2018 ～2019 学年第一学期

《微积分（一）》(上）课程考试试卷(A 卷) (闭卷)

院(系) 启明学院 专业班级___________ 学号____________ 姓名___________

考试日期: 2019-01-07　　　　考试时间: 8：30-11：00 AM

题号	一	二	三	四	总分
满分	28	28	28	16	100
得分					

得　分	
评卷人	

一. 填空题（每小题 4 分，共 28 分）

1. 设 $E=\{x\,|\,x=(-1)^n+\dfrac{1}{2018^n},n=1,2,\cdots\}$, 则 $\sup E=1+\dfrac{1}{2018^2}$,$\inf E=$ -1 .

2. 设 $f(x)=x^{x^2}(x>0)$，则 $df(x)=x^{x^2+1}(2\ln x+1)dx$.

3. 设 $y=x\cos 2x$,，则 $y^{(2018)}=-2^{2017}(2018\sin 2x+2x\cos 2x)$.

4. 函数 $y=\dfrac{x^3}{2(x+1)^2}$ 的斜渐近线为 $y=\dfrac{x}{2}-1$.

5. $\tan x$ 在 $x=0$ 的三阶带 Peano 型余项的 Taylor 公式为 $x+\dfrac{x^3}{3}+o(x^4)$.

6. $y=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2 x(1+\sin x)^3dx=\dfrac{7\pi}{8}$

7. 曲线 $y=\int_0^x\sqrt{\cos t}\,dt(0\le x\le\dfrac{\pi}{2})$ 的弧长为 2.

得　分	
评卷人	

二. 计算题(每小题 7 分，共 28 分)

8. 求极限：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\sin x}-e^{-\frac{x^2}{6}}}{\tan^5 x}$.

解：$\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x-\sin x}-e^{-\frac{x^2}{6}}}{\tan^5 x}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{\xi}(x-\sin x+\frac{x^2}{6})}{x^5}$　（4 分）

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{6}+o(x^2)}{x^5}=\infty.$$ （3 分）

注：若将题目改为$\lim_{x\to 0}\frac{e^{x-\sin x}-e^{-\frac{x^3}{6}}}{\tan^5 x}$，则结果为$-\frac{1}{5!}=-\frac{1}{120}$.

9. 求极坐标曲线$r=e^{\theta}$在$\theta=\frac{\pi}{2}$处的切线方程.

解：曲线的参数方程为$\begin{cases} x=e^{\theta}\cos\theta, \\ y=e^{\theta}\sin\theta. \end{cases}$ （2 分）

$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{dx}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=\left.\frac{e^{\theta}(\cos\theta+\sin\theta)}{e^{\theta}(\cos\theta-\sin\theta)}\right|_{\theta=\frac{\pi}{2}}=-1$$ （5 分）

所以极坐标曲线$r=e^{\theta}$在$\theta=\frac{\pi}{2}$处的切线方程为：$y+x-e^{\frac{\pi}{2}}=0$.（7 分）

10 .求$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+2\sqrt{n+2}+\cdots+n\sqrt{n+n}}{n^{5/2}}$.

解：$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n+1}+2\sqrt{n+2}+\cdots+n\sqrt{n+n}}{n^{\frac{5}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdot\sqrt{1+\frac{k}{n}}$ （3 分）

$$=\int_0^1 x\sqrt{1+x}dx=\int_1^{\sqrt{2}}2t^2(t^2-1)dt=\frac{4}{15}(\sqrt{2}+1).$$ （7 分）

11. 建立$I_n=\int\frac{1}{(x^2+1)^n}dx$的递推公式.

解：$I_n=\int\frac{1}{(x^2+1)^n}dx=\frac{x}{(x^2+1)^n}-\int xd\frac{1}{(x^2+1)^n}=\frac{x}{(x^2+1)^n}+2n\int\frac{x^2+1-1}{(x^2+1)^{n+1}}dx$(3分）

$$=\frac{x}{(x^2+1)^n}+2nI_n-2nI_{n+1},$$

所以 $I_{n+1}=\frac{2n-1}{2n}I_n+\frac{x}{2n(x^2+1)^n}$. （6 分）

$I_1 = \int \frac{1}{x^2+1} dx = \arctan x + C$（7 分）

得　分	
评卷人	

二．解答题（每小题 7 分，共 28 分）

12.讨论函数 $f(x) = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{x}{n})^n + \sin^{2n} x]$ 的连续性.

解：$f(x) = \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{x}{n})^n + \sin^{2n} x] = \begin{cases} 1, x=0, \\ \lim_{n\to\infty}[(1+\frac{x}{n})^{\frac{n}{x}}]^x + \sin^{2n} x] = e^x+1, x = k\pi+\frac{\pi}{2}, \\ e^x, x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}. \end{cases}$

（5 分）

间断点为：$k\pi + \frac{\pi}{2}(k = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots)$.（7 分）

13. 函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导，无界，证明：$f'(x)$ 在 (a,b) 上也无界. 并且，试举例说明其逆命题不成立。

证明：假设 $f'(x)$ 在 (a,b) 上有界，且设 $|f'(x)| \le L$.（2 分）

$\forall x \in (a,b)$, 确定 $x_0 \in (a,b)$, 由Lagrange中值定理有 $|f(x) - f(x_0)| \le L|x-x_0|$,

