Frage 1

Thema: Treppennormalform

Ist die reelle Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ in Treppennormalform?

Hinweis Die Matrix ist nicht in Treppennormalform. Warum nicht?

Frage 2

Thema: Treppennormalform

Wie viele Matrizen in $\mathrm{M}_{n1}(\mathbb{R})$ gibt es, die in Treppennormalform sind?

Hinweis Es gibt zwei Matrizen in $\mathrm{M}_{n1}(\mathbb{R})$, die in Treppennormalform sind. Welche sind das?

Frage 3

Thema: Treppennormalform

Wahr oder falsch? Alle Matrizen in $\mathrm{M}_{1n}(\mathbb{F}_2)$ sind in Treppennormalform.

Hinweis Wahr.

Frage 4

Thema: Treppennormalform

Ist die reelle Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in Treppennormalform?

Hinweis Nein.

Antwort 2

Thema: Treppennormalform

Es gibt zwei Matrizen in $\mathrm{M}_{n1}(\mathbb{R})$, nämlich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 1

Thema: Treppennormalform

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn der Eintrag an der Stelle $(1,2)$ ist $\neq 0$.

Antwort 4

Thema: Treppennormalform

Nein, denn wenn eine Matrix, die in Treppennormalform ist, nicht die Nullmatrix ist, dann muss es in der ersten Zeile eine Pivot-Position geben.

Antwort 3

Thema: Treppennormalform

Die Nullmatrix in $\mathrm{M}_{1n}(\mathbb{F}_2)$ ist nach Definition eine Matrix in Treppennormalform. Ist A nicht in die Nullmatrix, so gibt es einen kleinsten Index i, so dann der Eintrag an der Stelle $(1,i)$ nicht Null ist. Dieser Eintrag muss 1 sein, denn in $\mathbb{F}_2$ gibt es nur die Elemente 0 und 1. Da A nur eine Zeile hat, ist es für die Frage, ob A in Treppennormalform ist oder nicht, irrelevant, wie die Einträge $(1,j)$ mit $j > i$ aussehen. Somit sind alle Matrizen in $\mathrm{M}_{1n}(\mathbb{F}_2)$ in Treppennormalform.

Frage 5
Thema: Treppennormalform

Wahr oder falsch? Ist A eine Matrix in Treppennormalform, und ist die erste Zeile von A eine Nullzeile, dann ist A die Nullmatrix.

Hinweis Wahr.

Frage 6

Thema: Zeilenäquivalenz

Seien $A, B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ invertierbare Matrizen. Warum sind A und B zeilenäquivalent?

Hinweis Welches sind die Treppennormalformen von A und B?

Frage 7

Thema: Treppennormalform

Sei $A \in \mathrm{M}_{64}(\mathbb{K})$. Welches sind die möglichen Ränge von A?

Hinweis Die möglichen Ränge sind 0, 1, 2, 3 und 4. Konstruieren Sie für jeden der möglichen Fälle ein Beispiel.

Frage 8

Thema: Treppennormalform

Kann eine 4×5-Matrix A in Treppennormalform die Pivot-Positionen $(2, 1)$ und $(3, 3)$ haben?

Hinweis Nein.

Antwort 6

Thema: Zeilenäquivalenz

Die Treppennormalform zu A und zu B ist die Einheitsmatrix. Zwei Matrizen sind genau dann zeilenäquivalent, wenn sie dieselbe Treppennormalform haben.

Antwort 5

Thema: Treppennormalform

Wahr, denn eine Matrix in Treppennormalform, die nicht die nicht die Nullmatrix ist, muss in der ersten Zeile eine Pivot-Position, also einen Eintrag 1 haben.

Antwort 8

Thema: Treppennormalform

Nein. Die Matrix A ist entweder die Nullmatrix, und dann hat sie keine Pivot-Position, oder sie hat eine Pivot-Position in der ersten Zeile.

Antwort 7
Thema: Treppennormalform

Die möglichen Ränge sind 0, 1, 2, 3 und 4. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Rang 0, die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Rang 1, die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Rang 2, die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Rang 3, und die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Rang 4.

Frage 9

Thema: Treppennormalform

Sei A eine 4×3-Matrix über $\mathbb{R}$ in Treppennormalform mit Pivot-Positionen $(1, 2)$ und $(2, 3)$. Welche Einträge sind 0, welche 1 und welche beliebig?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 10

Thema: Treppennormalform

Sei A eine 4×3-Matrix über $\mathbb{R}$ in Treppennormalform mit Pivot-Positionen $(1,1)$ und $(2,2)$. Welche Einträge sind 0, welche 1 und welche beliebig?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 11
Thema: Treppennormalform

Sei $A \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ invertierbar, und sei $B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Warum haben AB und B dieselbe Treppennormalform?

Hinweis Die Matrix A ist Produkt von Elementarmatrizen.

Frage 12
Thema: Treppennormalform

Welches sind die Matrizen in $M_{23}(\mathbb{F}_2)$, die in Treppennormalform sind, und die den Rang 2 haben?

Hinweis Es gibt 7.

Antwort 10

Thema: Treppennormalform

Eine solche Matrix hat die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dabei bezeichnet $*$ eine beliebige reelle Zahl.

Antwort 9

Thema: Treppennormalform

Eine solche Matrix hat die Form $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 12

Thema: Treppennormalform

Zunächst gibt es die, deren Pivot-Positionen $(1,1)$ und $(2,2)$ sind: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann die mit Pivot-Positionen $(1,1)$ und $(2,3)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zum Schluss die Matrix mit Pivot-Positionen $(1,2)$ und $(2,3)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Antwort 11
Thema: Treppennormalform

Da A invertierbar ist, gibt es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$, so dass $A = E_1 \ldots E_s$ ist. Es ist also $AB = E_1 \ldots E_s B$, und es folgt, dass AB und B zeilenäquivalent sind. Zeilenäquivalente Matrizen haben aber dieselbe Treppennormalform.

Frage 13

Thema: Treppennormalform

Welches sind die Matrizen in $M_{33}(\mathbb{R})$, die in Treppennormalform sind, und die den Rang 3 haben?

Hinweis Es gibt nur eine.

Frage 14

Thema: Treppennormalform

Wie sieht die Treppennormalform einer invertierbaren Matrix aus?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 15

Thema: Zeilenäquivalenz

Gibt es Matrizen, die nur zu sich selbst zeilenäquivalent sind?

Hinweis Ja, gibt es. Und zwar in jeder beliebigen Größe.

Frage 16

Thema: Zeilenäquivalenz

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und seien $A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Wie können Sie entscheiden, ob A und B zeilenäquivalent sind?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 14

Thema: Treppennormalform

Die Treppennormalform einer invertierbaren $n \times n$-Matrix ist die Einheitsmatrix I_n.

