2018-2 期中试题

一、基本计算题（每题 6 分，共 60 分）

1. 求微分方程 $yy'' + (y')^2 = 0$ 满足初始条件 $y(0) = 1, y'(0) = \dfrac{1}{2}$ 的特解.

2. 设 $y = e^x (C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x)$ 为某二阶常系数齐次微分方程的通解，求此微分方程.

3. 已知点 $A(3,-3,1)$ 与点 $B(3,-2,2)$. 若 $\overrightarrow{AM} = 3\overrightarrow{AB}$，求矢量 $\overrightarrow{OM}$ 的方向余弦.

4. 判断直线 $L_1 : \dfrac{x+1}{2} = \dfrac{y-2}{-1} = \dfrac{z-4}{3}$ 与直线 $L_2 : \dfrac{x-1}{1} = \dfrac{y+3}{2} = \dfrac{z-6}{5}$ 是否共面.

5. 讨论二重极限 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x+y}$. 若极限存在求其值，若不存在说明理由.

6. 已知平面曲线由方程 $x^2 + y^3 + \ln(x+y) - 3 = 0$ 确定，求点 $x = 2, y = -1$ 处的法线方程.

7. 设 $\varphi(u,v)$ 有连续偏导数，方程 $\varphi(cx - az, cy - bz) = 0$ 确定隐函数 $z = z(x,y)$. 证明 $az_x + bz_y = c$.

8. 计算 $I = \int_0^2 dy \int_0^2 \max\{xy, 1\} dx$.

9. 计算 $I = \iint\limits_D \cos(x^2 + y^2) dxdy$，其中 $D = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 4, |x| \ge |y|\}$（由 $x^2 + y^2 = 4$ 和 $y^2 = x^2$ 围成的包含 x 轴的区域）.

10. 计算 $I = \iiint\limits_V \sqrt{x^2 + y^2}\, dxdydz$，其中区域 V 由曲面 $z = 0, z = 4 - x^2 - y^2$ 围成.

二、综合计算题（每题 8 分，共 40 分）

11. 求解微分方程 $y'' - 3y' + 2y = e^{2x} + e^{3x}$.

12. 求函数 $u = 2x + y^2 z$ 在点 $(1,-1,-1)$ 沿椭球面 $x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ 的外法线方向的方向导数.

13. 求函数 $u = x + 3z$ 在曲线 $\begin{cases} x + 2y - 3z = 2 \\ x^2 + y^2 = 2 \end{cases}$ 上的最大值与最小值.

14 求积分 $I = \iiint\limits_V x^2 dxdydz$，其中区域 $V : x^2 + y^2 + z^2 \le 2z$.

15 设函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy^3}{x^2+y^2},(x,y)\neq(0,0),\\ 0, \qquad (x,y)=(0,0).\end{cases}$

（1）证明 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 可微；（2） 求 $z_{xy}(0,0)$.