图论专题评讲

B, E, O, S, T

余天羽

信息与软件工程学院

2024 年 5 月 18 日

1. B. 阻止悲剧
2. E. 布尔公式
3. N. 机器学习
4. O. 碎片整理
5. S. 宇宙市场趋势
6. T. 模拟宇宙·其二

B. 阻止悲剧

题意

给定二维平面上的 n 个点。你可以选定任何一个点作为起始点，每次选择花费 $|x_u - x_v| + |y_u - y_v|$ 的代价向下走一个点，或是花费 0 的代价回到一个曾经到达过的点。对于每个曾经到达过的点最多回去一次。问到达所有点的最小代价。

$2 \le n \le 400$，$0 \le |x_i|, |y_i| \le 10^9$。

B. 阻止悲剧

题意

给定二维平面上的 n 个点。你可以选定任何一个点作为起始点，每次选择花费 $|x_u - x_v| + |y_u - y_v|$ 的代价向下走一个点，或是花费 0 的代价回到一个曾经到达过的点。对于每个曾经到达过的点最多回去一次。问到达所有点的最小代价。

$2 \le n \le 400$，$0 \le |x_i|, |y_i| \le 10^9$。

看数据范围识网络流。

B. 阻止悲剧

题意

给定二维平面上的 n 个点。你可以选定任何一个点作为起始点，每次选择花费 $|x_u - x_v| + |y_u - y_v|$ 的代价向下走一个点，或是花费 0 的代价回到一个曾经到达过的点。对于每个曾经到达过的点最多回去一次。问到达所有点的最小代价。

$2 \leq n \leq 400$，$0 \leq |x_i|, |y_i| \leq 10^9$。

看数据范围识网络流。

条件转化：

花费 0 从 v 回到曾经到达过的点 u，显然满足 $y_u > y_v$。

等价于每个点都可以向下延伸出至多两条路径 $\rightarrow$ 拆点以分配流量。

B. 阻止悲剧

将每个点 x 拆分成两个点 x_1 和 x_2：x_1 可以看作父亲，x_2 则看作儿子。

那么可以从源点向每个父亲连容量为 2 费用为 0 的边，从每个儿子向汇点连容量为 1 费用为 0 的边。容量的倍数关系保证了每个父亲最多能分出两个儿子。

B. 阻止悲剧

将每个点 x 拆分成两个点 x_1 和 x_2：x_1 可以看作父亲，x_2 则看作儿子。

那么可以从源点向每个父亲连容量为 2 费用为 0 的边，从每个儿子向汇点连容量为 1 费用为 0 的边。容量的倍数关系保证了每个父亲最多能分出两个儿子。

接着，对于一条边 u, v，则连 $u_1 \to v_2$，容量为 1，费用为曼哈顿距离。意为将 u 作为父亲配给儿子，v 作为儿子配给父亲，流得以在依赖关系中传播。

B. 阻止悲剧

将每个点 x 拆分成两个点 x_1 和 x_2：x_1 可以看作父亲，x_2 则看作儿子。

那么可以从源点向每个父亲连容量为 2 费用为 0 的边，从每个儿子向汇点连容量为 1 费用为 0 的边。容量的倍数关系保证了每个父亲最多能分出两个儿子。

接着，对于一条边 u, v，则连 $u_1 \to v_2$，容量为 1，费用为曼哈顿距离。意为将 u 作为父亲配给儿子，v 作为儿子配给父亲，流得以在依赖关系中传播。