Antwort 13

Thema: Treppennormalform

Es gibt nur eine Matrix vom Rang 3 in $\mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$, nämlich die Einheitsmatrix I_3.

Antwort 16
Thema: Zeilenäquivalenz

A und B sind genau dann zeilenäquivalent, wenn sie dieselbe Treppennormalform haben. Wir müssen also von A und von B die Treppennormalform ausrechnen und diese vergleichen.

Antwort 15
Thema: Zeilenäquivalenz

Wenn A die $m \times n$-Nulllmatrix ist, dann ist A nur zu sich selbst zeilenäquivalent.

Frage 17
Thema: Zeilenäquivalenz

Sind die reellen Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zeilenäquivalent?

Hinweis Nein.

Frage 18

Thema: Zeilenäquivalenz

Seien $T, T'' \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ Matrizen in Treppennormalform. Wann sind T und T'' zeilenäquivalent?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 19

Thema: Zeilenäquivalenz

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jede Matrix A ist zu $-A$ zeilenäquivalent.

Hinweis Wahr.

Frage 20

Thema: Zeilenäquivalenz

Wann werden zwei Matrizen A und B zeilenäquivalent genannt?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 18
Thema: Zeilenäquivalenz

Sie sind genau dann zeilenäquivalent, wenn sie gleich sind.

Antwort 17

Thema: Zeilenäquivalenz

Nein, denn beide Matrizen sind in Treppennormalform. Zwei Matrizen in Treppennormalform sind genau dann zeilenäquivalent, wenn sie gleich sind.

Antwort 20

Thema: Zeilenäquivalenz

Zwei $m \times n$-Matrizen A und B werden zeilenäquivalent genannt, wenn es endlich viele $m \times m$-Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$ so gibt, dass $A = E_1 \cdots E_s B$ gilt.

Antwort 19

Thema: Zeilenäquivalenz

Wahr. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Dann gilt $-A = -I_m A$. Die Matrix $-I_m$ ist invertierbar, also Produkt von Elementarmatrizen. Wir können also A durch elementare Zeilenumformungen in $-A$ überführen, was bedeutet, dass A und $-A$ zeilenäquivalent sind.

Frage 21

Thema: Zeilenäquivalenz

Seien A und B zeilenäquivalente Matrizen. Warum haben A und B denselben Rang?

Hinweis Wie ist der Rang einer Matrix definiert?

Frage 22
Thema: Zeilenäquivalenz

Seien A und B zeilenäquivalente Matrizen. Nennen Sie drei Eigenschaften, die A und B gemeinsam haben..

Hinweis

Frage 23
Thema: Rang

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $\mathrm{Rg}(A) = m$. Dann gilt $m \leq n$.

Hinweis Wahr.

Frage 24
Thema: Rang

Wie können Sie am Rang einer Matrix $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ entscheiden, ob A invertierbar ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 22

Thema: Zeilenäquivalenz

1. A und B haben dieselbe Anzahl von Zeilen und Spalten.
2. A und B haben denselben Rang.
3. A und B haben dieselbe Treppennormalform.

Antwort 21

Thema: Zeilenäquivalenz

A und B haben dieselbe Treppennormalform T. Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der Pivot-Positionen ihrer Treppennormalgform, es folgt also $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B)$.

Antwort 24

Thema: Rang

Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{Rg}(A) = n$ ist

Antwort 23

Thema: Rang

Wahr. Der Rang von A ist die Anzahl der Pivot-Positionen in der Treppennormalform von A. Es kann höchstens so viele Pivotpositionen geben, wie A Spalten hat.

Frage 25

Thema: Rang

Welche Ränge kann eine obere Dreieicksmatrix $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ haben?

Hinweis Alle ganzen Zahlen zwischen 0 und n sind möglich.

Frage 26
Thema: Rang

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $E \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ eine Elementarmatrix. Wie unterscheiden sich die Ränge von A und EA?

Hinweis Gar nicht.

Frage 27
Thema: Rang

Seien A und B $n \times n$-Matrizen. Gilt $\operatorname{Rg}(AB) = \operatorname{Rg}(BA)$?

Hinweis Im Allgemeinen nicht.

Frage 28
Thema: Rang

Seien A und B $n \times n$-Matrizen. Gilt $\mathrm{Rg}(AB) = \mathrm{Rg}(A)\mathrm{Rg}(B)$?

Hinweis Nein.

Antwort 26

Thema: Rang

Die Matrizen A und EA sind zeilenäquivalent. Daher haben sie dieselbe Treppennormalform, also auch denselben Rang.

Antwort 25
Thema: Rang

Jede ganze Zahl zwischen 0 und n ist möglich. Die Einheitsmatrix I_n ist eine obere Dreiecksmatrix vom Rang n. Verschieben wir die Diagonale um eine Position nach rechts, so erhalten wir $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, und diese Matrix hat den Rang $n-1$. Verschieben wir wieder um eine Position nach rechts, so erhalten wir eine Matrix vom Rang $n-2$ und so weiter. Die $n \times n$-Nullmatrix hat den Rang 0.

Antwort 28
Thema: Rang

Nein. Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Beide Matrizen haben den Rang 1. Es ist AB die Nullmatrix, also $\mathrm{Rg}(AB) = 0 \neq \mathrm{Rg}(A)\mathrm{Rg}(B)$.

Antwort 27
Thema: Rang

Nein, im Allgemeinen gilt das nicht. Seien etwa $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $\mathrm{Rg}(AB) = 1$ und $\mathrm{Rg}(BA) = 0$.

Frage 29
Thema: Rang

Seien A und B $n \times n$-Matrizen. Gilt $\mathrm{Rg}(A + B) = \mathrm{Rg}(A) + \mathrm{Rg}(B)$?

Hinweis Nein.

Frage 30

Thema: Invertierbarkeit

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Nennen Sie vier Aussagen, die äquivalent sind zu der Aussage „A ist invertierbar“.

Hinweis Rang und Treppennormalform von A liefern Invertierbarkeitskriterien. Die Definition für Invertierbarkeit können Sie auch nennen.

Frage 31

Thema: Invertierbarkeit

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Wie würden Sie vorgehen, um A^{-1} zu berechnen?

Hinweis Ohne Hinweis. Dieses Verfahren müssen Sie beherrschen.

Frage 32

Thema: Invertierbarkeit

Listen Sie alle invertierbaren Matrizen in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{F}_2)$ auf.

Hinweis Hier brauchen Sie alle Matrizen vom Rang 2. Davon gibt es 6 Stück.

