UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES

FACULTAD DE CIENCIAS EXACTAS Y NATURALES

LICENCIATURA EN CIENCIAS DE LA COMPUTACIÓN

Apunte de Métodos Numéricos

Autor:
Julián SACKMANN

5 de Febrero de 2013

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Universidad de Buenos Aires

Ciudad Universitaria - (Pabellón I/Planta Baja)

Intendente Güiraldes 2160 - C1428EGA

Ciudad Autónoma de Buenos Aires - Rep. Argentina

Tel/Fax: (54 11) 4576-3359

http://exactas.uba.ar

Índice

1 Resumen de Álgebra Lineal

Definición 1. *Una* ***matriz*** *A de $m \times n$ es un arreglo de m columnas y n filas.*

$$\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1} & a_{m,2} & a_{m,3} & \cdots & a_{m,n} \end{bmatrix}$$

1.1 Operaciones sobre matrices

Sobre las matrices se pueden aplicar las siguientes operaciones:

1.1.1 Suma

$A + B = C$ sii A y B tienen la misma dimesión (i.e., A,$B \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow C \in R^{m\times n}$).

$$a_{i,j} + b_{i,j} = c_{i,j} \qquad \forall i = 1 \cdots m \; \forall j = 1 \cdots n$$

1.1.2 Igualdad

A=B sii A y B tienen la misma dimensión.

$$a_{i,j} = b_{i,j} \qquad \forall i = 1 \cdots m \; \forall j = 1 \cdots n$$

1.1.3 Producto por escalar

Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. $\lambda \cdot A = B$ ($A \in \mathbb{R}^{m\times n} \Rightarrow B \in \mathbb{R}^{m\times n}$)

$$\lambda \cdot a_{i,j} = b_{i,j} \qquad \forall i = 1 \cdots m, j = 1 \cdots n$$

1.1.4 Producto

$A \cdot B = C$ sii $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ y $B \in \mathbb{R}^{n\times p} \Rightarrow C \in \mathbb{R}^{m\times p}$

$$c_{i,j} = \sum_{k=1}^{n} a_{i,k} \cdot b_{k,j}$$

Observar que no necesariamente vale que $AxB = BxA$.

1.1.5 Identidad

I matriz identidad. $I \in R^{n\times n}$

$$I_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j \end{cases} \qquad \forall i, j = 1 \cdots n$$

Consecuentemente, la forma de la matriz identidad de $\mathbb{R}^{n\times n}$ es:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Obs:</u> $I \cdot A = A \cdot I = A \qquad \forall A \in \mathbb{R}^{n\times n}$

1.1.6 Inversa

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Se dice que $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ es la *inversa* de A sii $A \cdot B = B \cdot A = I$.
B se nota como A^{-1}
Obs:

- Si $\exists A^{-1}$ entonces es única
- $(A^{-1})^{-1} = A$
- Sean A y $B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ inversibles. Entonces

$$(A \cdot B)^{-1} = B^{-1} \cdot A^{-1}$$

1.1.7 Transpuesta

Sea $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Se define $A^t \in \mathbb{R}^{n\times m}$ como

$$(A^t)_{i,j} = A_{j,i} \qquad\qquad \forall i = 1\cdots n, j = 1\cdots m$$

Obs:

- $(A+B)^t = A^t + B^t$
- $(A \cdot B)^t = B^t \cdot A^t$
- $(A^{-1})^t = (A^t)^{-1}$

1.1.8 Determinante

$det(A) \in \mathbb{R}$

Obs:

- $det(A \cdot B) = det(A) \cdot det(B)$
- $det(A^{-1}) = \dfrac{1}{det(A)}$
- $det(A) \neq 0 \Leftrightarrow \exists A^{-1}$

Nomenclatura: Si A es inversible, se dice **no singular**. Si es **singular**, es no inversible.

1.2 Matrices Elementales

1.2.1 Matrices de permutación

Una matriz de permutación P es una matriz que permite permutar filas o columnas de una matriz A al realizar:

- $P \cdot A$ permuta las filas de A
- $A \cdot P$ permuta las columnas de A

La matriz P se obtiene permutando las columnas de la matriz identidad (I). Observemos en un ejemplo de 3×3 en el que llamamos 1, 2 y 3 a las columnas de la matriz identidad de la siguiente forma:

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (1, 2, 3)$$

Si permutamos, por ejemplo, las filas 1 y 2, obtenemos la siguiente matriz de permutación P:

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (2, 1, 3)$$

Si multiplicamos a izquierda esta matriz con cualquier otra, el resultado será esa misma matriz pero con la primer y segunda fila cambiadas de lugar (pues obtuvimos P permutando la primer y segunda columnas de la identidad).

Obs: esta notación con índices permite almacenar una matriz de permutación $P \in \mathbb{R}^{n \times n}$ en sólamente n elementos, en lugar de en los n^2 que normalmente tomaría.

1.2.2 Elemental de tipo 1

Una matriz elemental de tipo 1, E_1, es una matriz que permite multiplicar toda una fila o columna de una matriz A por un escalar dado, al realizar:

- $E_1 \cdot A$ multiplica una fila de A por un escalar λ.
- $A \cdot E_1$ multiplica una columna de A por un escalar λ.

Dado el escalar λ, definimos la matriz E_1 de la forma:

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & & & \vdots \\ 0 & \cdots & \lambda & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \qquad \text{con } \lambda \in \mathbb{R}$$

Si λ está en la fila s de la matriz E_1, entonces la fila s de la matriz $B = E_1 \cdot A$ es la fila s de la matriz A multiplicada por λ. Las restantes filas quedan iguales.

Ejemplos en 4×4:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 \cdot \lambda & 7 \cdot \lambda & 11 \cdot \lambda & 15 \cdot \lambda \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 & 13 \\ 2 & 6 & 10 & 14 \\ 3 & 7 & 11 & 15 \\ 4 & 8 & 12 & 16 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 5 & 9 \cdot \lambda & 13 \\ 2 & 6 & 10 \cdot \lambda & 14 \\ 3 & 7 & 11 \cdot \lambda & 15 \\ 4 & 8 & 12 \cdot \lambda & 16 \end{bmatrix}$$

1.2.3 Matriz elemental de tipo 2

Una matriz elemental de tipo 2, E_2, es una matriz que permite sumar dos filas o columnas de una matriz A, multiplicando una de ellas por un escalar dado.

Dado el escalar λ, se define E_2 como:

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \lambda & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

(Observar que es la matriz identidad con λ en algún lugar de algún 0).
Suponiendo que λ está en la fila i y columna j, vale que

- $E_2 \times A$ multiplica la j-ésima fila de A por λ y se la suma a la i-ésima fila de A.
- $A \times E_2$ multiplica la j-ésima columna de A por λ y se la suma a la i-ésima columna de A.

Ejemplo:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \lambda & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} 1 & 4 & -7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 3 & 6 & 9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 7 \\ 2 & 5 & 8 \\ 2 \cdot \lambda + 3 & 5 \cdot \lambda + 6 & 8 \cdot \lambda + 9 \end{bmatrix}$$

1.3 Sistemas de Ecuaciones Lineales

Se define S un conjunto de ecuaciones lineales como

$$S = \begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \cdots + a_{1,n}x_n = b_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \cdots + a_{2,n}x_n = b_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \cdots + a_{n,n}x_n = b_n \end{cases}$$

Consideremos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

y los vectores

$$b = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \qquad x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Entonces el sistema S resulta ser la igualdad $A \times x = b$. Si consideramos

$$A_j = \begin{bmatrix} a_{1,j} \\ a_{2,j} \\ \vdots \\ a_{n,j} \end{bmatrix}$$

entonces S resulta ser $A_1 \cdot x_1 + A_2 \cdot x_2 + \cdots + A_n \cdot x_n = b$, una combinación lineal de vectores $(A_1, \cdots, A_n)$. Consecuentemente, para resolver S, hay que encontrar una combinación lineal de $A_1, \cdots, A_n$ para que me de b. Si $A_1, \cdots, A_n$ son **linealmente independientes**, entonces siempre puedo encontrar un x tal que $A \times x = b$. Si son **linealmente dependientes**, entonces no necesariamente existirá dicho x.

Dada una base, hay una única combinación lineal que me da un vector dado.

Definición: Se define una **base de un espacio** como un conjunto de vectores linealmente independientes con los que puedo generar todo el espacio vectorial.

Observación: Si $A_1, \cdots, A_n$ son linealmente independientes, entonces existe A^{-1}.

Observación: SI $A \times x = b$ es un sistema, multiplicar a ambos lados por cualquier matriz **elemental** me da un sistema equivalente[1].

[1] Un sistema es **equivalente** a otro si tienen el mismo conjunto de soluciones.

1.3.1 Sistemas fáciles

Diagonales

Son sistemas en los cuales la matriz A está *diagonalizada* (o sea, sólo tiene números distintos de cero en la diagonal y cero en todas las otras posiciones).

$$A = \begin{bmatrix} d_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_{2,2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_{n,n} \end{bmatrix}$$

Si planteamos el sistema $A \times x = b$ con una matriz diagonal, el sistema asociado resulta ser:

$$S = \begin{cases} d_{1,1} \cdot x_1 = b_1 \\ d_{2,2} \cdot x_2 = b_2 \\ \qquad \vdots \\ d_{i,i} \cdot x_i = b_i \\ \qquad \vdots \\ d_{n,n} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

Para solucionar el sistema, es necesario plantear dos casos:

- $\forall i \in [1, \cdots, n] \ / \ d_{i,i} \neq 0$: la solución existe y es única. En particular $x_i = \dfrac{b_i}{d_{i,i}}$. El algoritmo para encontrar las soluciones es $O(n)$.
- $\exists j \in [1, \cdots, n] \ / \ d_{j,j} = 0$: la solución puede no existir o pueden ser infinitas, dependiendo del valor de b_j:
  - $b_j \neq 0$ entonces no existe solución.
  - $b_j = 0$ entonces existen infinitas soluciones, pues $\forall x_j \in \mathbb{R}$ se cumple que

$$\begin{gathered} d_{j,j} \cdot x_j = b_j \\ 0 \cdot x_j = 0 \end{gathered}$$

  En este caso el algoritmo determina la no existencia o existencia infinita de solución/es en $O(n)$.

Triangular superior

Una matriz R[2] se dice triangular superior si todas las posiciones (i, j) con $i > j$ son cero.

$$R = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ 0 & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ 0 & 0 & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix}$$

De esta forma, su sistema asociado queda de la siguiente forma:

[2] Se las llama R por Right en inglés: sólo la mitad derecha de la matriz está llena.

$$S = \begin{cases} a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1 \\ \qquad\qquad a_{2,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{2,n} \cdot x_n = b_2 \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \vdots \quad \vdots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad a_{n,n} \cdot x_n = b_n \end{cases}$$

Nuevamente es necesario considerar dos casos para resolver el sistema:

- $\forall i \in [1, \cdots, n] \ / \ a_{i,i} \neq 0$ (Todo elemento de la diagonal es distinto de cero).

  En este caso, el sistema tiene solución única y puede ser encontrada mediante el siguiente procedimiento:

  1. $x_n = \dfrac{b_n}{a_{n,n}}$ (costo: 1 división)
  2. $x_{n-1} = \dfrac{b_{n-1} - a_{n-1,n} \cdot x_n}{a_{n-1,n-1}}$ $\left(\text{costo: } \begin{cases} 1 \text{ resta} \\ 1 \text{ división} \end{cases}\right)$
  3. $\vdots \qquad\qquad \vdots$
  4. $x_i = \dfrac{b_i - a_{i,i+i} \cdot x_{i+1} - a_{i,i+2} \cdot x_{i+2} - \cdots - a_{i,n} \cdot x_n}{a_{i,i}}$ $\left(\text{costo: } \begin{cases} 1 \text{ división} \\ n - i \text{ productos} \\ n - i \text{ restas} \end{cases}\right)$

  Este procedimiento se conoce como "algoritmo de sustitución hacia atrás" (o *backward substitution*). Su complejidad es:

$$\begin{aligned} & n \text{ divisiones } + \sum_{i=1}^{n-1} i \text{ productos } + \sum_{i=1}^{n-1} i \text{ restas} \\ &= n \text{ divisiones } + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \text{ productos } + \frac{n \cdot (n-1)}{2} \text{ restas} \\ &= n + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{2} \\ &= n^2 \end{aligned}$$

  En conclusión, la complejidad del algoritmo es $O(n^2)$.

- $\exists j \in [1, \cdots, n] \ \ a_{j,j} = 0$ (Existe un elemento de la diagonal que es 0).

  Si intento aplicar el algoritmo, me encuentro con que en algún momento

$$a_{j,j} \cdot x_j = \underbrace{b_j - a_{j,j+1} \cdot x_{j+1} - \cdots - a_{j,n} \cdot x_n}_{(*)}$$

  Aquí se presentan dos opciones:

  – (*)$\neq 0 \Rightarrow$ no existe solución.

  – (*)$= 0 \Rightarrow$ a x_j le doy un valor $\in \mathbb{R}$ y sigo con el procedimiento. En este caso, el algoritmo sigue siendo $O(n^2)$, pero existen infinitas soluciones.

<u>Observación:</u> Si la matriz es tiangular inferior, el procedimiento es igual que el anterior, pero se lo llama "algoritmo de sustitución hacia adelante" (o *forward substitution*).

1.3.2 Caso General

Se analiza el caso general para cualquier sistma de la forma $A \cdot x = b$.

El algoritmo para resolver estos sistmas consisten en utilizar matrices elementales para llevar el sistema a uno equivalente donde la matriz asociada sea de forma triangular superior o diagonal, y luego usar uno de los casos anteriores. Se denomina **Algoritmo de Eliminación Gaussiana**.

Sea A la matriz del sistema. Supongo $a_{1,1} \neq 0$. Consecuentemente, el primer paso del algoritmo de eliminación gaussiana sería.

$$A = \left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} & b_n \end{array}\right] \underset{\substack{E_2 = E_2 - \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} \cdot E_1 \\ E_3 = E_3 - \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} \cdot E_1 \\ \vdots \\ E_n = E_n - \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} \cdot E_1}}{\Rightarrow} \underbrace{\left[\begin{array}{cccc|c} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} & b_1 \\ 0 & a_{2,2}^{(1)} & \cdots & a_{2,n}^{(1)} & b_2^{(1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & a_{n,2}^{(1)} & \cdots & a_{n,n}^{(1)} & b_n^{(1)} \end{array}\right]}_{A^{(1)}}$$

Luego, voy iterativamente suponiendo que el primer elemento de los resultates de la primera fila que tengo que manejar no es cero y repito el procedimiento hasta tener una matriz triangular. El sistema resultante es equivalente porque solo se realizan operaciones entre filas.