在图上跑最小费用最大流即可。时间复杂度 $O(nm\sqrt{m})$。

E. 布尔公式

题意

判断给定 n 元布尔公式的值：

$$Q_1 x_1 Q_2 x_2 \cdots Q_n x_n F(x_1, x_2, \cdots, x_n)$$

其中 Q_i 为 $\forall$ 或 $\exists$，F 是有 m 个子句的二元合取范式。
$2 \le n, m \le 10^5$。

E. 布尔公式

题意

判断给定 n 元布尔公式的值：

$$Q_1x_1Q_2x_2\cdots Q_nx_nF(x_1,x_2,\cdots,x_n)$$

其中 Q_i 为 $\forall$ 或 $\exists$，F 是有 m 个子句的二元合取范式。
$2\le n,m\le 10^5$。

题面比较绕，可以尝试发掘一些使公式成立的必要条件。

E. 布尔公式

回顾一下 2-sat 的操作原理：

- 对于含 n 个命题变元 $x_1, x_2, \ldots, x_n$ 的公式，对其 $2n$ 种文字建一个点。
- 由于 $w_1 \vee w_2$ 为真等价于 $\neg w_1 \to w_2$ 和 $\neg w_2 \to w_1$ 均为真，于是从 $\neg w_1$ 向 w_2 以及 $\neg w_2$ 向 w_1 连有向边。
- 由蕴含关系的传递性，当图中 w_1 可达 w_2 时，意味着 $w_1 \to w_2$ 为真。
- 可达性分出四种情况：
  x_i 可达 $\neg x_i$，x_i 为假；$\neg x_i$ 可达 x_i，x_i 为真；
  x_i 与 $\neg x_i$ 相互可达，命题公式矛盾；
  x_i 与 $\neg x_i$ 相互不可达，命题公式可以随意赋值。
- 缩点，利用 x_i 和 $\neg x_i$ 是否在同一 SCC 以及它们之间的拓扑序判断。

E. 布尔公式

回到这题，首先，若 x_i 与 $\neg x_i$ 在同一个 SCC 中，命题公式显然不成立。

E. 布尔公式

回到这题，首先，若 x_i 与 $\neg x_i$ 在同一个 SCC 中，命题公式显然不成立。

接着，我们看到第二个样例：

$$\exists x_1 \forall x_2 (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

E. 布尔公式

回到这题，首先，若 x_i 与 $\neg x_i$ 在同一个 SCC 中，命题公式显然不成立。

接着，我们看到第二个样例：

$$\exists x_1 \forall x_2 (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

这个公式为假的关键在于 x_1 与 x_2 相互可达，但 $\exists x_1$ 比 $\forall x_2$ 先出现，x_1 无法对 x_2 做出适应，因此成为假命题。

E. 布尔公式

回到这题，首先，若 x_i 与 $\neg x_i$ 在同一个 SCC 中，命题公式显然不成立。

接着，我们看到第二个样例：

$$\exists x_1 \forall x_2 (x_1 \vee \neg x_2) \wedge (\neg x_1 \vee x_2)$$

这个公式为假的关键在于 x_1 与 x_2 相互可达，但 $\exists x_1$ 比 $\forall x_2$ 先出现，x_1 无法对 x_2 做出适应，因此成为假命题。

具体的，若 x_i 是存在变元，x_j 是全称变元，且 $i < j$，则这两个文字不能存在于同一个 SCC 中。

E. 布尔公式

相同道理，若一个全称变元 x_i 能到达另一个全称变元，也是不合法的。

E. 布尔公式

相同道理，若一个全称变元 x_i 能到达另一个全称变元，也是不合法的。

为了实现这点，用反拓扑序的方式遍历所有 SCC，用一个 tag 标记该 SCC 是否有全称变元并传递下去，判断是否冲突即可。
时间复杂度 $O(n)$。

1. B. 阻止悲剧
2. E. 布尔公式
3. N. 机器学习
4. O. 碎片整理
5. S. 宇宙市场趋势
6. T. 模拟宇宙・其二

题意

给定一张 n 个点 m 条边的图，每次可以花费 a_i 传送到点 i，也可以通过一条边到达编号比当前点大的节点。若每个节点有且只能到达一次，问遍历完所有节点的最小代价。