Antwort 30
Thema: Invertierbarkeit

1. Es gibt eine Matrix $\in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ mit $AB = BA = I_n$.
2. Die Treppennormalform von A ist die Einheitsmatrix.
3. Der Rang von A ist n.
4. A ist Produkt von Elementarmatrizen.
5. Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b \in \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K})$ hat genau eine Lösung.

Antwort 29

Thema: Rang

Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Beide Matrizen haben den Rang 1. Es ist $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, und diese Matrix hat den Rang 1. Es gilt also $\operatorname{Rg}(A + B) = 1 \neq \operatorname{Rg}(A) + \operatorname{Rg}(B)$.

Antwort 32

Thema: Invertierbarkeit

Die Matrizen in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{F}_2)$ sind $\begin{pmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 1\end{pmatrix}$. Dies sind alle invertierbaren Matrizen in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{F}_2)$.

Antwort 31
Thema: Invertierbarkeit

Wir schreiben A und I_n in eine Matrix, getrennt durch einen Strich. Dann überführen wir A durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix, wobei wir dieselben elementaren Zeilenumformungen auf I_n anwenden. Wenn A in I_n überführt ist, steht rechts des Striches die Matrix A^{-1}.

Frage 33

Thema: Invertierbarkeit

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R})$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix. Warum müssen die Diagonalelemente $\neq 0$ sein?

Hinweis Nehmen Sie an, ein Diagonaleintrag wäre 0. Was für Auswirkungen hat das auf die Treppennormalform von A?

Frage 34

Thema: Invertierbarkeit

Seien A und B invertierbare $n \times n$-Matrizen. Wie sieht $(AB)^{-1}$ aus?

Hinweis Was ist der inverse Vorgang von „Einsteigen und Türen schließen“?

Frage 35

Thema: Invertierbarkeit

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ invertierbar. Wie sieht $(A^{-1})^{-1}$ aus?

Hinweis Was müssen Sie von links und rechts mit A^{-1} multiplizieren, damit die Einheitsmatrix raus kommt?

Frage 36

Thema: Invertierbarkeit

Sei A eine quadratische Matrix mit Nullzeile. Warum kann A nicht invertierbar sein?

Hinweis Nehmen Sie an, A hätte eine Nullzeile. Multiplizieren Sie dann A mit einer weiteren Matrix B. Kann $AB = I_n$ sein?

Antwort 34

Thema: Invertierbarkeit

Es ist $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Antwort 33

Thema: Invertierbarkeit

Nehmen wir an, der Eintrag a_{ii} an der Stelle (i, i) wäre 0. Dann können wir durch elementare Zeilenumformungen die Position (i, i) nicht zu einer Pivot-Position machen. Die Treppennormalform von A ist daher nicht die Einheitsmatrix, und es folgt, dass A nicht invertierbar ist.

Antwort 36

Thema: Invertierbarkeit

Sei A eine $n \times n$-Matrix, deren i-te Zeile eine Nullzeile ist. Sei B eine beliebige $n \times n$-Matrix. Die i-te Zeile von AB ist eine Nullzeile. Das bedeutet, dass es keine Matrix B mit $AB = I_n$ gibt, dass A also nicht invertierbar ist.

Antwort 35

Thema: Invertierbarkeit

Es ist $(A^{-1})^{-1} = A$.

Frage 37

Thema: Invertierbarkeit

Sei A eine quadratische Matrix mit Nullspalte. Warum kann A nicht invertierbar sein?

Hinweis Nehmen Sie an, A hätte eine Nullspalte. Multiplizieren Sie dann A von links mit einer weiteren Matrix B. Kann $BA = I_n$ sein?

Frage 38

Thema: Invertierbarkeit

Sei A eine quadratische Matrix, für die $A \cdot A$ die Nullmatrix ist. Warum ist A nicht invertierbar?

Hinweis Nehmen Sie an, A wäre invertierbar. Multiplizieren Sie $A \cdot A$ mit $A^{-1} \cdot A^{-1}$

Frage 39

Thema: Invertierbarkeit

Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix mit $AA = A$. Warum muss $A = I_n$ gelten?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 40

Thema: Gaußalgorithmus

Was ist der Input und was der Output des Gaußalgorithmus?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 38
Thema: Invertierbarkeit

Angenommen, A wäre eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Dann gilt $A^{-1}A^{-1}AA = A^{-1}I_nA = I_n$. Da aber $AA = 0$ ist, gilt auch $A^{-1}A^{-1}AA = A^{-1}A^{-1}0 = 0$, ein Widerspruch. Unsere Annahme, A sei invertierbar, ist also falsch, und es folgt, dass A nicht invertierbar ist.

Antwort 37

Thema: Invertierbarkeit

Sei A eine $n \times n$-Matrix, deren i-te Spalte eine Nullspalte ist. Sei B eine beliebige $n \times n$-Matrix. Dann ist die i-te Spalte von BA eine Nullspalte. Das bedeutet, dass es keine Matrix B mit $BA = I_n$ gibt, dass A also nicht invertierbar ist.

Antwort 40
Thema: Gaußalgorithmus

Der Input ist eine $m \times n$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$, und der Output ist die Treppennormalform von A.

Antwort 39
Thema: Invertierbarkeit

Wir multiplizieren die Gleichung $AA = A$ mit A^{-1} und erhalten $A^{-1}AA = A^{-1}A$, also $A = I_n$.

Frage 41

Thema: Gaußalgorithmus

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei T die Treppennormalform von A. Angenommen, Sie müssten eine invertierbare Matrix S bestimmen, so dass $SA = T$ gilt. Wie würden Sie vorgehen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 42

Thema: Gaußalgorithmus

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Welche elementare Zeilenumformung sollten Sie laut Gaußalgorithmus jetzt machen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 43

Thema: Gaußalgorithmus

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Welche elementare Zeilenumformung sollten Sie laut Gaußalgorithmus jetzt machen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 44

Thema: Gaußalgorithmus

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Welche elementare Zeilenumformung sollten Sie laut Gaußalgorithmus jetzt machen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 42

Thema: Gaußalgorithmus

Die zweite und dritte Zeile sollten vertauscht werden.

Antwort 41

Thema: Gaußalgorithmus

Wir schreiben die Einheitsmatrix I_m rechts neben A in eine Matrix, durch einen Strich getrennt. Dann überführen wir A mit Hilfe des Gaußalgorithmus in Treppennormalform, wobei wir dieselben elementaren Zeilenumformungen simultan auf I_n anwenden. Wenn A in Treppennormalform ist, dann steht rechts des Strichs die gesuchte Matrix S.

Antwort 44
Thema: Gaußalgorithmus

Wir teilen die Einträge in der dritten Zeile durch 7.

