2021 ～ 2022 学年第一学期

《微积分（一）》（上）期末考试试卷 (闭卷，启明学院用)

院(系) 启明学院 专业班级________ 学号________ 姓名__________

考试日期: 2022-01-03　　　　考试时间: 8:30-10:30AM

题号	一	二	三	四	五	总分
得分						

得　分	
评卷人	

一. 填空题（每小题 4 分，共 24 分）

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt[6]{x^6+x^5}-\sqrt[6]{x^6-x^5}=$ $\underline{1/3}$.

2. $\int_{-\pi}^{\pi}(\sin^7 x+\sqrt{\pi^2-x^2})\mathrm{d}x=\underline{\dfrac{\pi^3}{2}}$.

3. 设 $f(x)$ 的一个原函数是 $\dfrac{\sin x}{1+x\sin x}$， 则

$$\int f(x)f'(x)\mathrm{d}x=\frac{(\cos x-\sin^2 x)^2}{2(1+x\sin x)^4}+C.$$

4. 曲线 $y=\dfrac{1}{x}+\ln(1+\mathrm{e}^x)$ 的渐近线为 $\underline{x=0}$ 或 $\underline{y=x}$.

5. 设 $y=x^2\sin x$， 则 $y^{(2021)}(\dfrac{\pi}{2})=\underline{2021\pi}$.

6. 微分方程 $y'=\mathrm{e}^{2x+3y}$ 的通解为 $\underline{\quad 3\mathrm{e}^{2x}+2\mathrm{e}^{-3y}+C=0.\quad}$.

得　分	
评卷人	

二. 计算题（每小题 6 分，共 36 分）

7. $\displaystyle\int\frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x.$

解: $$\int\frac{1}{1-x^4}\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int\frac{1}{1-x^2}\mathrm{d}x+\frac{1}{2}\int\frac{1}{1+x^2}\mathrm{d}x$$
$$=\frac{1}{4}\ln\left|\frac{x+1}{x-1}\right|+\frac{1}{2}\arctan x+C.$$

8. $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i}\tan\frac{i}{n}$.

解：$\because \frac{n}{n+1}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\frac{i}{n}\le\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{n}{n^2+i}\tan\frac{i}{n}\le\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\frac{i}{n}$

而$\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{1}{n}\tan\frac{i}{n}=\int_0^1\tan x\mathrm{d}x=-\ln\cos1.$

9. $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x$.

解：$\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(1+\tan x)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln[1+\tan(\frac{\pi}{4}-x)]\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\frac{2}{1+\tan x})\mathrm{d}x$

$=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}[\ln(1+\tan x)+\ln(\frac{2}{1+\tan x})]\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln2\mathrm{d}x=\frac{\pi\ln2}{8}.$

10. 求函数 $f(x)=\begin{cases}x^{2x},x>0,\\ x\mathrm{e}^x+1,x\le0\end{cases}$ 的极值.

解：$f'(x)=\begin{cases}2x^{2x}(\ln x+1),x>0,\\ (x+1)e^x,x<0\end{cases}$

$f(0)=1,f(-1)=1-\frac{1}{\mathrm{e}},f(\frac{1}{\mathrm{e}})=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}}.$

再由$f''(-1)>0,,f''(\frac{1}{\mathrm{e}})>0$及0的某个领域$f(x)$单调性相反，因此

有极小值$f(-1)=1-\frac{1}{\mathrm{e}},f(\frac{1}{\mathrm{e}})=\mathrm{e}^{-\frac{2}{\mathrm{e}}}$,极大值$f(0)=1.$

11. 求 $f(x)=\arcsin x$ 在 $x=0$ 处的三阶带 Peano 型余项的 Taylor 公式.

解： $f'(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, 即 $[f'(x)]^2\cdot(1-x^2)=1$, 两边再对 x 求导可得：

$$f''(x)=\frac{x}{(1-x^2)^{3/2}},$$

继续求导可得：

$$f''(x)=\frac{1}{(1-x^2)^{3/2}}+\frac{3x^2}{(1-x^2)^{5/2}},$$

将 $x=0$ 代入可得： $f'(0)=1, f''(0)=0, f'''(0)=1$, 故 $f(x)=\arcsin x$ 在 $x=0$ 处的三阶带 Peano 型余项的 Taylor 公式为：

$$f(x)=x+\frac{x^3}{6}+o(x^4).$$

注：此题也可以利用其它方法求解.

12. 求曲线 $y=x^2+1$ 与 $y=2|x|$ 所围图形绕 x 轴旋转所得旋转体的体积.

解：由 $\begin{cases} y=x^2+1 \\ y=2x \end{cases} \Rightarrow x=1,$

所以 $V=2\pi\int_0^1[(x^2+1)^2-4x^2]\mathrm{d}x$

$$=2\pi\int_0^1(x^4-2x^2+1]\mathrm{d}x$$

$$=2\pi(\frac{1}{5}-\frac{2}{3}+1)=\frac{16\pi}{15}.$$

三. 解答题（每小题 6 分, 共 18 分）

得　分	
评卷人	

13. 设 $f(x)$ 可导，且 $f'(x)=f(x)+\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t$，$f(0)=1$，求 $f(x)$.

解：令 $\int_0^1 f(t)\mathrm{d}t=A$, 由 $f'(x)=f(x)+A$, 可解得 $f(x)=Ce^x-A$,

由 $f(0)=1$ 可得 $C=A+1$, ，两边积分可解得

$$A=C\int_0^1 e^x\mathrm{d}x-A=C(e-1)-A=A(e-2)-(e-1),$$

故 $A=\dfrac{e-1}{3-e}$,

所以 $f(x)=\dfrac{2}{3-e}\mathrm{e}^x+\dfrac{e-1}{3-e}$.

