Frage 1
Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$.

Entscheiden Sie, ob BA definiert ist, und geben Sie (falls möglich) die Anzahl der Zeilen und Spalten des Ergebnisses an.

Hinweis Das Produkt XY von zwei Matrizen X und Y ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X gleich der Anzahl der Zeilen von Y ist.

Frage 2

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{52}(\mathbb{K})$ und $D \in \mathrm{M}_{42}(\mathbb{K})$.

Entscheiden Sie, ob $AC + D$ definiert ist, und geben Sie (falls möglich) die Anzahl der Zeilen und Spalten des Ergebnisses an.

Hinweis Das Produkt XY von zwei Matrizen X und Y ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X gleich der Anzahl der Zeilen von Y ist.
Die Summe $X + Y$ ist nur dann definiert, wenn X und Y gleich viele Zeilen und gleich viele Spalten haben.

Frage 3

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$ und $E \in \mathrm{M}_{54}(\mathbb{K})$.

Entscheiden Sie, ob $AE + B$ definiert ist, und geben Sie (falls möglich) die Anzahl der Zeilen und Spalten des Ergebnisses an.

Hinweis Das Produkt XY von zwei Matrizen X und Y ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X gleich der Anzahl der Zeilen von Y ist. Die Summe $X + Y$ ist nur dann definiert, wenn X und Y gleich viele Zeilen und gleich viele Spalten haben.

Frage 4

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$.

Entscheiden Sie, ob $AB + B$ definiert ist, und geben Sie (falls möglich) die Anzahl der Zeilen und Spalten des Ergebnisses an.

Hinweis Das Produkt XY von zwei Matrizen X und Y ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X gleich der Anzahl der Zeilen von Y ist.

Antwort 2
Thema: Matrizenrechnung

Das Produkt AC ist definiert, und das Ergebnis ist eine 4×2-Matrix. Auch D ist eine 4×2-Matrix. Somit ist die Summe $AC + D$ definiert, und das Ergebnis hat 4 Zeilen und 2 Spalten.

Antwort 1

Thema: Matrizenrechnung

Das Produkt BA ist nicht definiert, denn die Anzahl der Zeilen von A ist verschieden von der Anzahl der Spalten von B.

Antwort 4
Thema: Matrizenrechnung

Das Produkt AB ist nicht definiert, denn die Anzahl der Spalten von A ist verschieden von der Anzahl der Zeilen von B.

Antwort 3

Thema: Matrizenrechnung

Die Matrixx AE ist definiert, und sie ist eine 4×4-Matrix. Da B eine 4×5-Matrix ist, ist die Summe nicht definiert.

Frage 5

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$ und $E \in \mathrm{M}_{54}(\mathbb{K})$.

Entscheiden Sie, ob $E(A+B)$ definiert ist, und geben Sie (falls möglich) die Anzahl der Zeilen und Spalten des Ergebnisses an.

Hinweis Das Produkt XY von zwei Matrizen X und Y ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X gleich der Anzahl der Zeilen von Y ist.
Die Summe $X+Y$ ist nur dann definiert, wenn X und Y gleich viele Zeilen und gleich viele Spalten haben.

Frage 6
Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{52}(\mathbb{K})$ und $E \in \mathrm{M}_{54}(\mathbb{K})$.

Entscheiden Sie, ob $E(AC)$ definiert ist, und geben Sie (falls möglich) die Anzahl der Zeilen und Spalten des Ergebnisses an.

Hinweis Das Produkt XY von zwei Matrizen X und Y ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X gleich der Anzahl der Zeilen von Y ist.

Frage 7

Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel für eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$, für die $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt, und deren weitere Einträge $\neq 0$ sind.

Hinweis Der erste Index nummeriert die Zeilen, der zweite die Spalten.

Frage 8

Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel für eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$, für die $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$ gilt, und deren weitere Einträge $\neq 0$ sind.

Hinweis Der erste Index nummeriert die Zeilen, der zweite die Spalten.

Antwort 6

Thema: Matrizenrechnung

Das Produkt AC ist definiert, und das Ergebnis ist eine 4×2-Matrix. Das Produkt $E(AC)$ ist ebenfalls definiert, und das Ergebnis hat 5 Zeilen und 2 Spalten.

Antwort 5

Thema: Matrizenrechnung

Die Summe $A+B$ ist definiert, und das Ergebnis ist eine 4×5-Matrix. Da E eine 5×4-Matrix ist, ist das Produkt $E(A+B)$ definiert, und das Ergebnis hat 5 Zeilen und 5 Spalten.

Antwort 8

Thema: Matrizenrechnung

Alle Einträge unterhalb der Diagonalen müssen 0 sein. Ein Beispiel ist etwa $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Antwort 7
Thema: Matrizenrechnung

Alle Einträge, die nicht auf der Diagonalen stehen, müssen 0 sein. Die 4×4-Einheitsmatrix liefert ein Beispiel.

Frage 9

Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel für eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$, für die $a_{ij} = 0$ für alle $i < j$ gilt, und deren weitere Einträge $\neq 0$ sind.

Hinweis Der erste Index nummeriert die Zeilen, der zweite die Spalten.

Frage 10

Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel für eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$, für die $a_{ij} = 0$ für alle $|i - j| = 1$ gilt, und deren weitere Einträge $\neq 0$ sind.

Hinweis Welche Einträge müssen 0 sein?

Frage 11
Thema: Matrizenrechnung

Bestimmen Sie eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$ über $\mathbb{R}$, für die $a_{ij} = i + j$ gilt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 12

Thema: Matrizenrechnung

Bestimmen Sie eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$ über $\mathbb{R}$, für die $a_{ij} = i^j$ gilt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 10

Thema: Matrizenrechnung

Die Einträge a_{12}, a_{21}, a_{32}, a_{23}, a_{43}, a_{34} müssen Null sein. Ein Beispiel liefert $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Antwort 9

Thema: Matrizenrechnung

Alle Einträge oberhalb der Diagonalen müssen 0 sein. Ein Beispiel ist etwa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Antwort 12

Thema: Matrizenrechnung

So eine Matrix hat die Form $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{pmatrix}$.

Antwort 11

Thema: Matrizenrechnung

So eine Matrix hat die Form $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Frage 13
Thema: Matrizenrechnung

Bestimmen Sie eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$ über $\mathbb{R}$, für die $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } |i-j| > 1 \\ -1, & \text{falls } |i-j| \le 1 \end{cases}$ gilt.

Hinweis Ohne Hinweis

Frage 14
Thema: Matrizenrechnung

Wie lautet das Assoziativgesetz für die Matrizenmultiplikation?

Hinweis Wie viele Zeilen/Spalten haben die Matrizen, die miteinander multipliziert werden?

Frage 15

Thema: Matrizenrechnung

Wie lautet die Distributivgesetz der Matrizenrechnung?

Hinweis Wie viele Zeilen/Spalten müssen die Matrizen haben?

Frage 16

Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel dafür, dass in $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, $n \geq 2$, das Kommutativgesetz nicht gilt.

Hinweis Machen Sie allgemein den Ansatz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$. Bilden Sie AB und BA und vergleichen Sie die Einträge dieser Matrizen. Wählen Sie nun die Einträge so, dass AB und BA verschieden sind.

Antwort 14

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{ns}(\mathbb{K})$ und $C \in \mathrm{M}_{st}(\mathbb{K})$. Dann gilt $(AB)C = A(BC)$.

Antwort 13

Thema: Matrizenrechnung

Die Einträge a_{13}, a_{14}, a_{24}, a_{31}, a_{41} und a_{42} müssen 1 sein, die übrigen Einträge sind -1. Die gesuchte Matrix ist damit $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Antwort 16

Thema: Matrizenrechnung

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, und sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $AB \neq BA$.

Antwort 15

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathrm{M}_{ns}(\mathbb{K})$ und $D \in \mathrm{M}_{st}(\mathbb{K})$. Dann gilt $A(B+C) = AB + AC$ und $(B+C)D = BD + CD$.

Frage 17

Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix A, die nicht die Nullmatrix ist, für die aber A^2 die Nullmatrix ist.

Hinweis Machen Sie allgemein den Ansatz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und berechnen Sie $A^2 = AA$. Wählen Sie nun die Einträge in A so, dass A nicht die Nullmatrix aber A^2 die Nullmatrix ist.

Frage 18

Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix A, die weder die Nullmatrix noch die Einheitsmatrix ist, und die die Gleichung $A^2 = A$ erfüllt.

Hinweis Die Matrix A darf nicht invertierbar sein.

Frage 19

Thema: Matrizenrechnung

Sei A eine invertierbare quadratische $n \times n$-Matrix, die die Gleichung $A^2 = A$ erfüllt. Warum ist A die Einheitsmatrix?

Hinweis Multiplizieren Sie die Gleichung mit A^{-1}.

Frage 20

Thema: Matrizenrechnung

Seien A und B Matrizen, für die AB gebildet werden kann. Kann dann auch $(AB)(AB)$ gebildet werden?

Hinweis Ist die Anzahl der Spalten von AB immer gleich der Anzahl der Zeilen von AB?

Antwort 18

Thema: Matrizenrechnung

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 17

Thema: Matrizenrechnung

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 20

Thema: Matrizenrechnung

Nein, im Allgemeinen kann $(AB)(AB)$ nicht gebildet werden. Sei etwa $A \in \mathrm{M}_{12}(\mathbb{R})$, und sei $B \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt $AB \in \mathrm{M}_{12}(\mathbb{R})$, und es folgt, dass $(AB)(AB)$ nicht gebildet werden kann.

Antwort 19
Thema: Matrizenrechnung

Wir multiplizieren die Gleichung $A^2 = A$ mit A^{-1} und erhalten $A = I_n$.

Frage 21

Thema: Matrizenrechnung

Seien A und B Matrizen, für die $A + B$ und AB gebildet werden können. Warum müssen A und B quadratisch sein?

Hinweis Wie werden Matrizen addiert? Wie multipliziert?

Frage 22

Thema: Matrizenrechnung

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Wie lautet die Indizierung der

1. Diagonalelemente?
2. Einträge unterhalb der Diagonale?
3. Einträge oberhalb der Diagonale?

Hinweis Eine Merkregel für die Indizes: Die **Z**eilen **z**uerst, die **S**palten **sp**äter.

Frage 23

Thema: Matrizenrechnung

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Sei $a \in \mathbb{K}$. Geben Sie ein Beispiel für Matrizen X und Y, so dass $XA = AY = aA$ ist.

Hinweis Wie viele Zeilen/Spalten müssen X beziehungsweise Y haben? Welche Matrix können Sie von links an A multiplizieren, so dass im Ergebnis jeder Eintrag von A mit einer Konstanten a multipliziert wird?

Frage 24

Thema: Matrizenrechnung

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Wie viele Zeilen und Spalten muss eine Matrix B haben, damit AB eine quadratische Matrix ist?

Hinweis Wie viele Zeilen muss B haben, damit AB gebildet werden kann? Wie viele Zeilen/Spalten hat AB?

Antwort 22

Thema: Matrizenrechnung

1. Die Diagonalelemente sind die Elemente a_{ii}, $1 \leq i \leq n$.
2. Die Einträge unterhalb der Diagonale sind a_{ij}, $1 \leq j < i \leq n$.
3. Die Einträge oberhalb der Diagonale sind a_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$.

Antwort 21

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $B \in \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{K})$. Da $A + B$ gebildet werden kann, folgt $m = p$ und $n = q$. Da AB gebildet werden kann, folgt $n = m$. Es folgt, dass A und B quadratisch sind.

Antwort 24
Thema: Matrizenrechnung

Damit AB quadratisch ist, muss B eine $n \times m$-Matrix sein, also $B \in \mathrm{M}_{nm}(K)$.

Antwort 23

Thema: Matrizenrechnung

Sei $X = \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$, und sei $Y = \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{nn}(K)$. Dann gilt $XA = AY = aA$.

Frage 25
Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{M}_{nl}(\mathbb{K})$. Wenn A eine Nullzeile hat, dann auch AB.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 26

Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{M}_{nl}(\mathbb{K})$. Wenn A eine Nullspalte hat, dann auch AB.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 27
Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{K})$ gilt

$$A^2 - (a+d)A + (ad-bc)I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 28
Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien A, B, C Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$. Ist $AB = AC$, so folgt $B = C$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Antwort 26

Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist falsch.

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, das heißt, AB hat keine Nullspalte.

Antwort 25

Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist wahr.

Sei $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$. Sei $1 \leq k \leq m$, und es gelte $a_{kj} = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$ (die k-te Zeile von A ist also eine Nullzeile). Sei $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq l}$. Dann ist $AB = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$, und $c_{kj} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}b_{sj} = 0$ für alle $1 \leq j \leq l$. Die k-te Zeile von AB ist also eine Nullzeile.

Antwort 28
Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist falsch.

Seien etwa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt $B \neq C$, aber $AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 27
Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist wahr.

Es sind

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

und

$$(a+d)A = (a+d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

und

$$(ad - bc)I_2 = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}.$$

Es folgt $A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = 0$, die Behauptung.

Frage 29
Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Ist $A^2 = I_n$, so gilt $A = I_n$ oder $A = -I_n$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 30

Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 31
Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien $A, B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Wenn die erste und die dritte Zeile von B gleich sind, dann sind die erste und die dritte Zeile von AB gleich.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 32

Thema: Elementarmatrizen

Wann werden zwei Matrizen A und B zeilenäquivalent genannt?

