

Gedwongen oscillatie en resonantie

Pieter Luyten & Alex Windey

December 2018

1 Inleiding

In dit practicum worden de fenomenen van mechanische gedempte oscillatie en resonantie bestudeerd. (mms nog is brak bij)

2 Materiaal & Methoden

In dit practicum wordt gebruik gemaakt van een gedempte harmonische oscillator met een gedwongen sinusoidale aandrijving. Hierbij is de harmonische oscillator een massa-veersysteem en wordt de aandrijving gecreëerd door een motor. In dit geval oscilleert de massa onder water waardoor er ook demping optreedt. Het toepassen van de tweede wet van Newton op dit massa-veersysteem geeft volgende formule:

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} = -kx - \eta \frac{dx}{dt} + F_0 e^{i\omega t} \quad (1)$$

Hierin is m de massa in $[kg]$, k $[N/m]$ de veerconstante en x de uitwijking van de massa t.o.v. de evenwichtspositie in $[m]$. De dempingskracht wordt evenredig met de snelheid genomen, waarbij η $[N(m/s)^{-1}]$ de dempingscoëfficiënt is. De sinusoidale aandrijvingskracht wordt geschreven als $F_0 e^{i\omega t}$ zodat F_0 $[N]$ de amplitude van de beweging is, ω $[Hz]$ de frequentie en t $[s]$ de tijd. Oplossen van differentiaalvergelijking ?? naar x geeft:

$$x = \frac{F_0}{m \left(\sqrt{(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + (\omega \frac{\eta}{m})^2} \right)} e^{i\omega t + i\phi(\omega)} \quad (2)$$

met

$$\phi = -\text{Bgtan} \left(\frac{\eta \omega}{m(-\omega^2 + \omega_0^2)} \right) \quad (3)$$

In vergelijking ?? is de eigenfrequentie van het massa-veersysteem $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ en $\phi(\omega)$ het faseverschil t.o.v. de aandrijving. De absolute waarde nemen van de oplossing voor x geeft de amplitude $A[m]$ van de oscillatie:

$$A = \frac{F_0}{m \sqrt{\frac{\eta^2 \omega^2}{m^2} + (-\omega^2 + \omega_0^2)^2}} \quad (4)$$

Deze formules worden gebruikt door om de data van de experimenten te fitten. Om het faseverschil te kunnen fitten is er echter nog wat manipulatie van de data of de vergelijking nodig. De meetopstelling gebruikt namelijk een andere conventie voor het teken van de faseverschuiving dan die in vergelijking ?. Ook hangt de waarde van het faseverschil af van de beginpositie van de aandrijving, dit zorgt voor een verschuiving met een constante van de fase. om te kunnen fitten wordt concreet het teken

van het rechterlid van vergelijking ?? gewisseld en wordt er een extra, constante, term $\phi_0[rad]$ bij opgeteld. Dit geeft volgende vergelijking om te fitten:

$$\phi = B \tan\left(\frac{\eta\omega}{m(-\omega^2 + \omega_0^2)}\right) + \phi_0 \quad (5)$$

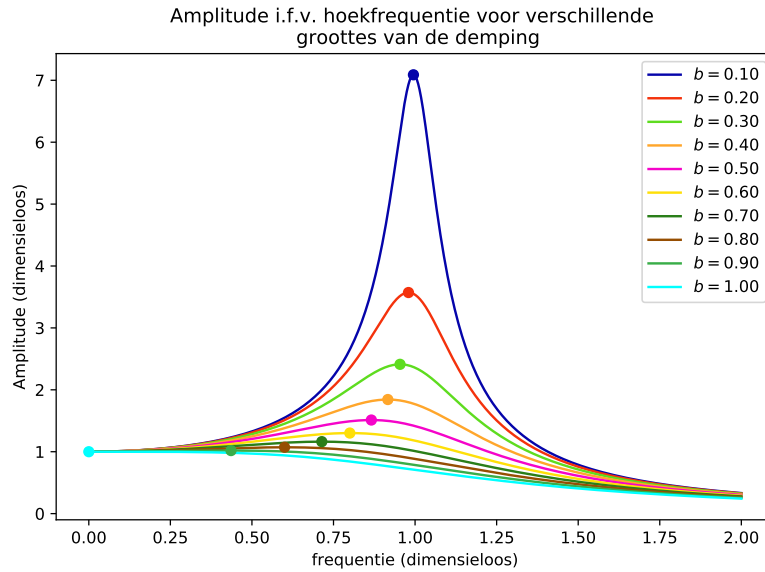
Formules ?? en ?? voor de amplitude en het faseverschil kunnen herschreven worden in termen van $X = \frac{F_0}{k}$, een dimensieloze frequentie $w = \frac{\omega}{\omega_0}$ en een dimensieloze $b = \frac{\eta}{\sqrt{2km}}$. De bekomen dimensieloze formule voor de amplitude A is dan:

$$A = \frac{X}{\sqrt{2b^2w^2 + (w^2 - 1)^2}} \quad (6)$$

Ook het faseverschil kan dan in een dimensieloze vorm geschreven worden:

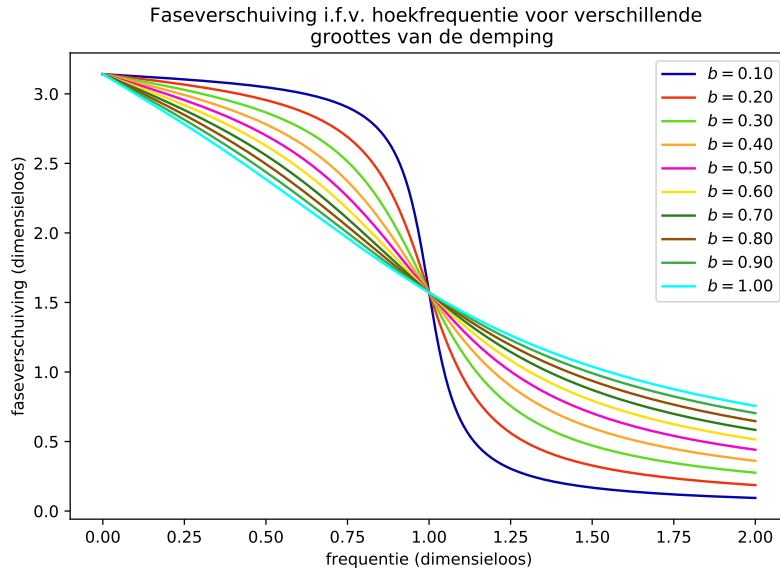
$$\phi = -B \tan\left(\frac{\sqrt{2}bw}{-w^2 + 1}\right) \quad (7)$$

In Figuur ?? wordt de amplitude A in functie van de dimensieloze frequentie w voor verschillende dempingssterktes b geplot.

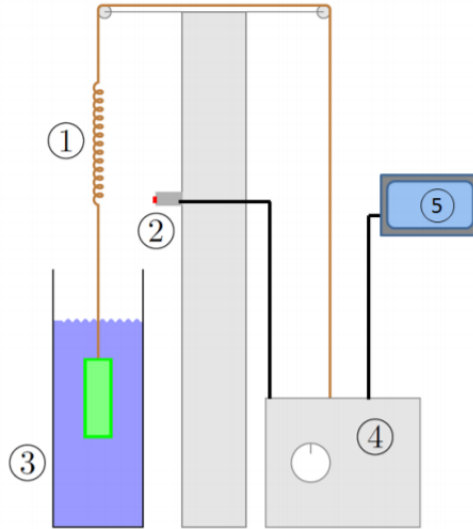


Figuur 1: De amplitude in functie van de hoekfrequentie voor de dimensiloe eenheden

De gebruikte meetopstelling wordt weergegeven in Figuur ??.



Figuur 2: De faseverschuiving in functie van een dimensioneloze hoekfrequentie w voor een aantal waarden van de dimensioneloze dempingsfactor b . De geplotte functie is vergelijking ??