Supongamos ahora que algún $a_{k,k}^{(k-1)} = 0$. En este caso, el procedimiento se rompe (al menos hasta que los matemáticos se pongan de acuerdo en qué significa dividir por cero). En este caso, existen dos posibilidades:

- $\exists i \in [k+1, \cdots, n] \ / \ a_{i,j}^{k_1} \neq 0$ (en la columna k, abajo de la diagonal existe un elemento distinto de 0). En este caso, intercambio la fila k por la fila i y sigo con el procedimiento. Puedo realizar este intercambio por que es un producto por matriz elemental.
- $\nexists i \in [k+1, \cdots, n] \ / \ a_{i,j}^{k_1} \neq 0$ (todos los elementos de la columna k, desde la diagonal hacia abajo son 0). Necesitaba un elemento distinto de cero para que me ayude a poner ceros en la columna j. Como ya los tengo, sigo al paso siguiente (pues mi objetivo en el paso k era poner ceros debajo de la diagonal en la columna k). La particularidad de esto es que voy a tener tantos ceros en al diagonal como casos como este haya tenido. El sistema sigue siendo equivalente.

En conclusión, el pseudocódigo del algoritmo es:

El costo total del algoritmo es:

$$\begin{aligned} \text{Costo } &= \sum_{i=1}^{n-1} (n-i)^2 \text{ productos } + (n-i)^2 \text{ restas } + (n-i) \text{ divisiones} \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i^2 + \sum_{i=1}^{n-1} i \\ &= \sum_{i=1}^{n-1} O(n^2) \\ &= O(n^3) \end{aligned}$$

2 Factorización LU - PLU

Se dice que una matriz tiene una **descomposición** o **factorización LU** si puede ser expresada en la forma:

$$\boxed{A = L \cdot U}$$

donde

- L es triangular inferior (***L**ower*):

$$\begin{bmatrix} & 0 & \cdots & 0 \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & 0 \\ & & & \end{bmatrix}$$

- U es triangular superior (***U**pper*):

$$\begin{bmatrix} & & & \\ 0 & & & \\ \vdots & \ddots & & \\ 0 & \cdots & 0 & \end{bmatrix}.$$

Además, L tiene unos en la diagonal.

2.1 Ventajas

Para resolver sistemas en el caso general se utiliza el algoritmo de eliminación gaussiana para llevar el sistema a uno equivalente cuya matriz asociada sea triangular superior:

$$A \cdot x = b \longrightarrow B \cdot x = b'$$

donde B es triangular superior. Sin embargo, si ahora me dan un nuevo sistema de la forma $A \cdot x = \tilde{b}$ para resolver, tengo que volver a efectuar el proceso completo de eliminación gaussiana, pagando su costo asintótico $O(n^3)$.

Supongamos ahora que poseemos la factorización $A = L \cdot U$ de la matriz A. Entonces,

$$A \cdot x = b$$

$$L \cdot \underbrace{U \cdot x}_{y} = b \Rightarrow \begin{cases} L \cdot y = b \\ U \cdot x = y \end{cases}$$

<u>Observación</u>: dado que las matrices L y U son triangulares, la resolución de los sistemas

- $L \cdot y = b$
- $U \cdot x = y$

tiene costo $O(n^2)$. De esta forma, si me cambian el vector b me ahorro de tener que volver a pagar $O(n^3)$ para encontrar una solución.

2.1.1 Obtener la factorización LU

El primer paso del algoritmo de eliminación gaussiana consiste en:

$$\forall j \in [0, \cdots, n] \;/\; a_{j,j} \neq 0 \;:\; f_j = f_j - \frac{a_{j,1}}{a_{1,1}} \cdot f_1$$

Para esto, se define la siguiente matriz y realiza el producto:

$$M_1 = \begin{bmatrix} 1 & & & & \\ -\frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} & 1 & & \text{\Huge 0} & \\ -\frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ -\frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_1 \cdot A = \begin{bmatrix} & \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \underbrace{\boxed{\qquad A \qquad}}_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix}$$

El producto $M_1 \cdot A$ es la expresión matricial del primer paso de eliminación gaussiana para $j = 2$. Si generalizo para $j \in [2, \cdots, n]$ y realizo el correspondiente producto tengo como resultado el primer paso de la eliminación gaussiana.

El segundo paso sería (suponiendo $a_{2,2} \neq 0$):

$$M_2 = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ 0 & 1 & & & & \\ 0 & -\frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} & 1 & & \text{\Huge 0} & \\ 0 & -\frac{a_{4,2}}{a_{2,2}} & 0 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ 0 & -\frac{a_{n,2}}{a_{2,2}} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M_2 \cdot M_1 \cdot A = \begin{bmatrix} & & \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ 0 & & \overline{\qquad\qquad\qquad} \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \underbrace{\boxed{\qquad A \qquad}}_{n-2} \\ 0 & 0 & \end{bmatrix}$$

En el caso general, definimos la matriz

$$M_i = \begin{bmatrix} 1 & & & & & \\ & \ddots & & & \text{\Huge 0} & \\ & & 1 & & & \\ & & -\frac{a_{i+1,i}}{a_{i,i}} & \ddots & & \\ & & \vdots & & \ddots & \\ & & -\frac{a_{i+1,i}}{a_{i,i}} & & & 1 \end{bmatrix}$$

<u>Observación:</u> M_i verifica ser $\begin{cases} \text{Triangular Superior} \\ \text{Inversible}^{3} \\ \text{Cuadrada} \end{cases}$

[3] En particular su inversa resulta de quitar todos los signos - de las fracciones de la columna i.

Entonces:

$$\begin{aligned}
M_{n-1} \cdot M_{n-2} \cdots M_2 \cdot M_1 \cdot A &= U \\
\cancel{M_{n-1}^{-1} \cdot M_{n-1}} \cdot M_{n-2} \cdots M_2 \cdot M_1 \cdot A &= M_{n-1}^{-1} U \\
M_{n-2} \cdots M_2 \cdot M_1 \cdot A &= M_{n-1}^{-1} \cdot U \\
\cancel{M_{n-2}^{-1} \cdot M_{n-2}} \cdots M_2 \cdot M_1 \cdot A &= M_{n-2}^{-1} \cdot M_{n-1}^{-1} \cdot U \\
&\vdots \\
A &= M_1^{-1} \cdot M_2^{-1} \cdots M_{n-2}^{-1} \cdot M_{n-1}^{-1} \cdot U
\end{aligned}$$

Expandiendo:

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \ddots & \\ \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & \frac{a_{n,2}}{a_{2,2}} & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & 0 & \frac{a_{n,n-1}}{a_{n,n}} & 1 \end{bmatrix}}_{\prod_{i=i}^{n-1} M_{n-i} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{2,1}}{a_{1,1}} & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{a_{3,1}}{a_{1,1}} & \frac{a_{3,2}}{a_{2,2}} & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \\ \frac{a_{n,1}}{a_{1,1}} & \frac{a_{n,2}}{a_{2,2}} & \frac{a_{n,3}}{a_{3,3}} & \cdots & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{L}} \cdot U$$

Como podemos observar, la matriz L resulta ser triangular inferior. Entonces $A = L \cdot U$, pero sólo es válido si todos los $a_{i,i} \neq 0$. Si en algún momento es necesario hacer una permutación de filas, obtengo una **factorización PLU**.

> Observación: No toda matriz tiene factorización **LU**. Sin embargo toda matriz tiene factorización **PLU**

2.1.2 Ejemplo

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_2 - 2 \cdot F_1 \\ F_3 - 3 \cdot F_2 \\ F_4 - (-1) \cdot F_1}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & -4 & -1 & -7 \\ 0 & 3 & 3 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_3 - 4 \cdot F_2 \\ F_4 - 3 \cdot F_2}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

En conclusión

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 3 \\ 0 & -1 & -1 & -5 \\ 0 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -13 \end{bmatrix}$$

A nivel implementación, para ahorrar espacio se suelen almacenar las dos matrices en una sola. Se guardan los coeficientes de abajo de la diagonal de la matriz L triangular inferior en los valores de U.

2.1.3 ¿Qué pasa si me encuentro ceros en la diagonal?

$$A = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_{P=(1,2,3,4)} \underset{F_1 \leftrightarrow F_2}{\Rightarrow} \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}}_{P=(2,1,3,4)} \underset{\substack{F_2 - 0 \cdot F_1 \\ F_3 - 1 \cdot F1 \\ F_4 - 1 \cdot F_1}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{F_2 \leftrightarrow F_3}{\Rightarrow}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_3 - 0 \cdot F_2 \\ F_4 - 1 \cdot F2}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \underset{F_4 - 1 \cdot F3}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

Entonces $P \cdot A = L \cdot U$ donde:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \qquad U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

Observemos que

$$L \cdot U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} = P \cdot A$$

Volviendo al mundo del sistema de ecuaciones, yo tenía que resolver el sistema $A \cdot x = b$. Ahora, al poseer una factorización **PLU**, el reemplazo correspondiente es

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b \\ P \cdot A \cdot x &= P \cdot b \\ L \cdot U \cdot x &= \underbrace{P \cdot b}_{b'} \end{aligned}$$

En conclusión, toda matriz tiene factorización **PLU**, que tiene costo $O(n^3)$ para obtenerlo. Pero, una vez pagado ese costo, si me mantienen la matriz A y sólo me cambian el vector resultado b, puedo resolver el nuevo sistema en $O(n^2)$. El guardarme los datos no agrega costo adicional.

2.2 Estrategias de pivoteo

Como la computadora trabaja con artimética finita, es posible que se pierda precisión en ciertas operaciones. Por la representación de los números reales que utiliza la máquina, los números chicos, al estar más juntos, están más homogéneamente distribuidos (la distribución es más densa cerca del cero). Es por esto que es preferible dividir por un número grande en módulo, así me da uno chico y tengo una "mejor" representación.

Considerando esto, una estrategia utilizada en la resolución de sistemas es elegir la fila con el primer elemento más grande y ponerla en primer lugar. A esta estrategia se la conoce como estrategia de pivoteo **parcial**.

A diferencia de esto, una estrategia de pivoteo **completo** busca en toda la matriz a trabajar el elemento más grande y hace la permutación correspondiente de filas y columnas para que quede ese valor más grande quede en el primer lugar.

2.3 Soluciones a un sistema

¿Cómo decidir si un vector v es una solución apropiada para un sistema $A \cdot x = b$. Como veremos en los ejemplos a continuación, la metodología de reemplazar por x y verificar la igualdad no es exacta, por la aritmética finita con la que trabaja la computadora.

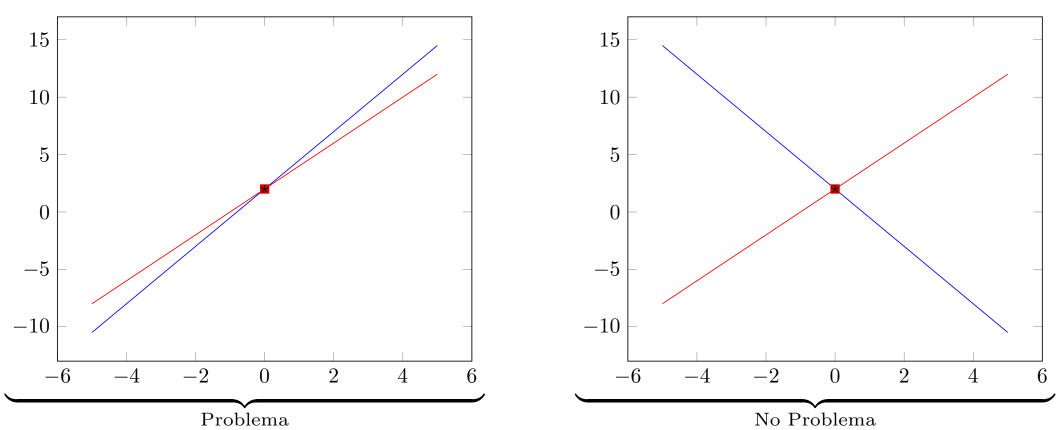
2.3.1 Ejemplo

$$S = \begin{cases} 0.835 \cdot x_1 + 0.667x_2 = 0.168 \\ 0.333 \cdot x_1 + 0.266x_2 = 0.067 \end{cases}$$

La solución real para este sistema es el vector $(x_1, x_2) = (1, -1)$. Sin embargo, se pueden observar otras soluciones (ni parecidas), que arrojan resultados extremadamente similares y que serían muy propensos a confundirse:

x	$A \cdot x$
$(-666, 834)$	$(0.168, 0.066)$
$(-932, 1167)$	$(0.169, 0.066)$
$(934, -1169)$	$(0.167, 0.068)$

Gráficamente, encontrar la solución de un sistema de ecuaciones es encontrar el punto de intersección entre dos rectas (en el caso de $\mathbb{R}^2$). El problema es que si ambas rectas son muy paralelas, es difícil distinguir la solución. Matricialmente, significa que hay dos filas que son muy *parecidas* (bajo alguna defnición de parecidas), con lo cual la matriz es casi singular (o sea casi no inversible).



2.4 Número de condición

Se define el **número de condición** de una matriz A como:

$$\boxed{K(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|}$$

Cuanto mayor es el número de condición, menos confiables son los resultados del sistema.