Hinweis Wiederholen Sie die Definition.

Antwort 30
Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist wahr.

Wir beweisen die Aussage mit Induktion nach n. Ist $n_0 = 1$, so gilt $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3^1 - 1 \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix}$
es gilt daher die Induktionsannahme. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Behauptung für $n \geq 1$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 + 3^{n+1} - 3 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3^{n+1} - 1 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Antwort 29

Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist falsch.

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

aber $A \neq I_2$ und $A \neq -I_2$.

Antwort 32

Thema: Elementarmatrizen

Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ heißen zeilenäquivalent, wenn es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$ so gibt, dass $A = E_1 \cdots E_s B$ ist.

Antwort 31

Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist falsch.

Sei etwa $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$, und sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die erste und dritte Zeile von AB sind also verschieden.

Frage 33

Thema: Elementarmatrizen

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Was für eine Matrix müssen Sie von links an A multiplizieren, um die ersten beiden Zeilen von A zu vertauschen?

Hinweis Nach welcher Elementarmatrix wird gesucht?

Frage 34

Thema: Elementarmatrizen

Nennen Sie mindestens drei Eigenschaften von Elementarmatrizen.

Hinweis Wie viele Zeilen/Spalten haben Elementarmatrizen? Welche Eigenschaft haben Inverse von Elementarmatrizen?

Frage 35

Thema: Elementarmatrizen

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Was für eine Matrix müssen Sie von links an A multiplizieren, um die erste Zeile von der zweiten zu subtrahieren?

Hinweis Gesucht ist nach einer Elementarmatrix.

Frage 36

Thema: Elementarmatrizen

Welche Matrix ist invers zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{F}_2)$?

Hinweis Die Matrix ist eine Elementarmatrix.

Antwort 34
Thema: Elementarmatrizen

1. Wenn wir eine Matrix von links mit einer Elementarmatrix multiplizieren, so führen wir eine elementare Zeilenumformung durch.
2. Elementarmatrizen sind invertierbar.
3. Elementarmatrizen sind quadratisch.
4. Inverse von Elementarmatrizen sind Elementarmatrizen.

Antwort 33

Thema: Elementarmatrizen

Wir müssen die Matrix $P_{12} \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ von links an A multiplizieren. Die Matrix P_{12} erhalten wir, indem wir in I_m die erste und die zweite Zeile vertauschen.

Antwort 36

Thema: Elementarmatrizen

Die Matrix ist eine Elementarmatrix vom Typ P_{23}. Eine solche Matrix ist zu sich selbst invers. Invers zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{F}_2)$ ist also $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 35

Thema: Elementarmatrizen

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Wir suchen eine Elementartmatrix E, so dass gilt:

$$EA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} - a_{11} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Diese elementare Zeilenoperation wird durch die Matrix $T_{21}(-1) \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ realisiert, also

$$T_{21}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K}).$$

Frage 37

Thema: Elementarmatrizen

Welche Matrix ist invers zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{F}_2)$?

Hinweis Die Matrix ist eine Elementarmatrix.

Frage 38
Thema: Elementarmatrizen

Welche Matrix ist invers zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$?

Hinweis Die Matrix ist eine Elementarmatrix.

Frage 39

Thema: Elementarmatrizen

Welches ist der Typ der elementaren Zeilenumformung, der die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ überführt? Welche Matrix müssen Sie von links multiplizieren, um diese elementare Zeilenumformung durchzuführen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 40

Thema: Elementarmatrizen

Welche 3×3-Elementarmatrizen gibt es, die Zeilenvertauschungen bewirken?

Hinweis Es gibt drei solcher Elementarmatrizen.

Antwort 38

Thema: Elementarmatrizen

Die Matrix ist eine Elementarmatrix vom Typ $D_2(3)$. Invers dazu ist die Matrix $D_2(\frac{1}{3})$.

Somit ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ invers zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Antwort 37
Thema: Elementarmatrizen

Die Matrix ist eine Elementarmatrix vom Typ $T_{31}(1)$. Invers dazu ist die Matrix $T_{31}(-1)$.
Da $1 = -1$ in $\mathbb{F}_2$, folgt, dass $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ invers zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

Antwort 40

Thema: Elementarmatrizen

Wir können die erste Zeile mit der zweiten, die erste mit der dritten und die zweite mit der dritten vertauschen. Die zugehörigen Elementarmatrizen sind $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 39

Thema: Elementarmatrizen

Es handelt sich um eine Zeilenumformung vom Typ Z_{12}. Die zugehörige Elementarmatrix ist $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Frage 41

Thema: Elementarmatrizen

Wie entstehen die $m \times m$-Elementarmatrizen aus der $m \times m$-Einheitsmatrix I_m?

Hinweis Wir müssen auf I_m elementare Zeilenumformungen anwenden.

Frage 42

Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Ist die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf M?

Hinweis Ja, aber warum ist das so?

Frage 43
Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Ist die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf M?

Hinweis Nein, aber warum nicht?

Frage 44
Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Ist die Matrizenaddition eine Verknüpfung auf M?

Hinweis Nein, aber warum nicht?

Antwort 42
Thema: Verknüpfungen

Wir müssen zeigen, dass das Produkt von zwei Matrizen, die in M liegen, wieder in M liegt. Dazu seien $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in M. Es ist $AB = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dies ist eine Matrix, die in M liegt. Also bildet die Matrizenmultiplikation zwei beliebige Matrizen $A, B \in M$ auf eine Matrix in M ab, und es folgt, dass die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf M ist.

Antwort 41
Thema: Elementarmatrizen

Eine Elementarmatrix P_{ij} entsteht aus I_m, indem wir die i-te und die j-te Zeile vertauschen.

Eine Elementarmatrix $T_{ij}(s)$, $i \neq j$ und $s \in \mathbb{K}$, entsteht aus I_m, indem wir das s-Fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile addieren.

Eine Elementarmatrix $D_i(r)$, $r \neq 0$, entsteht aus I_m, indem wir die i-te Zeile mit r multiplizieren.

Antwort 44

Thema: Verknüpfungen

Nein, denn die Summe von zwei Matrizen in M liegt nicht in M, da die Elemente auf der Diagonalen 2 sind.

Antwort 43

Thema: Verknüpfungen

Nein, denn das Produkt von zwei Matrizen in M liegt nicht in M. Wenn $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, so gilt $A \in M$ und $A^2 = AA = I_2$, und I_2 liegt nicht in M.

Frage 45

Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$, und sei $N := \left\{ \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Ist die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf $M \cup N$?

Hinweis Ja, aber warum ist das so?

Frage 46

Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Ist die Matrizenmultiplikation für Matrizen, die in M liegen, kommutativ?

Hinweis Ja, aber können Sie das auch beweisen?

Frage 47

Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Liegt I_2 in M, und ist jede Matrix in M bezüglich der Matrizenmultiplikation invertierbar? Liegt das inverse Element einer Matrix in M wieder in M?

Hinweis Ja, ja und ja.

Frage 48

Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \{-1, 1\}$. Ist die Multiplikation eine Verknüpfung auf M?

Hinweis Ja, aber warum ist das so?

Antwort 46

Thema: Verknüpfungen

Ja, denn seien $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zwei beliebige Matrizen in M. Dann gilt $AB = \begin{pmatrix} 1 & b+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also $AB = BA$ für alle $A, B \in M$. Somit ist die Matrizenmultiplikation für Matrizen in M kommutativ.

Antwort 45
Thema: Verknüpfungen

Wir müssen zeigen, dass das Produkt von zwei Elementen $A, B \in M \cup N$ wieder in $M \cup N$ liegt.

Wenn A und B beide in M liegen, so gilt $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für reelle Zahlen a und b. Dann gilt $AB = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, und es folgt, dass AB in M, und damit in $M \cup N$ liegt.

Analog kann man zeigen, dass $AB \in M$ gilt, wenn $A, B \in N$ gilt, und dass $AB \in N$ gilt, wenn entweder $A \in N$ und $B \in M$ oder $A \in M$ und $B \in N$ gilt.

Da für je zwei Matrizen $A, B \in M \cup N$ auch das Produkt AB in $M \cup N$ liegt, folgt, dass die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf $M \cup N$ ist.

Antwort 48
Thema: Verknüpfungen

Es sind $1 \cdot 1 = 1$, $(-1) \cdot (-1) = 1$ und $1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1 = -1$. Das Produkt von je zwei Elementen in M liegt also wieder in M, und dies zeigt, dass die Multiplikation eine Verknüpfung auf M ist.

Antwort 47
Thema: Verknüpfungen

Die Matrix I_2 ist von der Bauart $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $a = 0$. Sie liegt also in M.

Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so gilt $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Somit ist jede Matrix A in M invertierbar, und die zu einer Matrix A inverse Matrix liegt wieder in M.

Frage 49

Thema: Verknüpfungen

Sei M eine Menge und sei $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M. Ist $\cup$ eine Verknüpfung auf $\mathcal{P}(M)$?

Hinweis Ja, aber warum ist das so?

Frage 50

Thema: Verknüpfungen

Warum ist $\mathbb{Z}$ mit der Addition und der Multiplikation kein Körper?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 51

Thema: Verknüpfungen

Welche Gesetze müssen die Addition und die Multiplikation in einem Körper $\mathbb{K}$ erfüllen?

Hinweis Zunächst einmal müssen die Addition und die Multiplikation Verknüpfungen auf $\mathbb{K}$ sein. Was muss noch gelten?

Frage 52

Thema: Verknüpfungen

Nennen Sie drei verschiedene Körper.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 50

Thema: Verknüpfungen

Nur die Elemente -1 und 1 sind in $\mathbb{Z}$ invertierbar, denn für alle $a \neq \pm 1$ gibt es kein $a'' \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot a'' = a'' \cdot a = 1$. In einem Körper müssen aber alle Elemente $\neq 0$ invertierbar sein.

Antwort 49

Thema: Verknüpfungen

Wir müssen zeigen, dass die Vereinigung von zwei Teilmengen von M wieder eine Teilmenge von M ist. Dazu seien X und Y Teilmengen von M. Sei $m \in X \cup Y$. Wenn $m \in X$, so folgt $m \in M$, denn X ist eine Teilmenge von M. Wenn $m \in Y$, so folgt $m \in M$, denn Y ist eine Teilmenge von M. Es gilt also $X \cup Y \subseteq M$, und damit liegt $X \cup Y$ in $\mathcal{P}(M)$. Da durch die Vereinigung je zwei Teilmengen von M eine Teilmenge von M zugeordnet wird, ist $\cup$ eine Verknüpfung auf $\mathcal{P}(M)$.

Antwort 52
Thema: Verknüpfungen

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{F}_2$.

Antwort 51
Thema: Verknüpfungen

Zunächst einmal müssen die Addition und die Multiplikation Verknüpfungen auf $\mathbb{K}$ sein.

Die Addition muss das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz erfüllen, ein neutrales Element 0 besitzen, und jedes Element in $\mathbb{K}$ muss bezüglich der Addition invertierbar sein.

Die Multiplikation muss das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz erfüllen, ein neutrales Element 1 besitzen, und jedes Element in $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ muss bezüglich der Multiplikation invertierbar sein. Weiter muss $1 \neq 0$ gelten.

Ferner müssen Addition und Multiplikation das Distributivgesetz erfüllen.

Frage 53
Thema: Aussagen

Ist folgende Aussage wahr oder falsch? Wenn alle Autos rot sind, ist jeder Tag ein Feiertag.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 54
Thema: Aussagen

Ist folgende Aussage wahr oder falsch? Wenn alle Autos rot sind, so folgt auf jeden Dienstag ein Mittwoch.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 55

Thema: Aussagen

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Wenn auf jeden Dienstag ein Mittwoch folgt, so ist jedes Auto rot.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 56

Thema: Aussagen

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Das Sauerland ist genau dann ein Mittelgebirge, wenn auf jeden Dienstag ein Mittwoch folgt.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Antwort 54
Thema: Aussagen

Die Aussage ist wahr. Wir haben hier eine Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, dabei ist $\mathcal{A}$ die Aussage „Alle Autos sind rot“, und $\mathcal{B}$ ist die Aussage „Auf jeden Dienstag folgt ein Mittwoch“. Die Aussage $\mathcal{A}$ ist falsch, die Aussage $\mathcal{B}$ ist wahr. Es folgt, dass $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wahr ist, denn aus einer falschen Voraussetzung kann alles folgen.

Antwort 53
Thema: Aussagen

Die Aussage ist wahr. Wir haben hier eine Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, dabei ist $\mathcal{A}$ die Aussage „Alle Autos sind rot“, und $\mathcal{B}$ ist die Aussage „Jeder Tag ist Feiertag“. Die Aussagen sind beide falsch, und es folgt, dass $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wahr ist. (Aus einer falschen Voraussetzung kann alles folgen.)

Antwort 56
Thema: Aussagen

Die Aussage ist wahr. Wir haben hier eine Äquivalenz $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, dabei ist $\mathcal{A}$ die Aussage „Das Sauerland ist ein Mittelgebirge“, und $\mathcal{B}$ ist die Aussage „Auf jeden Dienstag folgt ein Mittwoch“. Da beide Aussagen wahr sind, ist die Äquivalenz wahr.