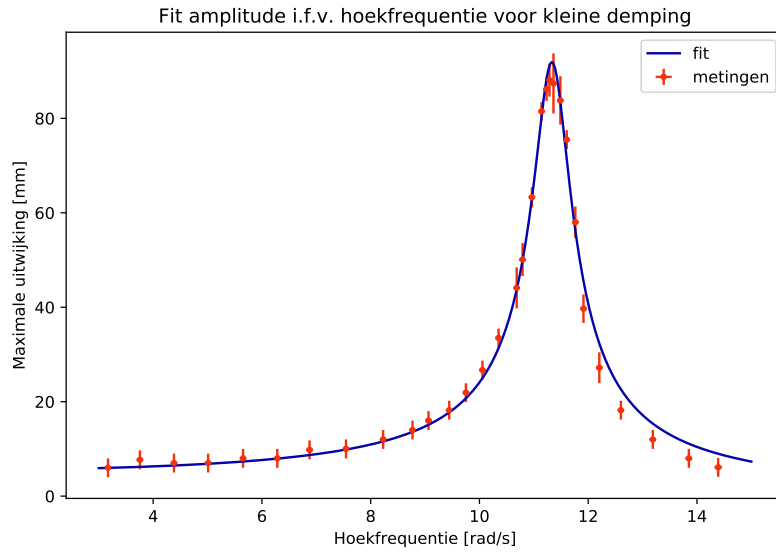


Figuur 3: Schema van de meetopstelling

3 Resultaten

Reeks	$\omega_0[rad/s]$	$m[kg]$	$\eta[N/(m/s)]$	$F_0[N]$	$\phi_0[rad]$
amplitude	11.342 ± 0.010	12.3 ± 0.3	8.35 ± 0.13	8.70 ± -0.10	-0.144 ± 0.016
fase	11.301 ± 0.010	7.3 ± 0.5	3.4 ± 0.2		

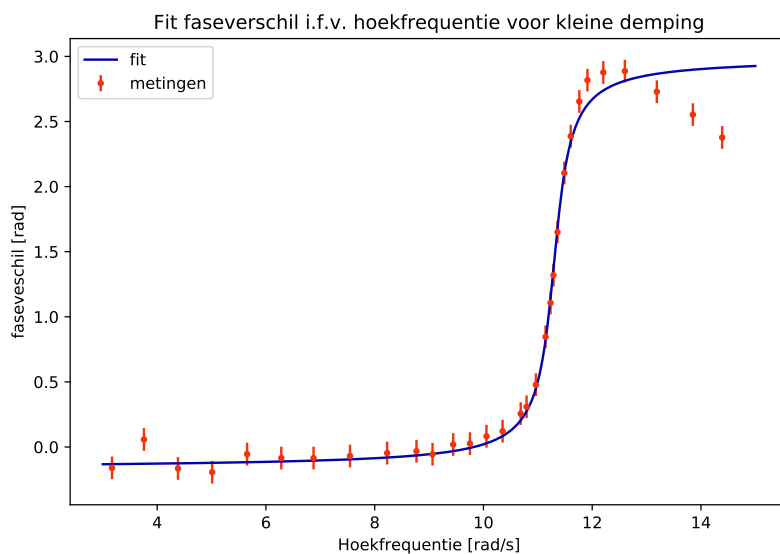
Tabel 1: De gefitte parameters voor de data van het experiment met een kleine demping. De waarden in een rij komen overeen met de fit door de data in de kolom reeks, dus met de fit van amplitude i.f.v. de hoekfrequentie of van de fase i.f.v. de hoekfrequentie.