$1 \le n \le 800$，$1 \le m \le 15000$，$0 \le a_i \le 10^6$。

题意

给定一张 n 个点 m 条边的图，每次可以花费 a_i 传送到点 i，也可以通过一条边到达编号比当前点大的节点。若每个节点有且只能到达一次，问遍历完所有节点的最小代价。
$1 \le n \le 800$，$1 \le m \le 15000$，$0 \le a_i \le 10^6$。

和 B 题一样，考虑拆点。

哪里一样了？要求经过某个点固定的次数。
B 是每个节点最多经过两次，而这道题是每个点只经过一次。

哪里一样了？要求经过某个点固定的次数。
B 是每个节点最多经过两次，而这道题是每个点只经过一次。

将每个点 x 拆成 x_1 和 x_2。
the same，从源点 S 向每个 x_1 连流量为 1，费用为 0 的边。
从每个 x_2 向汇点 T 连流量为 1，费用为 0 的边。
对于边 (u, v) 连 $u_1 \to v_2$。
从每个起点出发的代价 a_i 怎么连？

哪里一样了？要求经过某个点固定的次数。
B 是每个节点最多经过两次，而这道题是每个点只经过一次。

将每个点 x 拆成 x_1 和 x_2。
the same，从源点 S 向每个 x_1 连流量为 1，费用为 0 的边。
从每个 x_2 向汇点 T 连流量为 1，费用为 0 的边。
对于边 (u, v) 连 $u_1 \to v_2$。
从每个起点出发的代价 a_i 怎么连？

相当于直接越过了这个点，从 S 向每个 x_2 连容量为 1，费用为 a_i 的边即可。
时间复杂度我也不是很懂，但这么小肯定能流！

1. B. 阻止悲剧
2. E. 布尔公式
3. N. 机器学习
4. **O. 碎片整理**
5. S. 宇宙市场趋势
6. T. 模拟宇宙·其二

O. 碎片整理

题意

给定一个 $n \times m$ 的 01 矩阵。每次操作可以选择一个横向或纵向的全为 1 的连续段，使其归零。问将整个矩阵化为全 0 矩阵所需的最小操作次数。

$1 \leq n, m \leq 200$。

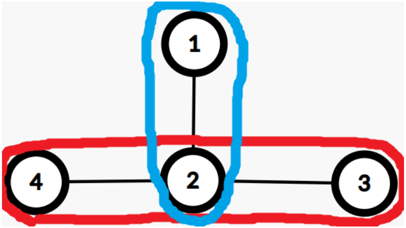
O. 碎片整理

题意

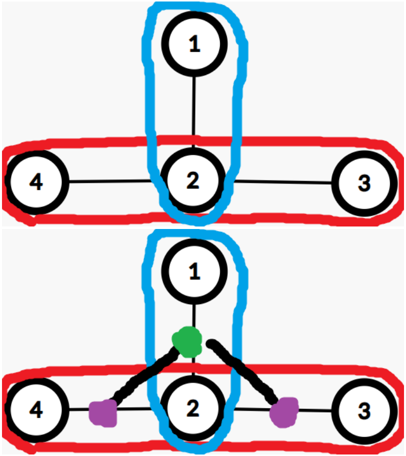
给定一个 $n \times m$ 的 01 矩阵。每次操作可以选择一个横向或纵向的全为 1 的连续段，使其归零。问将整个矩阵化为全 0 矩阵所需的最小操作次数。
$1 \le n, m \le 200$。

