2022 ～ 2023 学年第一学期

《高等数学(A)》（上）期末考试试卷 A 卷 (闭卷)

院(系) 启明学院 专业班级__________ 学号__________ 姓名__________

考试日期: 2023-2-15　　　　考试时间: 8:30 -11:00AM

题号	一	二	三	四	五	总分
得分	20	12	30	14	24	100

解答内容不得超过装订线

得　分	
评卷人	

一. 填空题（每小题 4 分，共 20 分）

1. $\sup\left\{\arctan\dfrac{1}{1-x}: x>1\right\} = \underline{\quad 0 \quad}$， $\inf\left\{\arctan\dfrac{1}{1-x}: x>1\right\} = \underline{-\dfrac{\pi}{2}}$.

2. 设$[x]$为取整函数，$a>0, b>0$，则 $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{[nb]}{[na]} = \underline{\quad \dfrac{b}{a} \quad}$.

3. 设 $f(x)=x-3x^{\frac{1}{3}}$ 在$[-2,2]$上的最大值为$\underline{\quad 2 \quad}$.

4. 曲线 $y=\dfrac{x^3}{2(x-1)^2}$ 的渐近线有$\underline{x=1, y=\dfrac{1}{2}x+1}$.

5. 微分方程 $yy''-(y')^2=0$ 的通解是$\underline{\quad y=C_1e^{C_2x} \quad}$.

得　分	
评卷人	

二. 单项选择题(每小题 4 分，共 12 分)

6. 函数 $f(x)=\begin{cases}2x+1, & x\le 0,\\ \dfrac{1}{1+x^2}, & x>0\end{cases}$ 的一个原函数为 (　D　).

A. $F(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x\le 0,\\ \arctan x, & x>0;\end{cases}$　　B. $F(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x\le 0,\\ \dfrac{2}{\pi}\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0;\end{cases}$

C. $F(x)=\begin{cases}x^2+x+1, & x\le 0,\\ -\operatorname{arccot} x, & x>0;\end{cases}$　　D. $F(x)=\begin{cases}x^2+x-\dfrac{\pi}{2}, & x\le 0,\\ -\arctan\dfrac{1}{x}, & x>0.\end{cases}$

7. 设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上连续, $I=\int_{-a}^{a}x^3[f(-x)+f(x)]\mathrm{d}x$, 则 I 的值（ B ）.

A. 大于 0；　　B. 等于 0；

C. 小于 0；　　D. 不能确定.

8. 设函数 $f(x)=\int_{\sqrt{e}}^{+\infty}\frac{1}{t\ln^{x+1}t}\mathrm{d}t\ (x>0)$ 在 $x=x_0$ 处取得最小值，则 $x_0=$（ A ）.

A. $\frac{1}{\ln 2}$；　　B. $\ln 2$；

C. $2\ln 2$；　　D. $\frac{1}{2\ln 2}$.

得　分	
评卷人	

三. 计算题（每小题 6 分，共 30 分）

9. 计算 $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sin\frac{n}{n^2+1}\right)\sum\limits_{k=1}^{n}ke^{\frac{k}{n}}$.

解： 原式 $=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n}{n^2+1}\sum\limits_{k=1}^{n}ke^{\frac{k}{n}}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2+1}\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{k}{n}e^{\frac{k}{n}}\frac{1}{n}=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{n^3}{n^2+1}\int_0^1 xe^x\mathrm{d}x=\infty.$

10. 计算 $\lim\limits_{x\to+\infty}\sqrt{x}(x^{\frac{1}{x}}-1)$.

解：

$$\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}(e^{\frac{1}{x}\ln x}-1)=\lim_{x\to+\infty}\sqrt{x}\,\frac{\ln x}{x}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\ln x}{x^{\frac{1}{2}}}=\lim_{x\to+\infty}\frac{\frac{1}{x}}{\frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}}=0.$$

11. 计算 $\int\frac{2x+5}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x$.

解：原式 $=\int\frac{2x+2+3}{x^2+2x+4}\mathrm{d}x=\int\frac{\mathrm{d}(x^2+2x+4)}{x^2+2x+4}+\int\frac{3}{(x+1)^2+3}\mathrm{d}x$

$$=\ln(x^2+2x+4)+\int\frac{1}{(\frac{x+1}{\sqrt{3}})^2+1}\mathrm{d}x=\ln(x^2+2x+4)+\sqrt{3}\arctan\frac{x+1}{\sqrt{3}}+C.$$

12. 设 $x=t+e^t$， $y=\int_0^t e^{u^2}\mathrm{d}u$，求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$， $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}$.

解：$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=\frac{\mathrm{d}y/\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{e^{t^2}}{1+e^t}$, $\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2}=\frac{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\frac{e^{t^2}}{1+e^t})}{\mathrm{d}x/\mathrm{d}t}=\frac{2te^{t^2}(1+e^t)-e^{t^2}e^t}{(1+e^t)^3}=\frac{(2t-1)e^{t^2+t}+2te^{t^2}}{(1+e^t)^3}$.

13. 求心形线 $r=a(1+\cos\theta)(a>0)$ 的面积和全长.

