Frage 1

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt[n]{2}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 2

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4^n}$ ist konvergent.

Hinweis Quotientenkriterium.

Frage 3

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$ ist konvergent.

Hinweis Quotientenkriterium.

Frage 4

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(5+(-1)^n)^n}$ konvergiert für alle $x \in (-4, 4)$.

Hinweis Wurzelkriterium.

Antwort 2

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Sei $a_n = \frac{2n}{4^n}$. Für $n \geq 1$ ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{2n+2}{4^{n+1}}\frac{4^n}{2n} = \frac{2n+2}{8n} = \frac{n+1}{4n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{4}$, das heißt $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{4} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergiert.

Antwort 1

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Sei $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{2}$. Es ist $a_n = (-1)^n 2^{\frac{1}{n}} = (-1)^n \exp(\ln(2)\frac{1}{n})$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(\ln(2)\dfrac{1}{n}) = \exp(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2)}{n}) = \exp(0) = 1$, ist (a_n) keine Nullfolge, denn sie enthält die gegen 1 konvergente Teilfolge (a_{2n}).

Antwort 4

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr. Sei $a_n = \frac{x^n}{(5+(-1)^n)^n}$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{5+(-1)^n} \leq \frac{|x|}{4} < 1$ für $x \in (-4,4)$. Mit dem Wurzelkriterium und $q = \frac{|x|}{4}$ folgt, dass die Reihe für $x \in (-4,4)$ konvergiert.

Antwort 3

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Sei $a_n = \binom{2n}{n}^{-1} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{1 \cdots n}{(n+1)\cdots(2n)}$. Für $n \geq 1$ ist dann $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1\cdots(n+1)}{(n+2)\cdots(2n+2)} \frac{(n+1)\cdots(2n}{1\cdots n}$ $\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}$, das heißt, $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \dfrac{1}{4} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergiert.

Frage 5

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 6

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$ ist konvergent.

Hinweis Leibniz-Kriterium.

Frage 7

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2^n}$ ist konvergent.

Hinweis Geometrische Reihe.

Frage 8

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$ ist konvergent.

Hinweis Geometrische Reihe.

Antwort 6

Thema: Konvergenzkriterien

Da $(\ln(n))$ monoton wachsend und unbeschränkt ist, ist $(\frac{1}{\ln(n)})$ eine Nullfolge. Mit dem Leibniz-Kriterium folgt nun, dass die Reihe konvergiert.

Antwort 5

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$, also kann $((-1)^n \frac{n-1}{n})$ keine Nullfolge sein, und die Reihe konvergiert nicht.

Antwort 8

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Die Reihe ist die geometrische Reihe für $q = -\frac{2}{3}$. Da $|-\frac{2}{3}| < 1$ gilt, konvergiert die Reihe.

Antwort 7

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Diese Reihe ist die geometrische Reihe mit $q = -\frac{3}{2}$. Da $|-\frac{3}{2}| > 1$ gilt, ist die Reihe nicht konvergent.

Frage 9

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{10^n}$ ist 10.

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Frage 10
Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-1}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 11

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(-2)^{-n}$ ist konvergent.

Hinweis Quotientenkriterium.

Frage 12

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ ist konvergent.

Hinweis Wurzelkriterium.

Antwort 10

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$, das heißt, $(\frac{n+1}{2n-1})$ ist keine Nullfolge, und die Reihe ist nicht konvergent.

Antwort 9

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr. Für $n \geq 0$ sei $a_n = \frac{n}{10^n}$. Dann ist $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{10}$ und wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{10} = \dfrac{1}{10}$. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt die Behauptung.

Antwort 12

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{1}{10^n}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{10^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{10} < 1$. Mit dem Wurzelkriterium folgt, dass die Reihe konvergiert.

Antwort 11

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = n^2(-2)^{-n} = (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$. Für alle $n \geq 1$ gilt dann $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \dfrac{1}{2} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergiert.

Frage 13

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}$ ist konvergent.

Hinweis Leibniz-Kriterium.