Antwort 43

Thema: Gaußalgorithmus

Wir subtrahieren das Dreifache der zweiten Zeile von der ersten.

Frage 45

Thema: Gaußalgorithmus

Der Gaußalgorithmus funktioniert für Matrizen über beliebigen Körpern, also auch für Matrizen über $\mathbb{F}_2$. Auf welche elementare Zeilenumformung kann der Gaußalgorithmus bei Matrizen über $\mathbb{F}_2$ verzichten?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 46

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{K}$. Wann existiert genau eine Lösung?

Hinweis Der Rang von A entscheidet über diese Frage.

Frage 47

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{K}$. Wann existiert mindestens eine Lösung?

Hinweis Diese Frage entscheidet der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix.

Frage 48

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{K}$. Wann existiert keine Lösung des linearen Gleichungssystems?

Hinweis Entscheidend ist der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix.

Antwort 46

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Es existiert genau eine Lösung, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A'') = n$ ist. Dabei bezeichnet A'' die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Antwort 45
Thema: Gaußalgorithmus

Auf die Multiplikation von Zeilen mit einem Skalar $\neq 0$. In $\mathbb{F}_2$ wäre das eine Multiplikation mit 1, und auf die können wir verzichten.

Antwort 48

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Es existiert keine Lösung, wenn $\mathrm{Rg}(A) < \mathrm{Rg}(A'')$ ist. Dabei bezeichnet A'' die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Antwort 47

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Es existiert mindestens eine Lösung, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A'')$ ist. Dabei bezeichnet A'' die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Frage 49

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{K}$. Sei λ eine Lösung von $Ax = b$. Beschreiben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

Hinweis Die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems wird gebraucht.

Frage 50

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei K ein Körper. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(K)$, und sei $Ax = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Sei B eine zu A zeilenäquivalente Matrix. Wie unterscheiden sich die Lösungen von $Ax = 0$ und $Bx = 0$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 51

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Warum hat ein homogenes lineares Gleichungssystem immer eine Lösung?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 52

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{K}$. Sei $\mathrm{Rg}(A) = r$. Sei A'' die erweiterte Koeffizientenmatrix von $Ax = b$. Welche Ränge kann A'' haben?

Hinweis Wie viele zusätzliche Pivot-Positionen können Sie durch Hinzufügen einer weiteren Spalte erzeugen?

Antwort 50

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Die Lösungsmengen der Gleichungssysteme sind gleich.

Antwort 49

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $\mathcal{L}$ die Lösungsmenge von $Ax = b$. Sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Dann gilt $\mathcal{L} = \lambda + \mathcal{U}$.

Antwort 52
Thema: Struktur der Lösungsmenge

Die Matrix A'' kann den Rang r oder den Rang $r+1$ haben. Um dies zu sehen, überführen wir A'' mit dem Gaußalgorithmus in Treppennormalform T. Dann sind die ersten n Spalten von T die Treppennormalform von A. Ist in der letzten Spalte von T eine Pivot-Position, so gilt $\mathrm{Rg}(A'') = r + 1$. Ist in der letzten Spalte keine Pivot-Position, so gilt $\mathrm{Rg}(A'') = r$.

Antwort 51

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $Ax = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem. Dann ist $\lambda = 0$ immer eine Lösung des Gleichungssystems.

Frage 53

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Geben Sie ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem, das keine Lösungen besitzt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 54

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Geben Sie ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem, das genau eine Lösung besitzt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 55

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Geben Sie ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem, das mehr als eine aber nur endlich viele Lösungen besitzt.

Hinweis Hier sollte das lineare Gleichungssystem über $\mathbb{F}_2$ definiert sein.

Frage 56

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Geben Sie ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem, das unendlich viele Lösungen besitzt.

Hinweis Ohne Hinweis

Antwort 54

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Das lineare Gleichungssystem $x = 1$ besitzt genau eine Lösung.

Antwort 53

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Das lineare Gleichungssystem $0 \cdot x = 1$ besitzt keine Lösungen.

Antwort 56
Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{12}(\mathbb{R})$. Die Matrix A ist bereits in Treppennormalform. Das homogene lineare Gleichungssystem hat die Lösungsmenge

$$\mathcal{U} = \{a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Antwort 55

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{12}(\mathbb{F}_2)$. Die Matrix A ist bereits in Treppennormalform. Das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ hat genau zwei Lösungen, nämlich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Frage 57

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Beschreiben Sie den Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme $Ax = b$.

Hinweis Schlagen Sie bitte im Studienbrief nach.

Frage 58

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Beschreiben Sie den Algorithmus zum Lösen homogener linearer Gleichungssysteme $Ax = 0$.

Hinweis Schlagen Sie bitte im Studienbrief nach.

Frage 59

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Wann wird ein lineares Gleichungssystem homogen genannt?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 60

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Wann wird ein lineares Gleichungssystem inhomogen genannt?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 58
Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Sei $Ax = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

Wir überführen A in Treppennormalform T und streichen alle Nullzeilen in T.

Wir fügen in T Nullzeilen so ein, dass die Matrix quadratisch ist, und die Pivotelemente auf der Diagonalen stehen.

Wir ersetzen die Nullelemente auf der Diagonalen durch -1.

Seien $S_1 \dots, S_t$ die Spalten, in denen wir -1 eingesetzt haben. Dann ist

$$\mathcal{U} = \{a_1 S_1 + \cdots + a_t S_t \mid a_1, \dots, a_t \in \mathbb{K}\}$$

die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

Antwort 57

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

Wir bilden die erweiterte Koeffizientenmatrix $A'' = \left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array} \right)$ und überführen A'' in Treppennormalform. Ist $\mathrm{Rg}(A) < \mathrm{Rg}(A'')$, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Sei im Folgenden $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A'')$.

Wir streichen alle Nullzeilen in der Treppennormalform zu A''.

Wir fügen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Striches quadratisch ist, und die Pivotelemente auf der Diagonalen stehen.

Rechts des Striches finden wir eine spezielle Lösung λ von $Ax = b$.

Wir ersetzen die Nullelemente auf der Diagonalen durch -1.

Seien $S_1 \ldots, S_t$ die Spalten, in denen wir -1 eingesetzt haben. Dann ist

$$\mathcal{U} = \{a_1 S_1 + \cdots + a_t S_t \mid a_1, \ldots, a_t \in \mathbb{K}\}$$

die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, und es ist $\mathcal{L} = \lambda + \mathcal{U}$ die Lösungsmenge von $Ax = b$.

Antwort 60

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = b$ mit $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ und $b \in \mathrm{M}_{m1}(\mathbb{K})$ wird inhomogen genannt, wenn es Einträge in b gibt, die nicht 0 sind.

