搜索与动态规划专题评讲

M, O, V, W, X

余天羽

信息与软件工程学院

2024 年 6 月 1 日

M. 公园漫步

题意

给定一个 $n \times n$ 的方阵，需要从左上走到右下，每次只能向下走一步或向右走一步。定义路径的权值为路径上的所有数的异或和，求权值为 0 的路径数量。

$2 \le n \le 20$，$0 \le a_{i,j} \le 2^{30}$。

M. 公园漫步

题意

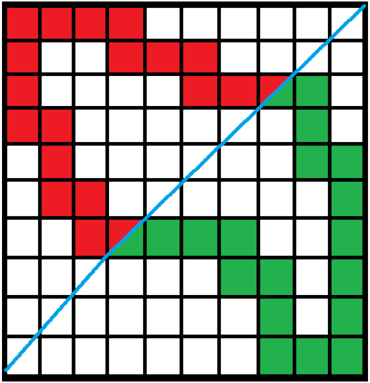
给定一个 $n \times n$ 的方阵，需要从左上走到右下，每次只能向下走一步或向右走一步。定义路径的权值为路径上的所有数的异或和，求权值为 0 的路径数量。
$2 \le n \le 20$，$0 \le a_{i,j} \le 2^{30}$。

从 $(1,1)$ 走到 (n,n)，需要走 $2(n-1)$ 步。
如果直接爆搜，时间复杂度是 $O(2^{2n}) = O(4^n)$ 级别的，效率不够高。

M. 公园漫步

考虑折半搜索：即将需要搜索的对象拆成两半分别搜索。

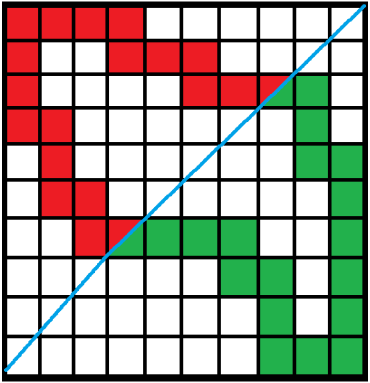
- 第一遍从 $(1, 1)$ 开始向右下角搜，搜到副对角线为止。
- 第二遍从 (n, n) 开始向左上角搜，搜到副对角线为止。



M. 公园漫步

考虑折半搜索：即将需要搜索的对象拆成两半分别搜索。

- 第一遍从 $(1, 1)$ 开始向右下角搜，搜到副对角线为止。
- 第二遍从 (n, n) 开始向左上角搜，搜到副对角线为止。



整段异或和为 $0 \to$ 两段异或和相等。

第一遍搜索用一个 un_map 记录所有从左上角到副对角线路径的权值。
第二遍搜索统计满足相等条件的路径数量。
时间复杂度 $O(2^n)$。

O. 折叠 n 截棍

题意

给定 n 条线段，第 i 条长 a_i。现将这 n 条线段衔接成一条链，衔接处可折叠。问衔接后的线段所覆盖的长度的最小值。

$1 \le n \le 10^4$，$1 \le a_i \le 10^3$。

O. 折叠 n 截棍

题意

给定 n 条线段，第 i 条长 a_i。现将这 n 条线段衔接成一条链，衔接处可折叠。问衔接后的线段所覆盖的长度的最小值。
$1 \leq n \leq 10^4$，$1 \leq a_i \leq 10^3$。

考虑二分答案，设二分出的答案为 len，将问题转化为可行性判断：是否能用长为 len 的线段装下这个“n 截棍”。

O. 折叠 n 截棍

题意

给定 n 条线段，第 i 条长 a_i。现将这 n 条线段衔接成一条链，衔接处可折叠。问衔接后的线段所覆盖的长度的最小值。
$1 \le n \le 10^4$，$1 \le a_i \le 10^3$。

考虑二分答案，设二分出的答案为 len，将问题转化为可行性判断：是否能用长为 len 的线段装下这个“n 截棍”。

一开始想的是贪心：下一段如果加起来 $>$ len，就折叠，把这段分到下一层。

O. 折叠 n 截棍

题意

给定 n 条线段，第 i 条长 a_i。现将这 n 条线段衔接成一条链，衔接处可折叠。问衔接后的线段所覆盖的长度的最小值。
$1 \le n \le 10^4$，$1 \le a_i \le 10^3$。

