

Practicum: De Lorenz attractor

Academiejaar 2018–2019

In de jaren 1950-1960 werd numeriek voorspellen van het weer mogelijk dank zijn betere computers en numerieke technieken om de atmosferische vergelijkingen op te lossen. Een andere techniek voor weersvoorspelling is een statistische methode. De wiskundige meteoroloog Edward N. Lorenz (1917–2008) besloot om beide methoden met mekaar te vergelijken op basis van een zeer sterk vereenvoudigd weermodel, zie [3, (25)–(27)]. Het model van Lorenz bevat drie gekoppelde niet-lineaire differentiaalvergelijkingen

$$\begin{aligned}x'(t) &= -\sigma x + \sigma y, \\y'(t) &= rx - y - xz, \\z'(t) &= -bz + xy,\end{aligned}\tag{1}$$

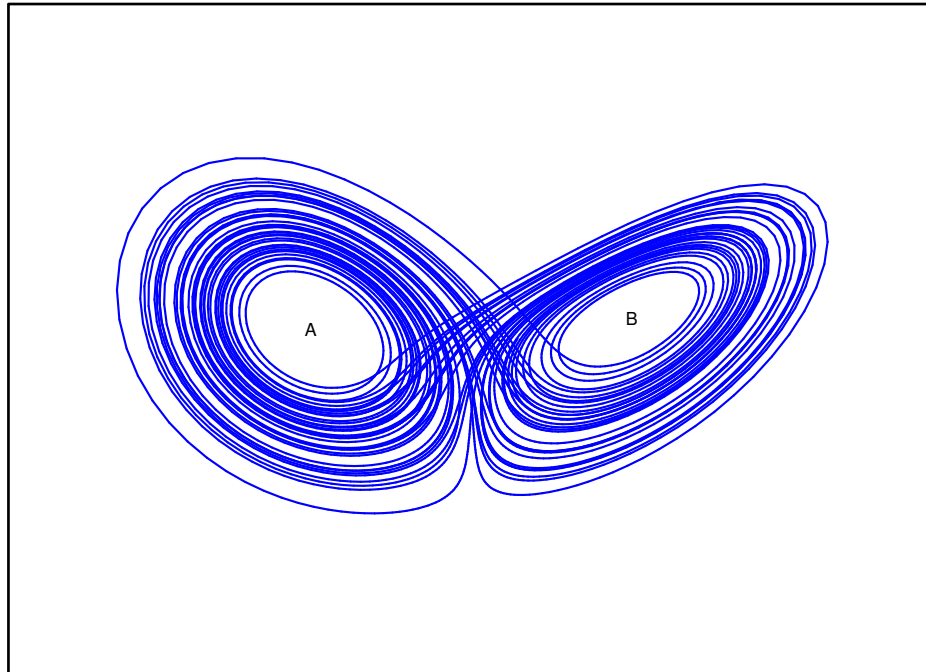
waarbij σ , r en b drie parameters zijn. We nemen in deze werktekst steeds

$$\sigma = 10, \quad r = 28, \quad b = 8/3.$$

Dit is een autonoom systeem en we kunnen paden tekenen in de faseruimte \mathbb{R}^3 (het xyz -vlak) of projecties in de fasevlakken (het xy -vlak, het xz -vlak of het yz -vlak). Je kan natuurlijk ook elke functie x , y of z tekenen voor $t \in [0, T]$ met T een gepaste waarde. Lorenz stelde vast dat de paden een poosje ronddraaien rond een punt A en daarna overgaan tot een aantal toeren rond een tweede punt B , vervolgens na een schijnbaar toevallig aantal rondjes terug rond A gaan draaien en dan weer rond B , enzoverder. Dit schijnbaar toevallig gedrag bleek niet af te hangen van de beginvoorwaarde. Wat echter wel merkwaardig is, is dat twee paden met beginvoorwaarden zeer dicht bij elkaar na verloop toch erg verschillend worden, waarbij bijvoorbeeld het ene pad rond A draait op het moment dat het andere pad rond B draait. Dit fenomeen is men het *vlindereffect* gaan noemen: kleine verschillen in de beginvoorwaarden (het fladderen van de vleugels van een vlinder) kunnen grote wijzigingen opleveren na verloop van tijd.

