Frage 1

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V. Wann heißen diese Vektoren linear unabhängig?

Hinweis Diese Definition ist zentral. Die müssen Sie auswendig wissen.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 2

Thema: lineare Unabhängigkeit

Wann wird eine Linearkombination $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ trivial genannt?

Hinweis Für welche Skalare ist diese Gleichung immer richtig?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 3

Thema: lineare Unabhängigkeit

Wann werden Sie beim Arbeiten mit Vektoren in endlich erzeugten Vektorräumen fast regelmäßig auf das Lösen homogener linearer Gleichungssysteme geführt?

Hinweis Was ist zu tun, um zu zeigen, dass Vektoren linear unabhängig sind?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 4

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Nehmen wir an, Sie müssen beweisen, dass diese Vektoren linear unabhängig sind. Was ist der erste Satz Ihres Beweises?

Hinweis Ohne Hinweis.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 2

Thema: lineare Unabhängigkeit

Eine Linearkombination $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißt trivial, wenn $a_i = 0$ ist für alle $1 \leq i \leq n$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 1

Thema: lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn gilt: Falls $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ für Skalare $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, dann folgt $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 4

Thema: lineare Unabhängigkeit

Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 3

Thema: lineare Unabhängigkeit

Wenn wir überprüfen wollen, ob Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, müssen wir in der Regel ein homogenes lineares Gleichungsystem lösen.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 5

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $v, w \in V$. Wann genau sind v und w linear abhängig?

Hinweis Ohne Hinweis.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 6

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Wann werden $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig genannt?

Hinweis Es muss eine nicht triviale Linearkombination des Nullvektors existieren.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 7

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Wenn v_1, v_2 und v_1, v_3 und v_2, v_3 linear unabhängig sind, sind dann auch v_1, v_2, v_3 linear unabhängig?

Hinweis Nein. Versuchen Sie, ein Gegenbeispiel zu konstruieren.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 8

Thema: lineare Unabhängigkeit

Seien $p_1 = 1 + T$, $p_2 = 2 + 3T$ und $p_3 = T^3$ in $\mathbb{R}[T]$. Sind p_1, p_2, p_3 linear unabhängig?

Hinweis Ja.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 6

Thema: lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißen linear abhängig, wenn es eine nicht triviale Linearkombination des Nullvektors gibt. Das heißt, es gibt Skalare $a_1, \ldots, a_n$, die nicht alle Null sind, und für die $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ gilt.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 5

Thema: lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren v und w sind genau dann linear abhängig, wenn die Vektoren skalare Vielfache voneinander sind, wenn es also einen Skalar a so gibt, dass $v = aw$ ist.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 8

Thema: lineare Unabhängigkeit

Ja. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, und sei $a(1+T)+b(2+3T)+cT^3 = (a+2b)+(a+3b)T+cT^3 = 0$, das Nullpolynom. Dann sind alle Koeffizienten Null, also $c = 0$ und $a + 2b = 0$ und $a + 3b = 0$. Ziehen wir die letzten beiden Gleichungen voneinander ab, so folgt $b = 0$ und damit $a = 0$. Die Skalare a, b, c müssen also alle 0 sein, und es folgt, dass die Polynome linear unabhängig sind.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 7

Thema: lineare Unabhängigkeit

Nein, dass muss nicht sein. Sei zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$, und seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind v_1, v_2 und v_1, v_3 und v_2, v_3 linear unabhängig, aber v_1, v_2, v_3 sind linear abhängig.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 9

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{K})$. Sind A, B, C linear unabhängig?

Hinweis Ja.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 10

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Sei $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Sind $v, v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig?

Hinweis Nein.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 11

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Sei $v \notin \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Sind $v, v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig?

Hinweis Nein.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 12

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum, und sei U ein Unterraum von V. Seien u_1, u_2 linear unabhängige Vektoren in U. Sind u_1, u_2 auch linear unabhängig in V?

Hinweis Ja.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 10

Thema: lineare Unabhängigkeit

Nein. Da $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, gibt es eine Linearkombination $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Dann ist $0 = -v + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ eine nicht triviale Linearkombination des Nullvektors, und es folgt, dass die Vektoren $v, v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig sind.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 9

Thema: lineare Unabhängigkeit

Ja. Seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ so, dass

$$a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b+c \\ b+c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $a+b=0$, $a+b+c=0$, $b+c=0$ und $a=0$. Aus $a=0$ folgt $b=0$ und damit auch $c=0$. Da $a=b=c=0$ folgt, dass die Matrizen linear unabhängig sind.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 12

Thema: lineare Unabhängigkeit

Ja. Denn wenn sich u_1 und u_2 nur trivial zum Nullvektor linear kombinieren lassen, dann gilt das unabhängig davon, ob sie Vektoren in U oder in V sind.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 11

Thema: lineare Unabhängigkeit

Nein. Das Problem ist, dass von den Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig sein müssen, dass es also eine nicht triviale Linearkombination $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ des Nullvektors geben kann. Dann ist $0v + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ ebenfalls eine nicht triviale Linearkombination des Nullvektors, und dies zeigt, dass die Vektoren $v, v_1, \ldots, v_n$ im Allgemeinen nicht linear unabhängig sind.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 13

Thema: Basen

Sei $V = \mathbb{R}^3$. Geben Sie ein Beispiel für Vektoren, die ein Erzeugendensystem von V aber keine Basis von V sind.