如果是单纯的将某一行/列上的所有 1 变为 0，那么本质是网络流中的最小覆盖问题。
这题的关键点在于选择的段必须全是 1，需要分析这样的段有什么特点。

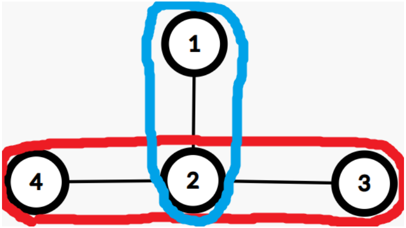
O. 碎片整理

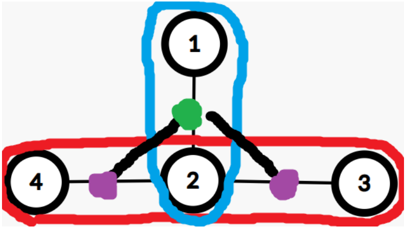


O. 碎片整理



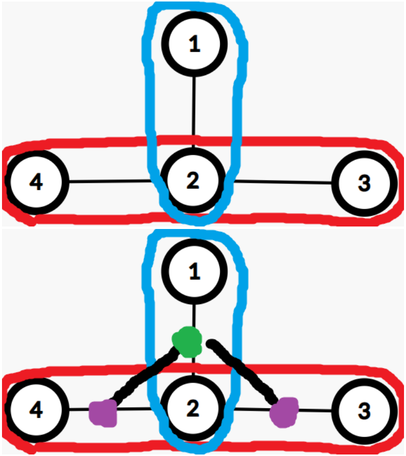
O. 碎片整理





因为每次取走一行/列全为 1 的段，其路径上的其它连续 1 段会被切断。
即对于每一个交叉点：其与横向还是纵向联通只能选其一。

O. 碎片整理



因为每次取走一行/列全为 1 的段，其路径上的其它连续 1 段会被切断。
即对于每一个交叉点：其与横向还是纵向联通只能选其一。

考虑连边，例如图中点 2 可以与两个方向上的点联通，那就连 (1, 2) 与 (2, 3)。进一步可以将每条边的中点抽象成一个点，方便连边。

O. 碎片整理

那么最终的答案等价于在新图中最多选多少点，使得这些点之间没有连边，即二分图最大独立集问题。

O. 碎片整理

那么最终的答案等价于在新图中最多选多少点，使得这些点之间没有连边，即二分图最大独立集问题。

由 König 定理，二分图中，最小点覆盖 = 最大匹配。
又最大独立集 = n - 最小点覆盖。
故二分图最大独立集 = 总点数 - 最大匹配数。

O. 碎片整理

那么最终的答案等价于在新图中最多选多少点，使得这些点之间没有连边，即二分图最大独立集问题。

由 König 定理，二分图中，最小点覆盖 = 最大匹配。
又最大独立集 = n - 最小点覆盖。
故二分图最大独立集 = 总点数 - 最大匹配数。

跑最大流即可。实际过程中可能是连边较多，HLPP 会远优于 Dinic。

S. 宇宙市场趋势

题意

给定一张 n 个点 m 条边的图。每个点 i 需要 p_i 的代价激活，当一条边 j 的两个端点都被激活时会有 w_j 的收益。问（总收益 - 总代价）的最大值。

$2 \leq n \leq 5 \cdot 10^3$，$1 \leq m \leq 5 \cdot 10^4$，$0 \leq p_i, w_j \leq 100$。

S. 宇宙市场趋势

题意

给定一张 n 个点 m 条边的图。每个点 i 需要 p_i 的代价激活，当一条边 j 的两个端点都被激活时会有 w_j 的收益。问（总收益 - 总代价）的最大值。