Frage 14

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n+1}{2n-1}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 15

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{3}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 16

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{10^n} x^n$ ist 10.

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Antwort 14

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Für $n \geq 1$ sei $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{2n-1}$. Dann gilt $(a_{2n}) = (\frac{2n+1}{4n-1}) = (\frac{2+\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}})$, und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \frac{1}{2}$. Die Folge (a_n) besitzt also eine Teilfolge, die nicht gegen 0 konvergiert und kann daher keine Nullfolge sein. Dann ist aber die Reihe nicht konvergent.

Antwort 13

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Für alle $n \geq 1$ gilt $0 < \frac{1}{n+\sqrt{n}} < \frac{1}{n}$. Mit dem Einschnürungssatz folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0$ gilt. Da außerdem die Folge $(\frac{1}{n+\sqrt{n}})$ monoton fallend ist, gilt nun mit dem Leibniz-Kriterium, dass die Reihe konvergiert.

Antwort 16

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr. Für $n \geq 0$ sei $a_n = \frac{n^2}{10^n}$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{10^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{10}$, und wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{10}$. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard gilt nun, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe 10 ist.

Antwort 15

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \sqrt[n]{3} = 3^{\frac{1}{n}} = \exp(\ln(3)\frac{1}{n})$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \exp(\ln(3)\dfrac{1}{n}) = \exp(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(3)}{n}) = \exp(0) = 1$. Die Folge a_n ist also keine Nullfolge, und damit ist die Reihe nicht konvergent.

Frage 17

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ ist 0.

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Frage 18
Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt[n]{3}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 19

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ ist konvergent.

Hinweis Quotientenkriterium.

Frage 20

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3 + 1000}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Antwort 18

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Für $n \geq 1$ sei $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{3}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3} = \lim\limits_{n\to\infty} \exp(\ln(3)\dfrac{1}{2n}) = \exp(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(3)}{2n}) = \exp(0) = 1$. Da (a_n) also eine Teilfolge enthält, die nicht gegen 0 konvergiert, kann die Reihe nicht konvergent sein.

Antwort 17

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Falsch. Für $n \geq 0$ sei $a_n = \frac{1}{n^n}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius ∞ ist.

Antwort 20

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{n^2}{n^3+1000}$. Für alle $n > 9$ gilt dann $a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n}$. Wäre also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so wäre diese Reihe eine Majorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Da die harmonische Reihe aber divergent ist, folgt, dass auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent ist.

Antwort 19

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{n}{3^n}$. Dann ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(n+1)3^n}{n3^{n+1}} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{3}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{3} = \dfrac{1}{3} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergiert.

Frage 21

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(4+(-1)^n)^n}$ konvergiert für alle $x \in (-3, 3)$.

Hinweis Wurzelkriterium.

Frage 22

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 23

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ ist konvergent.

Hinweis Leibniz-Kriterium.

Frage 24

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ ist 1.

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Antwort 22

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Für $n \geq 1$ sei $a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$. Für ungerade n ist dann $a_n = \frac{n+1}{n} \geq 1$. Damit kann (a_n) keine Nullfolge sein, und die Reihe ist nicht konvergent.

Antwort 21

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{x^n}{(4+(-1)^n)^n}$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{(4+(-1)^n)^n}} = \frac{|x|}{4+(-1)^n} \leq \frac{|x|}{3} < 1$ für $x \in (-3,3)$. Mit dem Wurzelkriterium und $q = \frac{|x|}{3}$ konvergiert die Reihe also für alle $x \in (-3,3)$.

Antwort 24

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{1}{n^2}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ gleich 1 ist.

Antwort 23

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend, also ist die Folge $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ streng monoton fallend. Da die Wurzelfunktion zusätzlich noch unbeschränkt ist, folgt, dass $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ eine Nullfolge ist. Mit dem Leibnizkriterium ist die Reihe konvergent.

Frage 25

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$ ist konvergent.

Hinweis Quotientenkriterium.

Frage 26

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(-1)^n}{n^2+1}$ ist konvergent.