Hinweis Wie ist eine Basis definiert?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 14

Thema: Basen

Sei $V = \mathbb{R}^3$. Geben Sie ein Beispiel für Vektoren in V, die linear unabhängig aber keine Basis von V sind.

Hinweis Wie ist eine Basis definiert?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 15

Thema: Basen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V. Wann wird $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V genannt?

Hinweis Kein Hinweis. Diese Definition ist zentral, die müssen Sie auswendig lernen.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 16

Thema: Basen

Seien $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ zwei Basen eines Vektorraums V über einem Körper $\mathbb{K}$. Warum gilt $m = n$?

Hinweis Dies ist eine Folgerung aus dem Austauschsatz oder dem Basisergänzungssatz. Wie ist der genaue Zusammenhang?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 14

Thema: Basen

Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig in V aber keine Basis von V, da sie den Vektorraum nicht erzeugen.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 13

Thema: Basen

Es ist $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von V, das keine Basis ist, denn die Vektoren sind nicht linear unabhängig.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 16

Thema: Basen

Die Aussage ist eine Folgerung aus dem Austauschsatz von Steinitz. Aus dem Austauschsatz folgt: Wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, und $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängig in V sind (was sie sind, da sie eine Basis bilden), dann gilt $m \leq n$.

Analog gilt auch: Wenn $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von V ist, und $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, dann ist $n \leq m$. Beides zusammen impliziert $m = n$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 15

Thema: Basen

$v_1, \ldots, v_n$ ist genau dann eine Basis von V, wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, und wenn sie ein Erzeugendensystem von V sind.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 17

Thema: Basen

Wenn v_1, v_2 eine Basis von $\mathbb{Q}^2$ ist, ist v_1, v_2 dann auch eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

Hinweis Ja. Stellen Sie die Dtandardbasisvektoren von $\mathbb{Q}^2$ als Linearkombinationen von v_1, v_2 dar.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 18

Thema: Basen

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Besitzt ein Vektorraum V eine Basis aus n Vektoren, so erzeugen mehr als n Vektoren den Vektorraum V.

Hinweis Suchen Sie nach einem Gegenbeispiel.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 19

Thema: Basen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Sei U ein Unterraum von V. Können Sie die Basis $v_1, \ldots, v_n$ so „ausdünnen“, das heißt Vektoren entfernen, dass die verbleibenden Vektoren eine Basis von U sind?

Hinweis Suchen Sie nach einem Gegenbeispiel.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 20

Thema: Basen

Sei $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$. Geben Sie unendlich viele Basen von U an.

Hinweis Ohne Hinweis.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 18

Thema: Basen

Die Aussage ist falsch.

Sei etwa $V = \mathbb{R}^2$. Dann besitzt V eine Basis aus 2 Vektoren. Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Diese drei Vektoren erzeugen aber nicht den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sie erzeugen also nicht den Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 17
Thema: Basen

Wir zeigen, dass v_1, v_2 ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ ist. Zunächst einmal gibt es Skalare $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ so, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = av_1 + bv_2$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = cv_1 + dv_2$ ist, denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen in $\mathbb{Q}^2$, und v_1, v_2 ist eine Basis von $\mathbb{Q}$. Sei nun $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein beliebiger Vektor in $\mathbb{R}$. Dann gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Jetzt setzen wir für $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Linearkombinationen oben ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x(av_1 + bv_2) + y(cv_1 + dv_2) = (xa + yc)v_1 + (xb + yd)v_2.$$

Die Koeffizienten $xa + yc$ und $xb + yd$ sind reelle Zahlen. Damit isst jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eine Linearkombination mit reellen Koeffizienten von v_1, v_2, und dies zeigt, dass v_1, v_2 ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ ist. Da zwei Vektoren in einem Vektorraum der Dimension 2, die ein Erzeugendensystem bilden, bereits eine Basis sind, folgt, dass v_1, v_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 20
Thema: Basen

Der Vektorraum U hat die Dimension 1. Jeder Vektor $v \neq 0$ aus U ist eine Basis von U, denn er ist linear unabhängig, und ein linear unabhängiger Vektor in einem Vektorraum der Dimension 1 ist bereits eine Basis von U.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 19

Thema: Basen

Nein, das geht in der Regel nicht. Sei etwa $V = \mathbb{R}^2$, und seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Wenn wir v_1 aus der Basis v_1, v_2 entfernen, dann ist v_2 keine Basis von U, denn der Vektor v_2 liegt nicht einmal in U. Dasselbe geschieht, wenn wir v_2 aus der Basis v_1, v_2 entfernen. Wir können die vorgegebene Basis also nicht zu einer Basis von U „ausdünnen“.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 21
Thema: Basen

Geben Sie (die) zwei Beispiele an, wo die Aussage „Sei $\mathcal{B}$ die Basis von V." richtig ist.

