问题

求

$$a_n = \sum_{i=0}^{n-1} a_i a_{n-1-i}$$
$$a_0 = a_1 = 1$$

的通项公式。

方法一

瞪眼法。一眼卡特兰数：

$$a_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

方法二

打表找规律：

$$a_0 = 1, a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 5, a_4 = 14, \dots$$

卡特兰数！

方法三

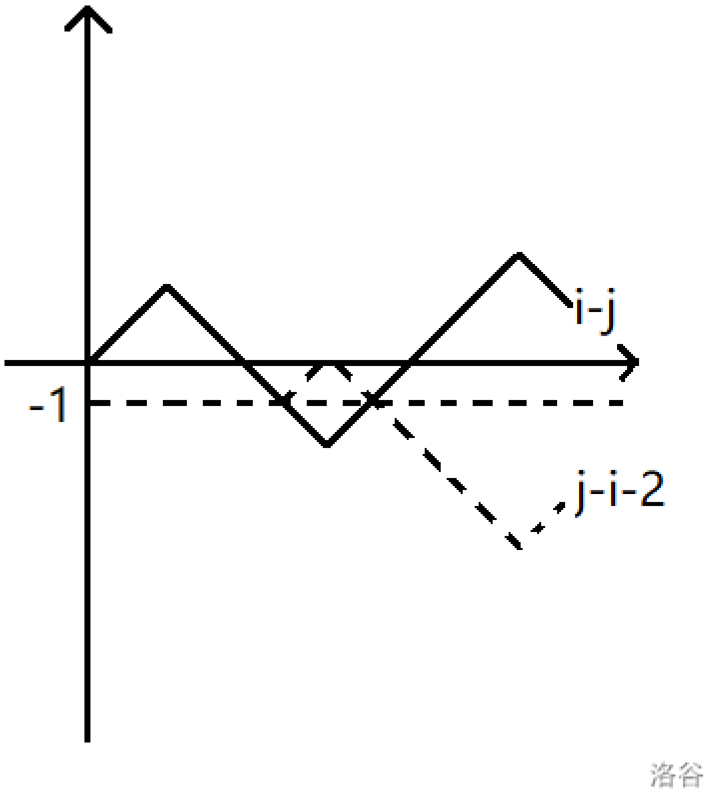
联系括号序列。

一共有n对括号需要匹配，枚举匹配第1个左括号'('的右括号位置，一共有n个选择的位置。

这样就将括号匹配拆成了两个区间的子问题，假设第1对括号之间还有i对括号，那么方案数为a_i，第1对括号之外还有$n-1-i$对括号，方案数为a_{n-1-i}.根据乘法原理，总的括号匹配方案数为$a_i a_{n-1-i}$.再根据加法原理，将所有的情况相加，就得到了题目里给出的公式。

new question:怎么求合法括号序列的方案数呢？

折线法。



假设左括号为+1，右括号为-1，那么终点肯定在0.

由于不合法的路径一定会经过-1，因此将第一次经过-1后的操作以-1为对称轴对称，终点便变为了-2。可以证明，对于任何一种终点为0的非法路径，都可以通过翻转第一次经过-1后的路径映射到终点为-2的路径。那么选择$n-1$的左括号，$n+1$个右括号，就可以找出所有终点为-2的路径。

因此通项公式为$C_{2n}^{n}-C_{2n}^{n-1}$.

折线法链接：[卡特兰数的折线法证明]

相关练习：[2023年暑假前集训数学专题 不完全括号匹配]

方法四

直接从公式入手。

构造普通生成函数：

$$f(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n+\dots$$

想要得到形如$\sum_{i=0}^{n-1}a_ia_{n-1-i}$的式子，需要做乘法：

$$[x^n]f^2(x)=\sum_{i=0}^{n}a_ia_{n-i}=a_{n+1}$$

目前我们便构造出了表达式，因此可以写出等式：

$$xf^2(x)+1=f(x)$$

解得:

$$f(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2x}$$

由于$xf(x)=\frac{1\pm\sqrt{1-4x}}{2}$，代入$x=0$，得到

$$f(x)=\frac{1-\sqrt{1-4x}}{2x}$$

我们来推一下$\sqrt{1+z}$的展开式:

$$\begin{aligned}\sqrt{1+z}&=(1+z)^{\frac{1}{2}}\\&=1+\sum_{n=1}^{\infty}\binom{\frac{1}{2}}{n}z^n\end{aligned}$$

其中

$$\begin{aligned}\binom{\frac{1}{2}}{n}&=\frac{(\frac{1}{2})^{\underline{n}}}{n!}\\&=\frac{(\frac{1}{2})(-\frac{1}{2})\dots(-\frac{2n-3}{2})}{n!}\\&=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{1\times2\times3\times\dots\times(2n-3)\times(2n-2)}{2\times4\times\dots\times(2n-2)}\\&=\frac{(-1)^{n-1}}{n!}\left(\frac{1}{2}\right)^n\frac{(2n-2)!}{2^{n-1}(n-1)!}\\&=\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot2^{2n-1}}\cdot\frac{(2n-2)!}{(n-1)!(n-1)!}\\&=\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot2^{2n-1}}\cdot\binom{2n-2}{n-1}\end{aligned}$$

因此

$$\sqrt{1+z}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot2^{2n-1}}\cdot\binom{2n-2}{n-1}z^n$$

代入$z=-4x$

$$\begin{aligned}f(x)&=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x}\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n\cdot2^{2n-1}}\cdot\binom{2n-2}{n-1}(-1)^n2^{2n}x^n\right)\\&=\frac{1}{2x}-\frac{1}{2x}\left(1-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n}\cdot\binom{2n-2}{n-1}x^n\right)\\&=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\cdot\binom{2n-2}{n-1}x^{n-1}\\&=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n+1}\cdot\binom{2n}{n}x^n\end{aligned}$$

至此我们便得到了

$$a_n=\frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$