Antwort 59

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = 0$ wird homogen genannt. Dabei ist A eine $m \times n$-Matrix, x eine $n \times 1$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$ und 0 eine $m \times 1$-Matrix, deren Einträge alle 0 sind.

Frage 61
Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Was ist die Koeffizientenmatrix und was die erweiterte Koeffizientenmatrix des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$?

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & & & + & 2x_3 & = & 4 \\
 & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\
x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 6
\end{array}$$

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 62

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Wie lautet die Lösungsmenge $\mathcal{U}$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ über $\mathbb{R}$, wobei A die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist?

Hinweis Die Matrix A ist bereits in Treppennormalform.

Frage 63

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Wie lautet eine spezielle Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$, wobei A die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist?

Hinweis Die Matrix A ist bereits in Treppennormalform.

Frage 64

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Sei $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hat das lineare Gleichungssystem $Tx = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Lösung?

Hinweis Nein.

Antwort 62

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Es ist $\mathcal{U} = \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Antwort 61

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Die Koeffizientenmatrix ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, und die erweiterte Koeffizientenmatrix ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Antwort 64

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Die Matrix T ist die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems. Der Rang von T ist 2, und der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $T'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$ ist 3. Da die Ränge von T und T'' verschieden sind, hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Antwort 63

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Eine spezielle Lösung ist $\lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Frage 65

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ eine Matrix, und seien $b, b'' \in \mathrm{M}_{m1}(\mathbb{K})$.

Ist es möglich, dass $Ax = b$ keine Lösung hat, und $Ax = b''$ genau eine Lösung hat?

Hinweis Ja.

Frage 66

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ eine Matrix, und seien $b, b'' \in \mathrm{M}_{m1}(\mathbb{R})$.

Ist es möglich, dass $Ax = b$ genau eine Lösung hat, und $Ax = b''$ unendlich viele Lösungen hat?

Hinweis Nein.

Frage 67

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ eine Matrix, und seien $b, b'' \in \mathrm{M}_{m1}(\mathbb{R})$. Wie viele Lösungen hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b + b''$, wenn die linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = b''$ beide unendlich viele Lösungen haben?

Hinweis Unendlich viele.

Frage 68

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Was ist das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{rcrcrcr}
x_1 & & & + & 2x_3 & = & 4 \\
 & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\
x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2
\end{array}$$

Hinweis Ohne Hinweis

Antwort 66

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei A'' die erweiterte Koeffizientenmatrix von $Ax = b$, und sei $\tilde{A}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix von $Ax = b''$. Da beide linearen Gleichungssysteme Lösungen haben, gilt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A'') = \mathrm{Rg}(\tilde{A})$. Da $Ax = b$ genau eine Lösung hat, gilt $\mathrm{Rg}(A) = n$. Dann muss aber auch $Ax = b''$ genau eine Lösung haben.

Antwort 65

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Ja. Sei zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, und seien $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei A'' die erweiterte Koeffizientenmatrix von $Ax = b$, und sei $\tilde{A}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix von $Ax = b''$. Der Rang von A ist zwei, der Rang von A'' ist drei und der von $\tilde{A}$ ist 2. Somit hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung, und das lineare Gleichungssystem $Ax = b''$ hat mindestens eine Lösung. Da der Rang von A zwei ist, hat $Ax = b''$ genau eine Lösung.

Antwort 68

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Antwort 67

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $\mathcal{L}$ die Lösungsmenge von $Ax = b$, und sei $\mathcal{L}''$ die Lösungsmenge von $Ax = b$. Sei $\lambda \in \mathcal{L}$ und $\lambda'' \in \mathcal{L}''$. Dann gilt $A(\lambda + \lambda'') = A\lambda + A\lambda'' = b + b''$. Somit ist $\lambda + \lambda''$ eine Lösung von $Ax = b + b''$. Sei nun $\lambda_0 \in \mathcal{L}$ fest gewählt. Dann ist $\{\lambda_0 + \lambda'' \mid \lambda'' \in \mathcal{L}\}$ eine unendliche Menge von Lösungen von $Ax = b + b''$.

Frage 69
Thema: Unterräume

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei $A_0 \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ eine fest gewählte Matrix. Sei

$$M = \{X \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K}) \mid X = A_0 Y \text{ für eine Matrix } Y \in \mathrm{M}_{nn}(\mathrm{K})\}.$$

Ist M ein Unterraum von $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$?

Hinweis Ja. Zum Beweis benutzen Sie das Unterraumkriterium.

Frage 70

Thema: Definition VR

Sei V ein Vektorraum, und sei U ein Unterraum von V. Warum ist $V \setminus U$ niemals ein Unterraum von V?

Hinweis Enthält $V \setminus U$ das Nullelement?

Frage 71
Thema: Definition VR

Kann es einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ geben, der nicht $\{0\}$ ist, und der endlich viele Elemente enthält?

Hinweis Nein. Aber warum nicht?

Frage 72

Thema: Definition VR

Kann es Vektorräume geben, die nicht $\{0\}$ sind, und die endlich viele Elemente haben?

Hinweis Ja. Versuchen Sie, ein Beispiel zu konstruieren.

Antwort 70
Thema: Definition VR

Jeder Vektorraum muss ein Nullelement besitzen. Die Nullelemente in U und V sind gleich, somit enthält $V \setminus U$ kein Nullelement. Es folgt, dass $V \setminus U$ kein Vektorraum sein kann.

Antwort 69
Thema: Unterräume

Ja. Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium.

Die Nullmatrix $0 \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ liegt in M, denn sie ist von der Form $0 = A_0 0$. Somit ist die erste Bedingung des Unterraumkriteriums erfüllt.

Wenn X_1 und X_2 Matrizen in M sind, so sind sie von der Form $A_0 Y_1$ und $A_0 Y_2$ für zwei Matrizen Y_1 und Y_2 in $\mathrm{M}_{nn}(\mathrm{K})$. Dann gilt

$$X_1 + X_2 = A_0 Y_1 + A_0 Y_2 = A_0(Y_1 + Y_2).$$

Die Matrix $Y_1 + Y_2$ liegt in $\mathrm{M}_{nn}(\mathrm{K})$, und es folgt, dass $X_1 + X_2 = A_0(Y_1 + Y_2)$ in M liegt. Damit ist die zweite Bedingung des Unterraumkriteriums erfüllt.

Sei a ein Skalar in $\mathbb{K}$, und sei X eine Matrix in M. Dann gilt $X = A_0 Y$ für eine Matrix Y in $\mathrm{M}_{nn}(\mathrm{K})$. Es folgt $aX = aA_0 Y = A_0(aY)$. Die Matrix aY liegt in $\mathrm{M}_{nn}(\mathrm{K})$, und somit gilt $aX = A_0(aY) \in M$. Damit ist auch die dritte Bedingung für das Unterraumkriterium erfüllt.