Opdracht 1: Bekijk het filmpje **Chaos VII: Vreemde attractors – het vlindereffect** op de website

<http://www.chaos-math.org/nl/chaos-vii-vreemde-attractors>



Figuur 1: Een pad op de Lorenz attractor

Het Lorenz systeem van differentiaalvergelijkingen heeft een aantal kritieke punten, maar geen van deze kritieke punten is stabiel.

Opdracht 2: Bepaal de kritieke punten van (1). Wat is het gedrag van de paden in het faseportret van de vlakken opgespannen door de eigenvectoren?

Noem de kritieke punten verschillend van de oorsprong dan A en B , waarbij A een negatieve x -coördinaat heeft en B een positieve x -coördinaat (zie Figuur 1). De paden in de faseruimte zullen voor $t \rightarrow \infty$ op een verzameling L blijven en die L noemen we de *Lorenz attractor*. De meeste paden zullen op chaotische wijze op de Lorenz attractor blijven draaien rond afwisselend A en B .

Toch bestaan er ook beginvoorwaarden die periodieke paden opleveren. Dit zijn paden zodat $(x(t), y(t), z(t)) = (x(t+T), y(t+T), z(t+T))$ voor elke $t \geq 0$, waarbij T de periode is. Deze periodieke paden krijgen een naam (of code) waarbij wordt weergegeven hoe rond de kritieke punten A en B wordt gedraaid. Zo is AB een periodieke oplossing die een keer rond A draait en dan rond B om dan terug te keren naar de beginpositie. De oplossing $AABAB$ is een periodieke oplossing die twee keer rond A draait, dan een keer rond B , opnieuw een keer rond A en dan rond B om daarna terug te keren naar de beginpositie. De oplossing met beginvoorwaarden

$$x(0) = -13,763\,610\,682\,134, \quad y(0) = -19,578\,751\,942\,452, \quad z(0) = 27$$

is de periodieke oplossing AB .

Opdracht 3: Bereken numeriek de periodieke oplossing AB met de methode van Euler, de verbeterde methode van Euler en de methode van Runge-Kutta. Bepaal de periode T als je weet dat $1,5 \leq T \leq 1,6$. Hoe groot moet je de stapgrootte h kiezen als je $|x(0) - x(T)| < 10^{-5}$ wil krijgen?

Je zal de verschillende numerieke methoden moeten toepassen op het Lorenz systeem (1) en je plot dan best de berekende oplossing in het xz -vlak of je plot alleen de grafiek van de functie x . Experimenteer door de stapgrootte h te verkleinen tot je ziet dat het pad terug naar de beginpositie gaat. Dit doe je tot $|x(0) - x(T)| < 10^{-5}$. Neem een plot in het xz -vlak op in je verslag.

We gaan nu op zoek voor welke beginvoorwaarde de periodieke oplossing $AAAB$ wordt gevonden.

Opdracht 4: Neem de stapgrootte h uit de vorige opdracht en gebruik de methode van Runge-Kutta om de beginwaarde $y(0)$ te zoeken die de periodieke oplossing $AAAB$ geeft. Deze periodieke oplossing $AAAB$ heeft beginvoorwaarden $x(0) = -11,998\ 523\ 280\ 062$ en $z(0) = 27$.

Voor deze opdracht zal je de Runge-Kutta methode gebruiken voor verschillende waarden van $y(0) \in [-16, -15]$ tot je een periodieke oplossing vindt van het type $AAAB$. In het artikel van D. Viswanath [4] vind je een tabel met de beginvoorwaarden voor de periodieke oplossingen. Je kan je resultaat vergelijken met de juiste waarde in die tabel.

