E.数学专题签到处

问题

给定常数N，共Q次询问。

每次询问给定x，求

$$\sum_{i=1}^{N}\binom{3i}{x}$$

答案对10^9+7取模

分析

$1 \le N \le 10^6$

用阶乘求组合数

$$\binom{n}{m} = \frac{n!}{m!(n-m)!}$$

对于每个询问如果暴力算值，时间复杂度为

$O(NQ)$，直接爆，所以可以预见的是需要推式子

分析

$$\binom{3i}{x}$$

$$=\binom{3i-1}{x}+\binom{3i-1}{x-1}$$

$$=\binom{3i-2}{x}+2\binom{3i-2}{x-1}+\binom{3i-2}{x-2}$$

$$=\binom{3i-3}{x}+3\binom{3i-3}{x-1}+3\binom{3i-3}{x-2}+\binom{3i-3}{x-3}\quad (x>3)$$

$$\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x}$$

$$=\sum_{1}^{N}\binom{3i-3}{x}+3\sum_{1}^{N}\binom{3i-3}{x-1}+3\sum_{1}^{N}\binom{3i-3}{x-2}+\sum_{1}^{N}\binom{3i-3}{x-3}$$

$$=\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x}+\binom{0}{x}-\binom{3N}{x}$$

$$+3\left[\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x-1}+\binom{0}{x-1}-\binom{3N}{x-1}\right]$$

$$+3\left[\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x-2}+\binom{0}{x-2}-\binom{3N}{x-2}\right]$$

$$+\left[\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x-3}+\binom{0}{x-3}-\binom{3N}{x-3}\right]$$

$$=\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x}+3\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x-1}+3\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x-2}+\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x-3}-\binom{3N+3}{x}\qquad (x>3)$$

$$\binom{3N+3}{x}=3\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x-1}+3\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x-2}+\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x-3} \qquad (1)$$

$$\binom{3N+3}{x+1}=3\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x}+3\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x-1}+\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x-2} \qquad (2)$$

(2)－(1)得

$$\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x}=\frac{2\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x-2}+\sum_{1}^{N}\binom{3i}{x-3}+\binom{3N+3}{x+1}-\binom{3N+3}{x}}{3} \quad (x>3)$$

分析

- 根据递推式我们首先求出x=1,2,3的值，就可以一直推下去
- 注：式子会出现负值，记得加上模
- 时间复杂度O(nlogn)