华中科技大学 2020～2021 学年第一学期

"　矩阵论　"考试试卷

考试方式：闭卷　　考试日期：2020 年 11 月 30 日　考试时长：150 分钟

专业班级：________________　学号：________________　姓名：__________

题号	一	二	三	四	五	六	七	八			总分
分数											

$(x_1,x_2,x_3)^T-(1-k)\frac{1}{3}(x_1+x_2+x_3)(1,1,1)^T$

分　数	
评卷人	

一、　填空题（15 分）（每小题 3 分，共 5 小题）

1. 设方阵$A \in C^{4\times 4}$的最小多项式为$m_A(\lambda)=(\lambda-1)^k(\lambda-2)$。则当 $k=$ __1__ 时, A 可相似对角化。

$T(e_1)=(1,0,0)^T-(1-k)\frac{1}{3}(1,1,1)^T$
$=(\frac{2+k}{3},\frac{k-1}{3},\frac{k-1}{3})^T$
$T(e_2)=(\frac{k-1}{3},\frac{2+k}{3},\frac{k-1}{3})^T$

2. $\mathbf{R}^3$ 中的线性变换 $\mathrm{T}(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{x}-(1-k)(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\boldsymbol{u}$,其中是 k 常数，$\boldsymbol{u}=\frac{1}{\sqrt{3}}(1,1,1)^T$ ，则线性变换 T 的 3 个特征值为 __3, 3, 3k.__ 。

3

$A=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2+k & k-1 & k-1\\ k-1 & 2+k & k-1\\ k-1 & k-1 & 2+k\end{pmatrix}$

$\begin{vmatrix}\lambda-2-k & 1-k & 1-k\\ 1-k & \lambda-2-k & 1-k\\ 1-k & 1-k & \lambda-2-k\end{vmatrix}$

$\begin{vmatrix}\lambda-2-k & 1-k & 1-k\\ 0 & \lambda-3 & 3-\lambda\\ 1-k & 1-k & \lambda-2-k\end{vmatrix}$

$\begin{matrix}\lambda-2-k & 2-2k & 1-k\\ 0 & 0 & 3-\lambda\\ 1-k & \lambda-1-2k & \lambda-2-k\end{matrix}$

$A^HA=\begin{bmatrix}2&4\\1&2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2&1\\4&2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}20&10\\10&5\end{bmatrix}$

$|\lambda I-A^HA|=\begin{vmatrix}\lambda-20&-10\\-10&\lambda-5\end{vmatrix}=(\lambda-20)(\lambda-5)-100$

3. 矩阵$A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 4 & 2\end{bmatrix}$的奇异值为 __0, 5,__ 。

4. 设矩阵$A=\begin{bmatrix}-1 & 0 & 2\\ 3+i & 5 & 1+i\\ 2 & i & 2\end{bmatrix}$，则 $\|A\|_1=$ ~~$\sqrt{10}+3$~~ 。

5. $A=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}7 & -2\\ 2 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 11 & 15\\ 0 & 2 & 17\\ 0 & 0 & 3\end{bmatrix}$，则 $\mathrm{tr}(A\otimes B)=$ __18__ 。

分　数	
评卷人	

二、　（15 分）设 T(A)=PA，$\forall A \in \mathbf{R}^{2\times 2}$，这里 $P=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$。求线性变换 T 在 $\mathbf{R}^{2\times 2}$ 的自然基 $E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}$下的矩阵 B 及 N(T) 。

$T(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = P(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

$T(E_{11}) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = E_{11}\cdot E$

$T(E_{12}) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = E_{12}\cdot E$

$T(E_{21}) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \cancel{E_{21}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}\ E_{11}$

$T(E_{22}) = \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix} = \cancel{E_{22}\begin{bmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{bmatrix}}\ E_{12}$

$T(E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22}) = (E_{11}, E_{12}, E_{21}, E_{22})$

N(A)

Ax=0

R(A)

$N(T) = N(P)$

$Px = 0$ $\quad \begin{bmatrix}1 & 1\\ 0 & 0\end{bmatrix}$ $\quad x = k\begin{bmatrix}-1\\ 1\end{bmatrix}$

$N(T) = \{k[-1,1]^T \mid k \in R\}$

分　数	
评卷人	

三、　（15 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2&-1&-1\\2&-1&-2\\-1&1&2\end{bmatrix}$,

(1)写出其 Jordan 标准型 J_A 以及相应的相似变换矩阵 P 使得 $P^{-1}AP=J_A$。

$$|\lambda I-A|=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\-2&\lambda+1&2\\1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&1\\0&\lambda-1&2\lambda-2\\1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-2&1&-1\\0&\lambda-1&0\\1&-1&\lambda\end{vmatrix}$$

$$=(\lambda-1)[\lambda(\lambda-2)+1]$$

$$=(\lambda-1)^3$$

$$\begin{pmatrix}-1&1&1&0\\-2&2&2&0\\1&-1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&-1&-1&0\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

