2018-2 期中试题解答

1. 设 $y' = p(y)$，原方程化为 $yp\dfrac{dp}{dy} + p^2 = 0$.

根据初始条件舍去 $p = 0$. 解一阶方程得到 $p = \dfrac{C_1}{y}$. 代入初始条件得到 $C_1 = \dfrac{1}{2}$.

于是有 $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{1}{2y}$. 解得 $x = y^2 + C_2$. 再利用初始条件得 $y = \sqrt{1+x}$.

另解 由 $yy'' + (y')^2 = 0$ 得 $(yy')^2 = 0$，所以 $yy' = C_1$， $y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{1}{2}$ 得 $C_1 = \dfrac{1}{2}$；分离变量 $ydy = \dfrac{1}{2}dx$ 或 $2ydy = dx$，因此 $y^2 = x + C$，由 $y(0) = 1$ 得 $C = 1$，所以 $y = \sqrt{1+x}$.

1. 直接观察到特征根 $r_{1,2} = 1 \pm 2i$，所以特征方程为 $r^2 - 2r + 5 = 0$.

于是，所求微分方程为 $y'' - 2y' + 5y = 0$.

3. 易得 $\overrightarrow{AM} = \{0,3,3\}, \overrightarrow{OM} = \{3,0,4\}$.

单位化以后得到 $\cos\alpha = \dfrac{3}{5}, \cos\beta = 0, \cos\gamma = \dfrac{4}{5}$.

4. 由已知得到点 $P_1(-1,2,4), P_2(1,-3,6)$，以及 $\boldsymbol{s}_1 = \{2,-1,3\}, \boldsymbol{s}_2 = \{1,2,5\}$.

从而得到

$$\overrightarrow{P_1P_2} \cdot (\boldsymbol{s}_1 \times \boldsymbol{s}_2) = \begin{vmatrix} 2 & -5 & 2 \\ 2 & -1 & 3 \\ 1 & 2 & 5 \end{vmatrix} = 23 \neq 0.$$

因此两条直线为异面直线.

5. 极限不存在.

取路径 $y = 0$，极限为 0.

取路径 $x = -y + y^3$，极限为 $\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{-y^3 + y^5}{y^3} = -1$. 因此二重极限不存在.

6. 设 $f(x,y) = x^2 + y^3 + \ln(x+y) - 3$. 则

$$\nabla f=\left\{2x+\frac{1}{x+y},3y^2+\frac{1}{x+y}\right\}.$$

法线方向矢量为$\boldsymbol{n}=\nabla f(2,-1)=\{5,4\}$.

所求的法线方程为$\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y+1}{4}$，即$4x-5y-13=0$.

7. 根据隐函数求导得到

$$z_x=\frac{c\varphi_u}{a\varphi_u+b\varphi_v},z_y=\frac{c\varphi_v}{a\varphi_u+b\varphi_v}$$

代入即得$az_x+bz_y=c$.

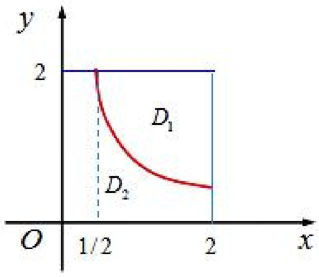
8. 由题设知积分区域为正方形区域$0\le x\le 2,0\le y\le 2$.

