

华中科技大学启明学院 2018 级 微积分学(一)(上)期中考试试卷

班级_____ 学号_____ 姓名_____

题号	一	二	三	总分
得分				

一、 填空题 (每小题 4 分, 共 20 分)

- 已知 $\begin{cases} x = \ln(1+t^2) \\ y = t - \arctan t \end{cases}$, 则 $\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{1+t^2}{4t}$.
- 写出 $y = x^x - 1$ ($x \rightarrow 1$) 的主部 $x - 1$.
- 当 x 充分大时, 比较两函数大小: $x^3 + 100x^2 + 1000 < 0.001x^4$.
- 求曲线 $y = x \ln x$ 平行于直线 $3x - y + 1 = 0$ 的法线方程 $3y + x - 7e^2 = 0$.
(或 $3y - 9x + 13e^{\frac{4}{3}} = 0$)
- 指出函数 $f(x) = \frac{1 - \cos x}{e^{x^2} - 1}$ 的间断点, 并补充定义使其连续 $x=0$ 为可去间断点; $f(0)=1/2$

二、 计算题 (每小题 9 分, 共 45 分)

- 求极限 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{3x-2} - x) \sin 2(x-1)}{(x-1)^3}$.

解: $x^{3x-2} - x = x[e^{3(x-1)\ln x} - 1] \sim 3x(x-1)^2$

于是 $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^{3x-2} - x) \sin(2x-1)}{(x-1)^3} = 6$

(若分子是 $(x^{3x-2} - x)\sin(2x-1)$ 则结果是 ∞)

7. 设 $f(x) = \sin x \cos^2 x$, 求 $f^{(n)}(x)$.

解: 因为 $f(x) = \frac{\sin x + \sin 3x}{4}$

$$\text{所以 } f^{(n)}(x) = \frac{1}{4}(\sin x)^{(n)} + \frac{1}{4}(\sin 3x)^{(n)} = \frac{1}{4}\sin\left(x+n\cdot\frac{\pi}{2}\right) + \frac{3^n}{4}(\sin(3x+n\cdot\frac{\pi}{2}))$$

8. 设函数 $f(x)$ 有 3 阶连续导数, $\lim_{x \rightarrow 0} \left[1+x+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = e^3$, 求 $f(0)$, $f'(0)$, $f''(0)$

$$\text{及 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}}.$$

$$\text{解: } 1+x+\frac{f(x)}{x} = [e^3+o(1)]^x = e^{x\ln(e^3+o(1))} = e^{x(3+o(1))} = 1+3x+o(x)$$

于是 $f(x) = 2x^2 + o(x^2)$, 与展开式 $f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{1}{2}f''(0)x^2 + o(x^2)$ 比较,

得 $f(0) = f'(0) = 0$, $f''(0) = 4$;

$$\text{而 } \lim_{x \rightarrow 0} \left[1+\frac{f(x)}{x}\right]^{\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow 0} [1+2x+o(x)]^{\frac{1}{x}} = e^2.$$

9. 设 $f(x)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上连续可导且 $\lim_{x \rightarrow \infty} f'(x) = A$, 求 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(x-a)}{a}$, $a \neq 0$.

解: 利用 $f(x) - f(x-a) = af'(x-\theta a)$ ($0 < \theta < 1$),

得到 $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{f(x) - f(x-a)}{a} = A$.

10. 设 $x_0 = 0$, $x_{n+1} = 1 + \sin(x_n - 1)$ ($n \geq 0$), 证明: 数列 $\{x_n\}$ 收敛并求 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n$.

解: 令 $a_n = x_n - 1$, 则 $a_0 = -1$. $a_{n+1} = \sin a_n$. 由不等式 $a \leq \sin a$ ($a \leq 0$) 得出 $\{x_n\}$ 递增有上界, 上界为 0, 所以该数列收敛. 设 $a = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n$, 从 $a = 0$, 于是解出 $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = 1$.

三、证明题 (每小题 7 分, 共 35 分)

11. 依据极限定义证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n^2 + n}{4n^2 - 2} = \frac{3}{4}$.

解

对任意 $\varepsilon > 0$, 解不等式 $\left| \frac{3n^2 + n}{4n^2 - 2} - \frac{3}{4} \right| = \left| \frac{2n+3}{8n^2-4} \right| < \frac{3n}{8n^2} < \varepsilon$

得 $n > \frac{3}{8\varepsilon}$. 取 $N = \left\lceil \frac{3}{8\varepsilon} \right\rceil + 1$ 即可。

12. 判断函数 $f(x) = x + \cos x$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 上是否一致连续, 并证明.

证明: 函数是一致连续的。

对任意 $\varepsilon > 0$,

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |x_1 - x_2| + |\cos x_1 - \cos x_2| \leq |x_1 - x_2| + 2 \left| \sin \frac{x_1 + x_2}{2} \sin \frac{x_1 - x_2}{2} \right| \leq 2|x_1 - x_2| < \varepsilon$$

取 $\delta = \frac{\varepsilon}{2}$ 即可。

13. 设 $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a+\theta h)h^2$, $f'''(a) \neq 0$. 证明: $\lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{3}$.

证明: 因为 $f(a+h) = f(a) + f'(a)h + \frac{1}{2}f''(a)h^2 + \frac{1}{6}f'''(\xi)h^3$

$$\text{所以 } f''(a+\theta h) - f''(a) = \frac{1}{3}f'''(\xi)h$$

$$\text{另外, } f''(a+\theta h) - f''(a) = f'''(\eta)\theta h$$

$$\text{所以: } \theta = \frac{1}{3} \frac{f'''(\xi)}{f'''(\eta)} \quad \text{故, } \lim_{h \rightarrow 0} \theta = \frac{1}{3}.$$

14. 设 $f(x), g(x) \in C[a, b]$, 且在 (a, b) 内可微, $f(a) = f(b) = 0$,

证明: 存在 $\xi \in (a, b)$, 使得 $f'(\xi) + f(\xi)g'(\xi) = 0$.

证明, 做辅助函数 $F(x) = f(x)e^{g(x)}$

然后 用罗尔定理即得到结论。

15. 设对任意 $x, y \in \mathbb{R}$ 函数 $f(x)$ 满足 $|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|^a$, $C > 0, a > 1$ 且与 x, y 无关,

证明： $f(x)$ 恒为常数.

证明：即证 $f'(x) \equiv 0$

$$0 \leq \left| \frac{f(x)-f(y)}{x-y} \right| < C|x-y|^{\alpha-1}$$

由迫敛性，当 $x \rightarrow y$ 时， $f'(x) = 0$.