Antwort 55
Thema: Aussagen

Die Aussage ist falsch. Wir haben hier eine Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, dabei ist $\mathcal{A}$ die Aussage „Auf jeden Dienstag folgt ein Mittwoch“, und $\mathcal{B}$ ist die Aussage „Alle Autos sind rot“. Die Aussage $\mathcal{A}$ ist wahr, die Aussage $\mathcal{B}$ ist falsch. Es folgt, dass $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ falsch ist, denn aus einer wahren Aussage kann man nichts Falsches folgern.

Frage 57

Thema: Aussagen

Wie lautet die Negation der Aussage „Alle Fernstudentinnen sind fleißig.“?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 58

Thema: Aussagen

Wie lautet die Negation der Aussage „Alle Fernstudentinnen sind fleißig und gut in Mathe.“?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 59
Thema: Aussagen

Wie lautet die Negation der Aussage „Alle Fernstudentinnen sind fleißig oder genial.“?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 60

Thema: Aussagen

Wie lautet die Negation der Aussage „Es gibt eine Mathematikprofessorin, die schlecht rechnen kann und gern Spagetti isst."?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 58

Thema: Aussagen

Es gibt eine Fernstudentin, die nicht fleißig oder nicht gut in Mathe ist.

Antwort 57

Thema: Aussagen

Es gibt eine Fernstudentin, die nicht fleißig ist.

Antwort 60

Thema: Aussagen

Alle Mathematikprofessorinnen können gut rechnen oder essen ungern Spagetti.

Antwort 59

Thema: Aussagen

Es gibt eine Fernstudentin, die nicht fleißig und nicht genial ist.

Frage 61

Thema: Aussagen

Wie lautet die Negation der Aussage „Es gibt eine Mathematikprofessorin, die gern Spagetti isst oder Mini fährt.“?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 62

Thema: Aussagen

Wie lautet die Negation der Aussage „Genau dann kichert die Hexe, wenn Hänsel und Gretel sich im Wald verirren.“?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 63

Thema: Aussagen

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen. Nennen Sie eine zu $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ logisch äquivalente Aussage.

Hinweis Ohne Hinweis

Frage 64

Thema: Aussagen

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen. Nennen Sie eine zu $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ logisch äquivalente Aussage.

Hinweis

Antwort 62

Thema: Aussagen

Genau dann kichert die Hexe nicht, wenn Hänsel oder Gretel sich im Wald verirren.

Antwort 61

Thema: Aussagen

Alle Mathematikprofessorinnen essen ungern Spagetti und fahren nicht Mini.

Antwort 64

Thema: Aussagen

$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.

Antwort 63

Thema: Aussagen

$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$

Frage 65

Thema: Aussagen

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Aussagen. Nennen Sie eine zu $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ logisch äquivalente Aussage.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 66

Thema: Aussagen

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Aussagen. Nennen Sie eine zu $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ logisch äquivalente Aussage.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 67

Thema: Aussagen

Geben Sie ein Beispiel für eine Aussage, die immer wahr ist.

Hinweis Verknüpfen Sie geschickt eine wahre und eine falsche Aussage.

Frage 68

Thema: Aussagen

Geben Sie ein Beispiel für eine Aussage, die immer falsch ist.

Hinweis Verknüpfen Sie geschickt eine wahre und eine falsche Aussage.

Antwort 66

Thema: Aussagen

$(\neg\mathcal{C}) \Rightarrow \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, also $(\neg\mathcal{C}) \Rightarrow ((\neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B}))$.

Antwort 65

Thema: Aussagen

$\neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\mathcal{A})$, und wenn wir die linke Klammer noch auflösen $((\neg\mathcal{B}) \vee (\neg\mathcal{C})) \Rightarrow (\neg\mathcal{A})$

Antwort 68

Thema: Aussagen

Wenn $\mathcal{A}$ eine Aussage ist, dann ist $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$ immer falsch.

Antwort 67

Thema: Aussagen

Wenn $\mathcal{A}$ eine Aussage ist, dann ist $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ immer wahr.

Frage 69
Thema: Aussagen

Angenommen, Sie müssen beweisen, dass die Aussagen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ äquivalent sind. Nehmen wir weiter an, Sie hätten bereits $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}$ und $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ und $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{A}$ bewiesen. Nennen Sie zwei Implikationen, die Sie noch beweisen müssen, um die Äquivalenz der vier Aussagen zu beweisen.

Hinweis Was ist ein Ringschluss?

Frage 70

Thema: Mengen

Erklären Sie das Prinzip der vollständigen Induktion. Wann kann es angewendet werden, und wie funktioniert es?

Hinweis

Frage 71

Thema: Aussagen

Auf welchem Prinzip beruhen Beweise durch Widerspruch?

Hinweis Es hat etwas mit den Wahrheitswerten der Implikation zu tun.

Frage 72

Thema: Aussagen

Nehmen wir an, Sie wollten die Aussage

$$\text{Für alle natürlichen Zahlen } n \text{ gilt } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

durch vollständige Induktion beweisen.

Wie lautet der Induktionsanfang, wie die Induktionsvoraussetzung und was ist im Induktionsschritt zu tun?

Hinweis Im Induktionsanfang müssen Sie die Aussage $\mathcal{A}(1)$ beweisen, in der Induktionsvoraussetzung nehmen Sie an, $\mathcal{A}(n)$ sei wahr, und im Induktionsschritt müssen Sie zeigen, dass aus der Gültigkeit von $\mathcal{A}(n)$ folgt, dass $\mathcal{A}(n+1)$ wahr ist.

Antwort 70
Thema: Mengen

Beweise durch vollständige Induktion können wir führen, wenn wir beweisen wollen, dass Aussagen $\mathcal{A}(n)$, die über die natürlichen Zahlen indiziert sind, wahr sind.

Das Prinzip beruht darauf, dass wir, wenn wir die Gültigkeit einer Aussage $\mathcal{A}(n_0)$ für einen Startwert $n_0 \in \mathbb{N}$ bewiesen haben, und wenn wir für jedes $n \geq n_0$ zeigen können, dass $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ gilt, die Aussagen $\mathcal{A}(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ bewiesen haben.

Antwort 69

Thema: Aussagen

Wenn wir noch $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D}$ und $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B}$ beweisen können, sind wir fertig. Wir haben dann einen Ringschluss der Form $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}$ vorliegen, und wir kommen von jeder der Aussagen zu jeder anderen, indem wir den Implikationspfeilen folgen.

Eine andere Möglichkeit ist, $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}$ zu beweisen. Dann haben wir einen Ringschluss $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{A}$, und wieder kommen wir von jeder Aussage zu jeder anderen, indem wir den Implikationspfeilen folgen.

Antwort 72
Thema: Aussagen

Induktionsanfang: Es ist zu zeigen, dass $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ gilt.

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsschritt: Hier wird gezeigt, dass aus $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ folgt, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2}{2}$
gilt.

Antwort 71

Thema: Aussagen

Auf dem Prinzip, dass man aus einer wahren Aussage nie etwas Falsches folgern kann.

Frage 73

Thema: Aussagen

Wie lautet die Wahrheitstafel für die Negation einer Aussage $\mathcal{A}$?

Hinweis Wenn $\mathcal{A}$ wahr ist, wie steht es dann mit $\neg\mathcal{A}$?

Frage 74
Thema: Aussagen

Wie lautet die Wahrheitsstafel für die Konjunktion von zwei Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Hinweis Die Konjunktion wurde mit $\wedge$ bezeichnet.

Frage 75

Thema: Aussagen

Wie lautet die Wahrheitsstafel für die Disjunktion von zwei Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Hinweis Die Disjunktion wurde mit $\vee$ bezeichnet.

Frage 76

Thema: Aussagen

Wie lautet die Wahrheitsstafel für die Implikation von zwei Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Hinweis Die Implikation wurde mit $\Rightarrow$ bezeichnet.

Antwort 74
Thema: Aussagen

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f.

Antwort 73
Thema: Aussagen

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
w	f
f	w

Antwort 76

Thema: Aussagen

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	$w.$

Antwort 75

Thema: Aussagen

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f.

Frage 77

Thema: Aussagen

Wie lautet die Wahrheitsstafel für die Äquivalenz von zwei Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Hinweis Die Äquivalenz wurde mit $\Leftrightarrow$ bezeichnet.

Frage 78
Thema: Mengen

Wie viele Elemente hat $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$?

Hinweis Vier, und welche sind das?

Frage 79

Thema: Mengen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, und sei $N := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Gilt $M \cup N = \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$?

Hinweis Nein, aber warum nicht?

Frage 80

Thema: Mengen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, und sei $N := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Gilt $M \cap N = \emptyset$?

Hinweis Nein, aber warum nicht?

Antwort 78
Thema: Mengen

Es gilt $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$, also $|\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2| = 4$.

Antwort 77

Thema: Aussagen

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w.

Antwort 80

Thema: Mengen

Nein, denn die Nullmatrix liegt in $M \cap N$.

Antwort 79
Thema: Mengen

Wenn A eine Matrix in $M \cup N$ ist, dann liegt A in M oder in N. Im ersten Fall hat A an der Stelle $(2,1)$ den Eintrag 0, im zweiten Fall hat A an der Stelle $(1,2)$ den Eintrag 0. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ liegt also nicht in $M \cup N$, und es folgt, dass $M \cup N \neq \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

Frage 81
Thema: Mengen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$, und sei $N := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Gilt $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M \cup N$?

Hinweis Nein, aber warum nicht?

Frage 82
Thema: Mengen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$, und sei $N := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Gilt $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M \setminus N$?

Hinweis Nein, aber warum nicht?

Frage 83
Thema: Mengen

Sei $M := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b = 4\}$. Listen Sie alle Elemente in M auf.

Hinweis M enthält drei Elemente.

Frage 84
Thema: Mengen

Seien M und N endliche Mengen mit $|M| = m$ und $|N| = n$. Wie viele Elemente kann $M \cup N$ höchstens haben? Unter welchen Umständen wird diese Zahl angenommen?

Hinweis Die Menge $M \cup N$ hat höchstens $m + n$ Elemente.

Antwort 82
Thema: Mengen

Die Nullmatrix liegt in N. Da $M \setminus N = \{A \mid A \in M \text{ und } A \notin N\}$, folgt, dass die Nullmatrix nicht in $M \setminus N$ liegt.

Antwort 81
Thema: Mengen

Wenn eine Matrix A in $M \cup N$ liegt, dann liegt sie in M oder in N. Im ersten Fall ist der Eintrag an der Stelle $(2,1)$ Null, im zweiten Fall ist der Eintrag an der Stelle $(1,2)$ Null. Es folgt, dass $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nicht in $M \cup N$ liegen kann.

Antwort 84
Thema: Mengen

Die Menge $M \cup N$ hat höchstens $m + n$ Elemente. Diese Zahl wird angenommen, wenn M und N disjunkt sind.

Antwort 83

Thema: Mengen

Es ist $M = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$.

Frage 85

Thema: Mengen

Seien M und N endliche Mengen mit $|M| = m$ und $|N| = n$. Sei $m \geq n$. Wie viele Elemente muss $M \cup N$ mindestens haben? Unter welchen Umständen wird diese Zahl angenommen?

Hinweis Die Menge $M \cup N$ muss mindestens m Elemente enthalten.

Frage 86
Thema: Mengen

Seien M und N endliche Mengen mit $|M| = m$ und $|N| = n$. Wie viele Elemente kann $M \setminus N$ höchstens haben? Unter welchen Umständen wird diese Zahl angenommen?

Hinweis Die Menge $M \setminus N$ hat höchstens m Elemente.

Frage 87

Thema: Mengen

Seien M und N endliche Mengen mit $|M| = m$ und $|N| = n$. Sei $m \geq n$. Wie viele Elemente muss $M \setminus N$ mindestens haben? Unter welchen Umständen wird diese Zahl angenommen?

Hinweis Die Menge $M \setminus N$ muss mindesten $m - n$ Elemente enthalten.

Frage 88

Thema: Mengen

Wann werden Mengen M und N disjunkt genannt?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 86
Thema: Mengen

Die Menge $M \setminus N$ hat höchstens m Elemente. Diese Zahl wird angenommen, wenn M und N disjunkt sind.

Antwort 85
Thema: Mengen

Die Menge $M \cup N$ muss mindestens m Elemente enthalten. Diese Zahl wird angenommen, wenn N eine Teilmenge von M ist.

Antwort 88

Thema: Mengen

Zwei Mengen M und N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$ gilt.

Antwort 87
Thema: Mengen

Die Menge $M \setminus N$ muss mindesten $m - n$ Elemente enthalten. Diese Zahl wird angenommen, wenn N eine Teilmenge von M ist.

Frage 89

Thema: Mengen

Seien M und N endliche Mengen, und sei $|M \times N| = 56$. Kann M eine Menge mit 6 Elementen sein?

Hinweis Nein.

Frage 90

Thema: Abbildungen

Definieren Sie eine bijektive Abbildung von $\{1\} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Hinweis Welche Elemente liegen in $\{1\} \times \mathbb{N}$? Notieren Sie einige dieser Elemente. Wiederholen Sie die Definitionen der Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv.