$2 \le n \le 5 \cdot 10^3$，$1 \le m \le 5 \cdot 10^4$，$0 \le p_i, w_j \le 100$。

有收益，有代价 $\rightarrow$ 最大权闭合子图问题。

S. 宇宙市场趋势

最大权闭合子图

闭合子图：对于一个有向图，从中选定一个点集 V，若对于 V 中任何一个点，其后继节点也在 V 中，那么这个点集构成的子图称为闭合子图。

S. 宇宙市场趋势

最大权闭合子图

闭合子图：对于一个有向图，从中选定一个点集 V，若对于 V 中任何一个点，其后继节点也在 V 中，那么这个点集构成的子图称为闭合子图。

最大权闭合子图：每个点有权值，让选出来的闭合子图里的点拥有最大点权和。

S. 宇宙市场趋势

最大权闭合子图

闭合子图：对于一个有向图，从中选定一个点集 V，若对于 V 中任何一个点，其后继节点也在 V 中，那么这个点集构成的子图称为闭合子图。

最大权闭合子图：每个点有权值，让选出来的闭合子图里的点拥有最大点权和。

转化为二分图：收益视为正权，置于左部点；代价视为负权，置于右部点。

S. 宇宙市场趋势

最大权闭合子图

闭合子图：对于一个有向图，从中选定一个点集 V，若对于 V 中任何一个点，其后继节点也在 V 中，那么这个点集构成的子图称为闭合子图。

最大权闭合子图：每个点有权值，让选出来的闭合子图里的点拥有最大点权和。

转化为二分图：收益视为正权，置于左部点；代价视为负权，置于右部点。
存在依赖关系，左部点就向右部点连边，构成闭合子图。

S. 宇宙市场趋势

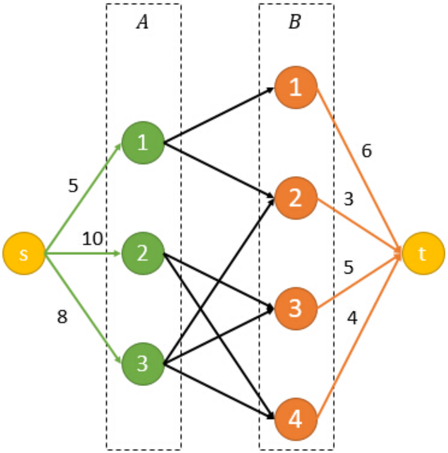
最大权闭合子图

闭合子图：对于一个有向图，从中选定一个点集 V，若对于 V 中任何一个点，其后继节点也在 V 中，那么这个点集构成的子图称为闭合子图。

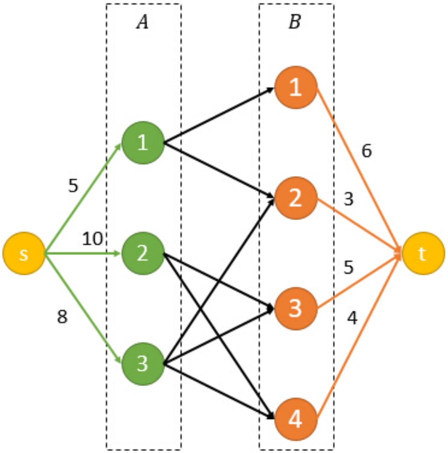
最大权闭合子图：每个点有权值，让选出来的闭合子图里的点拥有最大点权和。

转化为二分图：收益视为正权，置于左部点；代价视为负权，置于右部点。
存在依赖关系，左部点就向右部点连边，构成闭合子图。
最大净收益就是这个二分图的最大权闭合子图的权值。

S. 宇宙市场趋势

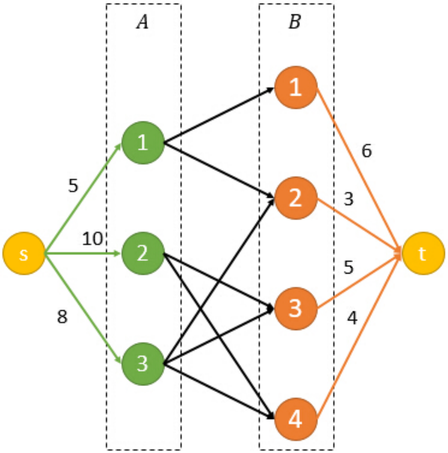


S. 宇宙市场趋势



一般来说，源点向左部点连收益大小的边，右部点向汇点连代价大小的边。左部点和右部点之间的边权设为无穷大。

S. 宇宙市场趋势



一般来说，源点向左部点连收益大小的边，右部点向汇点连代价大小的边。左部点和右部点之间的边权设为无穷大。

结论：最大权闭合子图的权值 = 正权点之和 - 最小割。

S. 宇宙市场趋势

题意

给定一张 n 个点 m 条边的图。每个点 i 需要 p_i 的代价激活，当一条边 j 的两个端点都被激活时会有 w_j 的收益。问（总收益 - 总代价）的最大值。