考虑二分答案，设二分出的答案为 len，将问题转化为可行性判断：是否能用长为 len 的线段装下这个“n 截棍”。

一开始想的是贪心：下一段如果加起来 $>$ len，就折叠，把这段分到下一层。
但这是错的，例如 len $= 4$，$a_i = \{3, 1, 2, 4\}$。
为了能装下最后一个 4，明智的做法不是 $3+1$ 装满第一层，而是装了 3 之后就折叠。

O. 折叠 n 截棍

考虑 dp，设 $dp_{i,j} = 0/1$ 代表枚举到第 i 条线段，且第 i 条线段的末尾可以在（或不可能在）数轴上的 j 处。（假设二分出的长为 len 的线段覆盖了数轴上的 $0 \sim len$）

O. 折叠 n 截棍

考虑 dp，设 $dp_{i,j} = 0/1$ 代表枚举到第 i 条线段，且第 i 条线段的末尾可以在（或不可能在）数轴上的 j 处。（假设二分出的长为 len 的线段覆盖了数轴上的 $0 \sim len$）

因为限定了这 n 条线段无论如何折叠，都不能超过 $0 \sim len$ 的范围，故转移方程为：

$$dp_{i,j} \rightarrow dp_{i+1,j+a[i]} (j + a[i] \leq n)$$

$$dp_{i,j} \rightarrow dp_{i+1,j-a[i]} (j - a[i] \geq 0)$$

O. 折叠 n 截棍

考虑 dp，设 $dp_{i,j} = 0/1$ 代表枚举到第 i 条线段，且第 i 条线段的末尾可以在（或不可能在）数轴上的 j 处。（假设二分出的长为 len 的线段覆盖了数轴上的 $0 \sim len$）

因为限定了这 n 条线段无论如何折叠，都不能超过 $0 \sim len$ 的范围，故转移方程为：

$$dp_{i,j} \to dp_{i+1,j+a[i]}(j + a[i] \leq n)$$

$$dp_{i,j} \to dp_{i+1,j-a[i]}(j - a[i] \geq 0)$$

二分判定成功当且仅当最后在 $0 \sim len$ 范围内存在第 n 条线段的末尾。
注意第一条线段的起始位置可以是 $0 \sim len$ 上的任意一点。

O. 折叠 n 截棍

Overall：令 $dp_{i,j} = 0/1$ 表示枚举到第 i 条线段，且第 i 条线段的末尾可以在（或不可能在）数轴上的 j 处。

转移方程：

$$dp_{i,j} \to dp_{i+1,j+a[i]}(j + a[i] \leq n)$$

$$dp_{i,j} \to dp_{i+1,j-a[i]}(j - a[i] \geq 0)$$

初状态：$\forall x \in [0, len]$，$dp[0][x] = 1$。

判定：$\exists x \in [0, len]$，$dp[n][x] = 1$。

时间复杂度 $O(nW \log W)$，W 是值域。

O. 折叠 n 截棍

Overall：令 $dp_{i,j}=0/1$ 表示枚举到第 i 条线段，且第 i 条线段的末尾可以在（或不可能在）数轴上的 j 处。
转移方程：

$$dp_{i,j} \to dp_{i+1,j+a[i]}(j+a[i] \leq n)$$

$$dp_{i,j} \to dp_{i+1,j-a[i]}(j-a[i] \geq 0)$$

初状态：$\forall x \in [0, len]$，$dp[0][x]=1$。
判定：$\exists x \in [0, len]$，$dp[n][x]=1$。
时间复杂度 $O(nW\log W)$，W 是值域。

注意到第一维可以滚动，但数据范围小，没有必要。

V. 游园会

题意

给定一个 $3 \times n$ 的方阵，需要从左上走到右下，每次可以朝任意方向走一步。定义路径的权值为经过的所有点的点权和，问最大权值。

$1 \le n \le 10^5$，$-10^9 \le a_{i,j} \le 10^9$。

V. 游园会

题意

给定一个 $3 \times n$ 的方阵，需要从左上走到右下，每次可以朝任意方向走一步。定义路径的权值为经过的所有点的点权和，问最大权值。
$1 \le n \le 10^5$，$-10^9 \le a_{i,j} \le 10^9$。