$x_1=x_2+x_3$

$x_2=x_2$

$x_3=\quad x_3$

$x=k_1\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}+k_2\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\to$ 2个若当块

$(A-\lambda_1 I)\alpha_1=0$

$(A-\lambda_1 I)\beta_2=\alpha_1$

$(A-\lambda_1 I)\beta_3=\beta_2$

取 $\alpha_1=(1,1,0)$、$\alpha_2=(1,0,1)$ 均不能产生 Jordan 链

取 $\alpha=k_1\alpha_1+k_2\alpha_2$.

$(A-I)\beta=\alpha$.

$$\left(\begin{array}{ccc|c}-1&1&1&k_1+k_2\\-2&2&2&k_1\\1&-1&-1&k_2\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}-1&1&1&k_1+k_2\\0&0&0&k_1+2k_2\\0&0&0&0\end{pmatrix}$$

取 $k_1=2$　$k_2=-1$　可得 $\beta=(1,0,0)^T$

$$P=(\alpha_1,\alpha,\beta)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}$$

$$J_A=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&1\\0&0&1\end{pmatrix}$$

(2)求解微分方程组 $\boldsymbol{x}'(t) = A\,\boldsymbol{x}(t)$，$\boldsymbol{x}(0) = \begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$。

$f(A)=Pf(J)P^{-1}$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&2&0&0&1&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&0&\frac12&0\\1&-1&0&0&0&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{r_3-r_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&1&1&1&0&0\\0&1&0&0&\frac12&0\\0&-2&-1&-1&0&1\end{array}\right)\xrightarrow[r_3+2r_2]{r_1-r_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&1&1&-\frac12&0\\0&1&0&0&\frac12&0\\0&0&-1&-1&1&1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[-r_3]{r_1+r_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&\frac12&1\\0&1&0&0&\frac12&0\\0&0&1&1&-1&-1\end{array}\right)$$

定理5.13.

$$\begin{cases}x'(t)=Ax(t)\\x(t_0)=C_{n\times1}\end{cases}$$

$x(t)=e^{A(t-t_0)}x(t_0)$

$$f(A)=\begin{pmatrix}1&1&1\\0&2&0\\1&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}f(1)&0&0\\0&f(1)&f'(1)\\0&0&f(1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac12&1\\0&\frac12&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}f(1)&f(1)&f'(1)+f(1)\\0&2f(1)&2f'(1)\\f(1)&-f(1)&-f'(1)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&\frac12&1\\0&\frac12&0\\1&-1&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}f'(1)+f(1)&-f'(1)&-f'(1)\\2f'(1)&f(1)-2f'(1)&-2f'(1)\\-f'(1)&f'(1)&f(1)+f'(1)\end{pmatrix}$$

令 $f(z)=e^{tz}$　$f(1)=e^t$　$f'(1)=te^t$

$$e^{At}=f(A)=\begin{pmatrix}te^t+e^t&-te^t&-te^t\\2te^t&e^t-2te^t&-2te^t\\-te^t&te^t&e^t+te^t\end{pmatrix}$$

$$x(t)=\begin{pmatrix}te^t+e^t&-te^t&-te^t\\2te^t&e^t-2te^t&-2te^t\\-te^t&te^t&e^t+te^t\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$$

$$=\begin{pmatrix}e^t-2te^t\\2e^t-4te^t\\e^t+2te^t\end{pmatrix}$$

分　数	
评卷人	

四、　（15 分）计算矩阵 $A=\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$ 的奇异值(SVD)分解 $A=U\sum V^H$(请给出矩阵U，$\sum$，V 的具体形式)。

解 $A^HA=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 1 & -1\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -1 & 0\\ -1 & 2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$　　$\Sigma=\begin{bmatrix}\sqrt{3} & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}$

$|\lambda I-A^HA|=\begin{vmatrix}\lambda-1 & 1 & 0\\ 1 & \lambda-2 & 1\\ 0 & 1 & \lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)[(\lambda-2)(\lambda-1)-1]-[\lambda-1]$

$=(\lambda-1)[(\lambda-2)(\lambda-1)-2]$

$=(\lambda-1)[\lambda^2-3\lambda]$

$=(\lambda-1)(\lambda-3)\lambda$

当$\lambda=3$

$\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 1 & 0 & 0\\ 1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & -1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$x_1=x_3$
$x_2=-2x_3$
$x_3=x_3$　　$\alpha_1=\begin{pmatrix}1\\ -2\\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda=1$

