2017-2 期中试题解答

1. 设 l 与 l_1 的交点为 Q ，则其坐标应为 $\left(2+t,1+2t,2+t\right)$.

从而直线 l 的方向矢量为：$\boldsymbol{s}=\overrightarrow{M_0Q}=\left\{t+1,2t-1,t+2\right\}$.

因直线 l 平行于平面 π 有 $\boldsymbol{n}\perp\boldsymbol{s}$ 即 $\boldsymbol{n}\cdot\boldsymbol{s}=0$.

即 $(t+1)+(-2)(2t-1)+(t+2)=0$ ，解得 $t=\dfrac{5}{2}$.

故直线 l 的方程为：$\dfrac{x-1}{7/2}=\dfrac{y-2}{4}=\dfrac{z-0}{9/2}$.

2. 令 $F(x,y,z)=x^2+y^2+z^2-6=0$，$\mathrm{G}(x,y,z)=x^2+y^2-z=0$.

$\nabla F(1,1,2)=2\{1,1,2\}$，$\nabla\,\mathrm{G}(1,1,2)=\{2,2,-1\}$，

所以切矢量为 $\boldsymbol{\tau}=\{1,1,2\}\times\{2,2,-1\}=-5\{1,-1,0\}$，

所求的法平面方程为 $x-y=0$.

3. 在 xOy 面的投影曲线为 $\begin{cases}x^2+y^2=ax,\\ z=0.\end{cases}$

在 zOx 面的投影曲线为 $\begin{cases}z^2=a^2-ax,\\ y=0\end{cases}$ $(-a\le z\le a)$.

4. $$z=\int_0^{x+y^2}e^{t^2}(x+y^2-t)dt+\int_{x+y^2}^1 e^{t^2}(t-x-y^2)dt$$

$$=(x+y^2)\int_0^{x+y^2}e^{t^2}dt-\int_0^{x+y^2}te^{t^2}dt+\int_{x+y^2}^1 te^{t^2}dt-(x+y^2)\int_{x+y^2}^1 e^{t^2}dt$$

所以 $z_x=\int_0^{x+y^2}\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t-\int_{x+y^2}^1\mathrm{e}^{t^2}\mathrm{d}t$，　$z_{xy}=4y\mathrm{e}^{(x+y^2)^2}$.

5. 由题设知，方程组 $\begin{cases}z=f(x,y),\\ F(x+z,xy)=0\end{cases}$ 确定的隐函数 $x=x(z)$ 和 $y=y(z)$，

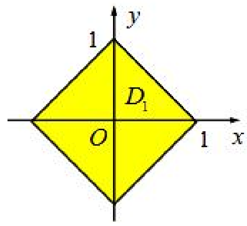
方程组两边对 z 求导，得

$$\begin{cases}1=f_1\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+f_2\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z},\\ F_1\cdot\left(1+\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)+F_2\cdot\left(y\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}+x\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}z}\right)=0.\end{cases}$$

解得 $\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}=-\dfrac{xF_2+f_2F_1}{f_2F_1+yf_2F_2-xf_1F_2}$.

6. 交换积分次序得 $I=\int_0^1 \mathrm{d}x\int_0^x x^2\cos(xy)\mathrm{d}y$

$=\int_0^1 x\sin x^2 dx=\frac{1}{2}(1-\cos 1)$.



2017-2（期中）-7 图

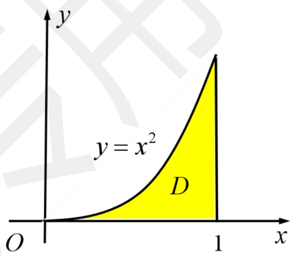
7. 利用奇偶对称性及轮换对称性，得

$I=\iint\limits_D(4x^2+9y^2+1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=13\iint\limits_D x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_D\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

记 D_1 为区域 D 在第一象限的区域，则

$I=52\iint\limits_{D_1}x^2\mathrm{d}x\mathrm{d}y+2$

$=52\int_0^1 dx\int_0^{1-x}x^2dy+2=\frac{19}{3}$.



2017-2（期中）-8 图

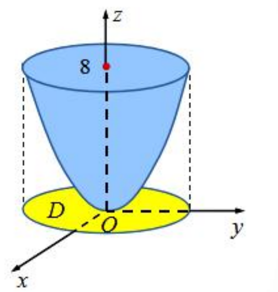
8. 设 $A=\iint\limits_D f(x,y)dxdy$，则 $f(x,y)=xy+A$，

从而 $A=\iint\limits_D xydxdy+\iint\limits_D Adxdy$

$=\int_0^1 dx\int_0^{x^2}xydy+A\int_0^1 dx\int_0^{x^2}dy=\frac{1}{12}+\frac{1}{3}A$,

解得 $A=\frac{1}{8}$，故 $f(x,y)=xy+\frac{1}{8}$.

9. 旋转曲面方程为 $z=\frac{1}{2}(x^2+y^2)$.