$2 \le n \le 5 \cdot 10^3$，$1 \le m \le 5 \cdot 10^4$，$0 \le p_i, w_j \le 100$。

对于本题，边能获得收益，点会索取代价。于是将每条边作为左部点，每个顶点作为右部点，每条边向其依赖的两个顶点连边，即转化为了最大权闭合子图问题。

S. 宇宙市场趋势

题意

给定一张 n 个点 m 条边的图。每个点 i 需要 p_i 的代价激活，当一条边 j 的两个端点都被激活时会有 w_j 的收益。问（总收益 - 总代价）的最大值。

$2 \le n \le 5 \cdot 10^3$，$1 \le m \le 5 \cdot 10^4$，$0 \le p_i, w_j \le 100$。

对于本题，边能获得收益，点会索取代价。于是将每条边作为左部点，每个顶点作为右部点，每条边向其依赖的两个顶点连边，即转化为了最大权闭合子图问题。

在图上跑最大流即可。时间复杂度 $\mathrm{O}(|\mathrm{w}|\mathrm{m}\sqrt{n})$。

1. B. 阻止悲剧
2. E. 布尔公式
3. N. 机器学习
4. O. 碎片整理
5. S. 宇宙市场趋势
6. T. 模拟宇宙·其二

T. 模拟宇宙·其二

题意

给定一张 n 个点 m 条边的有向图。你可以逆转最多一条边的方向，问从 1 号点出发最终回到 1 号点最多能经过多少个不同的顶点。

$1 \le n, m \le 10^5$。

T. 模拟宇宙·其二

题意

给定一张 n 个点 m 条边的有向图。你可以逆转最多一条边的方向，问从 1 号点出发最终回到 1 号点最多能经过多少个不同的顶点。

$1 \le n, m \le 10^5$。

有向图，如果有环，那取完环上的所有点一定不劣。

$\rightarrow$ 考虑缩点，以一个强连通分量内的点数作为最小计数单位。

T. 模拟宇宙·其二

回路不好处理。

→ 将回路拆成两部分，以一条边 (u, v) 为分界，将回路分割成 (1, u) 和 (v, 1) 两段（一来一回）。

T. 模拟宇宙·其二

回路不好处理。

$\rightarrow$ 将回路拆成两部分，以一条边 (u, v) 为分界，将回路分割成 (1, u) 和 (v, 1) 两段（一来一回）。

(1, i) 的长度可以利用拓扑排序线性预处理，(i, 1) 一样可以在反图上拓扑求得。

T. 模拟宇宙·其二

回路不好处理。

$\rightarrow$ 将回路拆成两部分，以一条边 (u, v) 为分界，将回路分割成 (1, u) 和 (v, 1) 两段（一来一回）。

(1, i) 的长度可以利用拓扑排序线性预处理，(i, 1) 一样可以在反图上拓扑求得。

枚举每条边是否反向。反向即 (u, v) $\rightarrow$ (v, u)，取 max 即可：

$$\max\{(1, u) + (v, 1), (1, v) + (u, 1)\}$$

T. 模拟宇宙·其二

回路不好处理。

→ 将回路拆成两部分，以一条边 (u, v) 为分界，将回路分割成 (1, u) 和 (v, 1) 两段（一来一回）。

(1, i) 的长度可以利用拓扑排序线性预处理，(i, 1) 一样可以在反图上拓扑求得。

枚举每条边是否反向。反向即 (u, v) → (v, u)，取 max 即可：

$$\max\{(1, u) + (v, 1), (1, v) + (u, 1)\}$$

时间复杂度 O(n)。

Thanks!