Hinweis Leibniz-Kriterium.

Frage 27

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 28

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+2}{2n+1})^n$ ist konvergent.

Hinweis Wurzelkriterium.

Antwort 26

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Die Folge $(\frac{1}{n^2+1})$ ist eine monoton fallende Nullfolge, also auch die Folge $(\frac{10}{n^2+1})$. Mit dem Leibniz-Kriterium folgt nun, dass die Reihe konvergiert.

Antwort 25

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{(n+1)^2}{n!}$. Dann ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(n+2)^2 n!}{(n+1)!(n+1)^2} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)^3} = \frac{n^2+4n+4}{n^3+3n^2+3n+1} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$ für $n \geq 1$. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, also konvergiert die Reihe mit dem Quotientenkriterium.

Antwort 28

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = (\frac{n+2}{2n+1})^n$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{(\frac{n+2}{2n+1})^n} = \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{2}$. Mit dem Wurzelkriterium folgt, dass die Reihe konvergiert.

Antwort 27

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Angenommen, die Reihe konvergiert. Dann wäre auch $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergent, denn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent. Das ist ein Widerspruch, denn die harmonische Reihe ist divergent.

Frage 29

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2-1}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 30

Thema: Mittelwertsatz

Was besagt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 31

Thema: Mittelwertsatz

Was besagt der Satz von Rolle?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 32

Thema: Mittelwertsatz

Nennen Sie mindestens zwei Folgerungen aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Hinweis Eine der Folgerungen ist die Charakterisierung der e-Funktion. Ein anderes Korollar sagt aus, wie man Monotonie von f anhand von f'' feststellen kann.

Antwort 30

Thema: Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die im Inneren des Intervalls $[a, b]$ differenzierbar ist. Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f''(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Antwort 29

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Für alle $n \geq 1$ gilt $\frac{n}{3n^2-1} \geq \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\frac{1}{n}$. Wäre die Reihe also konvergent, dann wäre sie eine konvergente Majorante von $\frac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Die harmonische Reihe ist aber divergent.

Antwort 32
Thema: Mittelwertsatz

Eine der Folgerungen aus dem Mittelwersatz ist die Charakterisierung der e-Funktion. Sie besagt, dass die Funktion exp die einzige differenzierbare Funktion f mit $f = f''$ und $f(0) = 1$ ist. Eine andere Folgerung ist die Eindeutigkeit der Winkelfunktionen. Diese sagt, dass, wenn es Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, die (SinKos-1) bis (SinKos-5) erfüllen, dann sind diese eindeutig.

Antwort 31

Thema: Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist. Sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f''(x_0) = 0$.

Frage 33

Thema: Mittelwertsatz

Was können Sie über eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sagen, die differenzierbar ist, und für die $f(x) = f''(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt?

Hinweis Fällt Ihnen eine Funktion ein, die diese Eigenschaft besitzt?

Frage 34

Thema: Mittelwertsatz

Ist die Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ streng monoton wachsend?

Hinweis Welche Eigenschaft muss die Ableitung von f erfüllen, damit f streng monoton wachsend ist?

Frage 35

Thema: Mittelwertsatz

Wahr oder falsch? Wenn f auf einem Intervall I stetig und im Inneren von I differenzierbar ist, und $f''(x) \leq 0$ für alle x im Inneren von I ist, dann ist f im Inneren von I streng monoton fallend.

Hinweis Falsch.

Frage 36

Thema: Extrema

Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (x^2 - 3)\exp(x+2)$ hat lokale Extrema an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$. Welche lokalen Extrema liegen dort jeweils vor?

Hinweis Betrachten Sie die zweite Ableitung der Funktion.

Antwort 34

Thema: Mittelwertsatz

Die Funktion f ist als rationale Funktion für $x > 1$ differenzierbar. Es gilt $f''(x) = \frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} > 0$ für alle $x > 1$. Also ist f streng monoton wachsend.