2.4.1 Normas matriciales

Una **norma matricial** es una función $F : \mathbb{R}^{n \times n} \to \mathbb{R}_{\geq 0}$ que verifica:

- $F(A) = 0 \Leftrightarrow A = 0$
- $F(A) \geq 0$

- $F(\lambda \cdot A) = |\lambda| \cdot F(A)$
- $F(A+B) \leq F(A) + F(B)$ (desigualdad triangular)

Las normas matriciales **inducidas** son aquellas que se definen en la forma:

$$\boxed{\|A\| = \max_{x:\|x\|=1} \|A \cdot x\|}$$

corollary En particular todas las normas matriciales inducidas verifican que

- $\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|$

Se pueden definir otro tipo de normas matriciales, **no inducidas** (cualquier función que verifique las 4 condiciones de norma y no esté definida como el máximo de los vectores de norma 1 es una norma no inducida). Un ejemplo es la norma de *Frobenius.*

$$\boxed{\|A\|_F = \sqrt{\sum_{i=i}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{i,j}^2}}$$

Proposición 2. *Sea x una solución del sistema $A \cdot x = b$ con A una matriz no signular (o sea, inversible). Sea x^* tal que $A \cdot x^* = b^*$. Entonces, se verifica que:*

1. $\|x - x^*\| \leq \|r\| \cdot \|A^{-1}\|$
2. $\underbrace{\dfrac{\|x - x^*\|}{\|x\|}}_{\text{Error relativo de } x} \leq \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \underbrace{\dfrac{\|r\|}{\|b\|}}_{\substack{\text{Error}\\ \text{relativo}\\ \text{de } b}}$

$$\begin{cases} \|A\| \text{ y } \|A^{-1}\| \text{ son las normas inducidas por } r \\ \\ r = b - A \cdot x^* = b - b^* \end{cases}$$

Demostración.

$$\begin{aligned}
r &= b - A^* \\
r &= A \cdot x - A \cdot x^* \\
r &= A \cdot (x - x^*) \\
A^{-1} \cdot r &= A^{-1} \cdot A \cdot (x - x^*) \\
A^{-1} \cdot r &= x - x^* \\
\|A^{-1}\| \cdot \|r\| \geq \|A^{-1} \cdot r\| &= \|x - x^*\| && \text{(pues es norma inducida)} \\
\|A^{-1}\| \cdot \|r\| &\geq \|x - x^*\|
\end{aligned}$$

Supongo $b \neq 0$, pues si $b = 0$ y A es no singular, entonces $x = 0$. Entonces esto también me permite suponer que $x \neq 0$ (lo que me permite dividir por su norma a continuación).

$$\begin{aligned}
b &= A \cdot x \\
\|b\| &= \|A \cdot x\| \leq \|A\| \cdot \|x\| && \text{(pues es norma inducida)} \\
\frac{1}{\|x\|} &\leq \frac{\|A\|}{\|b\|} \\
\frac{\|x - x^*\|}{\|x\|} &\leq \|r\| \cdot \|A^{-1}\| \cdot \frac{\|A\|}{\|b\|} && \text{(usando el punto anterior)}
\end{aligned}$$

$\square$

Observemos que del segundo punto se desprende la condición de $K(A)$: si el error relativo de b es chico, no es cierto que el error relativo es chico. Depende de $\|A\| \cdot \|A^{-1}\|$. Cuanto más cercano a 1 es el número de condición de la matriz, más estable es el sistema.

Observación: Sea $\|\cdot\|$ una norma inducida. Luego $\forall A : \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq 1$. Esto se debe a que

$$\begin{aligned} \|A\| \cdot \|A^{-1}\| &\geq \|A \cdot A^{-1}\| \\ &= \|I\| \\ &= \max_{x:\|x\|=1} \|I \cdot X\| \\ &= 1 \end{aligned}$$

2.5 Existencia de la factorización LU

Proposición 3. *Si las submatrices principales de A son no singulares, entonces A tiene factorización LU.*

Demostración. Se realiza por inducción en n.

Caso Base: $(n = 2)$ Si la matriz es de 2×2, necesariamente es de la forma $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$.

Por hipótesis, las submatrices principales son no singulares, lo que implica que $a_{1,1} \neq 0$. Luego, puedo hacer el primer y único paso del proceso de eliminación Gaussiana, con lo que A tiene factorización LU.

Paso inductivo: $(P(n) \Rightarrow P(n+1))$ Supongo que vale para cualquier matriz A de $n \times n$ y quiero ver que vale para cualquier matriz de $(n+1) \times (n+1)$. Formalmente, supongo que $\forall A \in \mathbb{R}^{n \times n} : P(A)$ y quiero probar que $\forall A \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)} : P(A)$.

Toda que una matriz de $(n+1) \times (n+1)$ es de la forma:

$$A_{(n+1)} = \left[\begin{array}{c|c} A_n & a_{n+1} \\ \hline f_{n+1} & a_{n+1,n+1} \end{array}\right]$$

donde

- $A_n \in \mathbb{R}^{n \times n}$
- $a_{n+1} \in \mathbb{R}^{n \times 1}$
- $f_{n+1} \in \mathbb{R}^{1 \times n}$
- $a_{n+1,n+1} \in \mathbb{R}$

Como A_n es una matriz de $n \times n$ con todas sus submatrices principales no singulares (pues A tiene todas sus submatrices principales no singulares), por hipótesis inductiva tiene factorización LU: $A_n = L_n \cdot U_n$. Defino entonces las siguientes matrices:

$$L_{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} \Large L_n & \begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{matrix} \\ \hline l_{n+1} & 1 \end{array}\right] \qquad U_{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} \Large U_n & u_{n+1} \\ \hline 0 \quad 0 \cdots \quad \cdots \quad \cdots \ 0 & u_{n+1,n+1} \end{array}\right]$$

Observaciones:

- Como L_n es una matriz triangular inferior, L_{n+1} es triangular inferior.
- Como U_n es una matriz triangular superior, U_{n+1} es triangular superior.

Con esta definición, realizamos el producto:

$$L_{n+1} \cdot U_{n+1} = A_{n+1} = \left[\begin{array}{c|c} \underbrace{L_n \cdot U_n}_{A_n} & L_n \cdot u_{n+1} \\ \hline l_{n+1} \cdot U_n & l_{n+1,n+1} + u_{n+1,n+1} \end{array}\right]$$

Observaciones:

- $L_n \cdot u_{n+1} = a_{n+1}$ es un sistema de ecuaciones triangular inferior con 1's en la diagonal (tiene solución única). Luego, u_{n+1} existe y es único.
- $l_{n+1} \cdot U_n = f_{n+1}$ es un sistema de ecuaciones triangulra superior con la matriz U_n inversible (tiene solución única). Luego, l_{n+1} existe y es único.
- $l_{n+1} \cdot u_{n+1} + u_{n+1,n+1} = a_{n+1,n+1}$ es una ecuación que puedo despejar.

Luego, A_{n+1} tiene factorización LU.

$\square$

2.5.1 Matrices simétricas

Definición 4. *Una matriz A es simétrica si es igual a su transpuesta.*

$$A = A^t$$

No es cierto que toda matriz simétrica tiene factorización LU. Por ejemplo, la matriz $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$ es simétrica y no la tiene.

Sea A una matriz simétrica con factorización LU.

$$\begin{aligned}
A &= L \cdot U \\
A^t &= (L \cdot U)^t \\
A^t &= U^t \cdot L^t \\
A &= U^t \cdot L^t && \text{(pues } A \text{ es simétrica)} \\
L \cdot U &= U^t \cdot L^t \\
L^{-1} \cdot L \cdot U &= L^{-1} \cdot U^t \cdot L^t \\
U &= L^{-1} \cdot U^t \cdot L^t \\
U \cdot (L^t)^{-1} &= L^{-1} \cdot U^t \cdot L^t \cdot (L^t)^{-1} \\
\underbrace{U \cdot (L^t)^{-1}}_{\text{triangular superior}} &= \underbrace{L^{-1} \cdot U^t}_{\text{triangular inferior}} = D
\end{aligned}$$

La única forma de que una matriz triangular superior sea igual a una matriz triangular inferior es que ambas sean matrices diagonales.

$$\begin{aligned}
U \cdot (L^t)^{-1} &= D \\
U \cdot (L^t)^{-1} \cdot L^t &= D \cdot L^t \\
U &= D \cdot L^t
\end{aligned}$$

$$A = L \cdot U$$

$$\boxed{A = L \cdot D \cdot L^t}$$

En conclusión si A tiene factorización LU, entonces es de la pinta $A = L \cdot D \cdot L^t$, donde

- L es una matriz triangular inferior.
- D es una matriz diagonal.

La forma particular de esta matriz permite que sólo almacenando la matriz L ($\frac{n^2}{2}$ elementos) y D (n elementos) puedo guardarme toda la factorización, que es lo que necesito para almacerna A.

2.5.2 Matrices simétricas definidas positivas

Definición 5. *Una matriz A se llama **simétrica definida positiva** si es simétrica ($A = A^t$) y además verifica que*

$$\forall x \neq 0 : x^t \cdot A \cdot x > 0$$

Similarmente, se denomina simétrica definida negativa si $\forall x \neq 0 : x^t \cdot A \cdot x < 0$.

- *A **simétrica definida positiva** sii $\forall x \neq 0 : x^t \cdot A \cdot x > 0$.*

- A ***simétrica semidefinida positiva*** *sii* $\forall x \neq 0 : x^t \cdot A \cdot x \geq 0$.
- A ***simétrica definida negativa*** *sii* $\forall x \neq 0 : x^t \cdot A \cdot x < 0$.
- A ***simétrica semidefinida negativa*** *sii* $\forall x \neq 0 : x^t \cdot A \cdot x \leq 0$.

Proposición 6. *Toda matriz simétrica definida positiva tiene submatrices principales definidas positivas.*

Demostración. Sea A_k la submatriz de orden k. Para demostrarlo por absurdo, supongamos que A_k es no singular.

Como A_k es no singular, $\exists x_k \neq 0 : A_k \cdot x_k = 0$. Defino entonces el vector $x = (x_k, 0, 0, \cdots, 0)$.

$$
\begin{aligned}
x^t \cdot A \cdot x &= \begin{bmatrix} x_k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \left[\begin{array}{ccc|c} & & & \vdots \\ & A_k & & \vdots \\ & & & \vdots \\ \hline \cdots & \cdots & \cdots & \end{array}\right] \cdot \begin{bmatrix} x_k \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} x_k & 0 & \cdots & \cdots & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_k \cdot x_k \\ * \\ \vdots \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \underbrace{x_k}_{k} & \underbrace{0 \ \cdots \ \cdots \ 0}_{n-k} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 \\ * \\ \vdots \\ * \end{bmatrix} \begin{matrix} \}\, k \\ \\ \}\, n-k \\ \\ \end{matrix} \\
&= 0
\end{aligned}
$$

Esto es absurdo, porque, por hipótesis, A es simétrica definida positiva ($\forall x : x^t \cdot A \cdot x > 0$). Luego, no existe tal submatriz singular. ☐

Observación 7. *Que una matriz sea singular implica que todo sistema homogéneo tiene solución no nula. (????)*

Proposición 8. *Si A es simétrica definida positiva, tiene factorización LU.*

Demostración. Por el teorema anterior, si A es simétrica definida positiva, tiene todas sus submatrices principales no singulares. Luego, por el teorema 3, tiene factorización LU. ☐

Corolario 9. *Si A es una matriz simétrica definida positiva, entonces su factorización LU es de la forma $A = L \cdot D \cdot L^t$ con $d_{i,i} > 0$.*

Demostración.

$$\forall x \neq 0 : x^t \cdot A \cdot x > 0$$
$$x^t \cdot L \cdot D \cdot L^t \cdot x > 0$$

Sea $x_i \neq 0$ tal que $x_i^t \cdot L = e_i^t$ y $L_{x_i}^t = e_i$ (que siempre existe pues L es inversible). Entonces:

$$x_i^t \cdot L \cdot D \cdot L^t > 0$$
$$e_i^t \cdot D \cdot e_i > 0$$
$$d_{i,i} > 0$$

□

Factorización de Cholesky

Definición 10. *Se llama* ***factorización de Cholesky*** *de una matriz A a la expresión de la matriz en la forma $A = L \cdot L^t$.*

Proposición 11. *Si A es una matriz simétrica definida positiva con $d_{i,i} > 0$ entonces A tiene factorización de Cholesky.*

Demostración. Se define

$$D^{\frac{1}{2}} = \begin{bmatrix} \sqrt{d_{1,1}} & & & 0 \\ & \sqrt{d_{2,2}} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \sqrt{d_{n,n}} \end{bmatrix}$$

Por la propiedad 9:

$$A = L \cdot D \cdot L^t$$
$$A = L \cdot D^{\frac{1}{2}} \cdot D^{\frac{1}{2}} \cdot L$$
$$A = L \cdot D^{\frac{1}{2}} \cdot (D^{\frac{1}{2}})^t \cdot L \qquad (D \text{ triangular} \Rightarrow D = D^t)$$
$$A = \underbrace{L \cdot D^{\frac{1}{2}}}_{L'} \cdot (L \cdot D^{\frac{1}{2}})^t$$

Observemos que como L es triangular inferior y $D^{\frac{1}{2}}$ es diagonal,

- $L' = L \cdot D^{\frac{1}{2}}$ es triangular inferior.
- $(L')^t = (L \cdot D^{\frac{1}{2}})^t$ es triangular superior.

Consecuentemente

$$\boxed{A = L' \cdot (L')^t}$$

□

Observación 12. *L' no necesariamente tiene unos en la diagonal.*

Algoritmo El hecho de que A sea simétrica definida positiva y tenga factorización de Cholesky hace que exista un algoritmo para resolver el sistema:

$l_{1,1} = \sqrt{a_{1,1}}$

Para $j = 2 \cdots n$:

$$l_{j,i} = \frac{a_{j,1}}{a_{1,1}}$$

Para $i = 2 \cdots n-1$:

$$l_{i,i} = \sqrt{\left(a_{i,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l_{i,k}^2\right)}$$

Para $j = i+1 \cdots n$:

$$l_{j,i} = \frac{\left(a_{j,i} - \sum_{k=1}^{i-1} l\right)}{2}$$

$l_{n,n} = \sqrt{\left(a_{n,n} - \sum_{k=1}^{n-1} l_{n,k}^2\right)}$

Ejemplo

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{\substack{F_2-(-\frac{1}{2})\cdot F_1 \\ F_3-0\cdot F_1}}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \underset{F_2-(-\frac{2}{3})\cdot F_1}{\Rightarrow} \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & -\frac{2}{3} & \frac{4}{3} \end{bmatrix}$$

De esta forma, se puede obeservar que

- $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 0 \end{bmatrix}$
- $U = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & -1 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^t}$
- $A = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{2}{3} & 1 \end{bmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{4}{3} \end{bmatrix}}_{D} \cdot \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & -\frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\frac{2}{3} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{L^t}$

2.5.3 Matrices estríctamente diagonal dominantes

Definición 13. *Una matriz A se dice **estríctamente diagonal dominante** sii*

$$\forall i \in [1, \cdots, n] : |a_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} |a_{i,j}|$$

Por ejemplo la matriz $\begin{bmatrix} -3 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & 4 & 3 \\ -2 & -1 & -5 \end{bmatrix}$ es estríctamente diagonal dominante.