Hinweis Das Kitzlige in der Aussage ist der bestimmte Artikel.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 22

Thema: Basen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei $U = \langle 1 + T + T^2 \rangle \subseteq \mathbb{K}[T]$. Warum ist $1, T, T^2$ keine Basis von U?

Hinweis Liegt T in U?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 23
Thema: Austauschsatz

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis eines Vektorraums V, und ist $x = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i$ mit $a_n \neq 0$, so ist $v_1, \ldots, v_{n-1}, x$ eine Basis von V.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 24

Thema: Austauschsatz

Wie lautet das Austauschlemma?

Hinweis Dabei ging es darum, einen Basisvektor durch einen von Null verschiedenen Vektor auszutauschen. Wie ist die genaue Formulierung?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 22

Thema: Basen

Die Elemente in U sind von der Form $a + aT + aT^2$ mit $a \in \mathbb{K}$. Die Polynome $1, T, T^2$ sind aber nicht von dieser Bauart, sie liegen also nicht in U. Die Elemente einer Basis von einem Vektorraum müssen aber immer in dem Vektorraum liegen.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 21
Thema: Basen

In der Regel hat ein Vektorraum viele, wenn der zugrunde liegende Körper unendlich ist, sogar unendlich viele Basen. „Die Basis“ suggeriert aber, dass es genau eine Basis gibt. Und es gibt in der Tat Vektorräume, die genau eine Basis haben, aber nur zwei solcher Vektorräume. Der eine ist $\{0\}$. Der hat nach Definition eine Basis, nämlich $\emptyset$. Der andere ist der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2$. Der enthält nur die Vektoren 0 und 1. Der Nullvektor ist keine Basis von F_2. Somit ist 1 die einzige Basis von $\mathbb{F}_2$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 24
Thema: Austauschsatz

Sei V ein Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K}$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und sei $u \in V$, $u \neq 0$. Dann gibt es i, mit $1 \leq i \leq n$, so dass $v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 23

Thema: Austauschsatz

Wahr, diese Aussage folgt unmittelbar aus dem Austauschlemma.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 25

Thema: Austauschsatz

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Sei $u \in V$, $u \neq 0$. Welche der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ können Sie durch u ersetzen, so dass die Vektoren weiterhin eine Basis bilden?

Hinweis Schreiben Sie u als Linearkombination der Basisvektoren.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 26

Thema: Austauschsatz

Was ist falsch an folgender Aussage?

„Sei V ein Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K}$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und sei $u \in V$. Dann gibt es i, mit $1 \leq i \leq n$, so dass $v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist.“

Hinweis Dürfen Sie wirklich jeden Vektor u in die Basis hinein tauschen?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 27
Thema: Austauschsatz

Was ist schief an folgender Aussage?

„Sei V ein Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K}$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann gibt es ein $1 \leq i \leq n$, sodass v_i durch einen Vektor $u \neq 0$ so ausgetauscht werden kann, dass $v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist."

Hinweis Diese Aussage ist offensichtlich.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 28

Thema: Austauschsatz

Nennen Sie zwei Folgerungen aus dem Austauschsatz.

Hinweis Ohne Hinweis.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 26

Thema: Austauschsatz

Der Vektor u darf nicht der Nullvektor sein. Wenn $u = 0$, dann ist die Aussage falsch.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 25

Thema: Austauschsatz

Wir schreiben u als Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$. Dies ist möglich, da die Vektoren eine Basis von V bilden. Wenn $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ mit Skalaren $a_1, \ldots, a_n$ ist, dann können wir u für alle diejenigen v_i einsetzen, für die $a_i \neq 0$ ist.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 28

Thema: Austauschsatz

1. Je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums haben gleich viele Elemente.
2. Der Basisergänzungssatz folgt aus dem Austauschsatz.
3. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und sind $u_1, \ldots, u_m$ linear unabhängig in V, dann gilt $m \leq n$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 27

Thema: Austauschsatz

Diese Aussage ist offensichtlich, als u können wir zum Beispiel den Vektor v_i selbst nehmen.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 29

Thema: Austauschsatz

Wie wird das Austauschlemma im Beweis des Austauschsatzes benutzt?

Hinweis Der Austauschsatz wird mit Induktion beweisen.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 30

Thema: Austauschsatz

Wie lautet der Basisergänzungssatz?

Hinweis Schlagen Sie im Studienbrief nach.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 31

Thema: Austauschsatz

Nennen Sie drei Folgerungen aus dem Basisergänzungssatz.

Hinweis Warum macht der Begriff der Dimension eines endlich erzeugten Vektorraums Sinn?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 32

Thema: Dimension

Wie ist die Dimension eines endlich erzeugten Vektorraums V definiert?

Hinweis Diese Definition ist zentral, die müssen Sie auswendig können.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 30

Thema: Austauschsatz

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Jede Menge von linear unabhängigen Vektoren in V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 29
Thema: Austauschsatz

Der Austauschsatz wird mit Induktion beweisen. Das Austauschlemma dient als Induktionsanfang.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 32
Thema: Dimension

Wenn $V = \{0\}$, dann wird $\dim(V)$ als 0 definiert. Ist $V \neq \{0\}$, so wird $\dim(V)$ als die Anzahl der Elemente einer Basis (und damit aller Basen) definiert.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 31
Thema: Austauschsatz

1. Die Tatsache, dass je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums gleich viele Vektoren haben.
2. Die Dimensionsformel für Unterräume.
3. Die Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt von Vektorräumen.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 33

Thema: Dimension

Nennen Sie zwei Dimensionsformeln.