Antwort 33

Thema: Mittelwertsatz

Für diese Funktion gilt $f = c\exp$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Antwort 36
Thema: Extrema

Da die Funktion beliebig oft differenzierbar ist, reicht es die zweite Ableitung auszurechnen und die Stellen, an denen Extremwerte vorliegen, einzusetzen. Es gilt $f''(x) = 2x\exp(x+2) + (x^2-3)\exp(x+2) = (x^2+2x-3)\exp(x+2)$ und $f''''(x) = (2x+2)\exp(x+2) + (x^2+2x-3)\exp(x+2) = (x^2+4x-1)\exp(x+2)$. Also ist $f''''(1) = 4\exp(3) > 0$ und $f''''(-3) = -4\exp(-1) < 0$. Es liegt also bei $x_1 = 1$ ein lokales Minimum und bei $x_2 = -3$ ein lokales Maximum vor.

Antwort 35

Thema: Mittelwertsatz

Falsch. Wenn $f''(x) \leq 0$ ist, kann man nur schließen, dass f monoton fallend ist, aber nicht, dass f streng monoton fallend ist. Die konstante Funktion $\hat{c}$ erfüllt zum Beispiel $f''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, aber f ist nicht streng monoton fallend.

Frage 37

Thema: Extrema

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, und sei f auf einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von $x_0 \in I$ differenzierbar. Sei $f''(x_0) = 0$, und sei f'' in x_0 differenzierbar. Sei $f''''(x_0) > 0$. Was kann man über f an der Stelle x_0 sagen?

Hinweis f hat an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, aber welches?

Frage 38

Thema: Extrema

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, und sei f auf einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von $x_0 \in I$ differenzierbar. Sei $f''(x_0) = 0$, und sei f'' in x_0 differenzierbar. Sei $f''''(x_0) < 0$. Was kann man über f an der Stelle x_0 sagen?

Hinweis f hat an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, aber welches?

Frage 39

Thema: Extrema

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, und sei f auf einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von $x_0 \in I$ differenzierbar. Sei $f''(x_0) = 0$, und sei f'' in x_0 differenzierbar. Sei $f''''(x_0) = 0$. Was kann man über f an der Stelle x_0 sagen?

Hinweis Nichts.

Frage 40

Thema: Mittelwertsatz

Was sagt die Regel von de l"Hospital?

Hinweis Es geht um den Grenzwert $\lim\limits_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \lim\limits_{x\to a} g(x) = 0$ gilt.

Antwort 38

Thema: Extrema

Die Funktion f hat dann an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

Antwort 37

Thema: Extrema

Die Funktion f hat dann an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

Antwort 40
Thema: Mittelwertsatz

Seien f und g auf einem offenen Intervall I definierte Funktionen, und sei $a \in I$. Seien $\lim_{x\to a} g(x) = \lim_{x\to a} f(x) = 0$. Falls $\lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ existiert, so existiert $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Antwort 39

Thema: Extrema

Gar nichts. Die Funktion f kann an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder nichts von beiden haben.

Frage 41

Thema: Taylor

Sei f eine beliebige Funktion und sei $a \in \mathbb{R}$ so, dass $f^{(1)}(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ alle existieren. Wie ist das n-te Taylorpolynom von f in a definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 42

Thema: Taylor

Sei p ein Polynom n-ten Grades und $\tilde{\text{p}}$ die zugehörige Polynomfunktion. Wie sieht das n-te Taylorpolynom von $\tilde{\text{p}}$ in 0 aus?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 43

Thema: Taylor

Warum betrachtet man überhaupt Taylorpoynome?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 44
Thema: Taylor

Nennen Sie eine Folgerung aus dem Satz von Taylor.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 42

Thema: Taylor

Das ist wieder p.

Antwort 41
Thema: Taylor

Es ist definiert als $P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$, wobei $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ für alle $0 \leq k \leq n$ gilt.

Antwort 44
Thema: Taylor

Eine der Folgerungen war zum Beispiel, dass e eine irrationale Zahl ist.