Proposición 14. *Si A es una matriz estrictamente diagonal dominante, entonces A es no singular.*

Demostración. Procedamos por el absurdo, suponiendo que A es singular. Luego, $\exists x^* \neq 0 : A \cdot x^* = 0$. Como x^* es no nulo, tiene, al menos, una componente no nula. En particular, tiene una componente mayor o igual que todas las demás. Sea x_k^* esa componente. O sea

$\exists x_k^* / \forall i \neq k \in [1, \cdots, n] : |x_k^*| \geq |x_i^*|$ y $|x_k^*| \neq 0$. Luego, podemos escribir:

$$\begin{aligned}
A \cdot x^* &= 0 \\
a_{k,1} \cdot x_1^* + a_{k,2} \cdot x_2^* + \cdots + a_{k,k} \cdot x_k^* + \cdots + a_{k,n} \cdot x_n^* &= 0 \\
a_{k,k} \cdot x_k^* &= -\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{k,j} \cdot x_j^* \\
|a_{k,k} \cdot x_k^*| &= \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} a_{k,j} \cdot x_j^* \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j} \cdot x_j^*| \\
|a_{k,k}| \cdot |x_k^*| &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}| \cdot |x_j^*| \\
|a_{k,k}| &\leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}| \cdot \underbrace{\frac{|x_j^*|}{|x_k^*|}}_{\leq 1} \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} |a_{k,j}|
\end{aligned}$$

Esto es claramente absurdo, pues A es estrictamente diagonal dominante. □

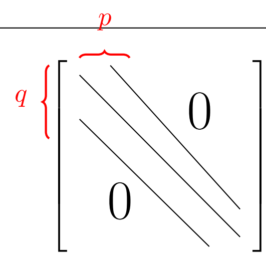
Proposición 15. *Si A es una matriz estrictamente diagonal dominante, entonces A tiene factorización LU.*

Demostración. Como A es estrictamente diagonal dominante, todas sus submatrices principales son estrictamente diagonal dominantes. Esto vale porque para toda submatriz principal, la diagonal es parte de la diagonal principal y, en cada fila, estoy dejando un subconjunto estrictamente menor que la totalidad de la fila de la matriz A.

Por el teorema 14, esto implica que todas sus submatrices principales son no singulares. Luego, por el teorema 3, A tiene factorización LU. □

2.5.4 Matrices banda

Definición 16. *Una matriz A se dice que es matriz **banda** si es de la forma:*



Proposición 17. *Una matriz banda no necesariamente tiene factorización LU. Sin embargo, si la tiene, vale que:*

- L *es matriz banda.*
- Q *es matriz banda.*

Luego, se reduce el requerimiento de memoria a $O((p + q + 1) \cdot n)$ *(La diagonal principal, más las* p *diagonales por encima y las* q *diagonales por debajo de ella, todas de tamaño menor o igual a* n*).*

3 Factorización QR

Definición 18. *Una matriz Q se dice que es **ortogonal** sii $Q \cdot Q^t = Q^t \cdot Q = I$*

Proposición 19. *Sean Q_1 y Q_2 matrices ortogonales. Entonces $B = Q_1 \cdot Q_2$ es ortogonal.*

Demostración. Quiero probar que $B \cdot B^t = B^t \cdot B = I$. Luego,

$$\begin{aligned} B \cdot B^t &= Q_1 \cdot Q_2 \cdot (Q_1 \cdot Q_2)^t \\ &= Q_1 \cdot \underbrace{Q_2 \cdot Q_2^t}_{I} \cdot Q_1^t \\ &= Q_1 \cdot Q_1^t \\ &= I \end{aligned}$$

□

Definición 20. *Se dice que una matriz tiene **factorización QR** si puede ser expresada en la forma:*

$$\boxed{A = Q \cdot R} : \begin{cases} Q \text{ es una matriz ortogonal.} \\ R \text{ es una matriz triangular superior.} \end{cases}$$

El algoritmo para llevar a una matriz a su forma QR tiene costo $O(n^3)$. Tiene la misma ventaja que la factorización LU de permitirme resolver un sistema de ecuaciones en orden $O(n^2)$, pero con la ventaja de que **toda matriz tiene factorización QR**.

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b \\ Q \cdot R \cdot x &= b \\ Q^t \cdot Q \cdot R \cdot X &= Q^t \cdot b \\ \underbrace{R \cdot x}_{\substack{\text{sistema} \\ \text{triangular} \\ \text{superior}}} \quad &= Q^t \cdot b \end{aligned}$$

Proposición 21. *El número de condición de toda matriz ortogonal es 1.*

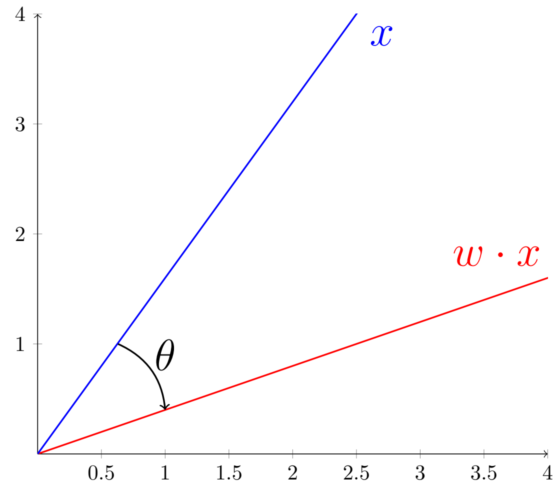
Demostración. Observemos que $\|x\|_2 = \sqrt{x^t \cdot x}$. Luego,

$$\begin{aligned} K_2(Q) &= \max_{x:\|x\|_2=1} \|Q \cdot x\| \\ &= \left(\sqrt{(Q \cdot x)^t \cdot Q \cdot x}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{x^t \cdot Q^t \cdot Q \cdot x}\right)^2 \\ &= \left(\sqrt{x^t \cdot x}\right)^2 \\ &= \|x\|_2^2 \\ &= 1^2 \\ &= 1 \end{aligned}$$

□

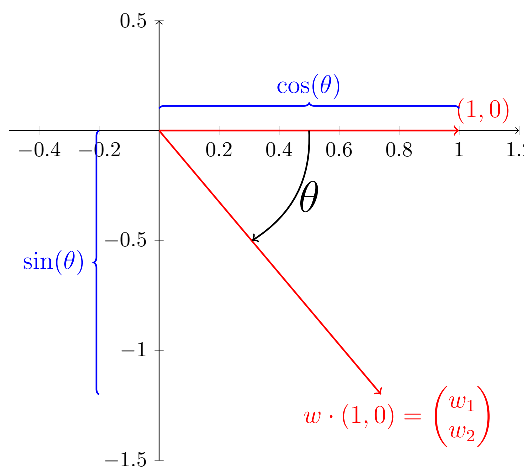
3.1 Rotaciones

Quiero hallar una transformación lineal en $\mathbb{R}^2$ que a un vector x lo mueva θ grados en sentido horario.



Sea $W = \begin{bmatrix} w_{1,1} & w_{1,2} \\ w_{2,1} & w_{2,2} \end{bmatrix}$

Por ejemplo, yo quiero que el vector $(1,0)$, me lo lleve al punto (w_1, w_2):



Luego, considero los vectores:

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ w \cdot (1,0) = \begin{pmatrix} w_{1,1} \\ w_{1,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta) \\ -\sin(\theta) \end{pmatrix} \\ \\ \bullet\ w \cdot (0,1) = \begin{pmatrix} w_{1,2} \\ w_{2,2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin(\theta) \\ \cos(\theta) \end{pmatrix} \end{array}\right\} \quad W = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$$

Observación 22. *La matriz W es ortogonal.*

También se puede plantear el problema inverso. Dado un vector $\tilde{x}$, dar una transformación que me lo lleve al eje x:

$$W \cdot \tilde{x} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ \tilde{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces,
$-\sin(\theta) \cdot \tilde{x}_1 + cos(\theta) \cdot \tilde{x}_2 = 0$

$$\left. \begin{array}{l} \bullet\ -\sin(\theta) = \dfrac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} \\[2ex] \bullet\ \cos(\theta) = \dfrac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} \end{array} \right\} \quad W = \begin{pmatrix} \dfrac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} & \dfrac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} \\ -\dfrac{\tilde{x}_2}{\|\tilde{x}\|_2} & \dfrac{\tilde{x}_1}{\|\tilde{x}\|_2} \end{pmatrix}$$

Sea $x \in \mathbb{R}^2$ y $W \cdot x = \begin{pmatrix} * \\ 0 \end{pmatrix}$. La matriz W entonces es de la forma:

$$W = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \\ -\dfrac{x_2}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} & \dfrac{x_1}{\sqrt{x_1^2 + x_2^2}} \end{bmatrix}$$

La matriz W me tira el vector x al eje y θ es el ángulo que se forma entre x y el eje.

Sea $x = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ y $W \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que:

$$W \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ * \end{pmatrix}$$

Propongo

$$W_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & & \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & & \Large 0 \\ & & 1 & \\ & \Large 0 & & \ddots & \\ & & & & 1 \end{bmatrix}$$

Luego,

$$W_1 \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{1,2}) \cdot x_1 + \sin(\theta_{1,2} \cdot x_2) \\ -\sin(\theta_{1,2}) \cdot x_1 + \sin(\theta_{1,2}) \cdot x_2 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Eligiendo un $\theta_{1,2}$ adecuado, podemos lograr que $W_1 \cdot x = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ x_3 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$.

Al completar W_1 con la identidad, sigue siendo ortogonal (tiene columnas de norma 1 y son linealmente independientes).

Ahora sea $W_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que:

$$W_2 \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Para esto, la matriz W_2 debe ser:

$$W_1 = \begin{bmatrix} \cos(\theta_{1,3}) & 0 & \sin(\theta_{1,3}) & & & \\ 0 & 1 & 0 & & \Huge 0 & \\ -\sin(\theta_{1,3}) & 0 & \cos(\theta_{1,3}) & & & \\ & & & 1 & & \\ & \Huge 0 & & & \ddots & \\ & & & & & 1 \end{bmatrix}$$

con $\theta_{1,3}$ tal que $-\sin(\theta_{1,3}) \cdot x_1 + \cos(\theta_{1,3}) \cdot x_2 = 0$. Entonces,

$$W_2 \cdot \begin{pmatrix} \tilde{x}_1 \\ 0 \\ x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta_{1,3}) \cdot \tilde{x}_1 + \sin(\theta_{1,3}) \cdot x_3 \\ 0 \\ -\sin(\theta_{1,3} \cdot \tilde{x}_1 + \cos(\theta_{1,3})) \cdot x_3 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{x}_{1,2} \\ 0 \\ 0 \\ x_4 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

.

Pasando al caso general, propongo matrices del tipo:

$$W_n \cdot W_{n-1} \cdot \cdots \cdot W_2 \cdot W_1 = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

con

$$W_j = \begin{array}{cc} \begin{array}{cccccccc} 1 & & & & j & & & \\ \downarrow & & & & \downarrow & & & \end{array} & \\ \begin{bmatrix} \cos(\theta_{1,j}) & 0 & \cdots & 0 & \sin(\theta_{1,j}) & & & \\ 0 & 1 & & & 0 & & & \\ \vdots & & \ddots & & \vdots & & \Huge 0 & \\ 0 & & & 1 & 0 & & & \\ -\sin(\theta_{1,j}) & 0 & \cdots & 0 & \cos(\theta_{1,j}) & & & \\ & & & & & 1 & & \\ & \Huge 0 & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{c} \leftarrow 1 \\ \\ \\ \\ \leftarrow j \\ \\ \\ \\ \end{array} \end{array}$$

Como todas las W_i son ortogonales, por la proposición 19, vale que $\prod_{i=1}^{n} W_i$ es ortogonal.

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$, expresada en la forma $A = (A_1|A_2|\cdots|A_n)$ en el que cada $A_i \in \mathbb{R}^n$. Se que existen $W_{1,1}, \cdots, W_{1,n}$ tales que

$$\prod_{i=0}^{n-1} W_{1,(n-i)} \cdot A_i = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$$

Entonces

$$W_{1,n} \cdot W_{1,n-1} \cdot \cdots \cdot W_{1,3} \cdot W_{1.2} \cdot A = \begin{bmatrix} * & * \quad * \quad \cdots \quad * \\ 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \underbrace{\boxed{\phantom{\begin{matrix} a & a & a & a & a \\ a \\ a \end{matrix}}}}_{n-1} \\ 0 & \end{bmatrix} = A'$$

Consideremos ahora $A' = (A'_1|A'_2|\cdots|A'_n)$ y $x = \begin{pmatrix} a'_{2,2} \\ a'_{3,2} \\ \vdots \\ a'_{n,2} \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$.

Sean $W'_{2,n} \cdot \cdots \cdot W'_{2,4} \cdot W'_{2,3} \cdot x = \begin{pmatrix} * \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n-1}$ con

$$W_{2,i} = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ 0 & \\ 0 & \\ \vdots & \underbrace{\boxed{\quad W'_{2,1} \quad}}_{n-1} \\ 0 & \end{array} \right] \left.\vphantom{\begin{matrix} a \\ a \\ a \\ a \end{matrix}}\right\} n-1$$

Que sigue siendo ortogonal, sigue siendo de $\mathbb{R}^{n\times x}$ y sigue haciendo lo que necesito. Luego,

$$\underbrace{W_{2,n} \cdot \cdots \cdot W_{2,4} \cdot W_{2,3}}_{\text{triangula } n-1 \times n-1} \cdot \underbrace{W_{1,n} \cdot \cdots \cdot W_{1,3} \cdot W_{1,2}}_{\text{triangula } n\times n} \cdot A = \begin{bmatrix} * & * & * \quad * \quad * \\ 0 & * & \\ 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & \underbrace{\boxed{\quad A \quad}}_{n-2} \\ 0 & 0 & \end{bmatrix} = A''$$

Sigo operando de la misma forma hasta que obtengo lo que necesito:

$$\underbrace{W_{n-1,n} \cdot W_{n-2,n} \cdot W_{n-2,n-1} \cdot \dots \cdot W_{1,3} \cdot W_{1,2}}_{\text{W}} \cdot A = \underbrace{\begin{bmatrix} * & * & \cdots & * \\ 0 & * & \cdots & * \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & * \end{bmatrix}}_{\text{triangular superior}}$$

$$W \cdot A = R$$
$$A = W^t \cdot R = Q \cdot R$$

A diferencia de la factorización LU, toda matriz tiene factorización QR. Si en el paso de anular la i-ésima coordenada resulta que $\sqrt{x_i^2 + x_j^2} = 0$, entonces es porque $x_i = 0$ y $x_j = 0$, con lo cual no tengo nada que hacer, simplemente paso a la siguiente posición.

3.1.1 Costo de la obtención de la factorización QR

Primero observemos el costo del producto

$$W_{1,2} \cdot A = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & a_{1,3} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & \cdots & a_{2,n} \\ a_{3,1} & a_{3,2} & a_{3,3} & \cdots & a_{3,n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & a_{n,3} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} \cos(\theta) \cdot a_{1,1} + \sin(\theta) \cdot a_{2,1} & \cos(\theta) \cdot a_{1,2} + \sin(\theta) \cdot a_{2,2} & \cdots & \cos(\theta) \cdot a_{1,n} + \sin(\theta) \cdot a_{2,n} \\ -\sin(\theta) \cdot a_{1,1} + \cos(\theta) \cdot a_{2,1} & -\sin(\theta) \cdot a_{1,2} + \cos(\theta) \cdot a_{2,2} & \cdots & -\sin(\theta) \cdot a_{1,n} + \cos(\theta) \cdot a_{2,n} \\ & fila_3 & & \\ & \vdots & & \\ & fila_n & & \end{pmatrix}$$

Como se puede observar, se realizan operaciones sólo en las primeras dos filas, cada una de las cuales toma $n \cdot (2 \text{ productos } + 1 \text{ suma})$. Con lo cual, al realizar todo el producto matricial se realizan $4n$ productos y $2n$ sumas. Todos los productos matriciales hacen lo mismo, por lo cual por estapa consumo un total de $(n-1) \cdot (4n \text{ productos } + 2n \text{ sumas})$.