Hinweis Es gibt eine Formel für Unterräume und eine für Summe und Durchschnitt von Unterräumen.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 34
Thema: Dimension

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Was ist die Dimension von V? Geben Sie eine Basis von V an.

Hinweis Es ist $\dim(V) = n + 1$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 35

Thema: Dimension

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei V der Vektorraum der $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$. Was ist die Dimension von V? Geben Sie eine Basis von V an.

Hinweis Es ist $\dim(V) = mn$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 36

Thema: Dimension

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge von $Ax = 0$. Was ist die Dimension von $\mathcal{U}$?

Hinweis Wie berechnen Sie die Lösungsmenge von $Ax = 0$?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 34

Thema: Dimension

Es ist $\dim(V) = n + 1$. Eine Basis ist beispielsweise $1, T, T^2, \ldots, T^n$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 33
Thema: Dimension

1. Sei U ein Unterraum eines endlich erzeugten Vektorraums V. Dann gilt $\dim(U) \leq \dim(V)$.

2. Seien U und W Unterräume eines endlich erzeugten Vektorraums V. Dann gilt $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap W)$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 36
Thema: Dimension

Es ist $\dim(\mathcal{U}) = n - \mathrm{Rg}(A)$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 35
Thema: Dimension

Es ist $\dim(V) = mn$. Eine Basis bilden etwa alle $m \times n$-Matrizen, die genau einen Eintrag 1 haben, und deren übrige Einträge 0 sind.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 37

Thema: Dimension

Skizzieren Sie den Beweis der Dimensionsformel für Unterräume.

Hinweis Wir beginnen mit einer Basis des Unterraums. Dann benutzen wir den Basisergänzungssatz.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 38
Thema: Dimension

Skizzieren Sie den Beweis der Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt von Unterräumen.

Hinweis Wir beginnen mit einer Basis des Durchschnitts und benutzen dann den Basisergänzungssatz.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 39

Thema: Dimension

Nennen Sie zwei Beispiele für $\mathbb{K}$-Vektorräume der Dimension 3, die verschieden von $\mathbb{K}^3$ sind.

Hinweis Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme, Unterräume des Vektorraums der Polynome über K, Unterräume von Vektorräumen von Matrizen, ...

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 40

Thema: Dimension

Sei V ein Vektorraum der Dimension n. Warum gibt zu jedem m mit $0 \leq m \leq n$ einen Unterraum U_m von V der Dimension m?

Hinweis Beginnen Sie mit einer Basis von V und betrachten Sie Erzeugendensysteme von Teilmengen dieser Basis.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 38
Thema: Dimension

Seien U und W Unterräume eines endlich erzeugten Vektorraums V. Die Dimensionsformel besagt, dass $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ gilt.

Zum Beweis wählen wir eine Basis $x_1, \ldots, x_r$ von $U \cap W$. Diese ergänzen zum Einen zu einer Basis von U und zum Anderen zu einer Basis von W. Dann zeigen wir, dass die ergänzten Vektoren zusammen mit $x_1, \ldots, x_r$ eine Basis von $U + W$ sind. Jetzt müssen wir nur noch nachzählen, wie viele Vektoren das sind.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 37
Thema: Dimension

Sei U ein Unterraum eines endlich erzeugten Vektorraums V.

Zunächst wird gezeigt, dass auch U endlich erzeugt ist. Dann wählen wir eine Basis $u_1, \dots, u_r$ von U. Diese Vektoren sind linear unabhängig in V, und wir können den Basisergänzungssatz anwenden. Wir können also $u_1, \dots, u_r$ zu einer Basis von V ergänzen, und es folgt $\dim(U) \leq \dim(V)$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 40
Thema: Dimension

Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Für alle $1 \leq m \leq n$ setzen wir $U_m = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. Da die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind, ist $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von U_m (ein Erzeugendensystem von U_m sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ nach Definition). Es gilt also $\dim(U_m) = m$. Einen Unterraum der Dimension 0 liefert der Unterraum $\{0\}$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 39
Thema: Dimension

1. Sei V der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{K}$ vom Grad kleiner oder gleich 2. Dann ist $1, T, T^2$ eine Basis von V und V hat die Dimension 3 über $\mathbb{K}$.

2. Sei $V = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathrm{M}_{22}(\mathbb{K})$.

   Die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig in V.

   Nach Definition sind sie auch ein Erzeugendensystem von V. Es folgt, dass V die Dimension 3 hat.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 41

Thema: Dimension

Sei V ein Vektorraum der Dimension 5, und seien U und W Unterräume der Dimension 3 von V. Welche Dimensionen kann $U \cap W$ haben?

Hinweis Die Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt von Unterräumen hilft weiter.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 42

Thema: Dimension

Sei V ein Vektorraum der Dimension 5, und seien U und W Unterräume der Dimension 3 von V. Welche Dimensionen kann $U + W$ haben?