解：周长 $L=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{r^2+r'^2}\mathrm{d}\theta=4a\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\mathrm{d}\theta=8a.$

面积

$$S=2\int_0^{\pi}\frac{1}{2}r^2\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{\pi}(1+\cos\theta)^2\mathrm{d}\theta=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\cos^2\theta)\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2\int_0^{\pi}(1+2\cos\theta+\frac{1+\cos2\theta}{2})\mathrm{d}\theta$$

$$=a^2(\frac{3\theta}{2}+2\sin\theta+\frac{1}{4}\sin2\theta)|_0^{\pi}\Big|=\frac{3\pi a^2}{2}.$$

得　分	
评卷人	

四. 解答题（每小题 7 分，共 14 分）

14. 设 $f(x)$在$(-\infty,\ +\infty)$上连续，且满足方程$\int_0^x(e^x-2e^t)f(t)\mathrm{d}t=e^x(x^2-2x)$，求 $f(x)$的表达式.

解：原方程可化为：　$e^x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-2\int_0^x e^tf(t)\mathrm{d}t=e^x(x^2-2x),$

由于 $f(x)$ 连续，两边可对 x 求导，得　$e^x\int_0^x f(t)\mathrm{d}t+e^xf(x)-2e^xf(x)=e^x(x^2-2),$

或　$\int_0^x f(t)\mathrm{d}t-f(x)=x^2-2$，　$\Rightarrow$　$f'(x)-f(x)=-2x$，　且　$f(0)=2$.

解得

$$f(x)=e^{-\int(-1)dx}[\int(-2x)e^{\int(-1)dx}dx+C]=2x+2+Ce^x\ ,$$

由 $f(0)=2$　得 $C=0$　，　所以　$f(x)=2x+2$.

15. 讨论积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x\arctan x}{1+x^p}\mathrm{d}x$ 的敛散性，并说明理由.

解：因为 $\lim\limits_{x\to+\infty}x^{p-1}\cdot\frac{x\arctan x}{1+x^p}=\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{1+x^{-p}}\arctan x=\frac{\pi}{2}>0$，

所以由比较判别法知，当 $p-1\le1$，即 $p\le2$ 时，积分发散；

当 $p-1>1$，即 $p>2$ 时，积分收敛.

解答内容不得超过装订线

五. 证明题（每小题 8 分，共 24 分）

得　分	
评卷人	

16. 设 $f(x)$ 为 $(-\infty,+\infty)$ 上的连续函数，对 $x\in(-\infty,+\infty), f(x)>0$，且 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，证明：$f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上必能取到最大值.

证：因为 $f(x)>0$，$x\in(-\infty,+\infty)$，所以 $\exists x_0\in(-\infty,+\infty)$，使得 $f(x_0)>0$.

又 $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$，所以对 $\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)>0$，$\exists X>\max\{0,|x_0|\}$，当 $|x|>X$ 时，有 $|f(x)|<\varepsilon=\frac{1}{2}f(x_0)$，即

$$0<f(x)<\frac{1}{2}f(x_0), |x|>X.$$

再由 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上连续可知，$f(x)$ 在 $[-X,X]$ 上连续，从而在 $[-X,X]$ 上取到最大值 M.

显然 $M\ge\frac{1}{2}f(x_0)$，且对一切 $x\in(-\infty,+\infty)$，有 $f(x)\le M$，即 M 是 $f(x)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 上的最大值.

17.设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续，证明: $\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin x|)\mathrm{d}x=\frac{1}{4}\int_0^{2\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x.$

证：

$$\because \int_0^{2\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x+\int_{\pi}^{2\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x$$

$$\int_{\pi}^{2\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x \overset{x=\pi+t}{=} \int_0^{\pi} f(|\sin(\pi+t)|)\mathrm{d}t=\int_0^{\pi} f(|\sin t|)\mathrm{d}t,$$

$$\therefore \int_0^{2\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x=2\int_0^{\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x,. \qquad (1)$$

又

$$\int_0^{\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin x|)\mathrm{d}x+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x,$$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} f(|\sin x|)\mathrm{d}x \overset{x=\pi-t}{=} -\int_{\frac{\pi}{2}}^{0} f(|\sin(\pi-t)|)\mathrm{d}t=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin t|)\mathrm{d}t,$$

$$\therefore \int_0^{\pi} f(|\sin x|)dx=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(|\sin x|)dx\ . \qquad (2)$$

由（1）（2）知原式成立.

18. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上具有连续的导数，$f(a)=0,$ 证明：$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$

证：令 $F(x)=\frac{(x-a)^2}{2}\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t-\int_a^x f^2(t)\mathrm{d}t,$ 因为 $f'(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续，因此 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导，

$$F'(x)=(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t+\frac{(x-a)^2}{2}[f'(x)]^2-f^2(x)$$

$$\ge (x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t-f^2(x)$$

$$\ge (x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t-[\int_a^x 1\cdot f'(t)\mathrm{d}t]^2$$

$$\ge (x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t-\int_a^x 1^2\mathrm{d}t\cdot\int_a^x [f'(t)]^2\mathrm{d}t=0.$$

因此 $F(b)\ge F(a)=0,$ 即 $\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \le \frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(x)]^2\mathrm{d}x.$

证法二：$f(x)-f(a)=\int_a^x f'(t)\mathrm{d}t,$ 由柯西许瓦兹不等式，有

$$f^2(x)=[\int_a^x 1\cdot f'(t)\mathrm{d}t]^2 \le \int_a^x 1^2\mathrm{d}t\cdot\int_a^x [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t=(x-a)\int_a^x [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t,$$

两边积分可得

$$\int_a^b f^2(x)\mathrm{d}x \le \int_a^b\ (x-a)\mathrm{d}x=\frac{(b-a)^2}{2}\int_a^b [f'(t)]^2\,\mathrm{d}t.$$

解答内容不得超过装订线