用$xy=1$将区域分成D_1与D_2（如图所示），则

$$I=\iint_{D_1}xyd\sigma+\iint_{D_2}d\sigma$$

$$=\int_{1/2}^{2}xdx\int_{1/x}^{2}ydy+1+\int_{1/2}^{2}dx\int_0^{1/x}dy$$

$$=\frac{19}{4}+\ln 2.$$



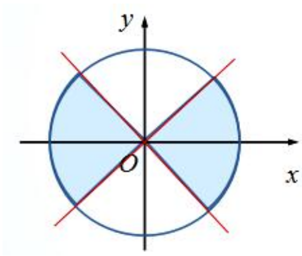
2018-2（期中）-8 图

9. 区域包含两个部分.根据对称性，采用极坐标得到

$$I=4\int_0^{\pi/4}d\theta\int_0^2 r\cos r^2dr$$

积分得

$$I=4\frac{\pi}{4}\frac{1}{2}\sin r^2\Big|_0^2=\frac{\pi\sin 4}{2}.$$

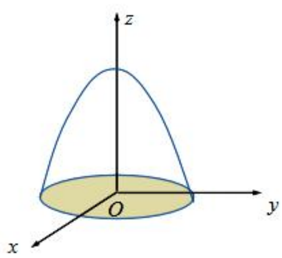


2018-2（期中）-9 图

10. 用柱面坐标

$$I=\iint_D dxdy\int_0^{4-x^2-y^2}\sqrt{x^2+y^2}dz$$

$$=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^2 r^2(4-r^2)dr=\frac{128\pi}{15}.$$



2018-2（期中）-10 图

11.方程的特征方程为$r^2-3r+2=0$. 解得特征根$r_1=1,r_2=2$.

所以对应齐次方程的通解为$Y = C_1 e^x + C_2 e^{2x}$.

分别求解非齐次项e^{2x}, e^{3x}所对应的特解.

设e^{3x}对应的特解为$y_1 = Ae^{3x}$，解得$A = 1/2$.

设e^{2x}对应的特解为$y_2 = Bxe^{2x}$，解得$B = 1$. 所求微分方程通解为

$$y = Y + y_1 + y_2 = C_1 e^x + C_2 e^{2x} + \frac{1}{2}e^{3x} + xe^{2x}.$$

12. 在点$(1,-1,-1)$处椭球面的外法线方向为$\boldsymbol{n} = \{2x, 4y, 6z\}\big|_{(1,-1,-1)} = \{2,-4,-6\}$.

单位化得到$\boldsymbol{n}^0 = \dfrac{\{1,-2,-3\}}{\sqrt{14}}$.

在点$(1,-1,-1)$处$\nabla u(1,-1,-1) = \{2,2,1\}$.

故所求方向导数为$\dfrac{\partial u}{\partial n} = \nabla u \cdot \boldsymbol{n}^0 = -\dfrac{5}{\sqrt{14}}$.

13. 构造 Lagrange 函数

$$L(x,y,z,\lambda,\mu) = x + 3z + \lambda(x + 2y - 3z - 2) + \mu(x^2 + y^2 - 2).$$

$$令\begin{cases} L_x = 1 + \lambda + 2\mu x = 0, \\ L_y = 2\lambda + 2\mu y = 0, \\ L_z = 3 - 3\lambda = 0, \\ L_\lambda = x + 2y - 3z - 2 = 0, \\ L_\mu = x^2 + y^2 - 2 = 0. \end{cases}$$

解得两个驻点$\lambda_1 = 1, \mu_1 = 1, x_1 = -1, y_1 = -1, z_1 = -\dfrac{5}{3}$以及

$\lambda_2 = 1, \mu_2 = -1, x_2 = 1, y_2 = 1, z_2 = \dfrac{1}{3}$.

比较得到最大值为2，最小值为-6.

14 $I = \displaystyle\iiint_V x^2 dxdydz = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^{\pi/2} d\varphi \int_0^{2\cos\varphi} \rho^4 \sin^3\varphi \cos^2\theta d\rho$

$$= \frac{32}{5}\int_0^{2\pi} \cos^2\theta d\theta \int_0^{\pi/2} \sin^3\varphi \cos^5\varphi d\varphi = \frac{32\pi}{5} \cdot \frac{1}{24} = \frac{4\pi}{15}.$$

15（1）根据偏导数定义求得$z_x(0,0) = 0, z_y(0,0) = 0$.

因 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)}\dfrac{xy^3}{(x^2+y^2)\sqrt{x^2+y^2}}=\lim\limits_{\rho\to 0}\rho\cos\theta\sin^3\theta=0$. 因此 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微.

(2) 当 $(x,y)\neq(0,0)$， $z_x=\dfrac{y^5-x^2y^3}{(x^2+y^2)^2}$.

所以 $z_{xy}(0,0)=\lim\limits_{y\to 0}\dfrac{z_x(0,y)-z_x(0,0)}{y}=1$.