Hinweis Die Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt von Unterräumen hilft weiter.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 43
Thema: Dimension

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Besitzt ein Vektorraum V eine Basis aus n Vektoren, so erzeugen mehr als n Vektoren den Vektorraum V.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 44
Thema: Dimension

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Es gibt einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V der Dimension 4, der keinen Unterraum der Dimension 3 besitzt.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 42
Thema: Dimension

Mit der Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt gilt $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$. Der Vektorraum $U + W$ ist ein Unterraum von V, und es folgt, dass $\dim(U+W) \leq 5$ ist. Weiter ist $U \cap W$ ein Unterraum von U und von W, also $\dim(U \cap W) \leq 3$. Somit sind folgende Fälle möglich:

1. $\dim(U + W) = 5$, und $\dim(U \cap W) = 1$,
2. $\dim(U + W) = 4$, und $\dim(U \cap W) = 2$, oder
3. $\dim(U + W) = 3$, und $\dim(U \cap W) = 3$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 41

Thema: Dimension

Mit der Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt gilt $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$. Der Vektorraum $U+W$ ist ein Unterraum von V, und es folgt, dass $\dim(U+W) \leq 5$ ist. Weiter ist $U \cap W$ ein Unterraum von U und von W, also $\dim(U \cap W) \leq 3$. Somit sind folgende Fälle möglich:

1. $\dim(U+W) = 5$, und $\dim(U \cap W) = 1$,
2. $\dim(U+W) = 4$, und $\dim(U \cap W) = 2$, oder
3. $\dim(U+W) = 3$, und $\dim(U \cap W) = 3$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 44
Thema: Dimension

Die Aussage ist falsch.

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 4, und sei v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von V. Sei $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Der Vektorraum U ist ein Unterraum von V, und nach Definition ist v_1, v_2, v_3 ein Erzeugendensystem von U. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind als Teil einer Basis von V auch linear unabhängig. Somit ist U ein Unterraum der Dimension 3 von V.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 43
Thema: Dimension

Die Aussage ist falsch.

Sei etwa $V = \mathbb{R}^2$. Dann besitzt V eine Basis aus 2 Vektoren. Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Diese drei Vektoren erzeugen aber nicht den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sie erzeugen also nicht den Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 45

Thema: Dimension

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ immer n linear unabhängige Vektoren in V gibt, dann ist $\dim_K(V) = \infty$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 46

Thema: Eigenschaften

Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to W$ eine Abbildung. Wann wird f linear genannt?

Hinweis Diese Definition ist zentral. Die müssen Sie auswendig kennen.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 47

Thema: Eigenschaften

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Nennen Sie mindestens zwei Aussagen, die äquivalent zu der Aussage sind: Die Vektorräume V und W sind isomorph.

Hinweis Wie lautet der Struktursatz endlich erzeugter Vektorräume?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 48

Thema: Eigenschaften

Wie lautet der Struktursatz endlich erzeugter Vektorräume?

Hinweis Bei dem Satz geht es darum, wann endlich erzeugte Vektorräume isomorph sind.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 46
Thema: Eigenschaften

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle $v, v'' \in V$ gilt $f(v + v'') = f(v) + f(v'')$.
2. Für alle $a \in \mathbb{K}$ und alle $v \in V$ gilt $f(av) = af(v)$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 45

Thema: Dimension

Die Aussage ist wahr.

Angenommen, die Dimension von V sei endlich, etwa $\dim(V) = m$. Dann gibt es eine Basis $v_1 \ldots, v_m$ von V. Sei $n > m$. Nach Annahme gibt es n Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ in V, die linear unabhängig sind. Als Folgerung aus dem Austauschsatz folgt $n \leq m$, ein Widerspruch, und somit gilt $\dim_(V) = \infty$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 48
Thema: Eigenschaften

1. Je zwei endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume derselben Dimension sind isomorph.
2. Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n, so ist V isomorph zu $\mathbb{K}^n$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 47

Thema: Eigenschaften

1. Es gibt eine bijektive, lineare Abbildung von V nach W.
2. Es gibt eine bijektive, lineare Abbildung von W nach V.
3. Die Vektorräume V und W haben dieselbe Dimension.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 49
Thema: Eigenschaften

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n. Welches ist der denkbar einfachste Vektorraum, zu dem V isomorph ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 50

Thema: Eigenschaften

Wann werden zwei endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W isomorph genannt? Wie können Sie entscheiden, ob V und W isomorph sind?

Hinweis Wie lautet der Struktursatz endlich erzeugter Vektorräume?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 51

Thema: Eigenschaften

Geben sie ein Beispiel für eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die linear ist und ein Beispiel für eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die nicht linear ist.

Hinweis Ohne Hinweis.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 52

Thema: Eigenschaften

Geben Sie ein Beispiel für zwei verschiedene Vektorräume, die isomorph sind.

Hinweis Wie lautet der Struktursatz endlich erzeugter Vektorräume?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 50

Thema: Eigenschaften

V und W werden isomorph genannt, wenn es eine bijektive, lineare Abbildung von V nach W gibt. V und W sind genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 49

Thema: Eigenschaften

V ist isomorph zu $\mathbb{K}^n$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 52

Thema: Eigenschaften

Sei V_1 der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$, und sei $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$.

