Frage 1

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, dann ist $f'(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

Hinweis Quotientenregel.

Frage 2

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = x \sin(x)$, dann ist $f'(x) = x \cos(x) + \sin(x)$.

Hinweis Produktregel.

Frage 3

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \exp(\sin(x))$, dann ist $f'(x) = \cos(x)\exp(\sin(x))$.

Hinweis Kettenregel.

Frage 4

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Wenn $\log_2(x+3) = 5$ ist, dann ist $x = 29$.

Hinweis Wahr.

Antwort 2

Thema: Differentiationsregeln

Wahr mit der Produktregel.

Antwort 1

Thema: Differentiationsregeln

Wahr, denn mit der Quotientenregel ist $f'(x) = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

Antwort 4

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr, denn aus $\log_2(x+3) = 5$ folgt $2^5 = x + 3$, also $x = 32 - 3 = 29$.

Antwort 3

Thema: Differentiationsregeln

Wahr mit der Kettenregel.

Frage 5

Thema: Trigonometrische Funktionen

Wahr oder falsch? $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(7x)} = \dfrac{7}{3}$.

Hinweis Falsch.

Frage 6

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? $\lim_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ existiert nicht.

Hinweis Wahr.

Frage 7

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Wenn $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a} g(x)$ beide nicht existieren, dann existiert auch $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ nicht.

Hinweis Falsch.

Frage 8

Thema: Definition von Stetigkeit

Geben Sie ein Beispiel für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $f + g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, aber f und g sind in keinem Punkt stetig.

Hinweis Denken Sie an die Dirichlet-Funktion und wandeln Sie diese etwas ab.

Antwort 6

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr. Sei $(x_n) = (\frac{1}{n})$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$. Ist $(y_n) = (-\frac{1}{n})$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|-\frac{1}{n}|}{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} -1 = -1$. Damit exist $\lim\limits_{x\to 0} \frac{|x|}{x}$ nicht.

Antwort 5

Thema: Trigonometrische Funktionen

Falsch. Für $x \neq 0$ gilt nämlich $\frac{\sin(3x)}{\sin(7x)} = 3x \frac{\sin(3x)}{3x} \frac{1}{7x} \frac{7x}{\sin(7x)} = \frac{3}{7} \frac{\sin(3x)}{3x} \frac{7x}{\sin(7x)}$. Ist (x_n) eine Nullfolge, dann sind auch $(3x_n)$ und $(7x_n)$ Nullfolgen, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sin(3x_n)}{3x_n} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{7x_n}{\sin(7x_n)} = 1$. Damit folgt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(7x)} = \lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{3}{7} \dfrac{\sin(3x)}{3x} \dfrac{7x}{\sin(7x)} = \dfrac{3}{7}$.

Antwort 8

Thema: Definition von Stetigkeit

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Ein ähnlicher Beweis wie der, dass die Dirichlet-Funktion in keinem Punkt stetig ist, zeigt auch, dass f und g in keinem Punkt stetig sind. Es gilt aber $f + g = \hat{0}$, $f \cdot g = (\widehat{-1})$ und $\frac{f}{g} = (\widehat{-1})$, also sind diese Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Antwort 7

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Falsch. Sei $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{x}$. Sei $(x_n) = (\frac{1}{n})$. Dann ist $(f(x_n)) = (n)$ unbeschränkt, also nicht konvergent. Es folgt, dass $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nicht existiert. Sei $g = -f$. Auch $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ existiert nicht. Aber $f + g = \hat{0}$, die konstante Funktion, also $\lim\limits_{x \to 0} (f + g)(x) = 0$.

Frage 9

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sqrt{x+3} - \sqrt{3}}{x}$ existiert nicht.

Hinweis Erweitern Sie den Bruch mit $\sqrt{x+3} + \sqrt{3}$.

Frage 10

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$ existiert nicht.

Hinweis Wahr.

Frage 11

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Wenn $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ existieren, dann existiert auch $\lim_{x\to a} g(x)$.

Hinweis Wahr.

Frage 12

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Wenn $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a}((fg)(x))$ existieren, dann existiert auch $\lim_{x\to a} g(x)$.

Hinweis Falsch.