Es folgt, dass M ein Unterraum von $\mathrm{M}_{nn}(\mathrm{K})$ ist.

Antwort 72

Thema: Definition VR

Ja. Der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2^2$ hat zum Beispiel vier Elemente.

Antwort 71

Thema: Definition VR

Nein. Wenn $V \neq \{0\}$ ist, dann gibt es einen Vektor $v \neq 0$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist av ebenfalls ein Vektor in V. Da wir unendlich viele Skalare in $\mathbb{R}$ haben, gibt es also unendlich viele Vektoren in V.

Frage 73

Thema: Definition VR

Warum ist $\mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ aber $\mathbb{Q}$ kein Vektorraum über $\mathbb{R}$?

Hinweis Problematisch ist die Skalarmultiplikation.

Frage 74

Thema: Definition VR

Ist die Skalarmultiplikation auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V eine Verknüpfung auf V?

Hinweis In der Regel nicht.

Frage 75

Thema: Definition VR

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $V \neq \{0\}$ und $V \neq \mathbb{K}$. Interpretieren Sie die Gleichung $0(x+y)=0$ in V. Welche Größen sind Skalare, welche Vektoren?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 76
Thema: Definition VR

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $V \neq \{0\}$ und $V \neq \mathbb{K}$. Seien $v, w \in V$. Kann $v \cdot w$ gebildet werden?

Hinweis Nein.

Antwort 74
Thema: Definition VR

Wenn V nicht gerade $\mathbb{K}$ ist, dann ist die Skalarmultiplikation keine Verknüpfung auf V. Eine Verknüpfung auf V ist eine Abbildung von $V \times V$ nach V, und ein Skalarprodukt ist eine Abbildung von $\mathbb{K} \times V$ nach V.

Antwort 73
Thema: Definition VR

Problematisch sind nur die Regeln, bei denen die Skalarmultiplikation involviert ist. Wenn wir eine rationale Zahl und eine reelle miteinander multiplizieren, dann ist das Ergebnis eine reelle Zahl. Somit ist die Skalarmultiplikation eine Abbildung von $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die alle Regeln der Skalarmultiplikation erfüllt, die in einem Vektorraum erfüllt sein müssen. Das bedeutet, dass $\mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist. Die Skalarmultiplikation ist aber keine Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Damit kann $\mathbb{Q}$ kein Vektorraum über $\mathbb{R}$ sein.

Antwort 76
Thema: Definition VR

Nein, eine Multiplikation von Vektoren ist nicht definiert.

Antwort 75
Thema: Definition VR

Die 0 vor der Klammer ist der Skalar $0 \in \mathbb{K}$, denn eine Multiplikation von Vektoren in einem Vektorraum ist nicht nicht definiert. Die 0 rechts des Gleichheitszeichens ist das Nullelement in V. Da links des Gleichheitszeichens dann auch ein Vektor stehen muss, sind x und y Vektoren.

Frage 77

Thema: Definition VR

Wie lauten die Distributivgesetze in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V? Welche Größen sind Skalare, welche Vektoren?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 78

Thema: Definition VR

Muss es in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ein neutrales Element 1 der Multiplikation geben?

Hinweis Nein.

Frage 79

Thema: Definition VR

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Kann es passieren, dass Vektoren Skalare sind.

Hinweis Ja, aber das ist selten.

Frage 80
Thema: Unterräume

Sei V ein Vektorraum, und seien U und W Unterräume von V. Ist $U \cup W$ eine Teilmenge von $U + W$?

Hinweis Ja.

Antwort 78
Thema: Definition VR

Nein. Eine Multiplikation von Vektoren ist in einem Vektorraum nicht definiert. Daher gibt es auch kein neutrales Element der Multiplikation. Wir können zwar einen Vektor mit 1 multiplizieren, aber diese 1 ist der Skalar $1 \in \mathbb{K}$, und der liegt (außer $\mathbb{K} = V$) gar nicht in V.

Antwort 77
Thema: Definition VR

1. $(a+b)v = av + bv$
2. $a(v+w) = av + aw$

Diese Gleichungen müssen für alle Skalare $a, b \in \mathbb{K}$ und alle Vektoren $v, w \in V$ erfüllt sein.

Antwort 80

Thema: Unterräume

Nach Definition ist $U \cap W$ die Menge der Vektoren, die in U oder in V (oder in beiden) liegen. Die Menge $U + W$ enthält alle Vektoren der Form $u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$. Damit enthält $U + W$ alle Vektoren in $u \in U$, denn diese sind von der Form $u + 0$, wobei $0 \in W$ ist, und auch alle Vektoren $w \in W$, denn diese sind von der Form $0 + w$, $0 \in U$. Es gilt also $U \cup W \subseteq U + W$.

Antwort 79

Thema: Definition VR

Wenn $V = \mathbb{K}$ ist, dann ist V ein Vektorraum, bei dem alle Vektoren Skalare sind.

Frage 81

Thema: Unterräume

Sei V ein Vektorraum, und seien U und W Unterräume von V. Ist $U + W$ eine Teilmenge von $U \cup W$?

Hinweis Nein, in der Regel nicht.

Frage 82

Thema: Unterräume

Sei V ein Vektorraum, und seien U und W Unterräume von V. Kann $U \cap W$ die leere Menge sein?

Hinweis Nein.

Frage 83

Thema: Unterräume

Wie lautet das Unterraumkriterium? Warum ist das Unterraumkriterium so nützlich?

Hinweis Das Unterraumkriterium erspart uns viel Rechnerei.

Frage 84

Thema: Unterräume

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und seien U und W Unterräume von V. Angenommen, Sie müssten beweisen, dass $U \cap W$ ein Vektorraum ist, und Sie dürften nicht in den Studienbrief schauen. Was wäre die erste Zeile Ihres Beweises?

Hinweis Was verwenden Sie zum Beweis?

Antwort 82

Thema: Unterräume

Nein, denn sowohl U als auch W enthalten das Nullelement in V. Es ist also immer $0 \in U \cap W$.

Antwort 81
Thema: Unterräume

Nein, und am besten sieht man das in einem Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^2$. Ein Unterraum ist beispielsweise $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, die x-Achse, und ein weiterer $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, die y-Achse. Geometrisch besteht $U \cup W$ dann aus der x-Achse und aus der y-Achse. Nehmen wir den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ und den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$. Die Summe dieser Vektoren ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und dieser Vektor liegt nicht in $U \cup W$, denn er liegt weder in U noch in W. Aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt in $U + W$, und dies zeigt, dass $U + W$ keine Teilmenge von $U \cup W$ ist

Antwort 84
Thema: Unterräume

Wir verwenden das Unterraumkriterium.