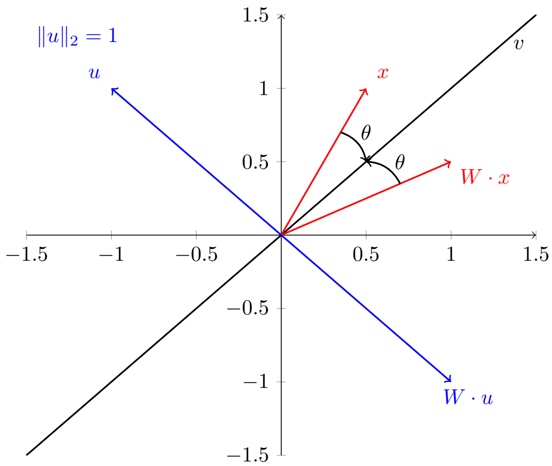
En cada etapa voy operando con 1 fila menos que en la anterior. Luego, por etapa gasto:

- Etapa 2: $(n-2) \cdot (4(n-2+1) \text{ productos } + 2(n-2+1) \text{ sumas})$
- Etapa 3: $(n-3) \cdot (4(n-3+1) \text{ productos } + 2(n-3+1) \text{ sumas})$
- $\vdots$
- Etapa i: $(n-i) \cdot (4(n-i+1) \text{ productos } + 2(n-i+1) \text{ sumas})$

En conclusión, el costo total del algoritmo es de:

$$\sum_{j=1}^{n-1} (n-j) \cdot (4(n-j+1) \text{ productos } + 2(n-j+1) \text{ sumas}) \in O(n^3)$$

3.2 Reflexiones



- W es una reflexión.
- $W \cdot v = v$
- $W \cdot u = -u$

Sea $P = u \cdot u^t$. Luego,

- $Pu = u \cdot \underbrace{u^t \cdot u}_{1} = u$
- $Pv = u \cdot \underbrace{u^t \cdot v}_{0} = 0$

Definimos entonces $W = I - 2P$. Luego,

- $Wu = (I - 2P)u = Iu - 2Pu = u - 2u = -u$
- $Wv = (I - 2P)v = Iv - 2Pv = v - 0 = v$

Proposición 23. *Sean $x, y \in \mathbb{R}^2$ tales que $\|x\|_2 = \|y\|_2$. Entonces existe $W \in \mathbb{R}^{2\times 2}$* ***matriz de reflexión*** *tal que $W \cdot x = y$*

Demostración. $W = I - 2P = I - 2u \cdot u^t$. Luego, propongo $u = \dfrac{x - y}{\|x - y\|_2}$.

Quiero ver que

- $x = \dfrac{1}{2}(x + y) + \dfrac{1}{2}(x - y)$ (trivial)
- $x + y \perp x - y$

Para ver esto, segundo, observemos que:

$$\begin{aligned}
(x+y)^t \cdot (x-y) &= x^t \cdot x - x^t \cdot y + y^t \cdot x - y^t \cdot y \\
&= \underbrace{\|x\|_2^2}_{1^2} - \cancel{x^t \cdot y} + \cancel{x^t \cdot y} - \underbrace{\|y\|_2^2}_{1^2} \\
&= 1 - 1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Ahora resta demostrar que $W \cdot x = y$

$$\begin{aligned}
W \cdot x &= W \cdot (\frac{x+y}{2}) + W \cdot (\frac{x-y}{2}) \\
&= \frac{W}{2} \cdot (x+y) + \frac{W}{2} \cdot (x-y) \\
&= \frac{I - 2 \cdot u \cdot u^t}{2} \cdot (x+y) + \frac{I - 2 \cdot u \cdot u^t}{2} \cdot (x-y) \\
&= \frac{1}{2} \cdot I \cdot (x+y) - \frac{1}{2} \cdot (-(x-y)) \\
&= \frac{1}{2} \cdot (x+y) - \frac{1}{2} \cdot (x-y) \\
&= y
\end{aligned}$$

□

Proposición 24. *Sea* $A = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} \end{bmatrix}$*. Luego, existen dos matrices* Q *y* R *tales que*

- Q *es ortogonal.*
- R *es triangular superior.*
- $A = Q \cdot R$*.*

Demostración. Defino:

- $x = (a_{1,1}, a_{2,1})$
- $y = (\|x\|_2, 0)$

Por la proposición 23, sabemos que $\exists W \in \mathbb{R}^{2\times 2} : W \cdot x = y$. Luego,

$$W \cdot A = \underbrace{\begin{bmatrix} \|x\|_2 & * \\ 0 & * \end{bmatrix}}_{\text{triangular superior}}$$

Es necesario ver que W es una matriz ortogonal. O sea, quiero ver que $W \cdot W^t = I$.

$$\begin{aligned}
W \cdot W^t &= (I - 2 \cdot u \cdot u^t) \cdot (I - 2 \cdot u \cdot u^t)^t \\
&= (I - 2 \cdot u \cdot u^t) \cdot (I^t - 2 \cdot (u \cdot u^t)^t) \\
&= (I - 2 \cdot u \cdot u^t) \cdot (I - 2 \cdot u \cdot u^t) \\
&= I - 2 \cdot u \cdot u^t - 2 \cdot u \cdot u^t + 4 \cdot u \cdot \underbrace{u^t \cdot u}_{1} \cdot u^t \\
&= I \cancel{- 2 \cdot u \cdot u^t} \cancel{- 2 \cdot u \cdot u^t} \cancel{+ 4 \cdot u \cdot u^t} \\
&= I
\end{aligned}$$

Luego, W es una matriz ortogonal. Tengo entonces:

$$\begin{aligned}
W \cdot A &= R \\
W^t \cdot W \cdot A &= W^t \cdot R \\
A &= \underbrace{W^t}_{Q} \cdot R
\end{aligned}$$

□

Sea $A \in \mathbb{R}^{n\times n} = (A_1|A_2|\cdots|A_n)$. Defino:

- $x \in \mathbb{R}^n = A_1$
- $y \in \mathbb{R}^n = (\|A_1\|_2, 0, 0, \cdots, 0)$

Luego, existe $W_1 \in \mathbb{R}^{n\times n}$ tal que $W_1 \cdot x = y$:

$$W_1 \cdot A = \left[\begin{array}{cc} \|A_1\|_2 & * \quad * \quad \cdots \quad * \\ \begin{matrix}0\\0\\\vdots\\0\end{matrix} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} & & \\ & A' & \\ & & \end{matrix}}}_{n-1} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n-1 \end{matrix}$$

Sea ahora $x' = A'_1$ e $y' = (\|A'_1\|_2, 0, 0, \cdots, 0)$. Nuevamente, existe $W'_2 \in \mathbb{R}^{(n-1)\times(n-1)}$ tal que $W'_2 \cdot x' = y'$. Completo con la identidad para que me quede de tamaño correcto:

$$W_2 = \left[\begin{array}{cc} 1 & 0 \quad 0 \quad \cdots \quad 0 \\ \begin{matrix}0\\0\\\vdots\\0\end{matrix} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} & & \\ & W'_2 & \\ & & \end{matrix}}}_{n-1} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n-1 \end{matrix}$$

Entonces, realizo el prodcuto:

$$W_2 \cdot W_1 \cdot A = \left[\begin{array}{ccc} * & * & * \quad * \quad * \\ 0 & * & * \quad * \quad * \\ \begin{matrix}0\\\vdots\\0\end{matrix} & \begin{matrix}0\\\vdots\\0\end{matrix} & \underbrace{\boxed{\begin{matrix} & A'' & \\ & & \end{matrix}}}_{n-2} \end{array}\right] \begin{matrix} \\ \\ \left.\begin{matrix}\\ \\ \\ \end{matrix}\right\} n-2 \end{matrix}$$

Nuevamente, en el caso general, me queda cada W_i de la forma:

$$W_i = \left[\begin{array}{c|c} \overbrace{\quad I \quad}^{i-1} & \overbrace{\qquad\qquad 0 \qquad\qquad}^{n-i+1} \\ \hline 0 & I - 2 \cdot u_i \cdot u_i^t \end{array}\right] \begin{matrix} \}\, i-1 \\ \}\, n-i+1 \end{matrix}$$

Luego, $\underbrace{W_{n-1} \cdot W_{n-2} \cdot \dots \cdot W_2 \cdot W_1}_{\text{ortogonal}} \cdot A$ es triangular superior.

Si tomo en cada paso $y_i = (\|A_1^{(i)}\|_2, 0, \cdots, 0)$ o $y_i = (-\|A_1^{(i)}\|_2, 0, \cdots, 0)$ dependiendo del correspondiente $x_i = (x_{i_1}, x_{i_2}, \cdots, x_{i_n})$ para calcular $U = x - y$ ya que el primer elemento es $x_{i_1} \pm \|A_1^{(i)}\|_2$.

Para la implementación prefiero evitar restar. Luego, si $x_i < 0$ lo elijo negativo y si $x_i \geq 0$ lo elijo positivo.

Proposición 25. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ no singular. Entonces existe un único par de matrices Q, R tales que:*

- *Q ortogonal*
- *R triangular superior con $r_{i,i} > 0$*
- *$A = Q \cdot R$*

Demostración. Por lo visto anteriormente, sabemos que existen $\tilde{Q}$ y $\tilde{R}$ tales que $A = \tilde{Q} \cdot \tilde{R}$ con $\tilde{Q}$ ortogonal y $\tilde{R}$ triangular superior.

Sea $D \in \mathbb{R}^{n \times n}$ tal que $d_{i,i} = \begin{cases} 1 si \tilde{r}_{i,i} > 0 \\ -1 si \tilde{r}_{i,i} < 0 \end{cases}$.

Observemos que D es ortogonal, pues $D = D^t \Rightarrow D \cdot D^t = D \cdot D = I$. Luego,

$$A = \tilde{Q} \cdot \tilde{R} = \underbrace{\tilde{Q} \cdot D}_{Q} \cdot \underbrace{D \cdot \tilde{R}}_{R} = \underbrace{Q}_{\text{ortogonal}} \cdot \underbrace{R}_{\substack{\text{triangular} \\ \text{superior}}}$$

Además, por cómo está definido $d_{i,i}$ en función de $\tilde{r}_{i,i}$, vale que $\forall i : r_{i,i} > 0$.

Unicidad Supongo que las matrices no son únicas. O sea

- $A = Q_1 \cdot R_1$
- $A = Q_2 \cdot R_2$

$$\begin{aligned} A &= A \\ Q_1 \cdot R_1 &= Q_2 \cdot R_2 \\ \underbrace{R_1}_{\substack{\text{triangular} \\ \text{superior}}} &= \underbrace{Q_1^t \cdot Q_2}_{\substack{\text{triangular} \\ \text{superior}}} \cdot \underbrace{R_2}_{\substack{\text{triangular} \\ \text{superior}}} \end{aligned}$$

Por otro lado observemos que $\tilde{D} = Q_1^t \cdot Q_2$ es una matriz ortogonal. De estos dos hechos se puede deducir que $Q_1^t \cdot Q_2$ es una matriz diagonal de 1's y -1's.

$R_1 = \tilde{D} \cdot R_2$

Como $r_{1_{i,i}} > 0$ y $r_{2_{i,i}} > 0$, necesariamente $\forall i : d_{i,i} = 1$. Luego $\tilde{D} = I$.

Consecuentemente,

- $R_1 = \tilde{D} \cdot R_2 = I \cdot R_2 = R_2$
- $Q_1^t \cdot Q_2 = I \Rightarrow Q_1 = Q_2$

$\square$

4 Definiciones y Proposiciones Complementarias

Para toda esta sección, consideramos A una matriz de $\mathbb{R}^{n \times n}$

Definición 26. *Se llama* ***polinomio característico*** *de A a*

$$P(\lambda) = det(A - \lambda \cdot I)$$

Definición 27. *Se llaman* ***autovalores*** *de A a las raíces de $P(\lambda)$.*
A lo sumo hay n autovalores.

Definición 28. *Se llaman* ***autovalores*** *de A a los valores de λ tales que existe un vector $x \neq 0$ (no nulo) que hace que $A \cdot x = \lambda \cdot x$.*
En particular, al x que verifica que $A \cdot x = \lambda \cdot x$ se lo llama ***autovector*** *asociado al autovalor λ.*

Proposición 29. *Si tengo n autovalores distintos entonces tengo n autovectores distintos linealmente independientes que forman una base. Si hay autovalores con multiplicidad mayor que 1 no necesariamente formo una base de $\mathbb{R}^n$.*

Definición 30. *Se define el* ***radio espectral*** *de a como*

$$\rho(A) = \max_{\lambda \text{ autovalor de } A} |\lambda|$$

Proposición 31. *Si el radio espectral de A es menor que uno ($\rho(A) < 1$), entonces $(I - T)^{-1}$ existe y*

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \cdots = \sum_{j=0}^{\infty} T^j$$

Proposición 32. *Sea $\|\cdot\|$ una norma* ***inducida****. Entonces*

$$\rho(A) \leq \|A\|$$

Definición 33. *Se dice que A es* ***convergente*** *si $\lim_{k \to \infty} (A^k)_{i,j} = 0$*

Proposición 34. *A es convergente $\Leftrightarrow \rho(A) < 1$*

Proposición 35. *Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ de radio espectral menor que 1 ($\rho(A) < 1$). Entonces, $I - A$ es no singular y*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$$

Demostración. Opero por el absurdo. Supongo que $I - A$ es singular. Luego, existe $x \neq 0$ tal que $(I - A) \cdot x = 0$.

$$\begin{aligned}
(I - A) \cdot x &= 0 \\
I \cdot x - A \cdot x &= 0 \\
A \cdot x &= x
\end{aligned}$$

Luego, $\lambda = 1$ es autovalor de A, con lo cual $\rho(A) \geq 1$. Absurdo pues contradice la hipótesis. Luego $(I - A)$ es no singular

Sea S_n el n-ésimo elemento de la serie de potencia

$$\begin{aligned}
S_n &= \sum_{i=0}^{n} A^i \\
(I - A) \cdot S_n &= (I - A) \cdot \sum_{i=0}^{n} A^i \\
(I - A) \cdot S_n &= \sum_{i=0}^{n} A^i \cdot (I - A) \\
(I - A) \cdot S_n &= \sum_{i=0}^{n} A^i - A^{i+1} && \text{(serie telescópica)} \\
(I - A) \cdot S_n &= A^0 - A^{n+1}
\end{aligned}$$

Como $\rho(A) < 1$, A es convergente, con lo que $\lim\limits_{k \to \infty} (A^k)_{i,j} = 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
(I - A) \cdot S_n &= I - A^{n+1} \\
(I - A) \cdot \lim_{n \to \infty} S_n &= \lim_{n \to \infty} (I - A^{n+1}) \\
(I - A) \cdot \lim_{n \to \infty} S_n &= \lim_{n \to \infty} I \lim_{n \to \infty} A^{n+1} \\
(I - A) \cdot \lim_{n \to \infty} S_n &= I - 0 \\
(I - A) \cdot \sum_{k=0}^{\infty} A^k &= I
\end{aligned}$$

Como $I - A$ es inversible,

$$\sum_{k=0}^{\infty} A^k = (I - A)^{-1}$$

□

5 Métodos iterativos para sistemas lineales

Sea $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ y $b \in \mathbb{R}^n$. Queremos hallar un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $A \cdot x = b$.