Antwort 10

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr. Für $x \neq 1$ ist $\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x+2}{x-1}$. Sei nun $(x_n) = (1 + \frac{1}{n})$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}+2}{1+\frac{1}{n}-1} = \lim\limits_{n\to\infty} n(3+\dfrac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty}(3n+1)$. Da die Folge $(3n+1)$ unbeschränkt ist, existiert der Grenzwert nicht.

Antwort 9

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Falsch. Für $x \neq 0$ gilt $\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \frac{x+3-3}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$. Damit ist $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Antwort 12

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Falsch, denn für $f = \hat{0}$ gilt immer $\lim\limits_{x \longrightarrow a}((fg)(x)) = 0$, egal, wie g aussieht.

Antwort 11

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr, denn wenn $\lim_{x \to a} f(x)$ und $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x))$ existieren, dann existiert auch $\lim_{x \to a}(f(x) + g(x) - f(x)) = \lim_{x \to a} g(x)$.

Frage 13

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \frac{3x+2}{2x+3}$, dann ist $f'(x) = \frac{5}{(2x+3)^2}$.

Hinweis Quotientenregel.

Frage 14

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ ist, dann ist $f'(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

Hinweis Kettenregel.

Frage 15

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \exp(\frac{\sin(x)}{\cos(x)})$ ist, dann ist $f'(x) = \frac{1}{\cos^2(x)\exp(\frac{\sin(x)}{\cos(x)})}$.

Hinweis Ketten- und Quotientenregel.

Frage 16

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Wenn $\log_2(2^{4x}) = 20$ ist, dann ist $x = 5$.

Hinweis Wahr.

Antwort 14

Thema: Differentiationsregeln

Wahr, denn $f'(x) = (1+\sqrt{x})' \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

Antwort 13

Thema: Differentiationsregeln

Wahr mit der Quotientenregel.

Antwort 16

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr, denn wenn $\log_2(2^{4x}) = 20$ gilt, dann ist $2^{20} = 2^{4x}$, also $4x = 20$.

Antwort 15

Thema: Differentiationsregeln

Falsch. Mit Ketten- und Quotientenregel ist $f'(x) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \exp(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}) = \frac{1}{\cos^2(x)} \exp(\frac{\sin(}{\cos(}$

Frage 17

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, dann ist $f'(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Hinweis Quotientenregel.

Frage 18

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \sin(x^3)$, dann ist $f'(x) = \cos(x^3) 3x^2$.

Hinweis Kettenregel.

Frage 19

Thema: Differentiationsregeln

Wenn $f(x) = \cos^2(x)$, dann ist $f'(x) = -2\sin(x)\cos(x)$.

Hinweis Wahr.

Frage 20

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ existiert nicht.

Hinweis Erweitern Sie den Bruch mit $\sqrt{x^2+3}+2$.

Antwort 18
Thema: Differentiationsregeln

Wahr mit der Kettenregel.

Antwort 17

Thema: Differentiationsregeln

Wahr, denn mit der Quotientenregel ist $f'(x) = \frac{(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Antwort 20

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Falsch. Für $x \neq 1$ gilt $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{(x-1)\sqrt{x^2+3}+2}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1}$, also

$$\lim_{x\to 1} \frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1} = 2.$$

Antwort 19

Thema: Differentiationsregeln

Wahr mit der Kettenregel.

Frage 21

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{2x}{2|x|}$. Dann existiert $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nicht.

Hinweis Wahr.

Frage 22

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Wenn $\log_2(x^2) + \log_2(x) = 4$ ist, dann ist $x = \sqrt[3]{16}$.

Hinweis Wahr.

Frage 23

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$, dann ist $f'(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$.

Hinweis Produkt- und Kettenregel.

Frage 24

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = (\frac{x}{1+x})^5$, dann ist $f'(x) = \frac{5x^4}{(1+x)^6}$.

Hinweis Ketten- und Quotientenregel.

Antwort 22

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr, denn wenn $\log_2(x^2) + \log_2(x) = \log_2(x^3) = 4$ gilt, dann ist $2^4 = 16 = x^3$, also $x = \sqrt[3]{16}$.

Antwort 21

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr. Sei $(x_n) = (\frac{(-1)^n}{n})$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{2}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$, das heißt, der Grenzwert existiert nicht.

Antwort 24

Thema: Differentiationsregeln

Wahr. Es ist $f'(x) = 5(\frac{x}{1+x})^4(\frac{1+x-x}{(1+x)^2}) = \frac{5x^4}{(1+x)^6}$.