Antwort 83
Thema: Unterräume

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Teilmenge U von V ist genau dann ein Unterraum von V, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. $0 \in U$.
2. Für alle $u, u'' \in U$ gilt $u + u'' \in U$.
3. Für alle $a \in \mathbb{K}$ und alle $u \in U$ gilt $au \in U$.

Um zu beweisen, dass U ein Unterraum von V ist, müssen wir zeigen, dass U mit der Addition und Skalarmultiplikation in V ein Vektorraum ist. Dafür sind viele Axiome zu verifizieren. Das Unterraumkriterium sichert, dass wir nur drei Bedingungen überprüfen müssen.

Frage 85

Thema: Unterräume

Geben Sie ein Beispiel für eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^2$, so dass U unendlich viele Elemente enthält, und U kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

Hinweis Welcher Vektor muss immer in einem Unterraum liegen?

Frage 86
Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei U ein Unterraum von V. Wenn $u \in U$ und $v \notin U$, so folgt $u - v \notin U$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 87
Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei U ein Unterraum von V. Wenn $u, v \in V$, $u \notin U$ und $v \notin U$, so gilt $u - v \notin U$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 88

Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

$\mathbb{F}_2$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Antwort 86
Thema: Unterräume

Die Aussage ist wahr.

Sei $u \in U$, und sei $v \notin U$. Angenommen, es gilt $u - v = w \in U$. Dann folgt $-w \in U$, also $u - w = v \in U$. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme.

Antwort 85

Thema: Unterräume

Sei $U = \{\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$. Da der erste Eintrag in den Vektoren in U immer 1 ist, enthält U nicht den Nullvektor. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

Antwort 88

Thema: Unterräume

Die Aussage ist falsch.

Es ist $1+1=0$ in $\mathbb{F}_2$, aber $1+1=2\neq 0$ in $\mathbb{R}$. Die Verknüpfung $+$ in $\mathbb{F}_2$ ist also eine andere als die Verknüpfung $+$ in $\mathbb{R}$.

Antwort 87

Thema: Unterräume

Die Aussage ist falsch.

Sei etwa $V = \mathbb{R}^2$, und sei $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, und sei $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $u, v \notin U$, aber $u - v \in U$.

Frage 89
Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n \right\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 90
Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \right\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 91
Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 \right\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 92

Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid 2x_1 + x_2 = 0 \right\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Antwort 90
Thema: Unterräume

Die Aussage ist wahr.

Die Menge U ist die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ und somit ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Antwort 89
Thema: Unterräume

Die Aussage ist wahr.

Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium. Die Menge U enthält den Nullvektor, denn dessen Einträge sind alle gleich. Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ Vektoren in U. Dann gilt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in U$, denn $x_1 + y_1 = \cdots = x_n + y_n$. Sei $a \in \mathbb{R}$. Es ist $a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} \in U$, denn $ax_1 = \cdots = ax_n$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

Antwort 92
Thema: Unterräume

Die Aussage ist wahr.

Die Menge U ist die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ und somit ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Antwort 91
Thema: Unterräume

Die Aussage ist falsch.

Sei etwa $n = 2$. Dann liegt $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in U, aber $x + x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt nicht in U. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

Frage 93
Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \right\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 94

Thema: Definition VR

Kann es einen Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ geben, der unendlich viele Elemente besitzt?

Hinweis Ja.

Frage 95
Thema: Definition VR

Warum ist die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems kein Vektorraum?

Hinweis Welches Element muss immer in einem Vektorraum liegen?

Frage 96

Thema: Definition VR

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Nennen Sie drei Beispiele für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum V, der nicht von der Form $\mathbb{K}^n$ ist, für ein $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis Ohne Hinweis

Antwort 94

Thema: Definition VR

Der Vektorraum $\mathbb{F}_2[T]$ hat unendlich viele Elemente.

Antwort 93
Thema: Unterräume

Die Aussage ist falsch.

Der Nullvektor liegt nicht in U. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U kein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

Antwort 96
Thema: Definition VR

1. Der Vektorraum $\mathbb{K}[T]$ der Polynome über $\mathbb{K}$.
2. Der Vektorraum $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ der $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$.
3. Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ über $\mathbb{K}$.

Antwort 95
Thema: Definition VR

Bei einem inhomogenen linearen Gleichungssystem ist der Nullvektor keine Lösung. Der Nullvektor muss aber in jedem Vektorraum enthalten sein.

Frage 97

Thema: Erzeugendensystem

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Bilden Sie irgendeine Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3.

Hinweis Der Begriff der Linearkombination ist wichtig. Schauen Sie im Studienbrief nach.

Frage 98

Thema: Erzeugendensystem

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Bilden Sie ein Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$, die den Nullvektor in V ergibt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 99

Thema: Erzeugendensystem

Sei $U = \langle 1, 1+T, 2T+T^2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[T]$. Liegt $2+T$ in U?

Hinweis Ja.

Frage 100

Thema: Erzeugendensystem

Sei $U = \langle 1, 1+T, 2T+T^2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[T]$. Liegt $1+2T$ in U?

Hinweis Ja.

Antwort 98

Thema: Erzeugendensystem

Es ist $\sum_{i=1}^{n} 0 \cdot v_i = 0$.

Antwort 97

Thema: Erzeugendensystem

Eine Möglichkeit wäre: $2v_1 - 7v_3$ (dabei schreibt man den Summanden $0v_2$ nicht hin.

Antwort 100

Thema: Erzeugendensystem

Wir müssen zeigen, dass $1 + 2T$ eine Linearkombination der Polynome $1, 1 + T, 2T + T^2$ ist. Dies ist der Fall, denn $1 + 2T = 2(1 + T) - 1$, formal: $1 + 2T = (-1) \cdot 1 + 2(1 + T)$.

Antwort 99

Thema: Erzeugendensystem

Wir müssen zeigen, dass $2+T$ eine Linearkombination der Polynome $1, 1+T, 2T+T^2$ ist. Dies ist der Fall, denn $2+T = 1+(1+T)$.

Frage 101

Thema: Erzeugendensystem

Sei $U = \langle 1, 1+T, 2T+T^2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[T]$. Liegt T^2 in U?

Hinweis Ja.

Frage 102

Thema: Erzeugendensystem

Geben Sie ein Beispiel für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum, der nicht endlich erzeugt ist.

Hinweis Denken Sie an Polynome.

Frage 103
Thema: Erzeugendensystem

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jeder endlich erzeugter Vektorraum hat nur endlich viele Unterräume.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 104
Thema: Erzeugendensystem

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V. Wann heißen diese Vektoren ein Erzeugendensystem von V?