$\left(\begin{array}{ccc|c}0 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{array}\right)\to\begin{pmatrix}1 & -1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$x_1=-x_3$
$x_2=0$
$x_3=x_3$　　$\alpha_2=\begin{pmatrix}-1\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$

$\lambda=0$

$\begin{pmatrix}-1 & 1 & 0 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & -1 & 1 & 0\\ 1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & -2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0 & -1 & 0\\ 0 & 1 & -1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0\end{pmatrix}$

$x_1=x_3$
$x_2=x_3$
$x_3=x_3$　　$\alpha_3=\begin{pmatrix}1\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$

$u_1=\dfrac{AV_1}{\sigma_1}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\begin{bmatrix}-\frac{3}{\sqrt{6}}\\ \frac{3}{\sqrt{6}}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$　　$u_2=\dfrac{AV_2}{\sigma_2}=\begin{bmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}}\end{bmatrix}$

$V=\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ -\frac{2}{\sqrt{6}} & 0 & \frac{1}{\sqrt{3}}\\ \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{3}}\end{pmatrix}$　　$U=\begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}$

分　数	
评卷人	

五、　（15 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$，向量 $\boldsymbol{b}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}$。计算不相容方程组 $Ax=b$ 的最佳最小二乘解。

解：

$$A^HA=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 1\\ 2 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}5 & 1\\ 1 & 2\end{bmatrix}$$

$$(A^HA)^{-1}=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}$$

$$A^+=(A^HA)^{-1}A^H$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}2 & -1\\ -1 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 1 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}1 & 4 & -1\\ 4 & -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}$$

$$x_0=A^+b$$

$$=\frac{1}{9}\begin{bmatrix}8\\5\end{bmatrix}$$

分　数	
评卷人	

六、 (7 分) 矩阵 $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$，$I$ 是单位矩阵，证明：对任意的常数$\alpha > 0$，下面的不等式成立

$$\|\underbrace{(\alpha I + A^H A)^{-1}}_{B}\underbrace{A^H}_{C}\|_2 \le \frac{1}{\sqrt{2\alpha}}$$

$$\frac{(\alpha I + A^H A)^{-1} A^H A ((\alpha I + A^H A)^{-1})^H}{A[(\alpha I + A^H A)^{-1}]^H(\alpha I + A^H A)^{-1} A^H}$$

$$\le \frac{1}{\alpha}$$

$$\|BC\| \le \|B\|_2\|C\|_2$$

$$\rho\left(\frac{1}{\lambda+\alpha}\right) \cdots \frac{1}{\lambda+\alpha}$$

分　数	
评卷人	

七、　（8 分）设$A \in R^{m\times n}$，$rank(A) = 1$，证明 $A^+ = \frac{1}{a}A^T$，其中 $a = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n}|a_{ij}|^2$

$A = BC$

$B: m\times 1$

$C: 1\times n$

$A^+ = V\Sigma^{-1}U^H$

$B = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix}$

$A^T = (U^H \Sigma V)$

$C = (c_1 \cdots c_n)$

$A = U\Sigma V^H$

$A^+ = V\Sigma^{-1}U^H$

$A^T = V\Sigma^T U^H$

$A^+ = V^H \Sigma^{-1} U$

$r(A^H A) \le 1$

$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1 & & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}$

$A^H A \to \lambda, 0 \dots$

$(=)\ \Sigma \to \sigma = \sqrt{\lambda}$

$(=)\ \frac{1}{\sigma} = \frac{1}{a}\cdot\sigma \ (=)\ \sigma^2 = a$

$tr(A^H A) = \lambda = \sigma^2$

$\frac{1}{x} = \frac{1}{a}x$

$x^2 = a$

$tr(A^H A) = a$

分　数	
评卷人	

八、（10 分）设矩阵 $A=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$，$B=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 2 & 1\end{bmatrix}$，$C=\begin{bmatrix}1 & 3\\ 1 & 0\end{bmatrix}$，求解下面的矩阵方程，其中 X 为未知矩阵

$$AXB-X=C.$$

$$(B^T\otimes A-E^T\otimes E)\,\mathrm{vec}(X)=\mathrm{vec}(C)$$

$$B^T\otimes A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}2 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

$$E\otimes E=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}\otimes\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix}1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 1\end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix}2 & 1 & 4 & 2\\ 0 & 2 & 0 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 1\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x_{11}\\ x_{21}\\ x_{12}\\ x_{22}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\ 1\\ 3\\ 0\end{bmatrix}$$

$$X=\begin{bmatrix}-\frac{11}{4} & \frac{3}{2}\\ \frac{1}{2} & 0\end{bmatrix}$$

$2x_{11}+\frac{1}{2}+6=1$

$-\frac{5.5}{2}$

$-\frac{11}{4}$