Antwort 23

Thema: Differentiationsregeln

Wahr. Es ist $f'(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) + x^2(-\frac{1}{x^2})\cos(\frac{1}{x}) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$.

Frage 25

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Es gibt kein $x \in \mathbb{R}$, das die Gleichung $\exp(x) - 3\exp(-x) = 2$ erfüllt.

Hinweis Falsch.

Frage 26

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Wenn $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert und $\lim_{x \to a} g(x)$ nicht existiert, dann kann auch $\lim_{x \to a}(f + g)(x)$ nicht existieren.

Hinweis Wahr.

Frage 27

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ existiert nicht.

Hinweis Wahr.

Frage 28

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wie ist die Dirichletfunktion definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 26

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr. Wenn nämlich $\lim\limits_{x \to a}(f+g)(x)$ existiert, dann auch $\lim\limits_{x \to a}((f+g)(x) - f(x)) = \lim\limits_{x \to a} g(x)$.

Antwort 25

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Falsch. Es ist $\exp(x) - 3\exp(-x) = \exp(x) - \frac{3}{\exp(x)} = 2$ genau dann, wenn $(\exp(x))^2 - 3 = 2\exp(x)$ oder $(\exp(x))^2 - 2\exp(x) - 3 = 0$ gilt. Ist $\exp(x) = 3$, dann wird diese Gleichung erfüllt. Für $x = \ln(3)$ gilt also $\exp(x) - 3\exp(-x) = 2$.

Antwort 28
Thema: Eigenschaften von Funktionen

Es ist die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Antwort 27

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr. Sei $(x_n) = (1 + \frac{1}{n})$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ und $\lim_{n\to\infty} \dfrac{1}{1-(1+\frac{1}{n})} = \lim_{n\to\infty}(-n)$. Da dieser Grenzwert nicht existiert, existiert auch $\lim_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x}$ nicht.

Frage 29

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Was ist der Unterschied zwischen der Definition der Komposition zweier Abbildungen f und g aus Kurseinheit 1 und der Definition der Komposition zweier Funktionen aus Kurseinheit 5?

Hinweis Es geht um den Wertebereich von f und den Definitionsbereich von g.

Frage 30

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Was ist der Definitionsbereich einer Funktion?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 31

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wie ist der Graph einer Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 32

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Kann man jeden Funktionsgraph einer Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ malen?

Hinweis Nein.

Antwort 30

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Der Definitionsbereich ist eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Antwort 29

Thema: Eigenschaften von Funktionen

In Kurseinheit 1 muss der Wertebereich von f gleich dem Definitionsbereich von g sein, in Kurseinheit 5 reicht es, wenn der Wertebereich von f im Definitionsbereich von g enthalten ist.

Antwort 32

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Nein. Es müssen zum Beispiel D und der Wertebereich von f beschränkt sein. Aber selbst dann lassen sich nicht alle Funktionsgraphen malen, wie das Beispiel der Dirichletfunktion zeigt.

Antwort 31

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Der Graph einer Funktion ist definiert als $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$.

Frage 33

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$. Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3$. Was ist $f \circ g$ und was ist $g \circ f$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 34

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Was ist die Bedingung, die erfüllt sein muss, damit f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt?

Hinweis Die Umkehrfunktion f^{-1} von f erfüllt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(D)}$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$.

Frage 35

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Was ist die Umkehrfunktion der Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$?

Hinweis Die Umkehrfunktion f^{-1} von f erfüllt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(D)}$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$.

Frage 36

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Besitzt die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp(x^2)$ eine Umkehrfunktion?

Hinweis Nein.

Antwort 34

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Die Funktion f muss injektiv sein.

Antwort 33

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^3)$ und $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sin(x))^3$.

Antwort 36

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Nein. Es gilt $f(1) = f(-1)$, das heißt, f ist nicht injektiv und besitzt damit auch keine Umkehrfunktion.

Antwort 35

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Die Umkehrfunktion ist f selbst.

Frage 37

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Was ist die Umkehrfunktion der Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp(x^2)$?

Hinweis Die Umkehrfunktion f^{-1} von f erfüllt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(D)}$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$.

Frage 38

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wahr oder falsch? Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ ist monoton.

Hinweis Falsch.

Frage 39

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wahr oder falsch? Die Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\frac{1}{x}$ ist streng monoton wachsend.

Hinweis Wahr.