14. 设 $f(x)=\begin{cases}\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)^2 dt, & x\neq 0,\\ 0, & x=0,\end{cases}$ 问：$f(x)$ 在 $x=0$ 处是否连续？是否可导？若可导，求出 $f'(0)$.

解：$f(x)=\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)^2 dt=\dfrac{1}{x^2}\int_0^x \sin t^2 dt$

$\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \sin t^2 dt=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{2x}=0$, $\therefore f(x)$在0点连续.

又$f'(0)=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\dfrac{1}{x^2}\displaystyle\int_0^x \sin(x-t)^2 dt-0}{x-0}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1}{x^3}\int_0^x \sin t^2 dt=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x^2}{3x^2}=\dfrac{1}{3}$.

$f(x)$ 在 $x=0$ 处可导且 $f'(0)=\dfrac{1}{3}$.

15. 讨论积分 $\displaystyle\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+\arctan x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性，其中常数 p 为实数.

解：$\lim\limits_{x\to 0}x^{p-1}\cdot\dfrac{\ln(1+\arctan x)}{x^p}=1$, 因此 $p<2$时, $\displaystyle\int_0^1\frac{\ln(1+\arctan x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，

因此 $p \geq 2$时, $\int_0^1 \frac{\ln(1+\arctan x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

$\lim\limits_{x\to+\infty} x^p \cdot \frac{\ln(1+\arctan x)}{x^p} = \ln(1+\frac{\pi}{2})$,

因此 $p > 1$时 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\arctan x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛, $p \leq 1$时 $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(1+\arctan x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 发散.

综上，当 $1 < p < 2$时, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\arctan x)}{x^p}\mathrm{d}x$ 收敛，

$p \leq 1$或$p \geq 2$时, $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+\arctan x)}{x^p}\mathrm{d}x$发散.

得　分	
评卷人	

四. 证明题（每小题 7 分, 共 14 分）

16．设函数 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x) \leq 0$，$x \in [0,1]$，证明：$\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x \leq f(\frac{1}{n+1})$.

证明：因为 $f(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上二阶可导，且 $f''(x) \leq 0$, 故

$$f(x) = f(\frac{1}{n+1}) + f'(\frac{1}{n+1})(x-\frac{1}{n+1}) + \frac{1}{2!}f''(\xi)(x-\frac{1}{n+1})^2$$
$$\leq f(\frac{1}{n+1}) + f'(\frac{1}{n+1})(x-\frac{1}{n+1}),$$

将 x^n 代替 x 且在 $[0,1]$ 上积分可得：

$$\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x \leq f(\frac{1}{n+1}) + \int_0^1 f'(\frac{1}{n+1})(x^n - \frac{1}{n+1})\mathrm{d}x$$
$$= f(\frac{1}{n+1}) + f'(\frac{1}{n+1})\cdot(\frac{1}{n+1}x^{n+1}\Big|_0^1 - \frac{1}{n+1}) = f(\frac{1}{n+1}).$$

所以 $\int_0^1 f(x^n)\,\mathrm{d}x \leq f(\frac{1}{n+1})$.

17. 证明函数 $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致连续.

解：因为 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，因而一致连续，

在 $[1,+\infty)$ 上，

$\forall \varepsilon > 0$, 取 $\delta = \frac{3}{2}\varepsilon, |\sqrt[3]{x_1^2} - \sqrt[3]{x_2^2}| = \frac{2}{3}\xi^{-\frac{1}{3}} |x_1 - x_2| \le \frac{2}{3}|x_1 - x_2| < \varepsilon,$

其中 ξ 夹在 x_1, x_2 之间且大于 1，故 $f(x)$ 在 $[1, +\infty)$ 上一致连续，所以

$f(x) = \sqrt[3]{x^2}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致连续.

得　分	
评卷人	

五. 证明题（8 分）

18. 设 $f(x)$ 在 $[-a, a](a > 0)$ 上具有二阶连续的导函数，且 $f(0) = 0$. 设 $F(x) = \int_{-x}^{x} f(t)\mathrm{d}t,$

证明：至少存在一点 $\xi \in (-a, a)$，使得 $a^3 f''(\xi) = 3F(a).$

解：因为 $f(x)$ 有二阶连续导函数，故将 $F(x)$ 三阶可导，在 0 点将 $F(x)$ 展开为三阶 Lagrange 余项的 Taylor 公式：

$$F(x) = F(0) + F'(0)x + \frac{1}{2!}F''(0)x^2 + \frac{1}{3!}F'''(\xi_1)x^3,$$

$$F(0) = 0,, F'(x) = f(x) + f(-x) = 0, F''(x) = f'(x) - f'(-x), F'''(x) = f''(x) + f''(-x),$$

其中 $F(0) = 0,, F'(0) = f(0) + f(0) = 0, F''(0) = f'(0) - f'(0) = 0,$

$F'''(\xi_1) = f''(\xi_1) + f''(-\xi_1)$，

由达布定理知存在 $\xi \in (-a, a)$, 使得 $2f''(\xi) = f''(\xi_1) + f''(-\xi_1),$

因此，有 $F(a) = \int_{-a}^{a} f(x)\mathrm{d}x = \frac{1}{3}f''(\xi)a^3$, 所以结论成立.

解答内容不得超过装订线