Beide Vektorräume sind $\mathbb{R}$-Vektorräume der Dimension 1. Es folgt, dass sie isomorph sind.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 51
Thema: Eigenschaften

Die identische Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist linear.

Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(a) = a + 1$ für alle $a\mathbb{R}$ ist nicht linear, denn $f(0) = 1 \neq 0$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 53

Thema: Eigenschaften

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Abbildung $f : \mathbb{F}_2[T] \to \mathbb{F}_2[T]$ definiert durch $f\left(\sum\limits_{i=0}^{n} a_i T^i\right) = \sum\limits_{i=0}^{n} a_i T^{i+1}$ für alle $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathbb{F}_2[T]$, ist linear.

Hinweis Wahr.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 54
Thema: Eigenschaften

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \\ x+y \end{pmatrix}$, für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ist linear.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 55
Thema: Eigenschaften

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Abbildung $f : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$, $f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i + 17T$ für alle $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathbb{R}[T]$ ist linear.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 56
Thema: Eigenschaften

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Abbildung $f : \mathbb{Q}[T] \to \mathbb{Q}[T]$, $f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i - a_n T^n$ für alle $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathbb{Q}[T]$ ist linear.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 54
Thema: Eigenschaften

Die Aussage ist falsch.

Es sind $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $2 \in \mathbb{R}$. Es gelten

$$f\left(2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix},$$

und

$$2f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Da diese Vektoren verschieden sind, folgt, dass f nicht linear ist.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 53
Thema: Eigenschaften

Die Aussage ist wahr.

Die Abbildung f bildet jedes Polynom $p \in \mathbb{F}_2[T]$ auf Tp ab. Seien p und q Polynome in $\mathbb{F}_2[T]$. Dann gilt $f(p+q) = T(p+q) = Tp + Tq = f(p) + f(q)$. Sei $a \in \mathbb{F}_2$, und sei $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i$ in $\mathbb{F}_2[T]$. Dann gilt

$$f\left(a \sum_{i=0}^{n} a_i T^i\right) = f\left(\sum_{i=0}^{n} a a_i T^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a a_i T^{i+1} = a f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\right).$$

Somit ist f linear.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 56
Thema: Eigenschaften

Die Aussage ist falsch.

Seien $p = T$ und $q = T^2$. Dann gilt $f(p) = 0 = f(q)$, also $f(p)+f(q) = 0$. Es ist $p+q = T+T^2$, und es folgt $f(p+q) = T \neq 0$. Dies zeigt, dass f nicht linear ist.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 55
Thema: Eigenschaften

Die Aussage ist falsch.

Lineare Abbildungen bilden das Nullelement auf das Nullelement ab. Da $f(0) = 17T \neq 0$, ist f nicht linear.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 57

Thema: Eigenschaften

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Abbildung $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$, für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, ist linear.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 58

Thema: Kern und Bild

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Nennen Sie drei Aussagen, die äquivalent sind zu der Aussage: f ist injektiv.

Hinweis Der Kern von f liefert ein mögliches Kriterium. Weiter ist es nützlich, die Bilder einer Basis unter f zu beobachten.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 59

Thema: Kern und Bild

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Nennen Sie drei Aussagen, die äquivalent sind zu der Aussage: f ist surjektiv.

Hinweis Das Bild von f liefert ein mögliches Kriterium. Weiter ist es nützlich, die Bilder einer Basis unter f zu beobachten.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 60

Thema: Kern und Bild

Wie lautet der Rangsatz?

Hinweis Man könnte ihn auch „Dimensionsformel für Kern und Bild linearer Abbildungen" nennen.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 58

Thema: Kern und Bild

1. Der Kern von f ist $\{0\}$.
2. Wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, dann sind $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig in W.
3. Wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, dann ist $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.
4. $\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \mathrm{Rg}(f)$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 57
Thema: Eigenschaften

Die Aussage ist wahr.

Seien $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$ in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right) = a + a'' = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix},$$

und

$$f\left(r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ra = rf\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass f linear ist.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 60
Thema: Kern und Bild

Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei V endlich erzeugt. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Der Rangsatz besagt, dass $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \mathrm{Rg}(f)$ ist.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 59
Thema: Kern und Bild

---

1. $\mathrm{Bild}(f) = W$.
2. Wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, dann ist $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von W.
3. $\mathrm{Rg}(f) = \dim(W)$.
4. Zu jedem $w \in W$ gibt es ein $v \in V$ mit $f(v) = w$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 61

Thema: Kern und Bild

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper K, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wenn $V = W$ ist, und wenn $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f)$ ist, so ist $\dim(V)$ gerade.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 62

Thema: Eigenschaften

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper K, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Wenn $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear abhängig sind, und wenn f injektiv ist, dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 63
Thema: Kern und Bild

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wenn f injektiv ist, so gilt $\dim(V) \leq \dim(W)$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 64
Thema: Kern und Bild

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wenn f surjektiv ist, so gilt $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 62

Thema: Eigenschaften

Die Aussage ist wahr.