Antwort 43
Thema: Taylor

Mit Taylorpolynomen kann man viele Funktionen (wie zum Beispiel sin, cos, ln und exp) durch Polynome approximieren. Das heißt, statt den Wert der Funktion an einer Stelle zu berechnen - was nicht immer so leicht ist - berechnet man den Wert des entsprechenden Taylorpolynoms. Das entspricht dann zwar nicht immer genau dem Funktionswert, aber je nachdem bis zu welchem Grad n man das Taylorpolynom ausrechnet, kommt man beliebig nah an den Funktionswert heran. Man muss nur vorher sicherstellen, dass die Taylorpolynome wirklich gegen die Funktion konvergieren. Der Satz von Taylor mit der Abschätzung der Restglieder hilft einem dann noch bei der Berechnung, wie genau die Approximation ist.

Frage 45

Thema: Konvergenzkriterien

Nennen Sie zwei Beispiele für divergente und zwei Beispiele für konvergente Reihen.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 46

Thema: Konvergenzkriterien

Nennen Sie mindestens drei Kriterien, die Sie benutzen können, um zu zeigen, dass eine Reihe konvergiert.

Hinweis Es gibt zum Beispiel das Quotientenkriterium.

Frage 47

Thema: Konvergenzkriterien

Nennen Sie mindesten zwei Methoden, mit denen Sie zeigen können, dass eine Reihe divergent ist.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 48

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? Wenn $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent, dann ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

Hinweis Wahr.

Antwort 46
Thema: Konvergenzkriterien

Man kann das Quotientenkriterium, das Wurzelkriterium, das Majorantenkriterium und das Leibniz-Kriterium benutzen.

Antwort 45

Thema: Konvergenzkriterien

Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $|q| > 1$ sind Beispiele für divergente Reihen. Die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $|q| < 1$ sind konvergente Reihen.

Antwort 48

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Angenommen $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert. Dann ist diese Reihe eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und diese müsste konvergieren.

Antwort 47

Thema: Konvergenzkriterien

Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist und man zeigen kann, dass (a_n) keine Nullfolge ist, dann folgt, dass die Reihe divergent ist. Man kann auch versuchen, eine „divergente Minorante“ zu finden. Das heißt, ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und gilt $0 \leq b_n \leq a_n$ für alle (oder fast alle) $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent, dann muss auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent sein.

Frage 49

Thema: Konvergenzkriterien

Wie ist die harmonische Reihe definiert? Ist sie konvergent oder divergent?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 50

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wie ist die geometrische Reihe definiert. Für welche q konvergiert sie und gegen welchen Grenzwert?

Hinweis Die geometrische Reihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Frage 51

Thema: Taylor

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Sei $a \in I$. Wie ist die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt a definiert?

Hinweis Die Taylorreihe sieht so ähnlich aus wie die Taylorpolynome.

Frage 52

Thema: Taylor

Wahr oder falsch? Die Taylorreihe von $\cos(x)$ im Entwicklungspunkt 0 ist $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Hinweis Falsch.

Antwort 50

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann ist die geometrische Reihe definiert als $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$. Sie divergiert für $|q| \geq 1$ und konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.

Antwort 49

Thema: Konvergenzkriterien

Die harmonische Reihe ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Sie divergiert.

Antwort 52
Thema: Taylor

Falsch. Es gilt $\cos(0) = 1$. Setzt man aber $x = 0$ in die Reihe ein, dann erhält man 0. Kein Wunder, denn das ist die Reihe für den Sinus.

Antwort 51

Thema: Taylor

Die Taylorreihe ist definiert als $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Frage 53

Thema: Konvergenzkriterien

Was können Sie über eine Reihe sagen, deren Glieder alle ≥ 0 sind und bei der die Folge der Partialsummen beschränkt ist?

Hinweis Eine monoton wachsende, beschränkte Folge konvergiert.

Frage 54

Thema: Konvergenzkriterien

Wie lautet das Majorantenkriterium (allgemeiner Fall)?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 55
Thema: Konvergenzkriterien

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Es gelte $b_n = a_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie, warum dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Hinweis Betrachten Sie die Reihe, die aus den Gliedern $b_n - a_n$ besteht.