Para esto, los métodos iterativos generan una sucesión de vectores $\{x^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ (a partir de un vector solución inicial x_0) que es de esperar que converga a x, que es la solución del problema:

$$\{x^k\} \xrightarrow[k \to \infty]{} x$$

En general los métodos iterativos (particularmente los de Jacobi y Gauss-Seidel) no se usan para sistemas pequeños, porque la cantidad de iteraciones necesarias para tener una precisión apropiada es excesivamente grande comparándola contra sistemas exactos como la eliminación Gaussiana. Sin embargo, para sistemas grandes con matrices muy ralas[4] estas técnicas pueden ser muy eficientes, tanto en complejidad espacial como temporal

5.1 Método de Jacobi

Sea $x^0 = (x_1^0, x_2^0, \cdots, x_n^0)$. Quiero obtener $x^1 = (x_1^1, x_2^1, \cdots, x_n^1)$.

El método de Jacobi consiste en:

1. Tomar un punto cualquiera
2. Tomar la primer ecuación y averiguar la primer coordenada para que de bien, suponiendo correcto el resto

Entonces, consideremos la primer ecuación del sistema:

$$a_{1,1} \cdot x_1 + a_{1,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{1,n} \cdot x_n = b_1$$

Dejo fijos los valores de $x_2, x_3, \cdots, x_n$ y elijo x_1 de tal forma que se cumpla que

$$x_1^1 = \frac{b_1 - a_{1,2} \cdot x_2 - a_{1,3} \cdot x_3 - \cdots - a_{1,n} \cdot x_n}{a_{1,1}}$$

Luego considero la segunda ecuación:

$$a_{2,1} \cdot x_1 + a_{2,2} \cdot x_2 + \cdots + a_{2,n} \cdot x_n = b_2$$

Y busco el segundo elemento para que se verifique:

$$x_2^1 = \frac{b_2 - a_{2,1} \cdot x_1 - a_{2,3} \cdot x_3 - \cdots - a_{2,n} \cdot x_n}{a_{2,2}}$$

En el i-ésimo paso:

$$x_i^1 = \frac{b_i - \displaystyle\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} a_{i,j} \cdot x_j}{a_{i,i}}$$

Observación 36. *Estoy asumiendo que los elementos de la diagonal son no nulos:* $\forall i : a_{i,i} \neq 0$

Algoritmo: Sea N la cantidad de iteraciones que voy a realizar.

[4]Una matriz se dice **rala** si tiene muchas entradas con 0.

Para $k = 1 \cdots N$

Para $i = 1 \cdots n$

$$x_i^k = \frac{b_i - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq i}}^{n} a_{i,j} \cdot x_j}{a_{i,i}}$$

end i

end k

Para hacer esto, voy a descomponer a la matriz A en la forma $A = D - L - U$, donde

- D es la diagonal de la matriz A.
- L es la mitad inferior de A, con todos sus valores cambiados de signo.
- U es la mitad superior de A, con todos sus valores cambiados de signo.

Entonces,

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b \\ (D - L - U) \cdot x &= b \\ D \cdot x - (L + U) \cdot x &= b \\ D \cdot x &= b + (L + U) \cdot x \\ x &= D^{-1} \cdot (b + (L + U) \cdot x) \\ x &= D^{-1} \cdot b + D^{-1} \cdot (L + U \cdot x) \end{aligned}$$

Luego,

$$\boxed{x^k = D^{-1} \cdot b + D^{-1} \cdot (L + U) \cdot x^{k-1}}$$

Esta es la forma matricial de expresar el algoritmo de Jacobi. Si converge cuando $k \to \infty$, entonces converge a la solución del sistema. Sin embargo, en principio nada me asegura que esto converga.

5.2 Método de Gauss-Seidel

El método de Gauss-Seidel opera en forma similar al de Jacobi. Sin embargo, se diferencian en que este último para generar un punto usa todo el vector como estaba en la iteración anterior. Gauss-Seidel en cambio para corregir el i-ésimo elemento de la k-ésima iteración, usa los valores ya encontrados de A hasta $i - 1$ y luego los de k. O sea, usa las coordenadas ya calculadas en lugar de las originales.

Escrito en forma de elementos, se calcula la i-ésima coordenada de la k-ésima iteración en la forma:

$$x_i^k = \frac{b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j} \cdot x_i^k - \sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j} \cdot x_i^{k-1}}{a_{i,i}}$$

Para expresarlo en forma matricial, nuevamente notamos $A = D - L - U$ y resolvemos:

$$\begin{aligned} A \cdot x &= b \\ (D - L - U) \cdot x &= b \\ \underbrace{(D - L)}_{\substack{\text{triangular} \\ \text{inferior}}} \cdot x &= b + \underbrace{U}_{\substack{\text{triangular} \\ \text{superior}}} \cdot x \end{aligned}$$

Luego,

$$\boxed{(D-L)\cdot x^k = b + U\cdot x^{k-1}}$$

5.2.1 Métodos generales

Tanto el método de Jacobi como el de Gauss-Seidel son de la forma:

$$X^k = T\cdot X^{k-1} + C$$

Jacobi:

$$x^k = \underbrace{D^{-1}\cdot b}_{C} + \underbrace{D^{-1}\cdot(L+U)}_{T}\cdot x^{k-1}$$

Gauss-Seidel:

$$x^k = \underbrace{(D-L)^{-1}\cdot b}_{C} + \underbrace{(D-L)^{-1}\cdot U}_{T}\cdot x^{k-1}$$

Cuando $k\to\infty$, $|x_k|\to x$.
$X^k = T\cdot x^{k-1} + C$
$X = T\cdot x + C \Leftrightarrow A\cdot x = b$

Proposición 37. *Sea el sistema $x = t\cdot x + C$. La sucesión $x^k = T\cdot x^{k-1} + C$ converge a la solución del sistema si y solo si $\rho(T) < 1$, independientemente de x^0.*

Demostración.
$\Leftarrow)$

$$\begin{aligned}
x^k &= T\cdot x^{k-1} + C\\
&= T\cdot\underbrace{(T\cdot x^{k-2} + C)}_{x^{k-1}} + C\\
&= T^2\cdot x^{k-2} + T\cdot C + C\\
&= T^2\cdot(T\cdot x^{k-3} + C) + T\cdot C + C\\
&= T^3\cdot x^{k-3} + T^2\cdot C + T\cdot C + C\\
&= \qquad \vdots\\
&= T^k\cdot x^0\cdot T^{k-1}\cdot C + T^{k-2}\cdot C + \cdots + T\cdot C + C\\
&= T^k\cdot x^0 + C\cdot\sum_{i=0}^{k-1} T^i
\end{aligned}$$

Como $\rho(T) < 1$, por la propiedad 34 si $k \longrightarrow \infty$ entonces

- $T^k \xrightarrow[k\to\infty]{} 0 \Longrightarrow T^k\cdot x^0 \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$
- $\displaystyle\sum_{i=0}^{k-1} T^i = \sum_{i=0}^{\infty} T^i = (I-T)^{-1}$ (por propiedad 35)

Llamo x al límite $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$. Considero entonces

$$\underbrace{\lim_{k\to\infty} x^k}_{x} = \lim_{k\to\infty} \cancel{T^k \cdot x^0} + \underbrace{\sum_{i=0}^{k-1} T^i}_{(I-T)^{-1}} \cdot C$$

$$x = 0 + (I-T)^{-1} \cdot C$$

$$(I-T) \cdot x = C$$

$$x - T \cdot x = C$$

$$\boxed{x = T \cdot x + C}$$

Entonces, si $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$ converge a algún lado, converge a la solución del sistema.

$\Rightarrow)$

Vamos a ver que la matriz es convergente, que es equivalente a que su radio espectral sea menor que 1. T es convergente $\Leftrightarrow \rho(T) < 1$.

O sea, tenemos que ver que

$$\lim_{k\to\infty} T^k = 0 \Leftrightarrow \forall z : \lim_{k\to\infty} T^k \cdot z = 0$$

Por hipótesis $x^k = T \cdot x^{k-1} + C$ converge a x (donde x es la solución del sistema, independientemente de x^0). Luego, defino que $x^0 = x - z$. Luego,

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} T^k \cdot z &= \lim_{k\to\infty} T^k \cdot (x - x^0) \\
&= \lim_{k\to\infty} T^{k-1} \cdot (T \cdot x - T \cdot x^0) \\
&= \lim_{k\to\infty} T^{k-1} \cdot (x \cancel{- c} - x^1 \cancel{+ c}) \\
&= \lim_{k\to\infty} T^{k-1} \cdot (x - x^1) \\
&= \lim_{k\to\infty} T^{k-2} \cdot (T \cdot x - T \cdot x^1) \\
&= \lim_{k\to\infty} T^{k-2} \cdot (x - x^2) \\
&= \qquad \vdots \\
&= \lim_{k\to\infty} T^0 \cdot (x - x^k) \\
&= \lim_{k\to\infty} (x - x^k)
\end{aligned}$$

Como $x^k \xrightarrow[k\to\infty]{} x$

$$\begin{aligned}
&= \lim_{k\to\infty} (x - x) \\
&= \lim_{k\to\infty} 0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Luego $\forall z \neq 0$, se cumple que

$$\begin{aligned} \lim_{k\to\infty} T^k \cdot z = 0 & \\ & \Rightarrow \lim_{k\to\infty} T^k = 0 \\ & \Rightarrow T \text{ converge} \\ & \boxed{\Rightarrow \rho(T) < 1} \end{aligned}$$

$\square$

El $\Leftrightarrow$ del teorema me da una condición necesaria y suficiente para que la serie converga a la solución.

Ahora para ver que los métodos de Jacobi y Gauss-Seidel convergen, tengo que ver si sus respectivas T's tienen $\rho(T) < 1$. O sea, quiero ver que propiedades tiene que cumplir A para que $\rho(T) < 1$.

5.3 Criterios de convergencia

Proposición 38. *Sea A una matriz estrictamente diagonal dominante. Entonces el método de Jacobi converge.*

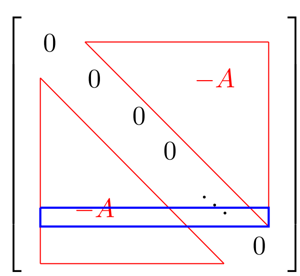
Demostración. Que el método de Jacobi converga es equivalente a que

$$\rho(D^{-1} \cdot (L + U)) < 1$$

Por la propiedad 32, yo se que $\forall \| \cdot \|$ inducida : $\rho(B) \leq \|B\|$. Luego, voy a intentar probar que $\|D^{-1} \cdot (L + U)\|_\infty < 1$.

$$\begin{aligned} \|D^{-1} \cdot (L + U)\|_\infty &= \max_{x:\|x\|_\infty = 1} \|(D^{-1} \cdot (L + U)) \cdot x\|_\infty \\ &= \max_{1\leq j\leq n} \sum_{j=1}^{n} \|(D^{-1} \cdot (L + U))_{i,j}\| = * \end{aligned}$$

Observemos que $(L + U)$ es una matriz que tiene valores de A cambiados de signo fuera de la diagonal y 0's en la diagonal. Entonces la norma de una fila en particular de $(L + U)$ resulta ser la suma de todos los valores, excepto la diagonal.

$(L + U) =$ 

Al considerar ahora el valor de la norma de esa fila en la matriz $D^{-1}(L + U)$, observamos que es la suma de todos los elementos que no están en la diagonal, pero dividido el valor del elemento de la diagonal. Como A es estrictamente diagonal dominante, sabemos que esto es menor o igual que 1.

$$= \max_{1\leq i\leq n} \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} \underbrace{\frac{|a_{i,j}|}{|a_{i,i}|}}_{<1}$$

$$< 1$$

Luego, $\|D^{-1}\cdot(L+U)\|_\infty < 1 \Rightarrow \rho(D^{-1}\cdot(L+U)) < 1 \Rightarrow$ converge. □

Proposición 39. *Sea A una matriz estrictamente diagonal dominante. Entonces el método de Gauss-Seidel converge.*

Demostración.

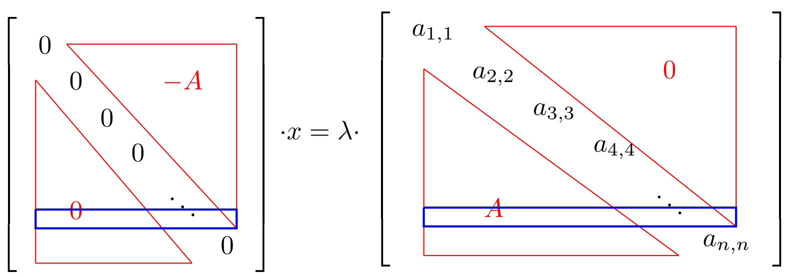
$$\rho(B) = \max_{\lambda \text{ autovalor de } A} |\lambda|$$

Vamos a demostrar que todos los autovalores de $T = (D-L)^{-1}\cdot U$ son menores que 1 en módulo.

Sea λ autovalor de T, o sea, existe $x \neq 0$ tal que $(D-L)^{-1}\cdot U\cdot x = \lambda\cdot x$

Como un autovector es una dirección y cualquier múltiplo de ella lo es, tomo aquel de norma infinito 1 ($\|x\|_\infty = 1$).

$$U\cdot x = \lambda(D-L)\cdot x$$



Si considero la i-ésima fila de ambos lados.