$|f(x)| \le |f(x) - f(x_0)| + |f(x_0)| \le L|x-x_0| + |f(x_0)| \le L|b-a| + |f(x_0)|$, 因此 $f(x)$ 有界. 与 $f(x)$

在 (a,b) 上无界矛盾.（4 分）

逆命题不成立，如

$f(x) = x\sin\frac{1}{x}, x\in(0,1). f'(x) = \sin\frac{1}{x} - \frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$ 在 $(0,1)$ 上无界，但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有界.（7 分）

$f(x) = \sqrt{x}, x\in(0,1). f'(x) = x^{-\frac{1}{2}}$ 在 $(0,1)$ 上界，但 $f(x)$ 在 $(0,1)$ 上有界

14.设由 $y = \frac{1}{x^2}, y=0, x=1, x=2$ 所围成的曲边梯形被直线 $x = t(1<t<2)$ 分成两部分，这两部分分别绕 $x = t$ 旋转，问 t 为何值时，这两部分旋转体的体积和最小？

解：$V = \int_1^t 2\pi(t-x)\cdot\frac{1}{x^2}dx + \int_t^2 2\pi(x-t)\cdot\frac{1}{x^2}dx = 2\pi(\ln 2 + \frac{3t}{2} - 2\ln t - 2)$,（4 分）

由 $\frac{dV}{dt}==2\pi(\frac{3}{2}-\frac{2}{t})=0$ 知 $t=\frac{4}{3}$, 又 $\frac{d^2V}{dt^2}=\frac{4\pi}{t^2}>0$，所以 $t=\frac{4}{3}$ 时这两部分旋转体的体积和最小.（7 分）

15. 证明 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx$ 的收敛并计算积分的值.

证明：由于 $\lim\limits_{x\to 0}x^{\frac{1}{2}}\ln\sin x=\lim\limits_{x\to 0}\frac{(\ln\sin x)'}{(x^{-1/2})'}=0,$ 因此 $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx$ 的收敛.（2 分）

令 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx,$ 则

$$A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\cos xdx=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\frac{1}{2}\sin 2x)dx$$ （4 分）

$$=-\frac{\pi\ln 2}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln(\sin 2x)dx=-\frac{\pi\ln 2}{4}+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\ln\sin tdt$$

$$=-\frac{\pi\ln 2}{4}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin tdt=-\frac{\pi\ln 2}{4}+\frac{1}{2}A\ ,$$

所以 $A=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.（7 分）

另解：令 $x=2t,$ 则 $A=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(\sin 2x)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln(2\sin x\cos x)dx$

$$=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx,$$

因为 $\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx \underset{\text{令}x=\frac{\pi}{2}-t}{=\!=\!=} \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\ln\sin xdx,$ 因此

$$A=\frac{\pi}{2}\ln 2+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\sin xdx+2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\ln\cos xdx=\frac{\pi}{2}\ln 2+2A,$$

所以 $A=-\frac{\pi\ln 2}{2}$.

得　分	
评卷人	

四.证明题（每小题 8 分，共 16 分）

16 .设 $g(x)$ 区间上连续 ,在 (a,b) 二阶可导 ,且 $|g''(x)|\geq m>0$,又 $g(a)=g(b)=0$,

证明：$\max\limits_{a\leq x\leq b}|g(x)|\geq\frac{m(b-a)^2}{8}$.

证明：设 x_0 为 $|g(x)|$ 在最大值，显然 $|g(x_0)|\neq 0,$ 则 x_0 为 $g(x)$ 的极值点，将 $g(x)$ 在 x_0 展开，且将

a,b的值代入可得，

$$g(a)=g(x_0)+\frac{1}{2!}g''(\xi_1)(a-x_0)^2, g(b)=g(x_0)+\frac{1}{2!}g''(\xi_2)(b-x_0)^2,$$（4分）

因此有

$$\max_{a\le x\le b}|g(x)|\ge\{\frac{1}{2!}|g''(\xi_1)|(a-x_0)^2,\frac{1}{2!}|g''(\xi_2)|(b-x_0)^2\}\ge\frac{m}{2}\max_{a\le x\le b}\{(a-x_0)^2,(b-x_0)^2\}=\frac{m(b-a)^2}{8}.$$（8分）

18.设 $g\in C^2[0,1], g(0)=g'(0)=0,$ 证明：

(1) $\int_0^1 g(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)^2g''(x)dx.$

(2) $(\int_0^1 g(x)dx)^2\le\frac{1}{20}\int_0^1(g''(x))^2dx.$

证明：(1)利用分部积分公式：$\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)^2g''(x)dx=\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)^2dg'(x)$

$$=\frac{1}{2}(x-1)^2g'(x)\Big|_0^1-\frac{1}{2}\int_0^1 g'(x)d(x-1)^2$$（2分）

$$=-\int_0^1(x-1)g'(x)dx=g(x)\Big|_0^1-\int_0^1 xdg(x)$$

$$=g(1)-xg(x)\Big|_0^1+\int_0^1 g(x)dx=\int_0^1 g(x)dx.$$（5分）

(2)利用柯西许瓦兹不等式：

$$(\int_0^1 g(x)dx)^2=(\frac{1}{2}\int_0^1(x-1)^2g''(x)dx)^2\le\frac{1}{4}\int_0^1(x-1)^4dx\int_0^1(g''(x))^2dx=\frac{1}{20}\int_0^1(g''(x))^2dx.$$（8分）