Hinweis Diese Definition ist zentral. Die müssen Sie auswendig wissen.

Antwort 102

Thema: Erzeugendensystem

Der Vektorraum $\mathbb{K}[T]$ ist nicht endlich erzeugt.

Antwort 101

Thema: Erzeugendensystem

Wir müssen zeigen, dass $1+2T$ eine Linearkombination der Polynome $1, 1+T, 2T+T^2$ ist. Dies ist der Fall, denn $T^2 = (2T+T^2)-2((1+T)-1)$, also $T^2 = 2\cdot 1-2(1+T)+1(2T+T^2)$.

Antwort 104

Thema: Erzeugendensystem

Die Vektoren $v_1, \dots, v_n$ sind genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn es für alle $v \in V$ Skalare $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{K}$ so gibt, dass $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = v$ ist.

Antwort 103
Thema: Erzeugendensystem

Die Aussage ist falsch. Betrachten wir etwa den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und stellen wir ihn uns vor als Ebene, versehen mit einem Koordinatensystem. Dann ist V endlich erzeugt. Ein Vektorraum der Dimension 1 ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung (denn er ist von der Form $\langle v \rangle$ für ein $v \neq 0$). Da es unendlich viele Geraden durch den Koordinatenursprung gibt, gibt es auch unendlich viele Unterräume von V.

Frage 105

Thema: Erzeugendensystem

Wann werden Sie beim Arbeiten mit Vektoren in endlich erzeugten Vektorräumen fast regelmäßig auf das Lösen inhomogener linearer Gleichungssysteme geführt?

Hinweis Was ist zu tun, um zu zeigen, dass Vektoren ein Erzeugendensystem bilden?

Frage 106

Thema: Erzeugendensystem

Sei V ein Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V. Was ist der Unterschied zwischen $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$?

Hinweis Eine Menge ist in der anderen enthalten. Welche, und warum?

Frage 107

Thema: Erzeugendensystem

Warum besitzt jeder Vektorraum ein Erzeugendensystem?

Hinweis Die Antwort ist etwas langweilig.

Frage 108

Thema: Erzeugendensystem

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Begründen Sie, warum $\mathbb{K}[T]$ nicht endlich erzeugt sein kann.

Hinweis Lassen sich durch Addition und Skalarmultiplikation von endlich vielen Polynomen Polynome von beliebig hohem Grad konstruieren?

Antwort 106

Thema: Erzeugendensystem

$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ ist die Menge der Linearkombinationen der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$, also $\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i \mid a_i \in \mathbb{K}\}$, wobei $\mathbb{K}$ den V zugrunde liegenden Körper bezeichnet. In $\{v_1, \ldots, v_n\}$ liegen nur die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$. Diese Menge ist viel kleiner als $\langle v_1 \ldots, v_n \rangle$.

Antwort 105

Thema: Erzeugendensystem

Wenn wir überprüfen wollen, ob Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V sind, müssen wir in der Regel ein inhomogenes lineares Gleichungsystem lösen.

Antwort 108
Thema: Erzeugendensystem

Wenn wir eine endliche Menge M von Polynomen haben, dann gibt es unter diesen eines, das den maximalen Grad hat. Bezeichnen wir diesen Grad mit r. Linearkombinationen der Polynome in M haben dann alle maximal den Grad r. Das bedeutet, dass Polynome in $\mathbb{K}[T]$, deren Grad größer als r ist, nicht als Linearkombination der Polynome in M geschrieben werden können. Somit ist $\mathbb{K}[T]$ nicht endlich erzeugt.

Antwort 107
Thema: Erzeugendensystem

Wenn V ein Vektorraum ist, dann gilt immer $V = \langle V \rangle$.

Frage 109

Thema: Erzeugendensystem

Sei V der Vektorraum der Polynome über einem Körper $\mathbb{K}$ vom Grad n. Geben Sie ein Beispiel für ein endliches Erzeugendensystem von V.

Hinweis Ohne Hinweis

Frage 110

Thema: Erzeugendensystem

Sei $V = \mathbb{K}^n$. Geben Sie ein Beispiel für ein endliches Erzeugendensystem von V.

Hinweis Ohne Hinweis

Frage 111

Thema: Erzeugendensystem

Sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ über einem Körper $\mathbb{K}$. Skizzieren Sie, wie Sie ein endliches Erzeugendensystem von $\mathcal{U}$ konstruieren können.

Hinweis Wie war noch mal der Algorithmus zur Berechnung der Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems?

Frage 112

Thema: Erzeugendensystem

Sei V der Vektorraum der $m \times n$-Matrizen über einem Körpern $\mathbb{K}$. Geben Sie ein Beispiel für ein endliches Erzeugendensystem von V.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 110

Thema: Erzeugendensystem

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Antwort 109

Thema: Erzeugendensystem

$1, T, T^2, \ldots, T^n$.

Antwort 112

Thema: Erzeugendensystem

Wir nehmen alle Matrizen, die genau einem Eintrag 1 haben, und bei denen alle anderen Einträge Null sind. Diese bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

Antwort 111
Thema: Erzeugendensystem

Wir überführen die Matrix A in Treppennormalform. Wir streichen alle Nullzeilen. Wir fügen Nullzeilen so ein, dass die Pivot-Elemente auf der Diagonalen stehen. Wir ersetzen die Nullen auf der Diagonale durch -1. Die Spalten, bei denen wir -1 eingefügt haben, bilden ein Erzeugendensystem von $\mathcal{U}$.

Frage 113
Thema: Erzeugendensystem

Sei V der Vektorraum der Polynome über einem Körper $\mathbb{K}$. Geben Sie ein Beispiel für ein Erzeugendensystem von V.

Hinweis Hier brauchen Sie unendlich viele Polynome.

Frage 114
Thema: Erzeugendensystem

Nennen Sie zwei Erzeugendensysteme von $\{0\}$

Hinweis Ein Erzeugendensystem gibt es nach Definition. Und dann kann man natürlich immer alle Elemente von V als Erzeugendensystem von V nehmen.

Frage 115
Thema:

Hinweis

Frage 116

Thema:

Hinweis

Antwort 114

Thema: Erzeugendensystem

Ein Erzeugendensystem gibt es nach Definition. Man setzt einfach $\langle\emptyset\rangle = \{0\}$. Ein weiteres Erzeugendensystem ist der ganze Vektorraum, also 0.

Antwort 113

Thema: Erzeugendensystem

$1, T, T^2, T^3, \ldots$. Mit anderen Worten: Wir nehmen alle T^i mit $i \in \mathbb{N}_0$.

Antwort 116
Thema:

Antwort 115
Thema: