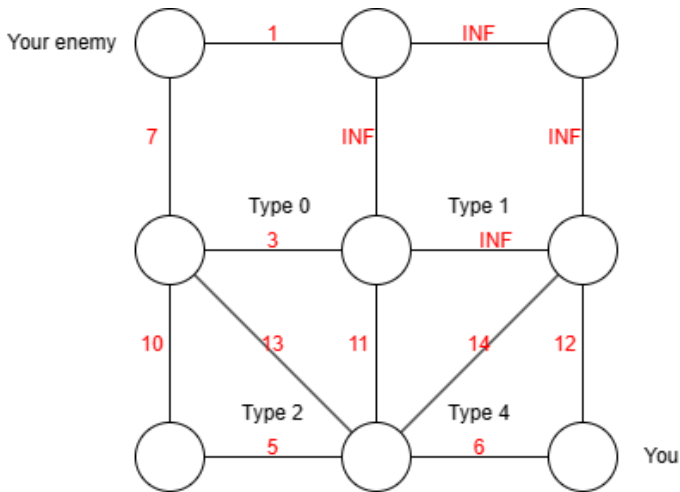
- 0 这个格子没有特殊性质。
- 1 这个格子周围的边不能被切断。
- 2 这个格子存在一条左上角到右下角的路径。
- 3 这个格子存在一条右上角到左下角的路径。

你可以花费某条边边权的代价来切断那条边，求最小的阻止敌人到达你所在位置的花费，或判断不可能阻止敌人。

样例解释：



考虑 $type = 1$ 的格子，周围的边不能被切断，所以我们把边权赋为 $+\infty$ 。

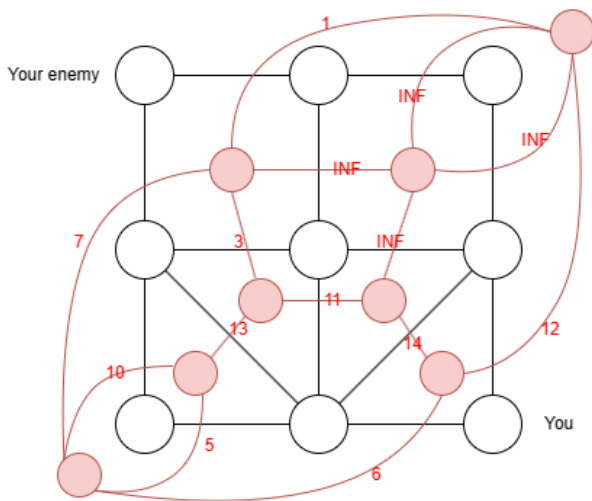


现在我们知道了题意，那么对于这个题目，按上面的方式直接连边，求最小割即可。但是注意数据范围， $n \times m \leq 5 \times 10^5$ ，要是跑网络流算法，时间复杂度太高，不能承受。(update: 听说 yty 同学拿 hlpp 硬跑草过去了，比我跑最短路都快，怎么绘世呢?)

解决办法很经典，把求最小割转化为求对偶图的最短路即可。

(如果你打过 OI 那我估计见过这题。CSP-S 2021 T4 就用到了这个方法。如果场上不会，下来补题的时候估计就顺手学了。而就算 T4 比较复杂没补，那么在补题的时候应该也跟着题解，补一个基础版本的问题，狼抓兔子。OI wiki 上也把该题作为平面图最小割转对偶图最短路的例题。)

考虑建这样的图：

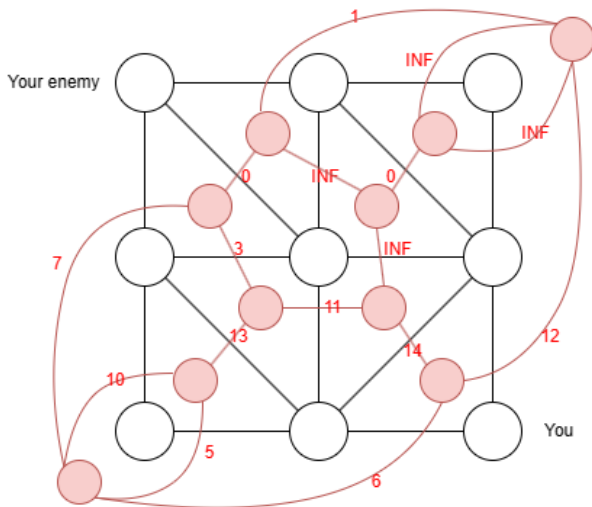


原图的每一条边都对应新图的一条边，而我们发现从新图左下角的节点 S 到右上角的节点 T 之间的路径会把图的左上角和右下角切开成两部分，这样求原图的最小割就转化为从左下角的节点 S 到右上角的节点 T 的最短路问题。

具体实现上这个图怎么建？我们把所有的区域都拆成有斜向边的。我的实现把 $type = 0$ 和 $type = 1$ 的区域都视为 $type = 2$ ，之后按照一定的规则编号，比如令左下角为起点，右上角为终点。

- 左下角起点为 0。
- 所有包含左侧边的点为 $1 \sim n \times m$ 。
- 所有包含右侧边的点为 $n \times m + 1 \sim 2 \times n \times m$ 。
- 右上角终点为 $2 \times n \times m + 1$ 。

(而且这样你发现，出题人给你数据就很方便输入处理了，不然为啥没有斜向边的区域要给一个为 0 的权值作为输入?)



建图的时候根据那条边对应的左右区域/上下区域的种类进行分类讨论，决定是哪个点连到哪个点上。

具体分类讨论过程比较复杂但是难度不大，只需要做到不重不漏即可。大家可以自行分类讨论。

建好之后可以直接跑一次 Dijkstra，求出 S 到 T 的最短路。

时间复杂度 $O(n \times m \log(n \times m))$ 。

Outline

1 P 利萨斯陷落

2 X 魔法守护

3 Z 偏差认知

Z 偏差认知

题意

给定一个 n 个点 m 条边的无向连通图， q 次询问是否从在从 A 出发经过 B 到达 C 的简单路径。 $(n, m, q \leq 10^5)$

一血：梁育诚同学。

题解：考虑使用圆方树。

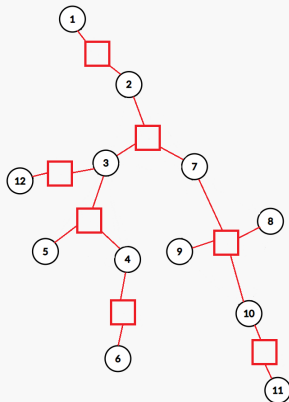
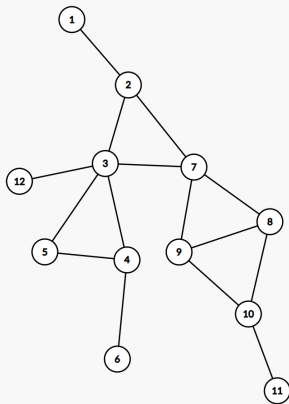
圆方树是啥呢，我们图中原来所有的点都是圆点，然后每个点双连通分量对应一个方点，连边向这个点双里面所有的点形成的一棵树。这棵树，每条边连接一个圆点和一个方点。具体的一些基础知识可以去看 OI wiki。

那么为什么想到圆方树？我觉得是很自然的想法，但是在写题解的时候我问自己这个问题，为什么会想到，为什么会觉得自然？

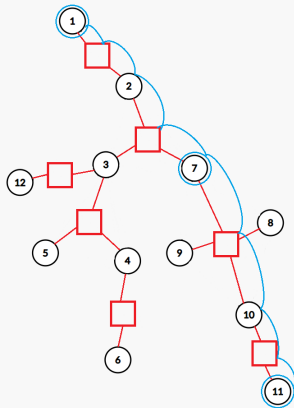
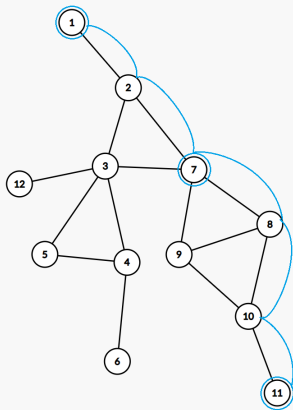
我认为一个可能令我满意的回答是，在树上解决问题是比在图上解决这个问题简单的多的，而圆方树恰好可以把原图缩成一棵树，把问题转化到树上去考虑。OI wiki 上面也有相同的观点。