$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\cdot x_j = \lambda\cdot\sum_{j=1}^{i} a_{i,j}\cdot x_j \qquad \forall i \in [1,\cdots$$

$$-\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\cdot x_j - \lambda\cdot\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}\cdot x_j = \lambda\cdot a_{i,i}\cdot x_i \qquad \forall i \in [1,\cdots$$

$$|\lambda\cdot a_{i,i}\cdot x_i| = \left|\sum_{j=i+1}^{n} a_{i,j}\cdot x_j + \lambda\cdot\sum_{j=1}^{i-1} a_{i,j}\cdot x_j\right| \qquad \forall i \in [1,\cdots$$

Sea $x_{i_0} = \max_{1\leq i\leq n} |x_i|$. Como $\|x\|_\infty = 1$, entonces $x_{i_0} = 1$.

Tomo la ecuación instanciada en $i = i_0$:

$$\left|\lambda \cdot a_{i_0,i_0} \cdot \underbrace{x_{i_0}}_{1}\right| = \left|\sum_{j=i_0+1}^{n} a_{i_0,j} \cdot x_j + \lambda \cdot \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0,j} \cdot x_j\right|$$

$$|\lambda| \cdot |a_{i_0,i_0}| = \left|\sum_{j=i_0+1}^{n} a_{i_0,j} \cdot x_j + \lambda \cdot \sum_{j=1}^{i_0-1} a_{i_0,j} \cdot x_j\right| \leq \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| \cdot \underbrace{|x_j|}_{\leq 1} + \lambda \cdot \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}| \cdot \underbrace{|x_j|}_{\leq 1}$$

$$|\lambda| \cdot |a_{i_0,i_0}| \leq \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}| + |\lambda| \cdot \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|$$

$$|\lambda| \cdot \underbrace{\left(|a_{i_0,i_0}| - \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right)}_{\substack{(>0 \text{ pues } A \text{ es estrictamente} \\ \text{diagonal dominante})}} \leq \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|$$

$$|\lambda| \leq \frac{\displaystyle\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|}{\left(|a_{i_0,i_0}| - \displaystyle\sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right)}$$

Sabemos que A es estrictamente diagonal dominante. Luego,

$$|a_{i_0,i_0}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i_0}}^{n} |a_{i_0,j}|$$

$$|a_{i_0,i_0}| > \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|$$

$$|a_{i_0,i_0}| - \sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}| > \sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|$$

$$1 > \frac{\displaystyle\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|}{|a_{i_0,i_0}| - \displaystyle\sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|}$$

Con lo cual, podemos afirmar que

$$|\lambda| \leq \frac{\displaystyle\sum_{j=i_0+1}^{n} |a_{i_0,j}|}{\left(|a_{i_0,i_0}| - \displaystyle\sum_{j=1}^{i_0-1} |a_{i_0,j}|\right)} < 1$$

Entonces, $|\lambda| < 1$. Como λ es cualquier autovalor de A tengo, en particular, que $\rho(T) = \max_{\lambda} < 1$. Luego, el método de Gauss-Seidel converge. $\square$

Proposición 40. *Sea $\|\cdot\|$ una norma inducida. Si $\|T\| < 1$, entonces $x^k = T \cdot x^{k-1} + C$ converge y:*

1. $\|x - x^k\| \leq \|T\|^k \cdot \|x^0 - x\|$
2. $\|x - x^k\| \leq \dfrac{\|T\|^k}{1 - \|T\|} \cdot \|x^1 - x^0\|$

1. me está acotando mi distancia a la solución. No es realmente útil, pues desconozco $\|x^0 - x\|$.
2. me dice que cuanto más chico sea el radio espectral, es de suponer que más rápido converge.

5.4 Método de Direcciones conjugadas

Quiero resolver el sistema $A \cdot x = b$, donde A es una matriz simétrica definida positiva:

- $A = A^t$
- $\forall x \neq 0 : x^t \cdot A \cdot x > 0$

Sea F una función $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$. Para encontrar sus puntos críticos, igualo su gradiente a $\nabla F = 0$.

$$\nabla F = \left(\frac{\partial F}{\partial x_1}, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \cdots, \frac{\partial F}{\partial x_n} \right)$$

Se define el **Hessiano** de F de la forma:

$$HF(x) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial^2 x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial F}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial^2 x_2} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial F}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial F}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial F}{\partial^2 x_n} \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \text{determinante positivo} \Rightarrow x \text{ mínimo} \\ \text{determinante negativo} \Rightarrow x \text{ máximo} \\ \text{determinante nulo} \Rightarrow \text{no provee información} \end{cases}$$

Definimos ahora una función $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de la forma:

$$\begin{aligned} Q(x) &= x^t \cdot A \cdot x - 2 \cdot x^t \cdot b \\ &= x_1 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{1,j} \cdot x_j + x_2 \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{2,j} \cdot x_j + \cdots + x_n \cdot \sum_{j=1}^{n} a_{n,j} \cdot x_j - 2 \cdot x_1 \cdot b_1 - 2 \cdot x_2 \cdot b_2 - \cdots - 2 \cdot x_n \cdot b_n \end{aligned}$$

Supongamos que quiero hallar un máximo o mínimo de esa función Q. Luego, necesito encontrar su gradiente $\nabla Q(x) =?$

$$\frac{\partial Q}{\partial x_1} = 2 \cdot a_{1,1} \cdot x_1 + \sum_{j=2}^{n} (a_{1,j} \cdot x_j) + a_{2,1} \cdot x_2 + a_{3,1} \cdot x_3 + \cdots + a_{n,1} \cdot x_n - 2 \cdot b_1$$

$$\vdots$$

$$\frac{\partial Q}{\partial x_i} = a_{1,i} \cdot x_i + a_{2,i} \cdot x_i + \cdots + a_{i-1,i} \cdot x_{i-1} + 2 \cdot a_{i,i} \cdot x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_{i,j} \cdot x_j) + a_{i+1,i} \cdot x_{i+1} + \cdots + a_{n,1} \cdot x_n - 2 \cdot b_i$$

Observemos que

$$\begin{aligned}
\frac{\partial Q}{\partial x_i} &= 2 \cdot a_{i,i} \cdot x_i + \underbrace{\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_{i,j} \cdot x_j) + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_{j,i} \cdot x_j)}_{\substack{\text{Como } A \text{ es simétrica} \\ \text{son iguales}}} - 2 \cdot b_i \\
&= 2 \cdot a_{i,i} \cdot x_i + 2 \cdot \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_{i,j} \cdot x_j) - 2 \cdot b_i \\
&= 2 \cdot \left(a_{i,i} \cdot x_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} (a_{i,j} \cdot x_j) - b_i \right) \\
&\boxed{= 2 \cdot \left(\sum_{j=1}^{n} (a_{i,j} \cdot x_j) - b_i \right)}
\end{aligned}$$

Luego, se puede plantear el cálculo del gradiente de Q en la forma:

$$2 \cdot \left(\begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{bmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \right)$$

$$\boxed{\nabla Q = 2 \cdot (A \cdot x - b)}$$

Como quiero máximos de Q necesito

$$\begin{aligned}
\nabla Q &= 0 \\
2 \cdot (A \cdot x - b) &= 0 \\
A \cdot x - b &= 0 \\
A \cdot x &= b
\end{aligned}$$

O sea, que hallar las soluciones del sistema de ecuaciones equivale a hallar los puntos críticos de $Q(x)$.
El hessiano de $Q(x)$ es $2 \cdot A$, que es positivo (pues A es definido positivo). O sea, el punto crítico es un mínimo.
En conclusión, si A es simétrica definida positiva,

$$A \cdot x = b \Leftrightarrow x \text{ es mínimo de } Q$$

5.4.1 Algoritmo de direcciones conjugadas (o de descenso)

Sea x^0 un punto inicial. Se plantea el siguiente método iterativo (genera una sucesión que es de esperar que converga a la solución):
$x^i = x^{i-1} + \alpha_{i-1} \cdot d^{i-1}$.
donde

- α_{i-1} es la cantidad de pasos a hacer.
- d^{i-1} es la dirección hacia donde moverme.
- x^{i-1} es un punto anterior.

Cálculo de la cantidad de iteraciones

$$\begin{aligned}
Q(x+\alpha \cdot d) &= (x+\alpha \cdot d)^t \cdot A \cdot (x+\alpha \cdot d) - 2 \cdot (x+\alpha \cdot d)^t \cdot b \\
&= x^t \cdot A \cdot x + \alpha \cdot d \cdot A \cdot x + \alpha \cdot d^t \cdot A \cdot x + \alpha^2 \cdot d^t \cdot A \cdot d - 2 \cdot x^t \cdot b - 2 \cdot \alpha \cdot d^t \cdot b \\
&= \alpha^2 \cdot \underbrace{d^t \cdot A \cdot d}_{A} + \alpha \cdot \underbrace{(x^t \cdot A \cdot d + d^t \cdot A \cdot x - 2 \cdot d^t \cdot b)}_{B} + \underbrace{x^t \cdot A \cdot x - 2 \cdot x^t \cdot b}_{C} \\
&= \alpha^2 \cdot A + \alpha \cdot B + C
\end{aligned}$$

Como se puede observar, esto es una cuadrática cuyo parámetro principal A es positivo (pues A es definida positiva). Luego, la función tiene un mínimo.

$$= \alpha^2 \cdot d^t \cdot A \cdot d + 2 \cdot \alpha \cdot d^t(A \cdot x - b) + x^t \cdot A \cdot x - 2 \cdot x^t \cdot b$$

Para sacar le mínimo, calculo el punto crítico de esto, derivando con respecto a α e igualando a 0:

$$\frac{\partial Q(x+\alpha \cdot d)}{\partial \alpha} = 2 \cdot \alpha \cdot d^t \cdot A \cdot d + 2 \cdot d^t \cdot (A \cdot x \cdot -b) = 0$$

$$\boxed{\alpha = \frac{d^t \cdot (b - A \cdot x)}{d^t \cdot A \cdot d}}$$

Esto me da la forma de α para el algoritmo.

Cálculo de la dirección

Definición 41. *$x_1, \cdots, x_n$ son direcciones* ***A-conjugadas*** *sii $x_i^t \cdot A \cdot x_j = 0 \forall i \neq j$.*

Proposición 42. *Sean $d^0 \cdots d^{n-1}$ direcciones A-conjugadas. Sea x^0 el punto inicial. Definiendo*

$$x^k = x^{k-1} + \alpha_{k-1} \cdot d^{k-1}$$

con $\alpha = \dfrac{(d^{k-1})^t \cdot (b - A \cdot x^{k-1})}{(d^{k-1})^t \cdot A \cdot d^{k-1}}$, resulta que $A \cdot x^n = b$.

Demostración. $d^0 \cdots d^{n-1}$ por ser A-conjugadas son linealmente independientes. Supongamos que no. Entonces

$$\begin{aligned}
d^0 &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot d^i \\
A \cdot d^0 &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot A \cdot d^i \\
(d^0)^t \cdot A \cdot d^0 &= \sum_{i=0}^{n-1} \lambda_i \cdot \underbrace{(d^0)^t \cdot A \cdot d^i}_{\substack{= 0 \text{ pues son} \\ \text{A-conjugadas}}} \\
(d^0)^t \cdot A \cdot d^0 &= 0
\end{aligned}$$

y esto es absurdo, porque A es definida positiva.

Yo quiero probar que

$$\begin{aligned} A \cdot x^n = b &\Leftrightarrow A \cdot x^n - b = 0 \\ &\Leftrightarrow (A \cdot x^n - b)^t \cdot d^i = 0 \qquad \forall i \end{aligned}$$

Quiero eso pues si ul vector es ortogonal a una base $d^0, \cdots d^{n-1}$ entonces es el vector nulo.
Sin perder generalidad, supongo que $(d^i)^t \cdot A \cdot d^i = 1$. Si no lo es, normalizo.
(????) Falta un cacho de la demostración □

¿Cómo genero las direcciones A-conjugadas?:
Sea

$$\begin{aligned} r^k &= b - A \cdot x^k \\ d^k &= -r^k + \beta_k \cdot d^{k-1} \end{aligned}$$

con

$$\beta_k = \frac{(r^k)^t \cdot A \cdot d^{k-1}}{(d^{k-1})^t \cdot A \cdot d^{k-1}} \qquad \text{y} \qquad d_0 = -r_0$$

Proposición 43. *1.* $(r^k)^t \cdot d^i = 0 \qquad \forall i \in [0, \cdots, k-1]$

2. $< r^0, \cdots, r^k > = < r^0, A \cdot r^0, \cdots, A^k \cdot r^0 >$

3. $< d^0, \cdots, d^k > = < r^0, A \cdot r^0, \cdots, A^k \cdot r^0 >$

4. $(d^k)^t \cdot A \cdot d^i = 0 \qquad \forall i \in [0, \cdots, k-1]$

1. *me dice que el residuo es ortogonal a las direcciones por las que vine caminando.*
4. *me dice que la dirección que me estoy generando es A-conjugada con todas las que ya generé.*

6 Integración numérica

La idea del proceso de integración numérica es aproximar el valor real de una integral por una sumatoria (cuadratura numérica)

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \approx \sum_{i=0} na_i \cdot f(x_i)$$

Sea P_n el polinomio interpolante a $f(x)$ de orden n y sea E_n el error cometido al realizar la interpolación:

$$f(x) = P_n(x) + E_n(x)$$
$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b P_n(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b E_n(x)\,\mathrm{d}x$$

6.1 Polinomio interpolante de grado 1: Método de trapecios

Fórmula:

$$\boxed{(b-a)\left(\frac{f(b)+f(a)}{2}\right)}$$

Error:

$$\boxed{\frac{f''(c)(a-b)^3}{12}}$$

6.2 Polinomio interpolante de grado 2: Método de Simpson

Fórmula:

$$\boxed{h \cdot \left(\frac{f(x_0 + 4 \cdot f(x_1) + f(x_2)}{3}\right)}$$

Error:

$$\boxed{\frac{-h^5}{90} \cdot f^{(IV)}(\beta)}$$

6.3 Reglas compuestas

La idea es aplicar las reglas en subintervalos más pequeños, todos equidistantes para mejorar la aproximación.

6.3.1 Regla compuesta de Simpson

Fórmula:

$$\boxed{\sum_{j=1}^{n/2} \frac{h}{3} \cdot \left(f(x_{2\cdot j-2}) + 4 \cdot f(x_{2\cdot j-1}) + f(x_{2\cdot j})\right)}$$

Error:

$$\boxed{\frac{-h^5}{90} \cdot \frac{n}{2} \cdot f^{(IV)}(\beta)}$$

6.3.2 Regla compuesta de Trapecios

Fórmula:

$$\boxed{\frac{h}{3} \cdot \left(f(x_0) + 2 \cdot \sum_{j=1}^{n-1} f(x_j) + f(x_n)\right)}$$

Error:

$$\boxed{\frac{-h^2}{12} \cdot (b-a) \cdot f''(\mu)}$$

6.4 Métodos adaptativos

Los métodos adaptativos permiten aplicar reglas compuestas pero haciendo refinamiento más fino en zonas donde sea necesario para poder acotar el error de ε.