Frage 91
Thema: Mengen

Definieren Sie eine bijektive Abbildung von $\{1,2\} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Hinweis Abbildungen; 0,1,2
Basiswissen, Beispiel, Verständnisfrage

Frage 92
Thema: Abbildungen

Definieren Sie eine injektive Abbildung von $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die nicht surjektiv ist.

Hinweis Wiederholen Sie die Definitionen der Begriffe injektiv und surjektiv. Bilden Sie zum Beispiel die Elemente $(1, n)$ auf die geraden Zahlen und die Elemente $(2, n)$ auf die ungeraden Zahlen, die größer als 1 sind, ab.

Antwort 90

Thema: Abbildungen

Sei $f : \{1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f((1,n)) = n$ für alle $(1,n) \in \{1\} \times \mathbb{N}$. Dann ist $g : \mathbb{N} \to \{1\} \times \mathbb{N}$, definiert durch $g(n) = (1,n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, invers zu f. Es folgt, dass f bijektiv ist.

Antwort 89
Thema: Mengen

Nein, denn es gilt $|M \times N| = |M| \cdot |N|$. Da 6 Kein Teiler von 56 ist, kann M keine Menge mit 6 Elementen sein.

Antwort 92

Thema: Abbildungen

Sei $f : \{1,2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f((1,n)) = 2n$ und $f((2,n)) = 2n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da es kein $(a,n) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}$ mit $f((a,n)) = 1$ gibt, ist f nicht surjektiv.

Wir zeigen nun, dass f injektiv ist. Dazu seien $(a,n),(b,m) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}$ mit $f((a,n)) = f((b,m)) = y \in \mathbb{N}$. Falls y gerade ist, so folgt $a = b = 1$ und $m = n = \frac{y}{2}$. Falls y ungerade ist, so folgt $a = b = 2$ und $m = n = \frac{y-1}{2}$. Es gilt also $(a,n) = (b,m)$. Somit ist f injektiv.

Antwort 91

Thema: Mengen

Sei $f : \{1,2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f((1,n)) = 2n$ und $f((2,n)) = 2n-1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen zunächst, dass f surjektiv ist. Dazu sei $n \in \mathbb{N}$. Falls n gerade ist, dann ist $(1, \frac{n}{2})$ ein Urbild von n. Falls n ungerade ist, so ist $(2, \frac{n+1}{2})$ ein Urbild von n. Da jedes Element $n \in \mathbb{N}$ ein Urbild unter f hat, ist f surjektiv.

Wir zeigen nun, dass f injektiv ist. Dazu seien $(a,n), (b,m) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}$ mit $f((a,n)) = f((b,m)) = y \in \mathbb{N}$. Falls y gerade ist, so folgt $a = b = 1$ und $m = n = \frac{y}{2}$. Falls y ungerade ist, so folgt $a = b = 2$ und $m = n = \frac{y+1}{2}$. Es gilt also $(a,n) = (b,m)$. Somit ist f injektiv.

Da f injektiv und surjektiv ist, folgt, dass f bijektiv ist.

Frage 93
Thema: Abbildungen

Definieren Sie eine surjektive Abbildung von $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die nicht injektiv ist.

Hinweis Wiederholen Sie die Definitionen der Begriffe injektiv und surjektiv. Welche Elemente liegen in $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$?

Frage 94

Thema: Abbildungen

Definieren Sie eine Abbildung von $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die weder injektiv noch surjektiv ist.

Hinweis Wiederholen Sie die Definitionen der Begriffe injektiv und surjektiv.

Frage 95

Thema: Abbildungen

Definieren Sie eine surjektive Abbildung von $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, so dass die Menge der Urbilder von 100 die Mächtigkeit 3 hat.

Hinweis Wiederholen Sie den Begriff surjektiv.

Welche Elemente liegen in $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$?

Wählen Sie nun drei Elemente in $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$, die Sie mit f auf 100 abbilden. Zum Beispiel die Elemente $(1, 100)$, $(2, 100)$, $(1, 101)$. Sie können natürlich auch andere Elemente in $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ wählen. Bilden Sie nun die übrigen Elemente von $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ so auf die Elemente von $\mathbb{N}$ ab, dass jedes mindestens ein Urbild besitzt. Formalisieren Sie Ihre Konstruktion.

Frage 96

Thema: Abbildungen

Definieren Sie eine Abbildung $f : \{1, 2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\text{Bild}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$, so dass jedes Element in $\{1, 2, 3, 4\}$ unendlich viele Urbilder hat.

Hinweis Wie ist das Bild einer Abbildung, und wie die Urbildmenge eines Elementes unter einer Abbildung definiert?
Welche Elemente liegen in $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$?

Antwort 94

Thema: Abbildungen

Sei $f : \{1,2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f((1,n)) = f((2,n)) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Abbildung ist weder injektiv noch surjektiv.

Antwort 93

Thema: Abbildungen

Sei $f : \{1, 2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f((1, n)) = f((2, n)) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann hat jedes $n \in \mathbb{N}$ genau zwei Urbilder unter f, und es folgt, dass f nicht injektiv aber surjektiv ist.

Antwort 96

Thema: Abbildungen

Sei $f : \{1,2\} \times \mathbb{N} \to \{1,2,3,4\}$ definiert durch $f((1,n)) = 1$, falls n gerade ist, $f((1,n)) = 2$, falls n ungerade ist, $f((2,n)) = 3$ falls n gerade ist und $f((2,n)) = 4$, falls n ungerade ist. Das Bild dieser Abbildung ist $\{1,2,3,4\}$, und jedes Element des Bildes von f hat unendlich viele Urbilder.

Antwort 95
Thema: Abbildungen

Sei $f : \{1, 2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f((1, n)) = f((2, n)) = n$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{100, 101\}$, und $f((1, 100)) = f((2, 100)) = f((1, 101)) = 100$, und $f((2, 101)) = 101$. Da jedes $n \in \mathbb{N}$ mindestens ein Urbild hat (nämlich $(2, n)$), ist f surjektiv. Die natürliche Zahl 100 hat nach Definition von f genau drei Urbilder.

Frage 97
Thema: Abbildungen

Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Nennen Sie drei Aussagen, die äquivalent sind zu der Aussage: f ist bijektiv.

Hinweis Wiederholen Sie die Begriffe injektiv, surjektiv, bijektiv und invertierbar.

Frage 98
Thema: Abbildungen

Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wie ist das Bild von f definiert?

Hinweis Wiederholen Sie die Definition des Bildes einer Abbildung.

Frage 99

Thema: Abbildungen

Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$, und sei $N = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Wie viele Urbilder kann $7 \in N$ maximal haben?

Hinweis Wie ist das Urbild eines Elementes unter einer Abbildung definiert?

Frage 100

Thema: Abbildungen

Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$, und sei $N = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Hat das Element $7 \in N$ immer ein Urbild?

Hinweis Wie ist das Urbild eines Elementes unter einer Abbildung definiert? Muss jedes Element im Wertebereich ein Urbild besitzen? Geben Sie ein Beispiel.

Antwort 98

Thema: Abbildungen

Es ist $\text{Bild}(f) = \{y \in Y \mid y = f(x)\text{f ür ein } x \in X\}$.

Antwort 97
Thema: Abbildungen

1. f ist injektiv und surjektiv.
2. f ist invertierbar.
3. Es gibt eine Abbildung $g : Y \to X$, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$ ist.

Antwort 100

Thema: Abbildungen

Nein, $7 \in N$ muss kein Urbild besitzen. Sei etwa $f : M \to N$ definiert durch $f(m) = 5$ für alle $m \in M$. Dann hat 7 kein Urbild unter f.

Antwort 99
Thema: Abbildungen

Das Element $7 \in N$ hat maximal 4 Urbilder, denn $4 = |M|$. Wenn $f : M \to N$ definiert ist durch $f(m) = 7$ für alle $m \in M$, so hat das Element $7 \in N$ auch genau 4 Urbilder.

Frage 101
Thema: Abbildungen

Seien X und Y Mengen. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen. Ist $f \circ g$ eine Abbildung von X nach X oder eine Abbildung von Y nach Y?

Hinweis Wiederholen Sie die Definition für die Komposition von Abbildungen.

Frage 102

Thema: Abbildungen

Seien X und Y Mengen. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen. Wie ist $f \circ g$ definiert, und wie $g \circ f$?

Hinweis Wiederholen Sie die Definition für die Komposition von Abbildungen.

Frage 103

Thema: Abbildungen

Seien X und Y Mengen. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Nennen Sie drei Aussagen, die äquivalent sind zu der Aussage: f ist invertierbar.

Hinweis Wiederholen Sie die Definition für den Begriff invertierbar.

Frage 104
Thema: Abbildungen

Seien M, N Mengen, und sei $f : M \to N$ eine injektive Abbildung. Sei $f'' : M \to \mathrm{Bild}(f)$ definiert durch $f''(m) = f(m)$ für alle $m \in M$. Begründen Sie, warum f'' invertierbar ist.

Hinweis Die Abbildung f'' ist genau dann invertierbar, wenn sie bijektiv ist. Warum ist f'' bijektiv?

Antwort 102
Thema: Abbildungen

Es gilt: $f \circ g : Y \to Y$ ist definiert durch $(f \circ g)(y) = f(g(y))$ für alle $y \in Y$. Analog ist $g \circ f : X \to X$ definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in X$.

Antwort 101

Thema: Abbildungen

$f \circ g$ ist eine Abbildung von Y nach Y.

Antwort 104
Thema: Abbildungen

Da f injektiv ist, ist auch f'' injektiv. Da $\text{Bild}(f) = \text{Bild}(f'')$, ist f'' auch surjektiv. Es folgt, dass f'' bijektiv ist. Damit ist f'' invertierbar.

Antwort 103

Thema: Abbildungen

1. f ist bijektiv.
2. f ist injektiv und surjektiv.
3. Es gibt eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Frage 105

Thema: Abbildungen

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ Abbildungen. Dann ist $f \circ g \circ h$ definiert.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 106
Thema: Abbildungen

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $f'' : \mathbb{R} \to \mathbb{N}$, $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ Abbildungen. Dann ist $f \circ f'' \circ h$ definiert.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 107
Thema: Abbildungen

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert durch $f((x, y)) = (ax, by)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wenn $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, dann ist f nicht injektiv.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 108
Thema: Abbildungen

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert durch $f((x, y)) = (ax, by)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wenn $a \neq 0$ und $b \neq 0$, dann ist f surjektiv.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Antwort 106
Thema: Abbildungen

Die Aussage ist wahr.

Der Wertebereich vom h ist $\mathbb{R}$, und der Definitionsbereich von f'' ist $\mathbb{R}$. Somit ist $f'' \circ h$ definiert, und der Wertebereich von $f'' \circ h$ ist $\mathbb{N}$. Der Definitionsbereich von f ist $\mathbb{N}$. Da der Definitionsbereich von f und der Wertebereich von $f'' \circ h$ gleich sind, ist $f \circ f'' \circ h$ definiert.

Antwort 105
Thema: Abbildungen

Die Aussage ist falsch.

Der Wertebereich vom h ist $\mathbb{R}$, und der Definitionsbereich von g ist $\mathbb{Z}$. Da diese verschieden sind, ist $g \circ h$ nicht definiert. Es folgt, dass $f \circ g \circ h$ nicht definiert ist.

Antwort 108

Thema: Abbildungen

Die Aussage ist wahr.

Sei $a \neq 0$, und sei $b \neq 0$. Sei $(x, y) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R}$. Setze $(x'', y'') = (\frac{1}{a}x, \frac{1}{b}y)$. Dann gilt $f((x'', y'')) = (x, y)$, und somit hat jedes $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ ein Urbild unter f. Es folgt, dass f surjektiv ist.

Antwort 107
Thema: Abbildungen

Die Aussage ist falsch.

Da in der Mathematik das Wort „oder“ im Sinne von „$a \neq 0$ oder $b \neq 0$ oder beide sind $\neq 0$“ gebraucht wird, ist $a = b = 1$ ein Gegenbeispiel zu der Aussage. In diesem Fall ist f nämlich injektiv.

Frage 109
Thema: Abbildungen

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert durch $f((x, y)) = (ax, by)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wenn f surjektiv ist, dann ist $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 110
Thema: Treppennormalform

Ist die reelle Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ in Treppennormalform?

Hinweis Die Matrix ist nicht in Treppennormalform. Warum nicht?

Frage 111
Thema: Treppennormalform

Wie viele Matrizen in $\mathrm{M}_{n1}(\mathbb{R})$ gibt es, die in Treppennormalform sind?

Hinweis Es gibt zwei Matrizen in $\mathrm{M}_{n1}(\mathbb{R})$, die in Treppennormalform sind. Welche sind das?

Frage 112

Thema: Treppennormalform

Wahr oder falsch? Alle Matrizen in $\mathrm{M}_{1n}(\mathbb{F}_2)$ sind in Treppennormalform.

Hinweis Wahr.

Antwort 110

Thema: Treppennormalform

Die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ ist nicht in Treppennormalform, denn der Eintrag an der Stelle $(1, 2)$ ist $\neq 0$.

Antwort 109
Thema: Abbildungen

Die Aussage ist wahr.

Sei f surjektiv. Wäre $a = 0$, so hätten alle Elemente der Form (x, y) mit $x \neq 0$ keine Urbilder unter f, ein Widerspruch zur Annahme, dass f surjektiv ist. Analog führt die Annahme $b = 0$ zum Widerspruch, es folgt also $a \neq 0$ und $b \neq 0$.

Antwort 112

Thema: Treppennormalform

Die Nullmatrix in $\mathrm{M}_{1n}(\mathbb{F}_2)$ ist nach Definition eine Matrix in Treppennormalform. Ist A nicht in die Nullmatrix, so gibt es einen kleinsten Index i, so dann der Eintrag an der Stelle $(1, i)$ nicht Null ist. Dieser Eintrag muss 1 sein, denn in $\mathbb{F}_2$ gibt es nur die Elemente 0 und 1. Da A nur eine Zeile hat, ist es für die Frage, ob A in Treppennormalform ist oder nicht, irrelevant, wie die Einträge $(1, j)$ mit $j > i$ aussehen. Somit sind alle Matrizen in $\mathrm{M}_{1n}(\mathbb{F}_2)$ in Treppennormalform.

Antwort 111

Thema: Treppennormalform

Es gibt zwei Matrizen in $\mathrm{M}_{n1}(\mathbb{R})$, nämlich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}$.

Frage 113

Thema: Treppennormalform

Ist die reelle Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in Treppennormalform?

Hinweis Nein.

Frage 114

Thema: Treppennormalform

Wahr oder falsch? Ist A eine Matrix in Treppennormalform, und ist die erste Zeile von A eine Nullzeile, dann ist A die Nullmatrix.

Hinweis Wahr.

Frage 115

Thema: Zeilenäquivalenz

Seien $A, B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ invertierbare Matrizen. Warum sind A und B zeilenäquivalent?

Hinweis Welches sind die Treppennormalformen von A und B?

Frage 116

Thema: Treppennormalform

Sei $A \in \mathrm{M}_{64}(\mathbb{K})$. Welches sind die möglichen Ränge von A?

Hinweis Die möglichen Ränge sind 0, 1, 2, 3 und 4. Konstruieren Sie für jeden der möglichen Fälle ein Beispiel.

Antwort 114
Thema: Treppennormalform

Wahr, denn eine Matrix in Treppennormalform, die nicht die nicht die Nullmatrix ist, muss in der ersten Zeile eine Pivot-Position, also einen Eintrag 1 haben.

Antwort 113

Thema: Treppennormalform

Nein, denn wenn eine Matrix, die in Treppennormalform ist, nicht die Nullmatrix ist, dann muss es in der ersten Zeile eine Pivot-Position geben.

Antwort 116
Thema: Treppennormalform

Die möglichen Ränge sind 0, 1, 2, 3 und 4. Die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Rang 0, die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Rang 1, die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Rang 2, die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Rang 3, und die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat den Rang 4.

Antwort 115

Thema: Zeilenäquivalenz

Die Treppennormalform zu A und zu B ist die Einheitsmatrix. Zwei Matrizen sind genau dann zeilenäquivalent, wenn sie dieselbe Treppennormalform haben.

Frage 117

Thema: Treppennormalform

Kann eine 4×5-Matrix A in Treppennormalform die Pivot-Positionen $(2, 1)$ und $(3, 3)$ haben?

Hinweis Nein.

Frage 118

Thema: Treppennormalform

Sei A eine 4×3-Matrix über $\mathbb{R}$ in Treppennormalform mit Pivot-Positionen $(1, 2)$ und $(2, 3)$. Welche Einträge sind 0, welche 1 und welche beliebig?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 119

Thema: Treppennormalform

Sei A eine 4×3-Matrix über $\mathbb{R}$ in Treppennormalform mit Pivot-Positionen $(1,1)$ und $(2,2)$. Welche Einträge sind 0, welche 1 und welche beliebig?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 120

Thema: Treppennormalform

Sei $A \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ invertierbar, und sei $B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Warum haben AB und B dieselbe Treppennormalform?

Hinweis Die Matrix A ist Produkt von Elementarmatrizen.

Antwort 118

Thema: Treppennormalform

Eine solche Matrix hat die Form $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 117

Thema: Treppennormalform

Nein. Die Matrix A ist entweder die Nullmatrix, und dann hat sie keine Pivot-Position, oder sie hat eine Pivot-Position in der ersten Zeile.

Antwort 120

Thema: Treppennormalform

Da A invertierbar ist, gibt es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$, so dass $A = E_1 \ldots E_s$ ist. Es ist also $AB = E_1 \ldots E_s B$, und es folgt, dass AB und B zeilenäquivalent sind. Zeilenäquivalente Matrizen haben aber dieselbe Treppennormalform.

Antwort 119

Thema: Treppennormalform

Eine solche Matrix hat die Form $\begin{pmatrix} 1 & 0 & * \\ 0 & 1 & * \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dabei bezeichnet $*$ eine beliebige reelle Zahl.

Frage 121

Thema: Treppennormalform

Welches sind die Matrizen in $\mathrm{M}_{23}(\mathbb{F}_2)$, die in Treppennormalform sind, und die den Rang 2 haben?

Hinweis Es gibt 7.

Frage 122

Thema: Treppennormalform

Welches sind die Matrizen in $M_{33}(\mathbb{R})$, die in Treppennormalform sind, und die den Rang 3 haben?

Hinweis Es gibt nur eine.

Frage 123

Thema: Treppennormalform

Wie sieht die Treppennormalform einer invertierbaren Matrix aus?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 124

Thema: Zeilenäquivalenz

Gibt es Matrizen, die nur zu sich selbst zeilenäquivalent sind?

Hinweis Ja, gibt es. Und zwar in jeder beliebigen Größe.

Antwort 122

Thema: Treppennormalform

Es gibt nur eine Matrix vom Rang 3 in $\mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$, nämlich die Einheitsmatrix I_3.

Antwort 121

Thema: Treppennormalform

Zunächst gibt es die, deren Pivot-Positionen $(1,1)$ und $(2,2)$ sind: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dann die mit Pivot-Positionen $(1,1)$ und $(2,3)$: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$. Zum Schluss die Matrix mit Pivot-Positionen $(1,2)$ und $(2,3)$: $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Antwort 124

Thema: Zeilenäquivalenz

Wenn A die $m \times n$-Nulllmatrix ist, dann ist A nur zu sich selbst zeilenäquivalent.

Antwort 123

Thema: Treppennormalform

Die Treppennormalform einer invertierbaren $n \times n$-Matrix ist die Einheitsmatrix I_n.

Frage 125

Thema: Zeilenäquivalenz

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und seien $A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Wie können Sie entscheiden, ob A und B zeilenäquivalent sind?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 126

Thema: Zeilenäquivalenz

Sind die reellen Matrizen $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ zeilenäquivalent?

Hinweis Nein.

Frage 127
Thema: Zeilenäquivalenz

Seien $T, T'' \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ Matrizen in Treppennormalform. Wann sind T und T'' zeilenäquivalent?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 128

Thema: Zeilenäquivalenz

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jede Matrix A ist zu $-A$ zeilenäquivalent.

Hinweis Wahr.

Antwort 126

Thema: Zeilenäquivalenz

Nein, denn beide Matrizen sind in Treppennormalform. Zwei Matrizen in Treppennormalform sind genau dann zeilenäquivalent, wenn sie gleich sind.

Antwort 125
Thema: Zeilenäquivalenz

A und B sind genau dann zeilenäquivalent, wenn sie dieselbe Treppennormalform haben. Wir müssen also von A und von B die Treppennormalform ausrechnen und diese vergleichen.

Antwort 128

Thema: Zeilenäquivalenz

Wahr. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Dann gilt $-A = -I_m A$. Die Matrix $-I_m$ ist invertierbar, also Produkt von Elementarmatrizen. Wir können also A durch elementare Zeilenumformungen in $-A$ überführen, was bedeutet, dass A und $-A$ zeilenäquivalent sind.

Antwort 127

Thema: Zeilenäquivalenz

Sie sind genau dann zeilenäquivalent, wenn sie gleich sind.

Frage 129

Thema: Zeilenäquivalenz

Wann werden zwei Matrizen A und B zeilenäquivalent genannt?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 130

Thema: Zeilenäquivalenz

Seien A und B zeilenäquivalente Matrizen. Warum haben A und B denselben Rang?

Hinweis Wie ist der Rang einer Matrix definiert?

Frage 131

Thema: Zeilenäquivalenz

Seien A und B zeilenäquivalente Matrizen. Nennen Sie drei Eigenschaften, die A und B gemeinsam haben..

Hinweis

Frage 132
Thema: Rang

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $\mathrm{Rg}(A) = m$. Dann gilt $m \leq n$.

Hinweis Wahr.

Antwort 130

Thema: Zeilenäquivalenz

A und B haben dieselbe Treppennormalform T. Der Rang einer Matrix ist die Anzahl der Pivot-Positionen ihrer Treppennormalgform, es folgt also $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(B)$.

Antwort 129

Thema: Zeilenäquivalenz

Zwei $m \times n$-Matrizen A und B werden zeilenäquivalent genannt, wenn es endlich viele $m \times m$-Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$ so gibt, dass $A = E_1 \cdots E_s B$ gilt.

Antwort 132

Thema: Rang

Wahr. Der Rang von A ist die Anzahl der Pivot-Positionen in der Treppennormalform von A. Es kann höchstens so viele Pivotpositionen geben, wie A Spalten hat.

Antwort 131
Thema: Zeilenäquivalenz

1. A und B haben dieselbe Anzahl von Zeilen und Spalten.
2. A und B haben denselben Rang.
3. A und B haben dieselbe Treppennormalform.

Frage 133
Thema: Rang

Wie können Sie am Rang einer Matrix $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ entscheiden, ob A invertierbar ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 134

Thema: Rang

Welche Ränge kann eine obere Dreieicksmatrix $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ haben?

Hinweis Alle ganzen Zahlen zwischen 0 und n sind möglich.

Frage 135

Thema: Rang

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $E \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ eine Elementarmatrix. Wie unterscheiden sich die Ränge von A und EA?

Hinweis Gar nicht.

Frage 136

Thema: Rang

Seien A und B $n \times n$-Matrizen. Gilt $\mathrm{Rg}(AB) = \mathrm{Rg}(BA)$?

Hinweis Im Allgemeinen nicht.

Antwort 134
Thema: Rang

Jede ganze Zahl zwischen 0 und n ist möglich. Die Einheitsmatrix I_n ist eine obere Dreiecksmatrix vom Rang n. Verschieben wir die Diagonale um eine Position nach rechts, so erhalten wir $\begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \end{pmatrix}$, und diese Matrix hat den Rang $n-1$. Verschieben wir wieder um eine Position nach rechts, so erhalten wir eine Matrix vom Rang $n-2$ und so weiter. Die $n \times n$-Nullmatrix hat den Rang 0.

Antwort 133
Thema: Rang

Die Matrix A ist genau dann invertierbar, wenn $\mathrm{Rg}(A) = n$ ist

Antwort 136

Thema: Rang

Nein, im Allgemeinen gilt das nicht. Seien etwa $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $AB = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $\mathrm{Rg}(AB) = 1$ und $\mathrm{Rg}(BA) = 0$.

Antwort 135
Thema: Rang

Die Matrizen A und EA sind zeilenäquivalent. Daher haben sie dieselbe Treppennormalform, also auch denselben Rang.

Frage 137
Thema: Rang

Seien A und B $n \times n$-Matrizen. Gilt $\mathrm{Rg}(AB) = \mathrm{Rg}(A)\mathrm{Rg}(B)$?

Hinweis Nein.

Frage 138

Thema: Rang

Seien A und B $n \times n$-Matrizen. Gilt $\mathrm{Rg}(A + B) = \mathrm{Rg}(A) + \mathrm{Rg}(B)$?

Hinweis Nein.

Frage 139
Thema: Invertierbarkeit

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Nennen Sie vier Aussagen, die äquivalent sind zu der Aussage „A ist invertierbar“.

Hinweis Rang und Treppennormalform von A liefern Invertierbarkeitskriterien. Die Definition für Invertierbarkeit können Sie auch nennen.

Frage 140
Thema: Invertierbarkeit

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ eine invertierbare Matrix. Wie würden Sie vorgehen, um A^{-1} zu berechnen?

Hinweis Ohne Hinweis. Dieses Verfahren müssen Sie beherrschen.

Antwort 138

Thema: Rang

Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Beide Matrizen haben den Rang 1. Es ist $A + B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, und diese Matrix hat den Rang 1. Es gilt also $\mathrm{Rg}(A + B) = 1 \neq \mathrm{Rg}(A) + \mathrm{Rg}(B)$.

Antwort 137
Thema: Rang

Nein. Seien $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Beide Matrizen haben den Rang 1. Es ist AB die Nullmatrix, also $\mathrm{Rg}(AB) = 0 \neq \mathrm{Rg}(A)\mathrm{Rg}(B)$.

Antwort 140
Thema: Invertierbarkeit

Wir schreiben A und I_n in eine Matrix, getrennt durch einen Strich. Dann überführen wir A durch elementare Zeilenumformungen in die Einheitsmatrix, wobei wir dieselben elementaren Zeilenumformungen auf I_n anwenden. Wenn A in I_n überführt ist, steht rechts des Striches die Matrix A^{-1}.

