

华中科技大学 2023 届微积分期中模拟试卷

出题人:CSXJ1902 Sukuna

2024 年 6 月 17 日

一、基础计算题 (一题 6 分, 共 60 分)

1. 如果微分方程

$$y'' + a(x)y' + b(x)y = f(x)$$

的三个特解是 e^{3x} , e^x 和 x , 那么满足 $y(0) = 2, y'(0) = 3$ 的特解是?

2. 解微分方程:

$$y''y + (y')^2 = 0$$

$$\text{满足 } y(0) = 1, y'(0) = \frac{1}{2}$$

3. 求过点 $P(2, 1, 3)$ 且与直线 L_1 :

$$\frac{x+1}{3} = \frac{y-1}{2} = \frac{-z}{1}$$

垂直相交的直线方程

4.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases} \quad \begin{matrix} (1) \\ (2) \end{matrix}$$

在 xOy 和 zOx 面上的投影方程.

5. 假设 $\phi(u, v)$ 有连续偏导数, $\phi(cx - az, cy - bz) = 0$ 确定隐函数 $z = z(x, y)$, 证明 $a \frac{\partial z}{\partial x} + b \frac{\partial z}{\partial y} = c$

6. 设函数

$$u(x, y) = \phi(x+y) + \phi(x-y) + \int_{x-y}^{x+y} \eta(t) dt$$

$$\text{证: } \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

7. 设 $f(u, v, w)$ 二阶偏导连续, $z = f(x, x+y, xy)$, 求 $\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$

8. 计算

$$\iint_D (x^3 \sin y + (x+y)^2) dx dy$$

其中 $D: x^2 + y^2 \leq 2y$

9. 计算

$$\iiint_V (xy^2 z^3) dx dy dz$$

其中 V 由 $z=0, z=xy, y=x, y=1$ 组成.

10. 计算

$$\iiint_V x + z dx dy dz$$

其中 $V: \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq \sqrt{2 - x^2 - y^2}$

二、综合题 (一题 8 分, 共 40 分)

11. 求

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{-1}$$

(1) 在 $x-y+1=0$ 上的投影方程.

(2) 线段绕 y 轴旋转一周的方程

12. 若

$$x^2 - 6xy + 10y^2 - 2yz - z^2 + 18 = 0$$

求 z 的最大值.

13. 对于 $f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, f(0, 0) = 0$

(1) 连续性.

(2) 偏导数存在性.

(3) 可微性.

(4) 方向导数存在性质.

14. 设一球体半径为 R, P_0 是球面上一个点, 球体的密度与到这个点距离的平方成正比, 求重心.

15. 计算

$$\iint_D |x+y-1| dx dy$$

其中 $D: x^2 + y^2 \leq 1$

题目可能有缺漏, 有问题可联系 QQ:1064687807

由此往下,十由旬

答案

Solution 1.

$$y = e^x + e^{3x} - x$$

Solution 2.

$$y = \sqrt{1-x}$$

Solution 3.

$$\begin{cases} 3x + 2y - z - 5 = 0 & (3) \\ x - 2y - z + 3 = 0 & (4) \end{cases}$$

Solution 4.

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = ax & (5) \\ z = 0 & (6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} z^2 = a^2 - ax & (7) \\ y = 0 & (8) \end{cases}$$

Solution 5. $z_x = \frac{c\phi_u}{a\phi_u + b\phi_v}, z_x = \frac{c\phi_v}{a\phi_u + b\phi_v}$
帶入可得.

Solution 6.

$$u_x = \phi^i(x+y) + \phi'(x-y) + \eta(x+y) - \eta(x-y)$$

,

$$u_y = \phi^i(x+y) - \phi'(x-y) + \eta(x+y) + \eta(x-y)$$

.

下略.

Solution 7.

$$f_{12} + xf_{13} + f_{22} + (x+y)f_{23} + f_3 + xyf_{33}$$

Solution 8. $\frac{3\pi}{2}$

Solution 9. $\frac{1}{312}$

Solution 10. $\frac{\pi}{2}$

Solution 11. (2). $4x^2 - 17^2 + 4^z + 2y - 1 = 0$

Solution 12. 极小值:-3. 极大值:3.

Solution 13. (2) 偏导数都为 0.

(3) *No*.

(4) 0.

Solution 14. 将原点移动到球面上 P_0 , 得到 $(0, 0, \frac{5R}{4})$

Solution 15. $\frac{5}{3} + \frac{\pi}{2}$