2015 下期离散数学（二）考试点评

简答题点评：

1. 一棵树有 4 个度为 2 的结点，3 个度为 3 的结点，2 个度为 4 的结点，其它结点度均为 1，试求这棵树共有多少结点。（6 分）

这道题所需要的理论非常简单，就是握手定理已经树的边数等于结点数-1. 单还是不少人每做出来。

2. 9 件相同玩具分给 3 个孩子，保证每个人都有玩具，但任何一人都不能超过 4 件，问有多少种分法？（要求用生成函数解答）（6 分）

这道题无论是教材上的例题，还是课堂讲过的例题，都不止一次地讲过，只要依葫芦画瓢就可以。如果画不了，就是没有看书也没有认真听讲。

3. 求解递推关系$a_n = 4a_{n-1} - 4a_{n-2}, a_0 = 2, a_1 = 6.$ （8 分）

这道题没有难度。我在最后一次课说过必考的内容。

解答过程：（1）首先给出相应的特征方程，

（2）解出特征方程的根，是一个重根

（3）利用相关的定理，对应重根的情况，有相应的解的公式，代入公式

（4）再将两个给定的初始值带入公式里，把系数求出来，就能得到答案

这是系统化、公式化的解法。只要按照这种公式化的解法解就可以了。

4. 求下图的最小生成树：（6分）

这道题是送分题目，只要利用相关算法，直接解出即可。

5. 判断下面两个图是否同构。如果不同构，说明理由；如果同构，请给出两个图之间的同构映射。（6 分）

这道题的答案是不同构。可以有很多理由说明不同构的。

例如：其中一个图是$k_{3,3}$，非平面图，偶图。而另一个显然是平面图。

也可以说，其中一个有长度为3的简单回路，另一个显然没有；等等。

6. 构造一个图模型，用来表示华中科技大学所有学生跟所有的选修课之间的关系。这个图是否为偶图，为什么？从图中，如何统计一个人选修的课的数目？该图可能为多重图吗？ 存在单边弧（两端点相同的边）吗？

这道题要求把建模过程写清楚（我课堂内一再强调这一点），点表示什么，边表示什么，然后实际问题如果转变成图的问题等内容，必须说清楚的。至于结论就很简单了。

问题出现较多的还是没有把建模说清楚，或者根本就不说，直接说答案。

我也在课堂内讲过一道类似的以往的考题，几乎是一样的。

证明题点评：
证明题 30 分。

第 1 题： 证明平面上 5 个坐标为整数的点，至少有两个的中点坐标也为整数。
这一道题比教材上的一道练习题（三维坐标系中 9 个点，…）还简单些，道理完全一样。这道题布置过作业，而且我在课堂上讲过教材上的这道练习题。还是有些同学没做出来，说明没有好好听课，或者没听懂课后也不去理会。当然也不知道做作业时这道题是怎么做的。

出现的问题有：有些同学根本不知道怎么做；也有些同学做了，但没有说明为什么要两个点的坐标的奇偶性相同才能保证中点坐标为整数，这是需要说明理由的。尽管理由简单，还是需要说明的。越是简单的证明题，其理由越是要说清楚。不能跳得太多。

解答：
两个坐标点(a,b),(c,d)的中点坐标是：((a+c)/2, (b+d)/2). 于是在 a,b,c,d 都是整数的情况下要使得中点坐标为整数，只有 a 与 c 且 b 与 d 的奇偶性是一致的。
一个整数坐标的点(x,y)的两个坐标的奇偶组合只可能出现 4 种可能(奇数，奇数)、（偶数，偶数)、（奇数，偶数)、（偶数、奇数）。
于是根据鸽巢原理，5 个点中必然至少有两个点的这种坐标奇偶性相同，从而其中点坐标为整数。

第 2 题： n 个结点的简单图有 n+1 条边，那么至少有一个结点的度大于或者等于 3.
这道题有不是同学反正，
反正假设是：假设没有结点度大于或者等于 3， 于是就得出结论说所以结点的度为 2；
也有同学直接说可以假设所以结点的度都为 2，于是该都就是一个圈图。
然后再得出结论只有 n 条边，与已知矛盾。

首先，没有度大于或者等于 3 的结点，那么度还有可能是 0,1 或者是 2 三种可能。怎么能说每个结点度是 2？“大于或者等于 3”的否命题是“等于 2”吗？无论是退出所以度为 2 还是假设所以度为 2，都犯了同一个错误，低级错误。

其次，即便是所以点的度都为 2，也不一定就是圈图。想象一下，由两个或者更多多不相连的多边形组合的图（多个分支)，其每个点的度不都是 2 吗？

还有个别同学，推来推去，退出 2n>n，然后也说矛盾，不知道矛盾在哪里。

另外一个小问题是，不少同学说有”多少个度，几个度“，这种词不知道从哪里学来的。

正确解答:（其实只要应用握手定理，非常简单。这 10 分可以说是送分题，而且我一再说个握手定理是一定会考的)。

证明：由握手原理知，n+1 条边的图的所有结点的总度数是 2（n+1）. 这来自于 n 个结点。每个结点的度都是非负整数。如果说没有度大于或者等于 3 的结点，那么所有结点的度都小于或者等于 2， 于是总度数就必然会小于或者等于 2n，与已知矛盾。所以至少有一个结点

的度大于或者等于 3.

