华中科技大学 2022～2023 学年第一学期

“线性代数”课程考试试卷(A 卷)

考试方式： 闭卷　　考试日期： 2023.02.17 考试时长： 150 分钟

院(系)：＿＿＿＿＿＿　专业班级：＿＿＿＿＿＿

学　号：＿＿＿＿＿＿　姓　名：＿＿＿＿＿＿

一、 判断题（2分×8=16分）（判断题为计算机阅卷，请使用2B铅笔规范填涂，填涂区域要丰满、不要使用划线、打勾、打叉等错误填涂方式）

1. 设A为n阶可逆矩阵， $P(x)$为非 0 多项式，则$P(A)$ 一定可逆.
2. 存在二阶矩阵A，使得 $A^2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.
3. 若n阶方阵A满足$A^2 = O$，则A的秩$\mathrm{r}(A)$最大为 2.
4. 若$AX = 0$只有零解，则非齐次线性方程组$AX = b$有唯一解.
5. 设A为n阶方阵，则它一定可以表达成两个可逆矩阵之和.
6. 设 $A = [\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n] = [\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n]^T$ 为 n 阶方阵，则由 n 维列向量$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$生成的向量空间与由$n$维列向量$\beta_1, \beta_2, \cdots, \beta_n$生成的向量空间相同.
7. 设A, B均为实对称正定矩阵，则AB正定.
8. 若n阶实对称矩阵A正定，并且$A^2 = I$，其中I为单位矩阵，则一定有$A = I$.

二、 填空题（4 分×5=20 分）（请将答案填写在答题卡指定位置上）

1. 已知$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 2 \end{bmatrix}$，则齐次线性方程组$AX = 0$的解空间$N(A)$ = ＿＿＿.
2. 设A为n阶可逆阵，$|A| = 2$, A^*是A的伴随矩阵，则$\begin{bmatrix} O & A^* \\ A & O \end{bmatrix}^{-1}$ = ＿＿＿.
3. 给定$\mathbb{R}^3$中两组基$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$和$\{\beta_1, \beta_2, \beta_3\}$，若$\beta_1 = \alpha_1 - \alpha_2$, $\beta_2 = 2\alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3$, $\beta_3 = \alpha_1 + 3\alpha_2 + 2\alpha_3$，则$\alpha = 2\beta_1 - \beta_2 + 3\beta_3$在$\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3\}$基下的坐标为＿＿＿.
4. 若$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$，矩阵$B = A^3 - I$，则$B$的特征值为＿＿＿.
5. 已知二次型$f(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 4x_3^2 + 2ax_1x_2 - 2x_1x_3 + 4x_2x_3$正定，则$a$的取值范围是＿＿＿.

三、(10 分)(请将答案填写在答题卡指定位置上)

计算$n(n \geq 1)$阶行列式$D_n = \begin{vmatrix} 3 & -2 & & & \\ -1 & 3 & -2 & & \\ & -1 & 3 & \ddots & \\ & & \ddots & \ddots & -2 \\ & & & -1 & 3 \end{vmatrix}$.

四、(10 分)(请将答案填写在答题卡指定位置上)

设A为n阶矩阵，α_1为n维非 0 列向量. 若

$$A\alpha_1 = 3\alpha_1, A\alpha_2 = 3\alpha_2 + 2\alpha_1, A\alpha_3 = 3\alpha_3 + 2\alpha_2,$$

(1) $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$能否由$A\alpha_1, A\alpha_2, A\alpha_3$线性表出？请说明理由.

(2) 证明：$\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$线性无关.

五、(12 分)(请将答案填写在答题卡指定位置上)

讨论a, b取何值时线性方程组$\begin{cases} ax_1 + x_2 + x_3 = 4 \\ x_1 + bx_2 + x_3 = 3 \\ x_1 + 2bx_2 + x_3 = 4 \end{cases}$有解，并求解该方程组.

六、(12 分)(请将答案填写在答题卡指定位置上)

设三阶实矩阵A使得

$$A\begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\-3\\-3\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}-1\\1\\0\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix},\ A\begin{bmatrix}1\\1\\-2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\2\\-4\end{bmatrix}$$

(1) 给出A的特征值.

(2) 计算$A^{2022}\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}$.

七、(10 分)(请将答案填写在答题卡指定位置上)

已 知 实 二 次 型 $f(x_1, x_2, x_3) = ax_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2 + 2x_1x_2$ 通 过 正 交 变 换 $X = CY$ 化为标准形$by_1^2 + 3y_2^2 + y_3^2$，求参数 a, b 及正交矩阵 C.

八、(10 分)(请将答案填写在答题卡指定位置上)

设A为n阶实矩阵，向量$\alpha, \beta \in \mathbb{R}^n$,

(1)讨论$\alpha\beta^T$的秩.

(2)证明：存在$a, b \in \mathbb{R}$，使得行列式

$$|A + s\alpha\beta^T| = a + bs$$

对任意的实数$s \in \mathbb{R}$都成立.