华中科技大学 2023 届微积分期末模拟试卷

出题人:Sukuna

2024 年 6 月 17 日

一、选择题 (一题 3 分, 共 18 分)

1. *f(x)* 可导，$z = xyf(\frac{y}{x})$, 若 $x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = xy(lny - lnx)$, 那么 f 在 *1* 处的值和导数分别是

A、*0.5 0*

B、*0 0.5*

C、*1 0*

D、*0 1*

2. 矩阵由三个列向量组成:$[a_1,a_2,a_3],[b_1,b_2,b_3],[c_1,c_2,c_3]$. 若矩阵满秩, 则直线 l_1:

$$\frac{x-a_3}{a_1-a_2} = \frac{y-b_3}{b_1-b_2} = \frac{z-c_3}{c_1-c_2}$$

和直线 l_2:

$$\frac{x-a_1}{a_3-a_2} = \frac{y-b_1}{b_3-b_2} = \frac{z-c_1}{c_3-c_2}$$

.

A、相交于一点.

B、重合

C、平行且不重合

D、异面

3. 下面说法中, 正确的是:

A、若 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

B、若 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在, 则 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微.

C、若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{|x|+|y|}$ 存在.

D、若 $f(x,y)$ 在 $(0,0)$ 处可微, 则 $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \frac{f(x,y)}{x^2+y^2}$ 存在.

4. 计算 $\oint_L (y+\frac{1}{6}y^3)dx+(2x-\frac{1}{3}x^3)dy.L$ 取下面哪一个积分值最大?

A、$x^2+y^2=1.$

B、$x^2+y^2=2.$

C、$x^2+2y^2=2.$

D、$2x^2+y^2=2.$

5. 若级数 $\sum u_n$ 收敛, 则下面收敛的是:

A、$\sum(-1)^n\frac{u_n}{n}.$

B、$\sum(u_n)^2.$

C、$\sum u_{2n-1}-u_{2n}.$

D、$\sum u_{n+1}+u_n.$

6. 设 $\sum K(x)$ 是将函数 $f(x)=x+1(0\le x\le\pi)$ 做奇延拓后展开成的傅立叶级数，其和函数为 $S(x)$, 则 $S(\frac{-5\pi}{2})$

A、$\frac{-\pi}{2}+1.$

B、$\frac{\pi}{2}+1.$

C、$\frac{-\pi}{2}-1.$

D、$\frac{\pi}{2}-1.$

二、填空题 (一题 4 分, 共 16 分)

7. 设 $u(x,y,z)=x^5+6x^4y+3x^2z^2$, 求 $div(grad\boldsymbol{u})$.

8. 设 $z=f(x,y)$ 在 $(1,1)$ 处可微,$f(1,1)=1,\frac{\partial f}{\partial x}|_{(1,1)}=2,\frac{\partial f}{\partial y}|_{(1,1)}=3,$ 对于 $\phi(x)=f(x,f(x,x))$, 求 $\frac{d}{dx}\phi^3(x)|_{x=1}$.

9. 用二重积分表示:$\lim\limits_{n\to\infty}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\frac{n}{(n+i)(n^2+j^2)}$.

10. 求 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1-4n^2}$.

三、基本计算题 (一题 7 分, 共 56 分)

11. 求 $L:\frac{x-1}{1}=\frac{y}{1}=\frac{z-1}{-1}$ 在 $\Pi:x-y+2z-1=0$ 的投影.

12.

$$\begin{cases} u = f(x-ut, y-ut, z-ut) & (1) \\ g(x,y,z) = 0 & (2) \end{cases}$$

求 u 对 x 和 y 的偏导.

13. 直线 l_1:

$$\begin{cases} x+y+b=0 & (3) \\ x+ay-z=3=0 & (4) \end{cases}$$

在平面 Π 上, 而 Π 与曲面 $z=x^2+y^2$ 相切于 $(1,-2,5)$, 求 a,b.

14. 半径为 R 的球面 $\sum$ 的球心在定球面 $x^2+y^2+z^2=a^2$ 上, 求 R 为什么值的时候 $\sum$ 和球面交界处面积最大?

15. 求 $\iint_D \frac{\sqrt{x^2+y^2}}{\sqrt{4a^2-x^2-y^2}}dxdy$, 其中 D 是 $x^2+(y+a)^2=a^2$ 与 $y=-x$ 的相交范围内.

16. $f(x,y)$ 具有连续二阶偏导 $f(1,y)=0, f(x,1)=0, \iint_D f(x,y)dxdy=a$. 计算 $\iint_D xyf(x,y)dxdy$. 其中 D 是由 $(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)$ 组成的正方形.

17. $\oint_C \frac{\phi(y)dx+2xydy}{2x^2+y^4}$, 当 C 不经过原点的时候为积分值为 0, 问 $\phi(y)$.

18. 已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_n$ 在 $\mathscr{R}$ 收敛，和函数 y 有 $y''-2xy'-4y=0(y(0)=0, y'(0)=1)$.

(1) 证明 $a_{n+2}=\frac{2}{n+1}a_n$.

(2) 求 y

四、分析证明题 (一题 5 分, 共 10 分)

19. 判断级数 $\sum_{n=1}^{\infty}[1-sin(\frac{(-1)^n}{n^p})-cos(\frac{(-1)^n}{n^p})]$ 的收敛性.

20. 证明积分不等式:($f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续), $f(x)>0$.

$$\frac{(b+a)^2(b-a)^2}{4} \le \int_a^b xf(x)dx \int_a^b \frac{x}{f(x)}dx$$

题目可能有缺漏, 有问题可联系 QQ:1064687807