Frage 40

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wahr oder falsch? Wenn f streng monoton wachsend ist, dann ist die Umkehrfunktion streng monoton fallend.

Hinweis Falsch.

Antwort 38

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Falsch. Es ist $f(0) = -1$ und $f(1) = 0$, also ist f nicht monoton fallend. Wegen $f(2) = \frac{1}{5} > \frac{3}{17} = f(4)$ ist f aber auch nicht monoton wachsend.

Antwort 37

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Die Umkehrfunktion ist $g : \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{\ln(x)}$. Dann gilt nämlich $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\exp(x^2)) = \sqrt{\ln(\exp(x^2))} = x$ für alle $x \geq 0$ und $f \circ g(x) = f(\sqrt{\ln(x)}) = x$ für alle $x \geq 1$.

Antwort 40

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Falsch. Wenn f streng monoton wachsend ist, dann ist auch die Umkehrfunktion streng monoton wachsend.

Antwort 39

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wahr. Seien $a, b \in \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ mit $a < b$. Dann ist $f(a) = -\frac{1}{a} < -\frac{1}{b} = f(b)$.

Frage 41

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion, die monoton, aber nicht streng monoton ist.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 42

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin(x)$. Wie sind $f + g$, fg und $-f$ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 43

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wie kann man den Graph der Umkehrfunktion f^{-1} geometrisch beschreiben?

Hinweis Der Graph von f muss an einer bestimmten Achse gespiegelt werden.

Frage 44

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wahr oder falsch? Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 15$ ist nach unten beschränkt.

Hinweis Wahr.

Antwort 42

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Es sind $f+g, fg, -f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(f+g)(x) = x^2 + \sin(x)$, $(fg)(x) = x^2 \sin(x)$ und $(-f)(x) = -x^2$.

Antwort 41

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5$ für alle x. Dann ist f monoton, denn $f(a) \leq f(b)$ für alle $a \leq b$, aber f ist nicht streng monoton.

Antwort 44

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wahr. Da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $x^2 - 15 \geq -15$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und f ist nach unten beschränkt.

Antwort 43
Thema: Eigenschaften von Funktionen

Man erhält den Funktionsgraph von f^{-1}, indem man den Graph von f an der Diagonalen $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ spiegelt.

Frage 45

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Wieviele Nullstellen kann ein Polynom vom Grad n über einem Körper $\mathbb{K}$ höchstens haben?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 46

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Sei $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathbb{R}[T]$. Wie ist die zugehörige Polynomfunktion $\tilde{\mathrm{p}}$ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 47

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Wie sind f^2 und $f \circ f$ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 48

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Wie lautet der Identitätssatz für Polynomfunktionen?

Hinweis Es geht darum, wann zwei Polynome gleich sind.

Antwort 46

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Es ist $\tilde{\mathrm{p}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\mathrm{p}}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Antwort 45

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Es kann höchstens n verschiedene Nullstellen haben.

Antwort 48

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Seien $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i, q = \sum_{i=0}^{n} b_i T^i \in \mathbb{R}[T]$, und seien $\tilde{\mathrm{p}}$ und $\tilde{\mathrm{q}}$ die zugehörigen Polynomfunktionen. Sei $\mathrm{Grad}(p) = n$ und sei $\mathrm{Grad}(q) = m$. Gilt $\tilde{\mathrm{p}}(x) = \tilde{\mathrm{q}}(x)$ für $\max(n, m) + 1$ verschiedene $x \in \mathbb{R}$, so ist $n = m$ und $a_i = b_i$ für alle $0 \leq i \leq n$. Insbesondere gilt $\tilde{\mathrm{p}}(x) = \tilde{\mathrm{q}}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Antwort 47

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Es sind $f^2, f \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f^2(x) = f(x)f(x) = (x^2+3x+1)(x^2+3x+1) = x^4+6x^3+11x^2+6x+1$ und $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x^2+3x+1) = (x^2+3x+1)^2+3(x^2+3x+1)+1 = x^4+6x^3+11x^2+6x+1+3x^2+9x+3+1 = x^4+6x^3+14x^2+15x+5.$

Frage 49

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Gibt es Polynome p und q aus $\mathbb{R}[T]$ mit $p \neq q$ und $\tilde{\mathrm{p}} = \tilde{\mathrm{q}}$?

Hinweis Nein.