Antwort 139
Thema: Invertierbarkeit

1. Es gibt eine Matrix $\in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ mit $AB = BA = I_n$.
2. Die Treppennormalform von A ist die Einheitsmatrix.
3. Der Rang von A ist n.
4. A ist Produkt von Elementarmatrizen.
5. Das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ mit $b \in \mathrm{M}_{n1}(\mathbb{K})$ hat genau eine Lösung.

Frage 141

Thema: Invertierbarkeit

Listen Sie alle invertierbaren Matrizen in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{F}_2)$ auf.

Hinweis Hier brauchen Sie alle Matrizen vom Rang 2. Davon gibt es 6 Stück.

Frage 142

Thema: Invertierbarkeit

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{R})$ eine invertierbare obere Dreiecksmatrix. Warum müssen die Diagonalelemente $\neq 0$ sein?

Hinweis Nehmen Sie an, ein Diagonaleintrag wäre 0. Was für Auswirkungen hat das auf die Treppennormalform von A?

Frage 143

Thema: Invertierbarkeit

Seien A und B invertierbare $n \times n$-Matrizen. Wie sieht $(AB)^{-1}$ aus?

Hinweis Was ist der inverse Vorgang von „Einsteigen und Türen schließen“?

Frage 144
Thema: Invertierbarkeit

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ invertierbar. Wie sieht $(A^{-1})^{-1}$ aus?

Hinweis Was müssen Sie von links und rechts mit A^{-1} multiplizieren, damit die Einheitsmatrix raus kommt?

Antwort 142

Thema: Invertierbarkeit

Nehmen wir an, der Eintrag a_{ii} an der Stelle (i,i) wäre 0. Dann können wir durch elementare Zeilenumformungen die Position (i,i) nicht zu einer Pivot-Position machen. Die Treppennormalform von A ist daher nicht die Einheitsmatrix, und es folgt, dass A nicht invertierbar ist.

Antwort 141
Thema: Invertierbarkeit

Die Matrizen in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{F}_2)$ sind $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. Dies sind alle invertierbaren Matrizen in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{F}_2)$.

Antwort 144

Thema: Invertierbarkeit

Es ist $(A^{-1})^{-1} = A$.

Antwort 143

Thema: Invertierbarkeit

Es ist $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.

Frage 145

Thema: Invertierbarkeit

Sei A eine quadratische Matrix mit Nullzeile. Warum kann A nicht invertierbar sein?

Hinweis Nehmen Sie an, A hätte eine Nullzeile. Multiplizieren Sie dann A mit einer weiteren Matrix B. Kann $AB = I_n$ sein?

Frage 146
Thema: Invertierbarkeit

Sei A eine quadratische Matrix mit Nullspalte. Warum kann A nicht invertierbar sein?

Hinweis Nehmen Sie an, A hätte eine Nullspalte. Multiplizieren Sie dann A von links mit einer weiteren Matrix B. Kann $BA = I_n$ sein?

Frage 147
Thema: Invertierbarkeit

Sei A eine quadratische Matrix, für die $A \cdot A$ die Nullmatrix ist. Warum ist A nicht invertierbar?

Hinweis Nehmen Sie an, A wäre invertierbar. Multiplizieren Sie $A \cdot A$ mit $A^{-1} \cdot A^{-1}$

Frage 148

Thema: Invertierbarkeit

Sei A eine invertierbare $n \times n$-Matrix mit $AA = A$. Warum muss $A = I_n$ gelten?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 146
Thema: Invertierbarkeit

Sei A eine $n \times n$-Matrix, deren i-te Spalte eine Nullspalte ist. Sei B eine beliebige $n \times n$-Matrix. Dann ist die i-te Spalte von BA eine Nullspalte. Das bedeutet, dass es keine Matrix B mit $BA = I_n$ gibt, dass A also nicht invertierbar ist.

Antwort 145
Thema: Invertierbarkeit

Sei A eine $n \times n$-Matrix, deren i-te Zeile eine Nullzeile ist. Sei B eine beliebige $n \times n$-Matrix. Die i-te Zeile von AB ist eine Nullzeile. Das bedeutet, dass es keine Matrix B mit $AB = I_n$ gibt, dass A also nicht invertierbar ist.

Antwort 148
Thema: Invertierbarkeit

Wir multiplizieren die Gleichung $AA = A$ mit A^{-1} und erhalten $A^{-1}AA = A^{-1}A$, also $A = I_n$.

Antwort 147

Thema: Invertierbarkeit

Angenommen, A wäre eine invertierbare $n \times n$-Matrix. Dann gilt $A^{-1}A^{-1}AA = A^{-1}I_nA = I_n$. Da aber $AA = 0$ ist, gilt auch $A^{-1}A^{-1}AA = A^{-1}A^{-1}0 = 0$, ein Widerspruch. Unsere Annahme, A sei invertierbar, ist also falsch, und es folgt, dass A nicht invertierbar ist.

Frage 149
Thema: Gaußalgorithmus

Was ist der Input und was der Output des Gaußalgorithmus?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 150

Thema: Gaußalgorithmus

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei T die Treppennormalform von A. Angenommen, Sie müssten eine invertierbare Matrix S bestimmen, so dass $SA = T$ gilt. Wie würden Sie vorgehen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 151

Thema: Gaußalgorithmus

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$. Welche elementare Zeilenumformung sollten Sie laut Gaußalgorithmus jetzt machen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 152

Thema: Gaußalgorithmus

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Welche elementare Zeilenumformung sollten Sie laut Gaußalgorithmus jetzt machen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 150
Thema: Gaußalgorithmus

Wir schreiben die Einheitsmatrix I_m rechts neben A in eine Matrix, durch einen Strich getrennt. Dann überführen wir A mit Hilfe des Gaußalgorithmus in Treppennormalform, wobei wir dieselben elementaren Zeilenumformungen simultan auf I_n anwenden. Wenn A in Treppennormalform ist, dann steht rechts des Strichs die gesuchte Matrix S.

Antwort 149
Thema: Gaußalgorithmus

Der Input ist eine $m \times n$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$, und der Output ist die Treppennormalform von A.

Antwort 152
Thema: Gaußalgorithmus

Wir subtrahieren das Dreifache der zweiten Zeile von der ersten.

Antwort 151

Thema: Gaußalgorithmus

Die zweite und dritte Zeile sollten vertauscht werden.

Frage 153

Thema: Gaußalgorithmus

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 7 & 8 \end{pmatrix}$. Welche elementare Zeilenumformung sollten Sie laut Gaußalgorithmus jetzt machen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 154

Thema: Gaußalgorithmus

Der Gaußalgorithmus funktioniert für Matrizen über beliebigen Körpern, also auch für Matrizen über $\mathbb{F}_2$. Auf welche elementare Zeilenumformung kann der Gaußalgorithmus bei Matrizen über $\mathbb{F}_2$ verzichten?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 155

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{K}$. Wann existiert genau eine Lösung?

Hinweis Der Rang von A entscheidet über diese Frage.

Frage 156

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{K}$. Wann existiert mindestens eine Lösung?

Hinweis Diese Frage entscheidet der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix.

Antwort 154

Thema: Gaußalgorithmus

Auf die Multiplikation von Zeilen mit einem Skalar $\neq 0$. In $\mathbb{F}_2$ wäre das eine Multiplikation mit 1, und auf die können wir verzichten.

Antwort 153
Thema: Gaußalgorithmus

Wir teilen die Einträge in der dritten Zeile durch 7.

Antwort 156

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Es existiert mindestens eine Lösung, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A'')$ ist. Dabei bezeichnet A'' die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Antwort 155

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Es existiert genau eine Lösung, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A'') = n$ ist. Dabei bezeichnet A'' die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Frage 157

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{K}$. Wann existiert keine Lösung des linearen Gleichungssystems?

Hinweis Entscheidend ist der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix.

Frage 158

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{K}$. Sei λ eine Lösung von $Ax = b$. Beschreiben Sie die Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems.

Hinweis Die Lösungsmenge des zugehörigen homogenen Systems wird gebraucht.

Frage 159

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei K ein Körper. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(K)$, und sei $Ax = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem über K. Sei B eine zu A zeilenäquivalente Matrix. Wie unterscheiden sich die Lösungen von $Ax = 0$ und $Bx = 0$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 160

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Warum hat ein homogenes lineares Gleichungssystem immer eine Lösung?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 158

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $\mathcal{L}$ die Lösungsmenge von $Ax = b$. Sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$. Dann gilt $\mathcal{L} = \lambda + \mathcal{U}$.

Antwort 157

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Es existiert keine Lösung, wenn $\mathrm{Rg}(A) < \mathrm{Rg}(A'')$ ist. Dabei bezeichnet A'' die erweiterte Koeffizientenmatrix.

Antwort 160

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $Ax = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem. Dann ist $\lambda = 0$ immer eine Lösung des Gleichungssystems.

Antwort 159

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Die Lösungsmengen der Gleichungssysteme sind gleich.

Frage 161

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem über $\mathbb{K}$. Sei $\mathrm{Rg}(A) = r$. Sei A'' die erweiterte Koeffizientenmatrix von $Ax = b$. Welche Ränge kann A'' haben?

Hinweis Wie viele zusätzliche Pivot-Positionen können Sie durch Hinzufügen einer weiteren Spalte erzeugen?

Frage 162

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Geben Sie ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem, das keine Lösungen besitzt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 163

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Geben Sie ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem, das genau eine Lösung besitzt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 164

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Geben Sie ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem, das mehr als eine aber nur endlich viele Lösungen besitzt.

Hinweis Hier sollte das lineare Gleichungssystem über $\mathbb{F}_2$ definiert sein.

Antwort 162

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Das lineare Gleichungssystem $0 \cdot x = 1$ besitzt keine Lösungen.

Antwort 161

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Die Matrix A'' kann den Rang r oder den Rang $r+1$ haben. Um dies zu sehen, überführen wir A'' mit dem Gaußalgorithmus in Treppennormalform T. Dann sind die ersten n Spalten von T die Treppennormalform von A. Ist in der letzten Spalte von T eine Pivot-Position, so gilt $\mathrm{Rg}(A'') = r+1$. Ist in der letzten Spalte keine Pivot-Position, so gilt $\mathrm{Rg}(A'') = r$.

Antwort 164

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{12}(\mathbb{F}_2)$. Die Matrix A ist bereits in Treppennormalform. Das homogene lineare Gleichungssystem $Ax = 0$ hat genau zwei Lösungen, nämlich $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Antwort 163

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Das lineare Gleichungssystem $x = 1$ besitzt genau eine Lösung.

Frage 165

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Geben Sie ein Beispiel für ein lineares Gleichungssystem, das unendlich viele Lösungen besitzt.

Hinweis Ohne Hinweis

Frage 166

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Beschreiben Sie den Algorithmus zum Lösen linearer Gleichungssysteme $Ax = b$.

Hinweis Schlagen Sie bitte im Studienbrief nach.

Frage 167

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Beschreiben Sie den Algorithmus zum Lösen homogener linearer Gleichungssysteme $Ax = 0$.

Hinweis Schlagen Sie bitte im Studienbrief nach.

Frage 168

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Wann wird ein lineares Gleichungssystem homogen genannt?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 166
Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

Wir bilden die erweiterte Koeffizientenmatrix $A'' = \left(\begin{array}{c|c} A & b \end{array}\right)$ und überführen A'' in Treppennormalform. Ist $\mathrm{Rg}(A) < \mathrm{Rg}(A'')$, so hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Sei im Folgenden $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A'')$.

Wir streichen alle Nullzeilen in der Treppennormalform zu A''.

Wir fügen Nullzeilen so ein, dass die Matrix links des Striches quadratisch ist, und die Pivotelemente auf der Diagonalen stehen.

Rechts des Striches finden wir eine spezielle Lösung λ von $Ax = b$.

Wir ersetzen die Nullelemente auf der Diagonalen durch -1.

Seien $S_1 \ldots, S_t$ die Spalten, in denen wir -1 eingesetzt haben. Dann ist

$$\mathcal{U} = \{a_1 S_1 + \cdots + a_t S_t \mid a_1, \ldots, a_t \in \mathbb{K}\}$$

die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$, und es ist $\mathcal{L} = \lambda + \mathcal{U}$ die Lösungsmenge von $Ax = b$.

Antwort 165

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{12}(\mathbb{R})$. Die Matrix A ist bereits in Treppennormalform. Das homogene lineare Gleichungssystem hat die Lösungsmenge

$$\mathcal{U} = \{a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}.$$

Antwort 168

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = 0$ wird homogen genannt. Dabei ist A eine $m \times n$-Matrix, x eine $n \times 1$-Matrix über einem Körper $\mathbb{K}$ und 0 eine $m \times 1$-Matrix, deren Einträge alle 0 sind.

Antwort 167

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Sei $Ax = 0$ ein homogenes lineares Gleichungssystem. Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

Wir überführen A in Treppennormalform T und streichen alle Nullzeilen in T.

Wir fügen in T Nullzeilen so ein, dass die Matrix quadratisch ist, und die Pivotelemente auf der Diagonalen stehen.

Wir ersetzen die Nullelemente auf der Diagonalen durch -1.