Seien $f(v_1), \dots, f(v_n)$ linear abhängig, und sei f injektiv. Es gibt Skalare $a_1, \dots, a_n$, die nicht alle 0 sind, mit $\sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) = 0$. Es folgt $f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = 0$, denn f ist linear, also $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in \mathrm{Kern}(f)$. Da f injektiv ist, folgt $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$, also $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$. Es folgt, dass $v_1, \dots, v_n$ linear abhängig sind.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 61
Thema: Kern und Bild

Die Aussage ist wahr.

Sei $m = \dim(\mathrm{Kern}(f))$. Mit dem Rangsatz gilt $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = m + m$, das heißt, $\dim(V)$ ist gerade.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 64
Thema: Kern und Bild

Die Aussage ist wahr.

Die Aussage folgt aus dem Rangsatz und der Tatsache, dass $\mathrm{Bild}(f) = W$ ist. Dann gilt nämlich $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(W)$, also $\dim(V) \geq \dim(W)$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 63
Thema: Kern und Bild

Die Aussage ist wahr.

Die Aussage folgt aus dem Rangsatz und der Tatsache, dass $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$ ist. Dann gilt nämlich $\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq \dim(W)$, denn $\mathrm{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 65
Thema: Kern und Bild

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wenn $V = W$, so ist f genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 66

Thema: Kern und Bild

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f(x)$ genau dann Null ist, wenn $x = 0$ gilt.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 67
Thema: Kern und Bild

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{C}^5$ mit $\mathrm{Bild}(f) = \mathrm{Kern}(f)$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 68

Thema: Lin.Abb. und Basen

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis $v_1, \ldots, v_n$ von V, und seien $w_1, \ldots, w_n$ Vektoren in W. Gibt es immer eine lineare Abbildung $f : V \to W$, für die $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt? Wenn ja, wie viele lineare Abbildungen gibt es, die diese Eigenschaft haben?

Hinweis Was besagt der Satz über die Beschreibung linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 66

Thema: Kern und Bild

Die Aussage ist falsch.

Angenommen, es gibt eine solche Abbildung. Dann ist $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$, also $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 0$. Da das Bild von f ein Unterraum von $\mathbb{R}$ ist, folgt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq 1$. Mit dem Rangsatz folgt $2 \leq 0 + 1$, ein Widerspruch.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 65
Thema: Kern und Bild

Die Aussage ist wahr. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} f \text{ ist injektiv} &\Leftrightarrow \operatorname{Kern}(f) = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(W) \\ &\Leftrightarrow f \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 68

Thema: Lin.Abb. und Basen

Der Satz über die Beschreibung linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis besagt, dass es immer genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, für die $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 67
Thema: Kern und Bild

Die Aussage ist falsch.

Angenommen, es gäbe eine solche lineare Abbildung. Mit dem Rangsatz folgt $\dim(\mathbb{R}^5) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$. Dies ist ein Widerspruch, denn links des Gleichheitszeichens steht 5, eine ungerade Zahl, und rechts des Gleichheitszeichens steht eine gerade Zahl.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 69

Thema: Lin.Abb. und Basen

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}''$ Basen von V. Was ist ein Basiswechsel oder eine Basistransformation von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}''$?

Hinweis Was besagt der Satz über die Beschreibung linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 70
Thema: Kern und Bild

Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume derselben Dimension. Sei $f : V \to W$ linear. Nehmen wir an, Sie möchten beweisen, dass f ein Isomorphismus ist. Warum ist es ausreichend, zu beweisen, dass f injektiv ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 71
Thema: Kern und Bild

Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume derselben Dimension. Sei $f : V \to W$ linear. Nehmen wir an, Sie möchten beweisen, dass f ein Isomorphismus ist. Warum ist es ausreichend, zu beweisen, dass f surjektiv ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 72

Thema: Lin.Abb. und Basen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 4, und sei W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 5. Definieren Sie eine lineare Abbildung $f : V \to W$, deren Kern die Dimension 2 hat.

Hinweis Was besagt der Satz über die Beschreibung linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 70
Thema: Kern und Bild

Eine injektive, lineare Abbildung zwischen zwei endlich erzeugten Vektorräumen derselben Dimension ist automatisch surjektiv.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 69

Thema: Lin.Abb. und Basen

Die Basis $\mathcal{B}$ bestehe aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_n$, und die Basis $\mathcal{B}''$ bestehe aus den Vektoren $w_1, \ldots, w_n$. Ein Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}''$ ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : V \to V$, die durch $f(v_i) = w_i$, für alle $1 \leq i \leq n$, definiert ist.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 72

Thema: Lin.Abb. und Basen

Sei v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von V, und sei w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 eine Basis von W. Sei $f : V \to W$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, die durch $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = f(v_4) = 0$ definiert ist. Die Dimension des Bildes von f ist 2, denn w_1, w_2 ist eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Mit dem Rangsatz folgt $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 2$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 71

Thema: Kern und Bild

Eine surjektive, lineare Abbildung zwischen zwei endlich erzeugten Vektorräumen derselben Dimension ist automatisch injektiv.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 73
Thema: Eigenschaften

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Nennen Sie drei Beispiele für $\mathbb{K}$-Vektorräume der Dimension 3, die isomorph zu $\mathbb{K}^3$, aber verschieden von $\mathbb{K}^3$ sind.