Frage 56

Thema: Konvergenzkriterien

Wie lautet das Quotientenkriterium?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 54

Thema: Konvergenzkriterien

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe mit nicht negativen Gliedern, und gilt fast immer $b_n \geq |a_n|$, so sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

Antwort 53

Thema: Konvergenzkriterien

Diese Reihe konvergiert, denn die Folge der Partialsummen ist monoton wachsend und beschränkt.

Antwort 56

Thema: Konvergenzkriterien

Ist mit einer festen, positiven Zahl $q < 1$ fast immer $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$, dann sind $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Gilt jedoch fast immer $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Antwort 55
Thema: Konvergenzkriterien

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n = b_n - a_n$. Dann gilt $c_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Es gibt also nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $c_n \neq 0$. Also konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n$. Damit konvergiert dann aber auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n + \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$.

Frage 57

Thema: Konvergenzkriterien

Kann man mit dem Quotientenkriterium beweisen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert?

Hinweis Nein.

Frage 58

Thema: Konvergenzkriterien

Geben Sie zwei Beispiele für Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$. Dabei soll eine der beiden Reihen konvergieren und die andere divergieren.

Hinweis Harmonische Reihe.

Frage 59

Thema: Konvergenzkriterien

Was besagt das Wurzelkriterium?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 60

Thema: Konvergenzkriterien

Geben Sie zwei Beispiele für Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Dabei soll eine der beiden Reihen konvergieren und die andere divergieren.

Hinweis Denken Sie an die harmonische Reihe.

Antwort 58

Thema: Konvergenzkriterien

Für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, und die Reihe divergiert. Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$, und die Reihe konvergiert.

Antwort 57
Thema: Konvergenzkriterien

Nein, denn wenn $a_n = \frac{1}{n^2}$ ist, dann ist $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt allerdings $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, das heißt, es gibt kein $q < 1$ mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$ für fast alle n.

Antwort 60

Thema: Konvergenzkriterien

Für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, und die Reihe divergiert.

Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^2 = 1$, und die Reihe konvergiert.

Antwort 59

Thema: Konvergenzkriterien

Ist mit einer festen, positiven Zahl $q < 1$ fast immer $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, so folgt, dass die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent sind. Gilt jedoch fast immer $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, so sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent.

Frage 61

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Beschreiben Sie das Konvergenzverhalten der Binomialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für $\alpha \notin \mathbb{N}_0$.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 62

Thema: Konvergenzkriterien

Wann ist eine Reihe alternierend?

Hinweis Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ist ein Beispiel für eine alternierende Reihe.

Frage 63

Thema: Konvergenzkriterien

Was besagt das Leibniz-Kriterium?

Hinweis Es geht darum, wann eine alternierende Reihe konvergiert.

Frage 64
Thema: Konvergenzkriterien

Geben Sie ein Beispiel für eine Nullfolge b_n, so dass die alternierende Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ nicht konvergiert.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 62

Thema: Konvergenzkriterien

Wenn die Glieder wechselnde Vorzeichen haben.

Antwort 61

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Diese Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

Antwort 64

Thema: Konvergenzkriterien

Sei $(b_n) = (\frac{(-1)^{n-1}}{n})$. Dann ist (b_n) eine Nullfolge, und die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist divergent.

Antwort 63

Thema: Konvergenzkriterien

Ist b_n eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$.

Frage 65

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Hinweis Falsch.

Frage 66

Thema: Konvergenzkriterien

Wann heißt eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 67

Thema: Konvergenzkriterien

Was kann alles passieren, wenn man Reihen umordnet, die zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent sind?

Hinweis Umordnungssatz von Riemann.

Frage 68

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Was ist eine Potenzreihe?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 66

Thema: Konvergenzkriterien

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Antwort 65
Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Die alternierende harmonische Reihe ist zum Beispiel konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Antwort 68

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Antwort 67
Thema: Konvergenzkriterien

Der Umordnungssatz von Riemann sagt, dass man konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind, so umordnen kann, dass sie divergent sind oder auch so, dass sie gegen jede beliebige Zahl $c \in \mathbb{R}$ konvergieren.