Seien $S_1 \ldots, S_t$ die Spalten, in denen wir -1 eingesetzt haben. Dann ist

$$\mathcal{U} = \{a_1 S_1 + \cdots + a_t S_t \mid a_1, \ldots, a_t \in \mathbb{K}\}$$

die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$.

Frage 169

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Wann wird ein lineares Gleichungssystem inhomogen genannt?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 170

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Was ist die Koeffizientenmatrix und was die erweiterte Koeffizientenmatrix des folgenden linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$?

$$\begin{array}{ccccccc}
x_1 & & & + & 2x_3 & = & 4 \\
 & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\
x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 6
\end{array}$$

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 171

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Wie lautet die Lösungsmenge $\mathcal{U}$ des homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ über $\mathbb{R}$, wobei A die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist?

Hinweis Die Matrix A ist bereits in Treppennormalform.

Frage 172
Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Wie lautet eine spezielle Lösung des inhomogenen linearen Gleichungssystems $Ax = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$ über $\mathbb{R}$, wobei A die Matrix $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ ist?

Hinweis Die Matrix A ist bereits in Treppennormalform.

Antwort 170

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Die Koeffizientenmatrix ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -2 & 2 \end{pmatrix}$, und die erweiterte Koeffizientenmatrix ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \\ 4 & -2 \end{pmatrix}$

Antwort 169

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Ein lineares Gleichungssystem der Form $Ax = b$ mit $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ und $b \in \mathrm{M}_{m1}(\mathbb{K})$ wird inhomogen genannt, wenn es Einträge in b gibt, die nicht 0 sind.

Antwort 172

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Eine spezielle Lösung ist $\lambda_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 171

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Es ist $\mathcal{U} = \left\{ a \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \mid a, b \in \mathbb{R} \right\}$.

Frage 173

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Sei $T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Hat das lineare Gleichungssystem $Tx = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ eine Lösung?

Hinweis Nein.

Frage 174

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ eine Matrix, und seien $b, b'' \in \mathrm{M}_{m1}(\mathbb{K})$.

Ist es möglich, dass $Ax = b$ keine Lösung hat, und $Ax = b''$ genau eine Lösung hat?

Hinweis Ja.

Frage 175

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ eine Matrix, und seien $b, b'' \in \mathrm{M}_{m1}(\mathbb{R})$.

Ist es möglich, dass $Ax = b$ genau eine Lösung hat, und $Ax = b''$ unendlich viele Lösungen hat?

Hinweis Nein.

Frage 176

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{R})$ eine Matrix, und seien $b, b'' \in \mathrm{M}_{m1}(\mathbb{R})$. Wie viele Lösungen hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b + b''$, wenn die linearen Gleichungssysteme $Ax = b$ und $Ax = b''$ beide unendlich viele Lösungen haben?

Hinweis Unendlich viele.

Antwort 174

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Ja. Sei zum Beispiel $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, und seien $b = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $b'' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. Sei A'' die erweiterte Koeffizientenmatrix von $Ax = b$, und sei $\tilde{A}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix von $Ax = b''$. Der Rang von A ist zwei, der Rang von A'' ist drei und der von $\tilde{A}$ ist 2. Somit hat das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ keine Lösung, und das lineare Gleichungssystem $Ax = b''$ hat mindestens eine Lösung. Da der Rang von A zwei ist, hat $Ax = b''$ genau eine Lösung.

Antwort 173

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Die Matrix T ist die Koeffizientenmatrix des linearen Gleichungssystems. Der Rang von T ist 2, und der Rang der erweiterten Koeffizientenmatrix $T'' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & | & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & | & 3 \end{pmatrix}$ ist 3. Da die Ränge von T und T'' verschieden sind, hat das lineare Gleichungssystem keine Lösung.

Antwort 176

Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei $\mathcal{L}$ die Lösungsmenge von $Ax = b$, und sei $\mathcal{L}''$ die Lösungsmenge von $Ax = b$. Sei $\lambda \in \mathcal{L}$ und $\lambda'' \in \mathcal{L}''$. Dann gilt $A(\lambda + \lambda'') = A\lambda + A\lambda'' = b + b''$. Somit ist $\lambda + \lambda''$ eine Lösung von $Ax = b + b''$. Sei nun $\lambda_0 \in \mathcal{L}$ fest gewählt. Dann ist $\{\lambda_0 + \lambda'' \mid \lambda'' \in \mathcal{L}\}$ eine unendliche Menge von Lösungen von $Ax = b + b''$.

Antwort 175
Thema: Struktur der Lösungsmenge

Sei A'' die erweiterte Koeffizientenmatrix von $Ax = b$, und sei $\tilde{A}$ die erweiterte Koeffizientenmatrix von $Ax = b''$. Da beide linearen Gleichungssysteme Lösungen haben, gilt $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(A'') = \mathrm{Rg}(\tilde{A})$. Da $Ax = b$ genau eine Lösung hat, gilt $\mathrm{Rg}(A) = n$. Dann muss aber auch $Ax = b''$ genau eine Lösung haben.

Frage 177

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

Was ist das zugehörige homogene lineare Gleichungssystem des inhomogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{array}{ccccccccc}
x_1 & & & + & 2x_3 & = & 4 \\
& & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 5 \\
x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\
4x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 2
\end{array}$$

Hinweis Ohne Hinweis

Frage 178
Thema: Unterräume

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei $A_0 \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ eine fest gewählte Matrix. Sei

$$M = \{X \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K}) \mid X = A_0 Y \text{ für eine Matrix } Y \in \mathrm{M}_{nn}(\mathrm{K})\}.$$

Ist M ein Unterraum von $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$?

Hinweis Ja. Zum Beweis benutzen Sie das Unterraumkriterium.

Frage 179
Thema: Definition VR

Sei V ein Vektorraum, und sei U ein Unterraum von V. Warum ist $V \setminus U$ niemals ein Unterraum von V?

Hinweis Enthält $V \setminus U$ das Nullelement?

Frage 180
Thema: Definition VR

Kann es einen Vektorraum über $\mathbb{R}$ geben, der nicht $\{0\}$ ist, und der endlich viele Elemente enthält?

Hinweis Nein. Aber warum nicht?

Antwort 178
Thema: Unterräume

Ja. Wir benutzen zum Beweis das Unterraumkriterium.

Die Nullmatrix $0 \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$ liegt in M, denn sie ist von der Form $0 = A_0 0$. Somit ist die erste Bedingung des Unterraumkriteriums erfüllt.

Wenn X_1 und X_2 Matrizen in M sind, so sind sie von der Form A_0Y_1 und A_0Y_2 für zwei Matrizen Y_1 und Y_2 in $\mathrm{M}_{nn}(\mathrm{K})$. Dann gilt

$$X_1 + X_2 = A_0Y_1 + A_0Y_2 = A_0(Y_1 + Y_2).$$

Die Matrix $Y_1 + Y_2$ liegt in $\mathrm{M}_{nn}(\mathrm{K})$, und es folgt, dass $X_1 + X_2 = A_0(Y_1 + Y_2)$ in M liegt. Damit ist die zweite Bedingung des Unterraumkriteriums erfüllt.

Sei a ein Skalar in $\mathbb{K}$, und sei X eine Matrix in M. Dann gilt $X = A_0Y$ für eine Matrix Y in $\mathrm{M}_{nn}(\mathrm{K})$. Es folgt $aX = aA_0Y = A_0(aY)$. Die Matrix aY liegt in $\mathrm{M}_{nn}(\mathrm{K})$, und somit gilt $aX = A_0(aY) \in M$. Damit ist auch die dritte Bedingung für das Unterraumkriterium erfüllt.

Es folgt, dass M ein Unterraum von $\mathrm{M}_{nn}(\mathrm{K})$ ist.

Antwort 177

Thema: Berechnung der Lösungsmenge

$$\begin{array}{rcrcrcl} x_1 & & & + & 2x_3 & = & 0 \\ & & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 0 \\ x_1 & - & x_2 & & & = & 0 \\ 4x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 0 \end{array}$$

Antwort 180
Thema: Definition VR

Nein. Wenn $V \neq \{0\}$ ist, dann gibt es einen Vektor $v \neq 0$. Für alle $a \in \mathbb{R}$ ist av ebenfalls ein Vektor in V. Da wir unendlich viele Skalare in $\mathbb{R}$ haben, gibt es also unendlich viele Vektoren in V.

Antwort 179
Thema: Definition VR

Jeder Vektorraum muss ein Nullelement besitzen. Die Nullelemente in U und V sind gleich, somit enthält $V \setminus U$ kein Nullelement. Es folgt, dass $V \setminus U$ kein Vektorraum sein kann.

Frage 181
Thema: Definition VR

Kann es Vektorräume geben, die nicht $\{0\}$ sind, und die endlich viele Elemente haben?

Hinweis Ja. Versuchen Sie, ein Beispiel zu konstruieren.

Frage 182

Thema: Definition VR

Warum ist $\mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ aber $\mathbb{Q}$ kein Vektorraum über $\mathbb{R}$?

Hinweis Problematisch ist die Skalarmultiplikation.

Frage 183
Thema: Definition VR

Ist die Skalarmultiplikation auf einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V eine Verknüpfung auf V?

Hinweis In der Regel nicht.

Frage 184

Thema: Definition VR

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $V \neq \{0\}$ und $V \neq \mathbb{K}$. Interpretieren Sie die Gleichung $0(x + y) = 0$ in V. Welche Größen sind Skalare, welche Vektoren?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 182
Thema: Definition VR

Problematisch sind nur die Regeln, bei denen die Skalarmultiplikation involviert ist. Wenn wir eine rationale Zahl und eine reelle miteinander multiplizieren, dann ist das Ergebnis eine reelle Zahl. Somit ist die Skalarmultiplikation eine Abbildung von $\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, die alle Regeln der Skalarmultiplikation erfüllt, die in einem Vektorraum erfüllt sein müssen. Das bedeutet, dass $\mathbb{R}$ ein Vektorraum über $\mathbb{Q}$ ist. Die Skalarmultiplikation ist aber keine Abbildung von $\mathbb{R} \times \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$. Damit kann $\mathbb{Q}$ kein Vektorraum über $\mathbb{R}$ sein.

Antwort 181
Thema: Definition VR

Ja. Der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2^2$ hat zum Beispiel vier Elemente.

Antwort 184

Thema: Definition VR

Die 0 vor der Klammer ist der Skalar $0 \in \mathbb{K}$, denn eine Multiplikation von Vektoren in einem Vektorraum ist nicht nicht definiert. Die 0 rechts des Gleichheitszeichens ist das Nullelement in V. Da links des Gleichheitszeichens dann auch ein Vektor stehen muss, sind x und y Vektoren.

Antwort 183
Thema: Definition VR

Wenn V nicht gerade $\mathbb{K}$ ist, dann ist die Skalarmultiplikation keine Verknüpfung auf V. Eine Verknüpfung auf V ist eine Abbildung von $V \times V$ nach V, und ein Skalarprodukt ist eine Abbildung von $\mathbb{K} \times V$ nach V.

Frage 185

Thema: Definition VR

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $V \neq \{0\}$ und $V \neq \mathbb{K}$. Seien $v, w \in V$. Kann $v \cdot w$ gebildet werden?

Hinweis Nein.

Frage 186
Thema: Definition VR

Wie lauten die Distributivgesetze in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V? Welche Größen sind Skalare, welche Vektoren?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 187

Thema: Definition VR

Muss es in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V ein neutrales Element 1 der Multiplikation geben?

Hinweis Nein.

Frage 188

Thema: Definition VR

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Kann es passieren, dass Vektoren Skalare sind.

Hinweis Ja, aber das ist selten.

Antwort 186
Thema: Definition VR

1. $(a+b)v = av + bv$
2. $a(v+w) = av + aw$

Diese Gleichungen müssen für alle Skalare $a, b \in \mathbb{K}$ und alle Vektoren $v, w \in V$ erfüllt sein.

Antwort 185

Thema: Definition VR

Nein, eine Multiplikation von Vektoren ist nicht definiert.

Antwort 188
Thema: Definition VR

Wenn $V = \mathbb{K}$ ist, dann ist V ein Vektorraum, bei dem alle Vektoren Skalare sind.

Antwort 187
Thema: Definition VR

Nein. Eine Multiplikation von Vektoren ist in einem Vektorraum nicht definiert. Daher gibt es auch kein neutrales Element der Multiplikation. Wir können zwar einen Vektor mit 1 multiplizieren, aber diese 1 ist der Skalar $1 \in \mathbb{K}$, und der liegt (außer $\mathbb{K} = V$) gar nicht in V.

Frage 189

Thema: Unterräume

Sei V ein Vektorraum, und seien U und W Unterräume von V. Ist $U \cup W$ eine Teilmenge von $U + W$?

Hinweis Ja.

Frage 190

Thema: Unterräume

Sei V ein Vektorraum, und seien U und W Unterräume von V. Ist $U + W$ eine Teilmenge von $U \cup W$?

Hinweis Nein, in der Regel nicht.

Frage 191
Thema: Unterräume

Sei V ein Vektorraum, und seien U und W Unterräume von V. Kann $U \cap W$ die leere Menge sein?

Hinweis Nein.

Frage 192

Thema: Unterräume

Wie lautet das Unterraumkriterium? Warum ist das Unterraumkriterium so nützlich?