Hinweis Wie lautet der Struktursatz endlich erzeugter Vektorräume?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 74

Thema: Hom-Räume

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Wie ist der Vektorraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ definiert? Wie sind Addition und Skalarmultiplikation definiert?

Hinweis Wiederholen Sie die Definition.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 75

Thema: Hom-Räume

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Welche Dimension hat $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$?

Hinweis Ohne Hinweis.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 76
Thema: Hom-Räume

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Geben Sie ein Beispiel für einen Isomorphismus von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ nach $\mathrm{M}_{mn}(K)$.

Hinweis Stichwort: Matrixdarstellung

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 74
Thema: Hom-Räume

Die Elemente in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ sind die linearen Abbildungen von V nach W.

Wenn f und g lineare Abbildungen von V nach W sind, so ist $f + g : V \to W$ definiert durch $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ für alle $v \in V$.

Wenn $a \in \mathbb{K}$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, so ist $af : V \to W$ definiert durch $(af)(v) = af(v)$ für alle $v \in V$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 73

Thema: Eigenschaften

Sei V_1 der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{K}$ vom Grad kleiner oder gleich 2.

Sei $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathrm{M}_{22}(\mathbb{K})$.

Sei V_3 die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{K}$.

Die Vektorräume V_1, V_2 und V_3 sind alle isomorph zu $\mathbb{K}^3$, denn sie sind $\mathbb{K}$-Vektorräume der Dimension 3.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 76

Thema: Hom-Räume

Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, und sei $\mathcal{C}$ eine Basis von W. Die Abbildung, die jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ ihre Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ zuordnet, ist ein Isomorphismus.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 75

Thema: Hom-Räume

Sei $n = \dim(V)$, und sei $m = \dim(W)$. Dann gilt $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = mn$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 77
Thema: Hom-Räume

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, und sei $\mathcal{C}$ eine Basis von W. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wie ist ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ definiert?

Hinweis Wir brauchen die Koordinatenvektoren der Bilder der Basiselemente von $\mathcal{B}$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 78
Thema: Hom-Räume

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Was ist die Dimension von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$?

Hinweis Wie lautet die Dimensionsformel für Homomorphismenräume?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 79

Thema: Hom-Räume

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sind $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$ isomorph? Begründen Sie ihre Antwort.

Hinweis Welche Dimensionen haben $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 80

Thema: Hom-Räume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wenn $V = W$, so gilt $f \circ f = f + f$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 78

Thema: Hom-Räume

Wenn $n = \dim(V)$, so gilt $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})) = n$, denn $\dim(\mathbb{K}) = 1$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 77

Thema: Hom-Räume

Seien $v_1, \ldots, v_n$ die Basisvektoren in $\mathcal{B}$. Die Koordinatenvektoren von $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ bezüglich $\mathcal{C}$ sind die Spalten von ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 80
Thema: Hom-Räume

Die Aussage ist falsch.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 3x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f linear. Es gilt $(f \circ f)(1) = f(3) = 9$, und $(f + f)(1) = 3 + 3 = 6$. Es folgt, dass $f \circ f \neq f + f$ ist.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 79

Thema: Hom-Räume

Ja, die Vektorräume $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$ sind isomorph, denn sie haben dieselbe Dimension.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 81
Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum der Dimension n über einem Körper $\mathbb{K}$. Geben sie einen Isomorphismus von V nach $\mathbb{K}^n$ an.

Hinweis Denken Sie an Koordinatenvektoren.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 82

Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum der Dimension n über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $(v_1, \ldots, v_n) = \mathcal{B}$ eine Basis von V, und sei $v \in V$. Wie ist der Koordinatenvektor von v bezüglich $\mathcal{B}$ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 83

Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, und sei $\mathcal{C}$ eine Basis von W. Sei $A = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$, und sei $v \in V$. Was ist der Zusammenhang zwischen dem Koordinatenvektor a von v bezüglich $\mathcal{B}$ und dem Koordinatenvektor b von $f(v)$ bezüglich $\mathcal{C}$?

Hinweis Ohne Hinweis.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Frage 84

Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei A eine Matrixdarstellung von f bezüglich Basen von V und W. Wie viele Zeilen und wie viele Spalten hat A?

Hinweis Wie ist die Matrixdarstellung von f definiert?

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 82
Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Wir schreiben v als Linearkombination der Basiselemente, also $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Dann ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v bezüglich $\mathcal{B}$.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 81

Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Sei $(v_1, \ldots, v_n) = \mathcal{B}$ eine Basis von V. Die Abbildung $f : V \to \mathbb{K}^n$, die jedem Vektor $v \in V$ seinen Koordinatenvektor bezüglich $\mathcal{B}$ zuordnet, ist ein Isomorphismus.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 84
Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Sei $n = \dim(V)$, und sei $m = \dim(W)$. Die Matrix A hat m Zeilen und n Spalten.

© FernUniversität in Hagen, 2008

Antwort 83

Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Es gilt $Aa = b$.

© FernUniversität in Hagen, 2008