De periodieke oplossingen komen enkel voor bij zeer speciale beginvoorwaarden. Ze zijn bovendien onstabiel in de zin dat kleine afwijkingen van die beginvoorwaarden een niet-periodieke oplossing geven. Dit zal je ook merken als je de oplossing verder laat evolueren: de oplossing begint dan af te wijken van de periodieke oplossing en wordt een chaotische oplossing die de ene keer rond A draait en dan weer rond B , waarbij er geen patroon is te herkennen in de afwisseling tussen A en B . Als we dan andere beginvoorwaarden nemen dan diegene die tot een periodieke oplossing leiden, dan krijg je na verloop van tijd een pad dat op de Lorenz attractor ligt. Omdat de grafieken van die paden dicht liggen op de Lorenz attractor, kan je dus een benaderende tekening maken van de Lorenz attractor door een chaotisch pad lang te laten lopen.

Opdracht 5: Maak een tekening van de Lorenz attractor (in drie dimensies, die je voor je verslag natuurlijk projecteert in een vlak) door enkele paden te tekenen waarbij je $t \rightarrow \infty$ laat gaan. Neem een tekening op in je verslag waarbij je de Lorenz attractor langs ten minste drie kanten laat zien.

Je kan wat meer informatie vinden over de Lorenz vergelijkingen en de Lorenz attractor in de volgende boeken

- Boyce en DiPrima [1, pp. 577–584], Paragraaf 9.8, Chaos and Strange Attractors: The Lorenz Equations.
- Edwards en Penney [2, pp. 438–440], Paragraaf 6.5, Chaos in Dynamical Systems: The Lorenz Strange Attractor.

Je mag samen met andere studenten werken aan de opdrachten in deze werktekst maar je maakt een individueel verslag waarin je de opdrachten 2–5 verwerkt. Dit verslag maak je bij voorkeur in \LaTeX en je geeft het af ten laatste op vrijdag 29 november (17:00 u). Je mag de numerieke berekeningen maken in numpy/sympy of in Matlab (of met een ander programma). Zorg ervoor dat het gebruikte programma mee in je verslag staat. Om je

een beetje verder te helpen geef ik hieronder een mogelijke code. Om de methode van Euler te in Matlab te programmeren voor de oplossing van

$$\begin{cases} x'(t) = f(t, x, y) \\ y'(t) = g(t, x, y). \end{cases}$$

op het interval $[a, b]$ met beginvoorwaarden $x(a) = x_0$ en $y(a) = y_0$, kan je onderstaand voorbeeld gebruiken. Maak zelf de nodige aanpassingen in de code voor een stelsel van drie vergelijkingen. Je maakt best een m-bestand (bijvoorbeeld `EULER.m`) met daarin de commando's

```
for i=1:n
    x(i+1)=x(i)+h*f(t(i),x(i),y(i));
    y(i+1)=y(i)+h*g(t(i),x(i),y(i));
end
```

In Matlab doe je dan

```
>> n=1000;
>> h:=(b-a)/n;
>> t=[a:h:b];
>> x(1)=x0;
>> y(1)=y0;
>> EULER
>> plot(t,x)
>> plot(t,y)
```

Deze code moet je zelf aanpassen voor de verbeterde methode van Euler en voor de Runge-Kutta methode.

Referenties

- [1] William E. Boyce, Richard C. DiPrima, *Elementary Differential Equations and Boundary Value Problems*, International Student Version, John Wiley & Sons, 2013 (tenth edition).
- [2] C. Henry Edwards, David E. Penney, *Differential Equations and Boundary Value Problems: computing and modelling*, Pearson Education International, 2008 (fourth edition)
- [3] Edward N. Lorenz, *Deterministic nonperiodic flow*, Journal of the Atmospheric Sciences **20** (1963), 130–141.
- [4] Divakar Viswanath, *Symbolic dynamics and periodic orbits of the Lorenz attractor*, Nonlinearity **16** (2003), 1035–1056.