2017-2（期中）-9 图

记 Ω 在 xOy 面投影的区域为 $D:x^2+y^2\le 16$. 所以

$I=\iiint\limits_\Omega(x^2+y^2)dv==\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^4 rdr\int_{\frac{1}{2}r^2}^8 r^2dz$

$=2\pi\int_0^4 r^3\left(8-\frac{r^2}{2}\right)\mathrm{d}r=\frac{1024}{3}\pi$.

10. $I=\int_0^a z^2\mathrm{d}z\iint\limits_{x^2+y^2\le a^2-z^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\pi\int_0^a z^2(a^2-\mathrm{z}^2)\mathrm{d}z=\frac{2\pi}{15}a^5$.

11. 由于 $\frac{\partial u}{\partial x}=f'(x\sin y)\sin y,\frac{\partial u}{\partial y}=f'(x\sin y)x\cos y$，

所以 $\frac{\partial u}{\partial \boldsymbol{n}}=\frac{f'(x\sin y)}{5}(3\sin y+4x\cos y)$，

利用偏导数的定义，得 $\frac{\partial^2 u}{\partial\boldsymbol{n}\partial x}(0,0)=\lim\limits_{x\to 0}\frac{4f'(0)x}{5x}=\frac{4f'(0)}{5}=4$.

12．设所求点为$M(x,y)$，由$\nabla f(x,y)=\{6x,2y\}$，$\boldsymbol{n}^{\circ}=\dfrac{1}{5}\{3,4\}$，得

$f(x,y)$在点$M(x,y)$沿着方向$\boldsymbol{n}=\{3,4\}$的方向导数为

$$\frac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y)=\frac{2}{5}(9x+4y)\,.$$

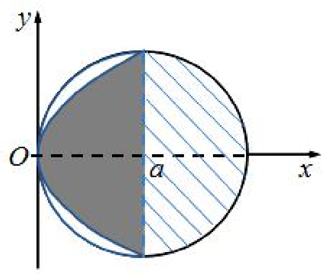
构造拉格朗日函数 $L(x,y,\lambda)=9x+4y+\lambda(x^2+2y^2-2x-45)$.

令$\begin{cases}L_x=9+2\lambda x-2\lambda=0,\\ L_y=4+4\lambda y=0,\\ L_\lambda=x^2+2y^2-2x-88=0.\end{cases}$ 由前 2 个方程可得$2(x-1)=9y$，代入最后一个方程，得

$y=2$，$x=10$和$y=2$，$x=-8$，即受检点为$M_1(10,2)$，$M_2(-8,-2)$.

将其代入$\dfrac{\partial f}{\partial \boldsymbol{n}}(x,y)$，比较可得$M_1(10,2)$为所求.

13．区域D如图所示，联立$\begin{cases}y^2=ax,\\ y^2=2ax-x^2.\end{cases}$



得交点$(0,0)$，(a,a)，$(a,-a)$.

所求面积为半圆面积（阴影部分）与灰色部分面积之和

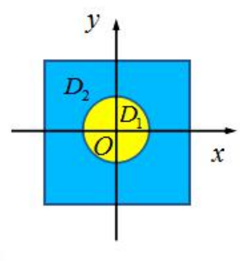
$$S=\frac{1}{2}\pi a^2+2\int_0^a \mathrm{d}y\int_{y^2/a}^{a}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\pi a^2+2\int_0^a\left(a-\frac{y^2}{a}\right)\mathrm{d}y$$

$$=\frac{1}{2}\pi a^2+2a^2-\frac{2}{3}a^2=\frac{1}{2}\pi a^2+\frac{4}{3}a^2.$$

2017-2（期中）-13

图

14. 记区域$D_1:x^2+y^2\le 1$，$D_2=D\setminus D_1$.



记函数$f(x,y)=x^2+y^2-1$，则

$$I=-\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y+\iint\limits_{D_2}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

$$=\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y-2\iint\limits_{D_1}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\,.$$

而$\displaystyle\iint\limits_{D}f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\iint\limits_{D}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=8\int_0^2 x^2\mathrm{d}x\int_0^2\mathrm{d}y-16=\frac{80}{3}$；

2017-2（期中）-14

图

$$\iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = \iint\limits_{D_1}(x^2+y^2-1)\mathrm{d}x\mathrm{d}y = 2\pi\int_0^1 r^3\mathrm{dr}-\pi = -\frac{\pi}{2},$$

所以$I=\dfrac{80}{3}+\pi$.

15.（1）正确.

因为根据偏导数定义知：$f_{xx}(0,0)=\left.\dfrac{\mathrm{d}f_x(x,0)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=0}$，而一元函数的可导必连续的结论知

$f(x,0)=0$在原点$(0,0)$处连续.

（2）不正确. 如

$$f(x,y)=\begin{cases}0, xy=0,\\ 1, xy\neq 0\end{cases}$$ 在原点$(0,0)$处不连续.

但是因为$f(x,0)=0$，所以$f_x(x,0)=0$，进而有$f_{xx}(0,0)=0$. 类似可得$f_{yy}(0,0)=0$.