也有同学说 n 个结点总度数是 2（n+1）. 这来自于 n 个结点,有鸽巢原理知至少有一个结点度数大于 2，结论也是一样正确的。

还有少部分同学的各种其它理由的叙述都不靠谱。

虽然说这是送分题，可惜不少同学只得到一半不到的分，还有少数是 0 分。

第 3 题：设偶图（二部图）G 是一颗树，（V_1，V_2）是 G 的顶点集的一个二部划分，若$|V_1|\geqslant|V_2|$，试证明：V_1 中至少有一个度为 1 的结点。

这道题的得分率很低，完全出乎我们的意料。 得满分就更少了。其实它的证明不需要什么技巧，没有任何技巧方面的变化和考量。 只是用到了几个最基本的道理：树的边数是结点数-1; 树是连通的，没有孤立点；握手原理；偶图的二部划分(V_1，V_2），V_1 的点之间没有边，V_2 的点之间也没有边，所以的边的两个端点都分别在 V_1，V_2 之中。
这 4 个最基本的道理，任何一个没用上，没说到都是有问题的。

错误：有很多同学都是说 V_1，V_2 分别是根树的奇数层和偶数层。然后长篇叙述说明，一层的结点数，尤其是叶结点所在的层的结点数一定要大于等于其它层的结点数，所以得到结论。 这样做的基本上没什么分数，只是象征性地给了一点点分，只有说到了树或者偶图的一些特征的。

还有同学说因为是树，没有回路，怎么怎么滴。 树是没有简单回路，不能说没有回路。 而且在没有简单回路的情况下，这些同学说的理由很不靠谱。

首先，这里的树并没有说是根树，也就不存在层的问题。基本要变成根树，也必须先选取一个结点，再把它变成根树再来讲道理。
其次，也结点的数目不一定比内结点数目多； 叶结点所在的层也未必比其上一层结点多。

也有些同学用反正，假设 V_1 没有度为 1 的结点，那么其所有的度都大于或者等于 2（有人说那么其所有结点刚好有 2 个度，晕）。 这里的说法是对的，但必须要说明一个前提，这是树，没有孤立点（也即度为 0 的结点），没有这个理由是要扣分的。因为没有这个理由的话，就不能说其度大于或者等于 2.

也有同学说由于其每个结点的度大于或者等于 2，同时由于是偶图，所以导致 V_2 的结点数就会大于 V_1 的结点数，甚至是 V_1 的结点数的 2 倍。 这理由不知道怎么扯的。不同结点的边可以关联同一结点，又没有规定说不同结点的边一定关联不同结点。

正确的证明是：
假设 V_1 没有度为 1 的结点，由于图是一棵树，所以没有孤立点，也即没有度为 0 的结点。于是 V_1 所有结点的度都大于或者等于 2. 那么 V_1 的结点的总度数就大于或者等于 $2|V_1|$. 而$|V_1|\geqslant|V_2|$， 所以如果假设图的结点数是 n 的话，那么 V_1 所有结点数大于

或者等于 n/2，V_1 总的度都大于等于 2*n/2=n

再由于是一个偶图，而且二部划分分别是 V_1 和 V_2 所以，V_1 的点之间没有边，同理 V_2 的点之间也没有边。 所有边的一段在 V_1 中，另一端在 V_2 中.于是 V_1 的结点的总度数等于 V_1 的结点的总度数，其和是图的总度数。于是得到图的总度数大于或者等于 2n.
由树的基本特征，边数是 n-1, 握手原理告诉我们图的总度数是 2(n-1), 矛盾！

所以反正假设不成立。 就可以得到结论了。

还有一个要说的毛病，就是不少同学在解题的过程中，随时可以出现任何字母或者字符，不做任何说明，想要什么就出现什么，捡起来就用。 这是错误的，我以前强调过。 除了一些全世界公认的通用的约定基本符合外，所以出现的符号必须要有说明，它代表什么意思。否则我可以为你的字符指定任何意义，然后你的解答就错得一塌糊涂！

更有少数几个同学，以点带面的证明。 他们采用举一两个例子的方法，来证明结论。这就好比，要证明一个班的所有同学都是靓女帅哥，他们就举例说其中某个同学是靓女，再还有某个是帅哥，于是全部都是。

部分同学成绩不太好的原因总结：
上课精力不集中，玩手机的人不少，课堂上讲的似懂非懂，课后不去花时间搞清楚，听之任之；平时肯怕有些同学做作业根本不认真，抄作业，自己没有去思考。

一份耕耘一份收获！种瓜得瓜，种豆得豆，千古不变的道理。
上课手机玩的多了，成绩也下降了；作业抄多了，考试就要熄火。

虽然不再给大家上课了，但是为了你们今后的学习和发展，还是希望同学们听我点忠告：上课少玩手机，多听讲，多思考。没搞清楚的话，课后花时间搞清楚。不要赌老师应该不会考这个，不会考那个。更不要赌将来不会用这个也不会用那个。

哪些考 10 几 20 几分的同学，更是需要洗心革面、重新审视自己，好好想想这个书该怎么读下去、路该怎么走下去的问题。