Frage 50

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Wahr oder falsch? Sei $p = T^2 - 1$ und $q = T - 1$. Dann ist $\frac{\tilde{\mathrm{p}}}{\tilde{\mathrm{q}}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{\tilde{\mathrm{p}}}{\tilde{\mathrm{q}}}(x) = x + 1$.

Hinweis Achten Sie auf den Definitionsbereich.

Frage 51

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Wie sieht der Definitionsbereich einer rationalen Funktion $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ aus?

Hinweis Was ist mit den Nullstellen von $\tilde{q}$?

Frage 52

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Sei ρ eine irrationale Zahl und sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Wie ist a^ρ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 50

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Falsch. Es ist $\frac{\tilde{\mathrm{p}}}{\tilde{\mathrm{q}}} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{\tilde{\mathrm{p}}}{\tilde{\mathrm{q}}}(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$.

Antwort 49

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Nein. Über den reellen Zahlen folgt aus $p \neq q$ immer schon $\tilde{\mathrm{p}} \neq \tilde{\mathrm{q}}$.

Antwort 52

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Sei (r_n) eine Folge rationaler Zahlen mit Grenzwert ρ. Dann ist $a^\rho = \lim_{n\to\infty} a^{r_n}$. Dabei ist $a^{\frac{p}{q}}$ für eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ definiert als $\sqrt[q]{a^p}$.

Antwort 51

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } q\}$.

Frage 53

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

---

Wahr oder falsch? Wenn $0 < a < 1$ ist und $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\rho < \sigma$, dann ist $a^\rho < a^\sigma$.

Hinweis Falsch.

Frage 54

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Für welche reellen Zahlen a und ρ ist der Ausdruck a^ρ definiert?

Hinweis Er ist zum Beispiel definiert für $a > 0$ und beliebiges ρ.

Frage 55

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Ist $(-27)^{\frac{1}{3}}$ definiert?

Hinweis Nein.

Frage 56

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Wie lautet der Zwischenwertsatz von Bolzano?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 54

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Der Ausdruck ist für alle $a > 0$ und $\rho \in \mathbb{R}$ definiert. Außerdem ist er definiert für $a < 0$ und $\rho \in \mathbb{Z}$ und für $a = 0$ und $\rho > 0$.

Antwort 53

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Falsch, es gilt dann $a^\rho > a^\sigma$.

Antwort 56

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und sei $d \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq d \leq f(b)$, falls $f(a) \leq f(b)$, oder $f(a) \geq d \geq f(b)$, falls $f(a) \geq f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = d$.

Antwort 55

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Nein, denn der Ausdruck a^ρ ist nur für $\rho \notin \mathbb{Z}$ definiert, wenn $a > 0$ ist.

Frage 57

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Ist e^{π} definiert?

Hinweis Ja.

Frage 58

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Was können Sie über die Funktion $\exp_1$ sagen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 59

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Ist $0 < a < 1$, dann ist das Bild von $\exp_a : \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 60

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Für $x, y \in (0, \infty)$ und $a > 0$ mit $a \neq 1$ gilt $\log_a(x + y) = \log_a(x) \log_a(y)$.

Hinweis Falsch.

Antwort 58

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Es gilt $\exp_1 = \hat{1}$.

Antwort 57

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Ja, denn es ist $e > 0$ und $\pi \in \mathbb{R}$.

Antwort 60

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Falsch. Sei $a = 2$. Dann ist $\log_2(4) = 2$ und $\log_2(2) = 1$. Dann ist $\log_2(4)\log_2(2) = 2 \cdot 1 = 2 \neq \log_2(2+4) = \log_2(6)$.

Antwort 59

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr.

Frage 61

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp_a(xy) = \exp_a(x)^y$.

Hinweis Wahr.

Frage 62

Thema: Definition von Stetigkeit

Geben Sie zwei verschiedene Definitionen der Stetigkeit einer Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$.

Hinweis Es gibt das $\varepsilon - \delta$–Kriterium und eine Definition über Folgen.

Frage 63

Thema: Definition von Stetigkeit

Wahr oder falsch? Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Wenn f und fg stetig sind, dann ist auch g stetig.

Hinweis Falsch.

Frage 64

Thema: Definition von Stetigkeit

Wahr oder falsch? Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{\exp(x) + x^2 + 1}$ ist stetig.

Hinweis Wahr.

Antwort 62

Thema: Definition von Stetigkeit

1. Ist (a_n) eine Folge in D mit Grenzwert a, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.

2. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$.