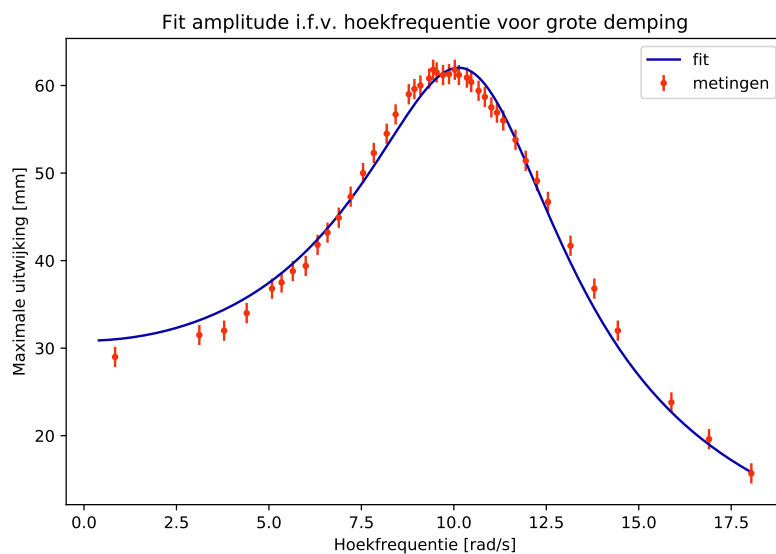
Figuur 4: De gemeten amplitudes in functie van de hoekfrequentie met kleine damping en de fit door de data. De gefitte functie is vergelijking ??, de fitparameters staan in tabel ?? in de rij amplitude.

Reeks	$\omega_0[rad/s]$	$m[kg]$	$\eta[N/(m/s)]$	$F_0[N]$	$\phi_0[rad]$
amplitude	10.88 ± 0.02	2.81 ± 0.02	15.72 ± 0.08	10.24 ± 0.04	
fase	10.61 ± 0.03	2.70 ± 0.06	11.7 ± 0.2		-0.259 ± 0.008

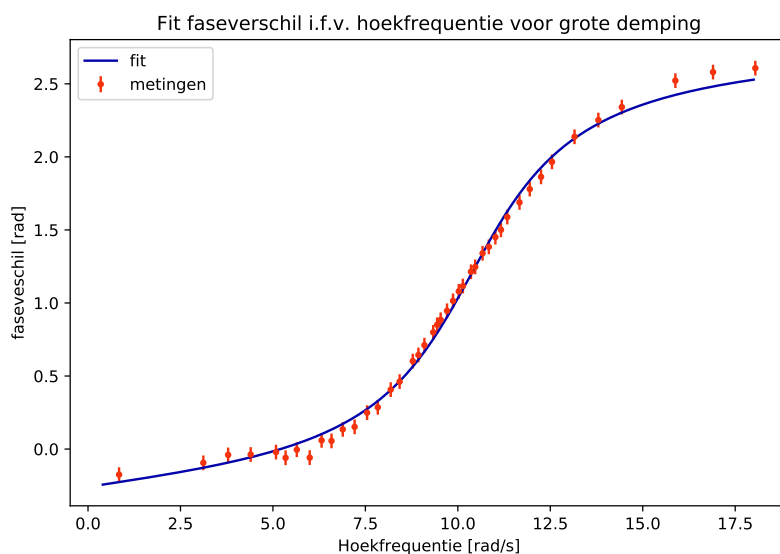
Tabel 2: De gefitte parameters voor de data van het experiment met een grote damping. De waarden in een rij komen overeen met de fit door de data in de kolom reeks, dus met de fit van amplitude i.f.v. de hoekfrequentie of van de fase i.f.v. de hoekfrequentie.



Figuur 5: De gemeten faseverschillen in functie van de hoekfrequentie met kleine damping en de fit door de data. De gefitte functie is vergelijking ??, de fitparameters staan in tabel ?? in de rij fase.



Figuur 6: De gemeten amplitudes in functie van de hoekfrequentie met grote damping en de fit door de datapunten. De gefitte functie is vergelijking ??, de fitparameters staan in tabel ?? in de rij amplitude.



Figuur 7: De gemeten faseverschillen in functie van de hoekfrequentie met grote damping en de fit door de datapunten. De gefitte functie is vergelijking ??, de fitparameters staan in tabel ?? in de rij fase.