我们先看一个圆方树的例子。

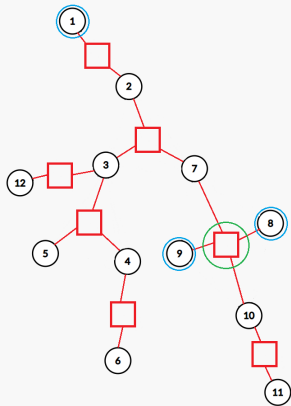
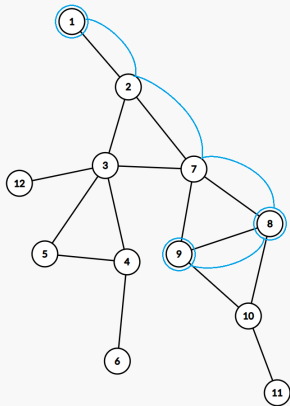
由于样例的图比较简单所以这里手搓一个稍微复杂一点的样例：



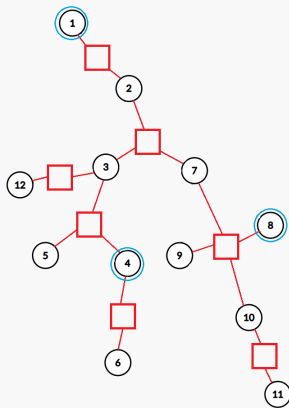
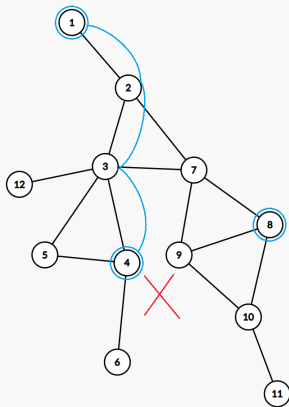
然后我们考虑有哪些不同的情况可以满足题意。
最简单的就是，A 到 C 的树上路径中经过 B。



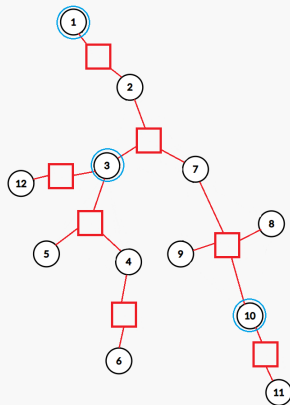
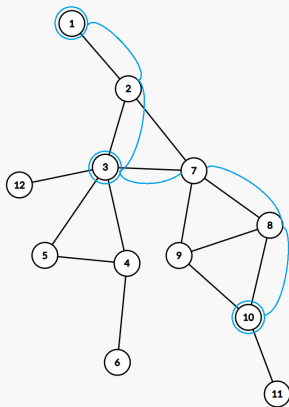
上面的这种情况可以描述为，以 A 为根，那么 C 在 B 的子树中。之后考虑 B 和 C 不在同一子树的情况。



我们发现 B 和 C 连着同一个方点显然是可以的。
那么要是 B 和 C 不连同一个方点呢？



我们发现上面那个情况不行。那么这一种呢？



这种可以。有啥区别呢？

我们发现，假设 D 是 B 和 C 的 lca ，那么 B 和 C 不在同一子树的时候 D 是个方点，而且 B 一定是直接挂在 D 上的，而 C 可以直接挂在 D 上，也可以挂在 D 子树中其他的方点上。

这个是我们画图得到的规律。我们也可以想一下为啥是这样的。

因为在圆方树里面我们想找原图的简单路径，相当于在树上找一条路径，方点可以重复走但是圆点不能重复走。那么我们的 B 如果不直接挂在 lca 的那个方点上的话，就会导致，想进入 B 所在的子树一定要走一个其他的圆点，然后因为圆点只能走一次所以就出不去了。而因为我们的 C 点是终点，所以不用再走出去，就可以不用直接挂在 lca 这个方点上。

那咋做呢？首先把圆方树搞出来。

之后我们把 A 当作圆方树根，考虑找一个能求 lca 的东西，再维护一下每个结点的深度来判断“是不是直接挂在某个点上”。我个人使用了树链剖分，当然可以换个别的东西求 lca。

对每次询问求出 D 为 lca。

- 如果 D 就是 B 的话说明是第一种情况，直接就有一条树上的路径能从 A 经过 B 到 C。
- 否则，如果 D 是个方点，然后满足，B 直接挂在 D 上，C 可以是直接挂在 D 上也可以挂在 D 下面的方点上，就是第二种情况。

时间复杂度 $O(n \log n + q \log n)$ 。

The end

Thanks for listening!