7 Ceros de funciones

Definición 44. *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $x^* \in \mathbb{R}$ tal que $f(x^*) = 0$. A x^* se lo llama un **cero** o **raíz** de f.*

Los métodos de búsqueda de ceros de funciones generan sucesiones que bajo ciertas condiciones convergen a un cero de la función.

$$\{x_n\} \xrightarrow[x \to \infty]{} x^*$$

Definición 45. *Sean $\beta_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ y $\alpha_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \alpha$. Se dice que α_n tiene **orden de convergencia** $O(\beta_n)$ sii existe $k \in \mathbb{R}_{>0}$ tal que $|\alpha_n - \alpha| \leq k \cdot |\beta_n|$*

- *Si $|x_{n+1} - x^*| \leq c \cdot |x_n - x^*| \Rightarrow$ convergencia lineal.*
- *Si $|x_{n+1} - x^*| \leq c \cdot |x_n - x^*|^2 \Rightarrow$ convergencia cuadrática.*
- *Si $|x_{n+1} - x^*| \leq c \cdot |x_n - x^*|^p (p \geq 1) \Rightarrow$ convergencia de orden p.*
- *Si $\dfrac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^p} = c \neq 0 \Rightarrow$ convergencia de orden p.*

Este tipo de métodos iterativos requieren algún criterio de parada. Algunos posibles son:

- Número máximo de iteraciones.
- $|x_n - x_{n-1}| < \varepsilon$.
- $\dfrac{|x_n - x_{n-1}|}{|x_n|} < \varepsilon$.
- $|f(x_n)| < \varepsilon$.
- $|f(x_n) - f(x_{n-1})| < \varepsilon$.
- $\dfrac{|f(x_n) - f(x_{n-1})|}{|f(x_n)|} < \varepsilon$

Todos estos métodos son heurísticos. No me aseguran nada sobre la convergencia.

7.1 Método de Bisección

Requiere:

- $f : [a, b] \to \mathbb{R}$
- f continua
- $f(a) \cdot f(b) < 0$

El algoritmo del método de bisección es:

Para $i = 1 \cdots n$
  $c = \frac{a+b}{2}$
  Si $f(c) = 0$
    Devolver c
  Sino
    Si $f(c) \cdot f(a) < 0$
      $a = a$
      $b = c$
    Sino

Si $f(c) \cdot f(b) < 0$
$a = c$
$b = b$

Observemos que se escribe como una sucesión pues $|p_n| \xrightarrow[n\to\infty]{} x^*$. Me va generando una sucesión c_n de puntos que se acercan a la raíz.

Proposición 46. *El método de bisección converge a un cero de f. Su orden de convergencia es **lineal**, porque me quedo con la mitad en cada paso*

Demostración.

$$\begin{aligned} |p_n - x^*| &\leq \frac{1}{2}|b_n - a_n| \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^2 |b_{n-1} - a_{n-1}| \\ &\vdots \\ &\leq \left(\frac{1}{2}\right)^n + 1|b_0 - a_0| \end{aligned}$$

Entonces,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_{n+1} - x^*|}{|x_n - x^*|^1} = \lim_{n\to\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} |b_0 - a_0|}{\left(\frac{1}{2}\right)^n |b_0 - a_0|} = \frac{1}{2} \neq 0$$

Luego, su orden de convergencia es 1 (o sea, lineal). □

7.2 Método de punto fijo

Definición 47. *Dado $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, p es un **punto fijo** de g si $g(p) = p$.*

Existe una equivalencia entre encontrar puntos fijos de una función y ceros de otra. Si defino la función $g(x) = f(x) + x$ y le hallo un punto fijo p, encontré un cero de la función f.

Proposición 48. *Sean $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ y $f \in C[a,b] \to [a,b]$. Entonces g tiene un punto fijo en $[a,b]$. Si además $\forall x \in [a,b] : |g'(x)| \leq k < 1$, el punto fijo es único.*

Demostración. Si $g(a) = a \Rightarrow a$ es punto fijo y no tengo nada que demostrar.
Si $g(b) = b \Rightarrow b$ es punto fijo y no tengo nada que demostrar.
Si $g(a) \neq a$ y $g(b) \neq b \Rightarrow g(a) > a$ y $g(b) < b$.
Luego, sea $h(x) = g(x) - x$, que es continua por ser g continua.

$$\left.\begin{aligned} h(a) = g(a) - a > 0 \\ h(b) = g(b) - b < 0 \end{aligned}\right\} \exists c \in (a,b) / h(c) = 0$$
$$g(c) - c = 0$$
$$g(c) = c$$

Para la segunda parte, supongamos que p y q son dos puntos fijos de g. Luego, por teorema del valor medio, para algún $r \in (a, b)$

$$\begin{aligned} \frac{g(p) - g(q)}{p - q} &= g'(r) \\ \frac{p - q}{p - q} &= g'(r) \\ 1 &= g'(r) \end{aligned}$$

Absurdo pues, por hipótesis, todo $r \in (a, b)$ verifica que $g'(r) < 1$. □

Una sucesión de punto fijo consiste en

$$p_{n+1} = g(p_n)$$

utilizando un p_0 inicial.

Proposición 49. *Si g es continua y $p_n = g(p_{n-1})$ sucesión de punto fijo converge a algo, entonces converge a un punto fijo de g.*

Sin embargo, esto no nos asegura que converga.

Proposición 50. *Sea $g \in C[a, b] \to [a, b]$ con $|g'(x)| \leq k < 1$ para todo $x \in [a, b]$. Luego, $\forall p_0 \in [a, b]$, la sucesión de punto fijo $p_{n+1} = g(p_n)$ converge al único punto fijo p.*

Demostración.

- $p_{n+1} = g(p_n) \in [a, b]$ pues $p_0 \in [a, b]$ y $g : [a, b] \to [a, b]$
- $\exists p$ único punto fijo (por lema 48)
- $|p_{n+1} - p_n| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$. Esto se debe a que:

$$\begin{aligned} |p_{n+1} - p| &= |g(p_n) - g(p)| \\ &= |g'(r)| \cdot |p_n - p| && \text{(teorema del valor medio)} \\ &\leq k \cdot |p_n - p| \\ &< k \cdot |g(p_{n-1}) - g(p)| \\ &< k \cdot |g'(r)| \cdot |p_{n-1} - p| && \text{(teorema del valor medio)} \\ &< k^2 \cdot (p_{n-1} - p) \\ &\vdots \\ &< k^{n+1} \cdot (p_0 - p) \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 && \text{(pues } k < 1\text{)} \end{aligned}$$

□

Proposición 51. *Sea $g \in C^n$ tal que:*

- $g(p) = p$ *(p es punto fijo de g)*
- $g^{(r)}(p) \neq 0$
- $g^{(r-1)}(p) = g^{(r-2)}(p) = \cdots = g'(p) = 0$

Entonces, la sucesión de punto fijo $p_{n+1} = g(p_n)$ tiene orden r.

Demostración. Escribamos el polinomio de taylor de g al rededor de p.

$$
\begin{aligned}
g(x) &= g(p) + \cancel{g'(p) \cdot (x-p)} + \cancel{\frac{g''(p)}{2} \cdot (x-p)^2} + \cdots + \cancel{\frac{g^{(r-1)}(p)}{(r-1)!} \cdot (x-p)^{r-1}} + \frac{g^{(r)}(\zeta)}{r!}(x-p)^r \\
&= g(p) + \frac{g^{(r)}(\zeta)}{r!}(x-p)^r
\end{aligned}
$$

Evaluando en $x = p_n$

$$
\begin{aligned}
g(p_n) &= g(p) + \frac{g^{(r)}(\zeta_n)}{r!}(p_n - p)^r \\
g(p_n) - g(p) &= \frac{g^{(r)}(\zeta_n)}{r!}(p_n - p)^r \\
|g(p_n) - g(p)| &= \left| \frac{g^{(r)}(\zeta_n)}{r!}(p_n - p)^r \right|
\end{aligned}
$$

Como $|g(p_n) - g(p)| = |p_{n+1} - p|$

$$
\begin{aligned}
|p_{n+1} - p| &= \frac{|g^{(r)}|(\zeta_n)}{r!}|p_n - p|^r \\
\frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^r} &= \frac{|g^{(r)}|(\zeta_n)}{r!}
\end{aligned}
$$

Tomando límite

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{|p_{n+1} - p|}{|p_n - p|^r} = \lim_{n\to\infty} \frac{|g^{(r)}|(\zeta_n)}{r!} = \frac{|g^{(r)}|(p)}{r!} \neq 0
$$

Luego, el orden de convergencia es r. □

7.2.1 Método de Newton

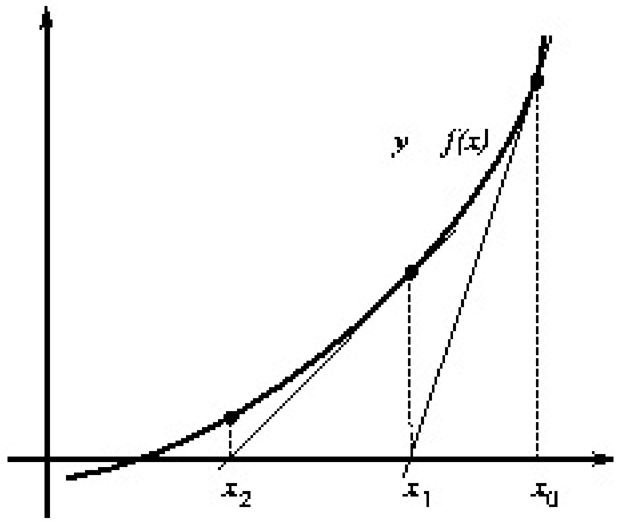
Hasta ahora siempre asumimos que nos daban la función de punto fijo $g(x)$. Ahora se plantea el problema de cómo elegirla. Defino entonces que, dada f tal que $f'(x) \neq 0$,

$$
g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}
$$

que, si converge, converge a la raíz de f en forma **cuadrática**. A este método se lo llama **método de Newton**, que sale de buscar donde se anula la tangente con la fórmula $f(x_n) + f'(x_n)(x - x_n) = 0$.

Proposición 52. *Sea $f \in C^2[a,b]$. Se $p \in [a,b]$ tal que $f(p) = 0$ y $f'(p) \neq 0$. Entonces, existe δ tal que si $p_0 \in [p-\delta, p+\delta]$, entonces el método de newton converge al cero de f. Formalmente, la sucesión $p_{n+1} = p_n - \dfrac{f(p_n)}{f'(p_n)}$ converge a p.*

Gráficamente:



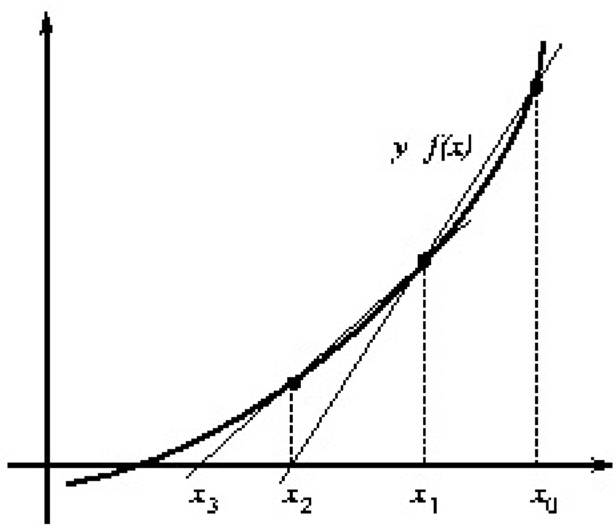
Proposición 53. *Sea $f \in C^2$, creciente, convexa y con cero. Entonces, el cero es único y Newton siempre converge.*

7.3 Método de la secante

La idea del método de la secante es ir tomando de a dos puntos y ver buscando en qué momento se anula la secante. Para esto, se toma la siguiente sucesión:

$$x_n = x_{n-1} - \frac{f(x_{n-1}) \cdot (x_{n-1} - x_{n-2})}{f(x_{n-1}) - f(x_{n-2})}$$

Gráficamente:



Ventajas:

- Convergencia superlineal ($\frac{1+\sqrt{5}}{2}$).
- Criterios menos complicados que Newton.

Problemas:

- No siempre converge.
- Pierdo la convergencia cuadrática.
- Divido por una resta, lo que agrega mucho error.

7.4 Método de regula falsi

El método de regula falsi es una combinación de bisección y método de la secante. Aplica el método de la secante y se queda con el x_i que hace que $f(x_i) \cdot f(x_{i+1}) < 0$ y aplica secante nuevamente.

La desventaja que tiene es que el orden de convergencia es lineal.

8 Cuadrados Mínimos

Supongamos que tenemos una tabla de valores:

X	Y
x_0	y_0
x_1	y_1
x_2	y_2
$\vdots$	$\vdots$
x_n	y_n

En lugar de interpolar $(\forall i \in [0, \cdots, n] : P(x_i) = y_i)$ queremos buscar una función que se le parezca. Buscamos en una familia F de funciones la función $f \in F$ que "más se parezca" a los valores de tabla.

La pregutna obvia es: ¿qué quiere decir "se parezca"?

8.1 Opciones de criterios

8.1.1 Criterio corollary

Una opción es buscar la función que minimice el máximo error cometido:

$$\min_{f \in F} \left(\max_{1 \leq i \leq n} |f(x_i) - y_i| \right)$$

A este criterio se lo llama **minimax**. El problema que tiene es que es demasiado sensible a *outliers*. O sea a tener un punto particular con mucho error.

8.1.2 Suma de errores

Otra alternativa es considerar no el máximo sino la suma de los errores:

$$\min_{f \in F} \sum_{i=1}^{n} |f(x_i) - y_i|$$

Si bien esto tiene la ventaja de que reduce la sensibilidad a *outliers*, tiene el problema de que es necesario encontrar el mínimo de una función módulo, que es problemático porque no es derivable en todo punto.

8.1.3 Cuadrados Mínimos

Para resolver ese último problema, podemos considerar la suma de los cuadrados de los errores:

$$\min_{f \in F} \sum_{i=1}^{n} (f(x_i) - y_i)^2$$

9 Bibliografía

- Apuntes de Javier Martínez.
- Apuntes de Julián Sackmann.