华中科技大学 2023 届微积分期末模拟试卷

出题人:CSXJ1902 Sukuna

2024 年 6 月 17 日

一、选择题 (每小题 3 分, 共 18 分)

1. 若数列 $x_n y_n$ 的极限为 0, 那么下面命题正确的是:

A、x_n 发散, 那么 y_n 必发散

B、x_n 有界, 那么 y_n 必是无穷小

C、x_n 收敛, 那么 y_n 必收敛

D、$\frac{1}{x_n}$ 有界, 那么 y_n 必是无穷小

2. 关于函数 $y = x\ln x$ (x 为正实数), 下面说法正确的是:

A、在区间 $\left(0, \mathrm{e}^{-1}\right)$ 单调递减

B、$\left(\mathrm{e}^{-1}, \mathrm{e}^{-1}\right)$ 是曲线的拐点

C、在 $x = \mathrm{e}^{-1}$ 处取最小值

D、曲线 $y = x\ln x$ 无渐近线

3. 若函数在原点连续, 令 $F(x) = f(x)|\sin x|$, 那么 $f(0) = 0$ 是 $F(x)$ 在 $x = 0$ 处导数存在的

A、充要条件

B、充分但不必要条件

C、必要但不充分条件

D、又不是充分, 又不是必要条件

4. f(x) 是定义在实数上的连续函数, a 是任意的非零实数, 下面说法正确的有:

(1) f(x) 是以 T 为周期的周期函数，那么 $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ 是以 T 为周期的周期函数。

(2) f(x) 是以 T 为周期的周期函数, 那么 $F(x) = \int_x^{x+a} f(x)dx$ 是以 T 为周期的周期函数。

(3) f(x) 是奇函数，那么 $F(x) = \int_0^x f(x)dx$ 是奇函数。

(4) f(x) 是奇函数, 那么 $F(x) = \int_0^x f^2(x)dx$ 是偶函数。

A、*0* 个

B、*1* 个

C、2 个

D、3 个

5. 函数 f(x) 是可导函数 $\lim_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{(x-a)^2}=-1$, 那么函数在 x = a 处

A、有极小值

B、导数不存在

C、有极大值

D、导数存在, 且不为 0

6. 函数 $f(x)=\sin x\frac{1}{|x|}$ 在 $x=0$ 处是

A、可去间断点

B、跳跃间断点

C、连续的点

D、第二类间断点

二、填空题 (每小题 4 分, 共 16 分)

7. 函数 $f(x)=\int_0^x\cos(x-t)dt$ ，那么它的导数是 ()

8. 估计 $\ln 2.01$ 的近似值为 ( )($\ln 2=0.693$) （精确到小数点后三位）

9. 曲线 $x=2\cos^3 t, y=2\sin^3 t, 0\le t\le 2\pi$ 的长度为 ()

10. 求定积分 $\int_0^1 x(1-x)^{99}dx=($ $)$

三、计算题 (每小题 7 分, 共 42 分)

11. 求极限:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\dots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{\frac{1}{n}}$$

12. 求定积分:

$$I=\int_0^{\pi/4}\frac{xe^{\arctan x}}{(1+x^2)^{3/2}}dx$$

13. 求 $\begin{cases} x=2t\cos t \\ y=t\sin t \end{cases}$ 在 t = 0 时对应的切线方程, 以及函数对应的二阶导数。

14. 求不定积分:

$$I=\int\sqrt{\frac{e^x-1}{e^x+1}}dx$$

15. 求反常积分:

$$I=\int_0^{+\infty}e^{-2x}\sin x dx$$

16. 求微分方程的通解:

$$\frac{x}{y}+y'=y^2\ln x$$

四、综合题 (每小题 7 分, 共 14 分)

17. 假设函数 $f(x)=\begin{cases} x^a\sin\frac{1}{x}, x\neq 0 \\ b, x=0 \end{cases}$，讨论其可导性。

18. 求平面图形 $0\leq y\leq \sin x, 0\leq x\leq \pi/2$ 绕 y 轴旋转得来的旋转体的体积。

五、证明题 (每小题 5 分, 共 10 分)

19. 证明积分不等式, f(x) 在 [a, b] 上连续可导

$$f(x)\leq \frac{1}{(b-a)}\left|\int_a^b f(x)dx\right|+\int_a^b \left|f'(x)\right|dx, x\in[a,b]$$

20. 证明恒等式在定义域内成立:

$$\arctan x=\frac{1}{2}\arctan\frac{2x}{(1-x)^2}$$