问题

求

$$\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}f_{\gcd(i,j)}$$

题解

假设$n\le m$，和式化简：

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}f_{\gcd(i,j)}\\=&\prod_{d=1}^{n}f_d^{\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[\gcd(i,j)=1]}\end{aligned}$$

单独考虑指数部分，指数部分可以如下简化：

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}[\gcd(i,j)=1]\\=&\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\sum_{d|i,d|j}\mu(d)\\=&\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}1\\=&\sum_{d=1}^{n}\mu(d)\lfloor\frac{n}{d}\rfloor\lfloor\frac{m}{d}\rfloor\end{aligned}$$

带入到最开始的式子，得到：

$$\begin{aligned}&\prod_{i=1}^{n}\prod_{j=1}^{m}f_{\gcd(i,j)}\\=&\prod_{d=1}^{n}f_d^{\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\sum_{i=1}^{\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}[\gcd(i,j)=1]}\\=&\prod_{d=1}^{n}f_d^{\sum_{k=1}^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor}\mu(k)\lfloor\frac{n}{kd}\rfloor\lfloor\frac{m}{kd}\rfloor}\\=&\prod_{d=1}^{n}\left(\prod_{k|d}f_k^{\mu(\frac{d}{k})}\right)^{\lfloor\frac{n}{d}\rfloor\lfloor\frac{m}{d}\rfloor}\end{aligned}$$

其中括号内的式子可以通过$O(n\log n)$在最开始预处理出来。对于每组数据，使用数论分块，时间复杂度为$O(\sqrt{n})$，所有数据求答案的时间复杂度为$O(t\sqrt{n})$.