Frage 69

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? Wenn eine Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ für ein x_0 konvergiert, dann konvergiert sie für dieses x_0 auch absolut.

Hinweis Falsch.

Frage 70

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wie ist der Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ definiert?

Hinweis Der Konvergenzradius hat etwas mit der Menge $M = \{x \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \text{ konvergiert}\}$ zu tun.

Frage 71

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Geben Sie zwei Beispiele von Potenzreihen einschließlich ihrer Konvergenzradien.

Hinweis Die Konvergenzradien der Exponentialreihe, der geometrischen Reihe und der Sinus- und Kosinusreihe sollten Sie kennen.

Frage 72

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R < \infty$. Konvergiert die Potenzreihe für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = R$?

Hinweis Denken Sie an die Logarithmusreihe.

Antwort 70

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei $M = \{x \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \text{ konvergiert}\}$. Ist M beschränkt, dann ist der Konvergenzradius $R = \sup M$. Ist M unbeschränkt, dann ist $R = \infty$.

Antwort 69

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Falsch. Daraus, dass die Potenzreihe für x_0 konvergiert, folgt nur, dass sie für $|x| < |x_0|$ absolut konvergiert. Die Logarithmusreihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ konvergiert zum Beispiel für $x_0 = 1$, aber nicht absolut, denn $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist die harmonische Reihe, und die ist divergent.

Antwort 72

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Das ist nicht so klar. Die Logarithmusreihe hat zum Beispiel den Konvergenzradius 1 und konvergiert für $x = 1$, aber sie divergiert für $x = -1$.

Antwort 71

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

1. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hat den Konvergenzradius 1.
2. Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius ∞.

Frage 73

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a \neq 0$. Was können Sie über den Konvergenzradius der Potenzreihe sagen?

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Frage 74

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Was können Sie über den Konvergenzradius der Potenzreihe sagen?

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Frage 75

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe, so dass $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt ist. Was können Sie über den Konvergenzradius der Potenzreihe sagen?

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Frage 76

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wie ist die Summenfunktion zu einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 74

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius $R = \infty$ ist.

Antwort 73

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius $R = \frac{1}{a}$ ist.

Antwort 76

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei K das Konvergenzintervall der Potenzreihe, also $K = (-R, R)$, wenn $R < \infty$ gilt, und $K = \mathbb{R}$, wenn $R = \infty$ gilt. Dann ist die Summenfunktion definiert als $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Antwort 75

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius $R = 0$ ist.

Frage 77

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Was ist die Ableitung der zur Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ gehörenden Summenfunktion?

Hinweis Die Ableitung einer Summenfunktion erfolgt gliedweise.

Frage 78

Thema: Trigonometrische Funktionen

Was sind die Nullstellen von sin und cos im Intervall $[0, 2\pi)$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 79

Thema: Mittelwertsatz

Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{\sin(x)}$ mit der Regel von de l"Hospital.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 80

Thema: Mittelwertsatz

Berechnen Sie $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$ mit der Regel von de l" Hospital.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 78

Thema: Trigonometrische Funktionen

Die Nullstellen von sin im Intervall $[0, 2\pi)$ sind 0 und π. Die Nullstellen von cos im Intervall $[0, 2\pi)$ sind $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$.

Antwort 77

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist 1. Also ist die zugehörige Summenfunktion $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Es folgt $f'' : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

Antwort 80

Thema: Mittelwertsatz

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(1-\cos(x))''}{(\sin(x))''} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$, also $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = 0$ mit der Regel von de l"Hospital.

Antwort 79

Thema: Mittelwertsatz

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\ln(1-x))''}{(\sin(x))''} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{1}{1-x}}{\cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{(1-x)\cos(x)} = -1$, also $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{\sin(x)} = -1$ mit der Regel von de l"Hospital.