Antwort 61

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr, denn für alle $a > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp_a(xy) = a^{xy} = (a^x)^y = \exp_a(x)^y$.

Antwort 64

Thema: Definition von Stetigkeit

Wahr. Die Funktion f ist eine Verkettung stetiger Funktionen und damit stetig.

Antwort 63

Thema: Definition von Stetigkeit

Falsch. Ist $f = \hat{0}$, dann ist fg immer stetig.

Frage 65

Thema: Definition von Stetigkeit

Wahr oder falsch? Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{für } x \leq 0 \\ \cos(x), & \text{für } x > 0 \end{cases}$ ist stetig.

Hinweis Wahr.

Frage 66

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Wie lautet der Nullstellensatz von Bolzano?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 67

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Wie kann man zeigen, dass die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\exp(1-x)}}$ mindestens eine Nullstelle besitzt?

Hinweis Nullstellensatz von Bolzano.

Frage 68

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Was ist die Beweisidee, wenn man den Zwischenwertsatz von Bolzano mit dem Nullstellensatz von Bolzano beweisen möchte?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 66

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$). Dann gibt es ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$.

Antwort 65

Thema: Definition von Stetigkeit

Wahr. Die Funktionen x^2+1 und $\cos(x)$ sind stetig. Es muss also nur noch untersucht werden, ob f auch im Punkt 0 stetig ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Dann gibt ein $\delta_1 > 0$ mit $|\cos(x) - 1| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta_1$, denn die Funktion cos ist stetig in 0. Weiter gibt es ein $\delta_2 > 0$ mit $|x^2 + 1 - 1| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta_2$, denn die Funktion $x^2 + 1$ ist stetig in 0. Sei also nun $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Dann gilt $|f(x) - f(0)| = |f(x) - 1| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$. Damit ist f überall stetig.

Antwort 68

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Beim Zwischenwertsatz hat man eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und ein d zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gegeben. Man wendet dann den Nullstellensatz auf die Funktion $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) - d$ an.

Antwort 67
Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Mit dem Nullstellensatz von Bolzano. Es ist nämlich $f(0) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\exp(1)}} = 1 - \sqrt{\frac{2}{e}} > 0$, denn $e > 2$, also $\frac{2}{e} < 1$ und $\sqrt{\frac{2}{e}} < 1$. Weiter ist $f(1) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\exp(0)}} = 1 - \sqrt{2} < 0$. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano folgt, dass es mindestens eine Nullstelle von f gibt.

Frage 69

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Wahr oder falsch? Wenn $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, und das Intervall I ist beschränkt, dann ist auch $f(I)$ beschränkt.

Hinweis Betrachten Sie die Funktion $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

Frage 70

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Was können Sie über das Bild einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall sagen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 71

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Durch welche Eigenschaft ist ein Intervall gekennzeichnet?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 72

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Was sagt der Satz vom Minimum und Maximum?

Hinweis Es geht darum, dass eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall Minimum und Maximum annimmt.

Antwort 70

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Das Bild ist ein abgeschlossenes Intervall.

Antwort 69

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Falsch. Es ist zum Beispiel das Intervall $(0,1]$ beschränkt, und $f:(0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$ ist stetig, aber $f((0,1])$ ist unbeschränkt.

Antwort 72

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $x_1, x_2 \in [a, b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a, b]$.

Antwort 71

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Für ein Intervall I gilt immer, dass für $x_1, x_2 \in I$ auch alle Punkte zwischen x_1 und x_2 in I liegen.

Frage 73

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Wahr oder falsch? Wenn $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv ist, dann ist f streng monoton.

Hinweis Wahr.

Frage 74

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wann ist $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt einer Teilmenge M von $\mathbb{R}$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 75

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Wenn M eine nicht leere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, dann sind $\sup M$ und $\inf M$ Häufungspunkte von M.

Hinweis Falsch.

Frage 76

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $a \in D$ stetig ist, wobei a ein Häufungspunkt von D ist. Wann heißt f konvergent in a?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 74

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wenn es mindestens eine Folge in $M \setminus \{a\}$ gibt, deren Grenzwert a ist.

Antwort 73

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Wahr.

Antwort 76

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wenn für jede Folge (a_n) in $D \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert, auch die Folge $(f(a_n))$ konvergiert.

Antwort 75
Thema: Grenzwerte von Funktionen

Falsch. Sei zum Beispiel $M = [0, 1] \cup \{2\}$. Dann ist M nicht leer und beschränkt mit $\sup M = 2$. Es gibt aber keine Folge in $M \setminus \{2\}$, die gegen 2 konvergiert. Also ist 2 kein Häufungspunkt von M.

Frage 77

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ für $x \neq 1$ und $f(1) = 17$. Dann ist f konvergent in 1.

Hinweis Wahr.

Frage 78

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Was ist eine hebbare Unstetigkeit?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 79

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2+x}{x^3-1}$ für $x \neq 1$ und $f(1) = 0$. Hat f in 1 eine hebbare Unstetigkeit?

Hinweis Nein.

Frage 80

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt von D. Wann und wie ist $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ definiert?

Hinweis Der Grenzwert ist definiert, wenn f in a konvergent ist. Wie ist er in diesem Fall definiert?

Antwort 78

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $a \in D$ nicht stetig ist, wobei a ein Häufungspunkt von D ist. Wenn $f|_{D\setminus\{a\}}$ auf D stetig fortgesetzt werden kann, dann hat f in a eine hebbare Unstetigkeit.

Antwort 77

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R} \setminus \{1\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2 - 1}{a_n - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + 1 = 2$, das heißt, f ist konvergent in 1.

Antwort 80

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Der Grenzwert ist definiert, wenn f in a konvergent ist. Ist das der Fall, dann ist $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{n \to \infty} f(a_n)$ für jede Folge (a_n) aus $D \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert.

Antwort 79

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Nein. Die Folge $(x_n) = (1+\frac{1}{n})$ konvergiert gegen 1, und es gilt $f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+\frac{1}{n})^2 + 1 + \frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^3 - 1} = \dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}-1} = \dfrac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \dfrac{2n+2+\frac{1}{n}}{3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$. Für $n \to \infty$ konvergiert der Nenner des Bruchs gegen 3, während der Zähler unbeschränkt ist. Insgesamt ist die Folge also unbeschränkt, und damit existiert $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nicht. Die Unstetigkeit von f in 1 ist also nicht hebbar.

Frage 81

Thema: Differentiationsregeln

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei I ein Intervall ist. Sei $a \in I$. Wann ist a in I differenzierbar?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 82

Thema: Differentiationsregeln

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei I ein Intervall ist, in $a \in I$ differenzierbar. Geben Sie zwei verschiedene Definitionen für $f'(a)$.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 83

Thema: Differentiationsregeln

Berechnen Sie die Ableitung von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x^2 + x$ mit dem Differentialquotienten.

Hinweis Der Differentialquotient ist $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Frage 84
Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn eine Funktion in einem Punkt $a \in D$ stetig ist, dann ist sie in a auch differenzierbar.

Hinweis Falsch.

Antwort 82

Thema: Differentiationsregeln

Es gilt $f'(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Antwort 81

Thema: Differentiationsregeln

Wenn $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a}$ bzw. $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existiert.

Antwort 84
Thema: Differentiationsregeln

Falsch. Die Betragsfunktion ist zum Beispiel im Punkt 0 stetig, aber nicht differenzierbar.

Antwort 83

Thema: Differentiationsregeln

Seien $x, a \in \mathbb{R}$ mit $x \neq a$. Dann ist $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{4x^2+x-4a^2-a}{x-a} = \frac{4x^2-4a^2+(x-a)}{x-a} = \frac{4(x+a)(x-a)+(x-}{x-a}$ $4(x+a)+1$, also $\lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x \to a} 4(x+a)+1 = 8a+1$. Also ist $f'(x) = 8x+1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Frage 85

Thema: Extrema

Wahr oder falsch? Ein globales Extremum ist immer auch ein lokales Extremum.

Hinweis Wahr.

Frage 86

Thema: Extrema

Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und ein $a \in D$, so dass f in a ein lokales, aber kein globales Maximum besitzt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 87

Thema: Extrema

Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und ein $a \in D$, so dass f ein lokales Minimum in a hat, aber in a nicht differenzierbar ist.

Hinweis Betragsfunktion.

Frage 88
Thema: Extrema

Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und ein $a \in D$ mit $f''(a) = 0$, aber f hat in a kein lokales Extremum.

Hinweis Betrachten Sie $f(x) = x^3$.

Antwort 86

Thema: Extrema

Sei $f(x) = 1$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 0$ für $x > 0$. Dann ist in $a = 1$ ein lokales, aber kein globales Maximum.

Antwort 85
Thema: Extrema

Wahr. Für ein globales Extremum a gilt $f(a) \geq f(x)$ bzw. $f(a) \leq f(x)$ für alle $x \in D$, also gilt die entsprechende Ungleichung insbesondere in einer δ-Umgebung von a.

Antwort 88

Thema: Extrema

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$. Dann gilt $f'(0) = 0$, aber f hat in 0 kein lokales Extremum.

Antwort 87
Thema: Extrema

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$. Dann hat f in 0 ein lokales Minimum, ist aber nicht differenzierbar bei 0.

Frage 89

Thema: Extrema

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp(x^3 - 3x^2 + 1)$. Geben Sie eine zweielementige Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, die auf jeden Fall alle lokalen Extrema der Funktion enthält.

Hinweis Ist f differenzierbar in a und hat ein lokales Extremum in a, dann gilt $f'(a) = 0$.

Frage 90

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Sei f in $a \in I$ differenzierbar. Dann ist bekanntlich f^{-1} in $f(a) = b$ differenzierbar. Aber was ist $(f^{-1})'\,(b)$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 91
Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = x^{\pi}$ für $x > 0$ ist, dann ist $f'(x) = \pi x^{\pi - 1}$.

Hinweis Wahr.

Frage 92

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Besitzt die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x^2+1}$ im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle?

Hinweis Nullstellensatz von Bolzano.

Antwort 90

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Es ist $\left(f^{-1}\right)'(b) = \frac{1}{f''(a)}$.

Antwort 89

Thema: Extrema

Da f überall differenzierbar ist, gilt für alle $a \in \mathbb{R}$, in denen f ein lokales Extremum besitzt, dass $f'(a) = 0$ gilt. Es müssen also nur die Nullstellen der Ableitung von f berechnet werden. Es gilt $f'(x) = (3x^2 - 6x)\exp(x^3 - 3x^2 + 1)$ mit der Kettenregel. Da exp immer größer als 0 ist, sind die Nullstellen von f' die $x \in \mathbb{R}$ mit $3x^2 - 6x = 0$, also $3x(x-2) = 0$, das heißt, $x = 0$ oder $x = 2$. Die gesuchte Menge ist also $\{0, 2\}$.

Antwort 92

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Ja, denn die Funktion ist als rationale Funktion stetig, und es gilt $f(0) = -2$ und $f(1) = \frac{1}{2}$. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano folgt, dass f im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle besitzt.

Antwort 91

Thema: Differentiationsregeln

Wahr. Die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion $x \mapsto x^a$ für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto ax^{a-1}$.

Frage 93

Thema: Differentiationsregeln

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 6x - 1$ stetig ist und geben Sie zu jedem ε ein passendes δ an.

Hinweis Versuchen Sie es mit $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$.

Frage 94

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Sind $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$, dann gilt schon $f = g$.

Hinweis Wahr.

Frage 95

Thema: Differentiationsregeln

Wie lautet die Produktregel?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 96

Thema: Differentiationsregeln

Wie lautet die Quotientenregel?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 94

Thema: Differentiationsregeln

Wahr. Sei nämlich $x \in \mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$. Dann gibt es eine Folge (x_n) aus $\mathbb{Q}$, die gegen x konvergiert. Da f und g stetig sind, gilt dann $f(x) = \lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$. Also gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Antwort 93

Thema: Differentiationsregeln

Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $\varepsilon > 0$. Sei $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$ gilt dann $|f(x) - f(a)| = |6x - 6a| = 6|x - a| < 6\frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon$. Also ist f stetig in a.

Antwort 96
Thema: Differentiationsregeln

Seien $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und sei $a \in I$ so, dass f und g in a differenzierbar sind und $g(a) \neq 0$ gilt. Dann ist $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar, und es gilt $(\frac{f}{g})'\,(a) = \frac{f'\,(a)g(a) - f(a)g'\,(a)}{g(a)^2}$.

Antwort 95
Thema: Differentiationsregeln

Seien $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und sei $a \in I$ so, dass f und g in a differenzierbar sind. Dann ist fg in a differenzierbar, und es gilt $(fg)'(a) = f'(a)g(a) + f(a)g'(a)$.