华中科技大学 2023 届微积分期中模拟试卷

出题人:CSXJ1902 Sukuna

2024 年 6 月 17 日

一、基本计算题 (每小题 6 分, 共 60 分)

1. 求
$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{\frac{a^n+b^n+c^n}{3}}$$
$(a\geq b\geq c)$

2. 求
$$\lim_{x\to 0}\frac{tan(sinx)-tan(tanx)}{x^3}$$

3. 求
$$\lim_{n\to\infty}\sin(\sqrt{n^2\pi^2+1})$$

4. 求
$$\lim_{x\to\infty}(\frac{x}{e}-\frac{x^{x+1}}{(x+1)^x})$$

5. 求
$$\lim_{x\to 0}\frac{f(\sin^2 x)}{x^4}$$
假设 $f''(x)$ 二阶连续可导，并且 $f(0)=f'(0)=0, f''(0)=6$

6. 求 x^{cotx} 在 $x=\dfrac{\pi}{4}$ 的导数

7. $y^3+lny=x^2$, 求 y 的二阶导数 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

8. 已知 $y=e^x+lnx$, 求反函数的二阶导 $\dfrac{d^2x}{dy^2}$

9.
$$\begin{cases} x=sint-tcost & (1)\\ y=cost+tsint & (2)\end{cases}$$
求参数方程的二阶导 $\dfrac{d^2y}{dx^2}$

10. 已知 $f(x)=e^{2x}ln(1-x)$，求 $f^{(4)}(x)$

二、综合题 (每小题 6 分, 共 30 分)

11.

$$f(x)=\begin{cases}\sqrt{\frac{1}{x}}(\sqrt{\frac{1}{x}+1}-\sqrt{\frac{1}{x}}) & for\ x\geq 0; \quad (3)\\ \frac{1-cosx}{x^2}, & for\ x<0. \quad (4)\\ c, & for\ x=0. \quad (5)\end{cases}$$

$\lim\limits_{x\to 0}f(x)$ 存在吗? 是否存在一个 c, 使得 $f(x)$ 在 $x=0$ 处连续?

12. 若 $x_{n+1}=\sqrt{x_n(6-x_n)}$，证明数列有极限，并且求其值。

13. 求 $xln(x^2-3x+2)$ 的 n 阶导

14. 求 $\frac{ln|x|}{|x-1|}sinx$ 的间断点，并说明类型。

15. 求 $cos2x$ 的七阶麦克劳林展开，余项是拉格朗日形式

三、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

16. 假设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续,$f(0)=f(1)$, 试证明:

(1)$\exists\varepsilon\in[0,1],s.t f(\varepsilon)=f(\varepsilon+\frac{1}{2})$

(2)$\exists\varepsilon\in[0,1],s.t f(\varepsilon)=f(\varepsilon+\frac{1}{4})$

17. *f(x)* 连续可导，证明存在 x,y,z，有

$$f'(x)=e^{z-y}f'(y)$$