一个很厉害的观察是：它有且仅在第二行会往回走且只会往回走一步。
只在第二行往回走好理解。为什么只会往回走一步？因为如果往回走很多步，一定要花同样的距离走回来，依据奇偶数性，等效于往回走 0 步/ 1 步的情况。

V. 游园会

先考虑不能往回走的情况下从左上角走到右下角要怎么 dp。
令 $dp_{i,j}$ 表示走到第 i 行第 i 列时的最大答案，按列转移：

$$dp_{1,j} = a_{1,j} + \max\{dp_{1,j-1}, dp_{2,j-1} + a_{2,j}, dp_{3,j-1} + a_{3,j} + a_{2,j}\}$$

$dp_{2,j}$ 与 $dp_{3,j}$ 同理。

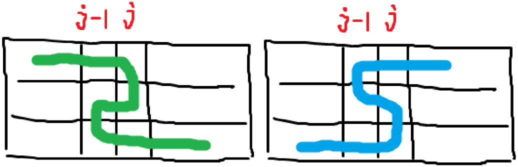
V. 游园会

先考虑不能往回走的情况下从左上角走到右下角要怎么 dp。
令 $dp_{i,j}$ 表示走到第 i 行第 i 列时的最大答案，按列转移：

$$dp_{1,j} = a_{1,j} + \max\{dp_{1,j-1}, dp_{2,j-1} + a_{2,j}, dp_{3,j-1} + a_{3,j} + a_{2,j}\}$$

$dp_{2,j}$ 与 $dp_{3,j}$ 同理。

接下来考虑往回走一步的情况。假如走 $(2, j) \to (2, j-1)$，那么相当于把 j 和 $j-1$ 两列全取完，分以下两种情况：



V. 游园会

分别从 $dp_{1,j-2}$ 和 $dp_{3,j-2}$ 转移过来即可，即：

$$dp_{1,j} = \max\{dp_{1,j}, dp_{3,j-2}\sum_{i=1}^{3}(dp_{i,j} + dp_{i,j-1})\}$$

$$dp_{3,j} = \max\{dp_{3,j}, dp_{1,j-2}\sum_{i=1}^{3}(dp_{i,j} + dp_{i,j-1})\}$$

时间复杂度 $O(n)$。
加强版是 HDU-3377，$n \times m$ 只能用插头 dp，欢迎挑战（逃

W. 围棋

题意

给定一个由 H 和 J 构成的 5×5 矩阵。求大小为 7 且满足 J 的个数比 H 多的不同连通块个数。

W. 围棋

题意

给定一个由 H 和 J 构成的 5×5 矩阵。求大小为 7 且满足 J 的个数比 H 多的不同连通块个数。

爆搜，用一个容器存储当前选定了哪些点，然后每次扩张都遍历该点集的所有邻接点，从而遍历完图中所有大小为 7 的连通块。

W. 围棋

题意

给定一个由 H 和 J 构成的 5×5 矩阵。求大小为 7 且满足 J 的个数比 H 多的不同连通块个数。

爆搜，用一个容器存储当前选定了哪些点，然后每次扩张都遍历该点集的所有邻接点，从而遍历完图中所有大小为 7 的连通块。

注意这么做同一个连通块可能会被多次搜到。可以使用一个大小为 7 的数组记录搜到的所有连通块的状态，最后排序去重得到本质不同的连通块数量。

时间复杂度 $O(451ms)$。

X. 叠梯子

题意

给定 n 个数的数组和一个正整数 h，需要从数组中选定一些数使它们的和与 h 的差最小。
$1 \le n \le 20$，$1 \le h \le 10^7$。

三个专题了，终于抢到签到题了，不容易啊，唉。

X. 叠梯子

题意

给定 n 个数的数组和一个正整数 h，需要从数组中选定一些数使它们的和与 h 的差最小。
$1 \leq n \leq 20$，$1 \leq h \leq 10^7$。

三个专题了，终于抢到签到题了，不容易啊，唉。

注意到 n 很小，故暴力枚举所有可能的和。
若使用二进制枚举，时间复杂度 $O(2^n \cdot n)$。
若使用 DFS，时间复杂度 $O(2^n)$。

Thanks!