Hinweis Das Unterraumkriterium erspart uns viel Rechnerei.

Antwort 190
Thema: Unterräume

Nein, und am besten sieht man das in einem Beispiel. Sei $V = \mathbb{R}^2$. Ein Unterraum ist beispielsweise $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle$, die x-Achse, und ein weiterer $W = \left\langle \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$, die y-Achse. Geometrisch besteht $U \cup W$ dann aus der x-Achse und aus der y-Achse. Nehmen wir den Vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U$ und den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in W$. Die Summe dieser Vektoren ist $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, und dieser Vektor liegt nicht in $U \cup W$, denn er liegt weder in U noch in W. Aber $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegt in $U + W$, und dies zeigt, dass $U + W$ keine Teilmenge von $U \cup W$ ist

Antwort 189
Thema: Unterräume

Nach Definition ist $U \cap W$ die Menge der Vektoren, die in U oder in V (oder in beiden) liegen. Die Menge $U + W$ enthält alle Vektoren der Form $u + w$ mit $u \in U$ und $w \in W$. Damit enthält $U + W$ alle Vektoren in $u \in U$, denn diese sind von der Form $u + 0$, wobei $0 \in W$ ist, und auch alle Vektoren $w \in W$, denn diese sind von der Form $0 + w$, $0 \in U$. Es gilt also $U \cup W \subseteq U + W$.

Antwort 192
Thema: Unterräume

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Eine Teilmenge U von V ist genau dann ein Unterraum von V, wenn die folgenden drei Bedingungen erfüllt sind:

1. $0 \in U$.
2. Für alle $u, u'' \in U$ gilt $u + u'' \in U$.
3. Für alle $a \in \mathbb{K}$ und alle $u \in U$ gilt $au \in U$.

Um zu beweisen, dass U ein Unterraum von V ist, müssen wir zeigen, dass U mit der Addition und Skalarmultiplikation in V ein Vektorraum ist. Dafür sind viele Axiome zu verifizieren. Das Unterraumkriterium sichert, dass wir nur drei Bedingungen überprüfen müssen.

Antwort 191

Thema: Unterräume

Nein, denn sowohl U als auch W enthalten das Nullelement in V. Es ist also immer $0 \in U \cap W$.

Frage 193

Thema: Unterräume

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und seien U und W Unterräume von V. Angenommen, Sie müssten beweisen, dass $U \cap W$ ein Vektorraum ist, und Sie dürften nicht in den Studienbrief schauen. Was wäre die erste Zeile Ihres Beweises?

Hinweis Was verwenden Sie zum Beweis?

Frage 194

Thema: Unterräume

Geben Sie ein Beispiel für eine Teilmenge U von $\mathbb{R}^2$, so dass U unendlich viele Elemente enthält, und U kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

Hinweis Welcher Vektor muss immer in einem Unterraum liegen?

Frage 195
Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei U ein Unterraum von V. Wenn $u \in U$ und $v \notin U$, so folgt $u - v \notin U$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 196
Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei U ein Unterraum von V. Wenn $u, v \in V$, $u \notin U$ und $v \notin U$, so gilt $u - v \notin U$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Antwort 194

Thema: Unterräume

Sei $U = \{\begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R}\}$. Da der erste Eintrag in den Vektoren in U immer 1 ist, enthält U nicht den Nullvektor. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

Antwort 193

Thema: Unterräume

Wir verwenden das Unterraumkriterium.

Antwort 196
Thema: Unterräume

Die Aussage ist falsch.

Sei etwa $V = \mathbb{R}^2$, und sei $U = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$. Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, und sei $v = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. Dann gilt $u, v \notin U$, aber $u - v \in U$.

Antwort 195
Thema: Unterräume

Die Aussage ist wahr.

Sei $u \in U$, und sei $v \notin U$. Angenommen, es gilt $u - v = w \in U$. Dann folgt $-w \in U$, also $u - w = v \in U$. Dies ist ein Widerspruch zu unserer Annahme.

Frage 197
Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

$\mathbb{F}_2$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 198

Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 = x_2 = \cdots = x_n \right\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 199

Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0 \right\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 200
Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2 \leq 1 \right\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Antwort 198
Thema: Unterräume

Die Aussage ist wahr.

Zum Beweis benutzen wir das Unterraumkriterium. Die Menge U enthält den Nullvektor, denn dessen Einträge sind alle gleich. Seien $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$ Vektoren in U. Dann gilt $\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix} \in U$, denn $x_1 + y_1 = \cdots = x_n + y_n$. Sei $a \in \mathbb{R}$. Es ist $a \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax_1 \\ \vdots \\ ax_n \end{pmatrix} \in U$, denn $ax_1 = \cdots = ax_n$. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

Antwort 197
Thema: Unterräume

Die Aussage ist falsch.

Es ist $1+1=0$ in $\mathbb{F}_2$, aber $1+1=2\neq 0$ in $\mathbb{R}$. Die Verknüpfung $+$ in $\mathbb{F}_2$ ist also eine andere als die Verknüpfung $+$ in $\mathbb{R}$.

Antwort 200
Thema: Unterräume

Die Aussage ist falsch.

Sei etwa $n = 2$. Dann liegt $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ in U, aber $x + x = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ liegt nicht in U. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U kein Unterraum von $\mathbb{R}^2$ ist.

Antwort 199
Thema: Unterräume

Die Aussage ist wahr.

Die Menge U ist die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ und somit ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Frage 201

Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid 2x_1 + x_2 = 0 \right\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 202
Thema: Unterräume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Teilmenge $U = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \mid 2x_1 + x_2 - 1 = 0 \right\}$ von $\mathbb{R}^n$ ist ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 203

Thema: Definition VR

Kann es einen Vektorraum über $\mathbb{F}_2$ geben, der unendlich viele Elemente besitzt?

Hinweis Ja.

Frage 204

Thema: Definition VR

Warum ist die Lösungsmenge eines inhomogenen linearen Gleichungssystems kein Vektorraum?

Hinweis Welches Element muss immer in einem Vektorraum liegen?

Antwort 202
Thema: Unterräume

Die Aussage ist falsch.

Der Nullvektor liegt nicht in U. Mit dem Unterraumkriterium folgt, dass U kein Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist.

Antwort 201
Thema: Unterräume

Die Aussage ist wahr.

Die Menge U ist die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems über $\mathbb{R}$ und somit ein Unterraum von $\mathbb{R}^n$.

Antwort 204
Thema: Definition VR

Bei einem inhomogenen linearen Gleichungssystem ist der Nullvektor keine Lösung. Der Nullvektor muss aber in jedem Vektorraum enthalten sein.

Antwort 203

Thema: Definition VR

Der Vektorraum $\mathbb{F}_2[T]$ hat unendlich viele Elemente.

Frage 205
Thema: Definition VR

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Nennen Sie drei Beispiele für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum V, der nicht von der Form $\mathbb{K}^n$ ist, für ein $n \in \mathbb{N}$.

Hinweis Ohne Hinweis

Frage 206

Thema: Erzeugendensystem

Sei V ein Vektorraum über $\mathbb{R}$. Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Bilden Sie irgendeine Linearkombination der Vektoren v_1, v_2, v_3.

Hinweis Der Begriff der Linearkombination ist wichtig. Schauen Sie im Studienbrief nach.

Frage 207

Thema: Erzeugendensystem

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Bilden Sie ein Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$, die den Nullvektor in V ergibt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 208

Thema: Erzeugendensystem

Sei $U = \langle 1, 1+T, 2T+T^2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[T]$. Liegt $2+T$ in U?

Hinweis Ja.

Antwort 206

Thema: Erzeugendensystem

Eine Möglichkeit wäre: $2v_1 - 7v_3$ (dabei schreibt man den Summanden $0v_2$ nicht hin.

Antwort 205
Thema: Definition VR

1. Der Vektorraum $\mathbb{K}[T]$ der Polynome über $\mathbb{K}$.
2. Der Vektorraum $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ der $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$.
3. Die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems $x_1 + x_2 + \cdots + x_n = 0$ über $\mathbb{K}$.

Antwort 208

Thema: Erzeugendensystem

Wir müssen zeigen, dass $2 + T$ eine Linearkombination der Polynome $1, 1 + T, 2T + T^2$ ist. Dies ist der Fall, denn $2 + T = 1 + (1 + T)$.

Antwort 207

Thema: Erzeugendensystem

Es ist $\sum_{i=1}^{n} 0 \cdot v_i = 0$.

Frage 209

Thema: Erzeugendensystem

Sei $U = \langle 1, 1+T, 2T+T^2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[T]$. Liegt $1+2T$ in U?

Hinweis Ja.

Frage 210

Thema: Erzeugendensystem

Sei $U = \langle 1, 1+T, 2T+T^2 \rangle \subseteq \mathbb{R}[T]$. Liegt T^2 in U?

Hinweis Ja.

Frage 211

Thema: Erzeugendensystem

Geben Sie ein Beispiel für einen $\mathbb{K}$-Vektorraum, der nicht endlich erzeugt ist.

Hinweis Denken Sie an Polynome.

Frage 212

Thema: Erzeugendensystem

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Jeder endlich erzeugter Vektorraum hat nur endlich viele Unterräume.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Antwort 210
Thema: Erzeugendensystem

Wir müssen zeigen, dass $1 + 2T$ eine Linearkombination der Polynome $1, 1 + T, 2T + T^2$ ist. Dies ist der Fall, denn $T^2 = (2T+T^2)-2((1+T)-1)$, also $T^2 = 2\cdot 1-2(1+T)+1(2T+T^2)$.

Antwort 209

Thema: Erzeugendensystem

Wir müssen zeigen, dass $1 + 2T$ eine Linearkombination der Polynome $1, 1 + T, 2T + T^2$ ist. Dies ist der Fall, denn $1 + 2T = 2(1 + T) - 1$, formal: $1 + 2T = (-1) \cdot 1 + 2(1 + T)$.

Antwort 212

Thema: Erzeugendensystem

Die Aussage ist falsch. Betrachten wir etwa den Vektorraum $V = \mathbb{R}^2$ und stellen wir ihn uns vor als Ebene, versehen mit einem Koordinatensystem. Dann ist V endlich erzeugt. Ein Vektorraum der Dimension 1 ist eine Gerade durch den Koordinatenursprung (denn er ist von der Form $\langle v \rangle$ für ein $v \neq 0$). Da es unendlich viele Geraden durch den Koordinatenursprung gibt, gibt es auch unendlich viele Unterräume von V.

Antwort 211

Thema: Erzeugendensystem

Der Vektorraum $\mathbb{K}[T]$ ist nicht endlich erzeugt.

Frage 213

Thema: Erzeugendensystem

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V. Wann heißen diese Vektoren ein Erzeugendensystem von V?

Hinweis Diese Definition ist zentral. Die müssen Sie auswendig wissen.

Frage 214
Thema: Erzeugendensystem

Wann werden Sie beim Arbeiten mit Vektoren in endlich erzeugten Vektorräumen fast regelmäßig auf das Lösen inhomogener linearer Gleichungssysteme geführt?

Hinweis Was ist zu tun, um zu zeigen, dass Vektoren ein Erzeugendensystem bilden?

Frage 215

Thema: Erzeugendensystem

Sei V ein Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V. Was ist der Unterschied zwischen $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ und $\{v_1, \ldots, v_n\}$?

Hinweis Eine Menge ist in der anderen enthalten. Welche, und warum?

Frage 216

Thema: Erzeugendensystem

Warum besitzt jeder Vektorraum ein Erzeugendensystem?

Hinweis Die Antwort ist etwas langweilig.

Antwort 214
Thema: Erzeugendensystem

Wenn wir überprüfen wollen, ob Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ ein Erzeugendensystem von V sind, müssen wir in der Regel ein inhomogenes lineares Gleichungsystem lösen.

Antwort 213

Thema: Erzeugendensystem

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann ein Erzeugendensystem von V, wenn es für alle $v \in V$ Skalare $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ so gibt, dass $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = v$ ist.

Antwort 216

Thema: Erzeugendensystem

Wenn V ein Vektorraum ist, dann gilt immer $V = \langle V \rangle$.

Antwort 215

Thema: Erzeugendensystem

$\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$ ist die Menge der Linearkombinationen der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$, also $\{\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i \mid a_i \in \mathbb{K}\}$, wobei $\mathbb{K}$ den V zugrunde liegenden Körper bezeichnet. In $\{v_1, \ldots, v_n\}$ liegen nur die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$. Diese Menge ist viel kleiner als $\langle v_1 \ldots, v_n \rangle$.

Frage 217

Thema: Erzeugendensystem

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Begründen Sie, warum $\mathbb{K}[T]$ nicht endlich erzeugt sein kann.

Hinweis Lassen sich durch Addition und Skalarmultiplikation von endlich vielen Polynomen Polynome von beliebig hohem Grad konstruieren?

Frage 218
Thema: Erzeugendensystem

Sei V der Vektorraum der Polynome über einem Körper $\mathbb{K}$ vom Grad n. Geben Sie ein Beispiel für ein endliches Erzeugendensystem von V.

Hinweis Ohne Hinweis

Frage 219

Thema: Erzeugendensystem

Sei $V = \mathbb{K}^n$. Geben Sie ein Beispiel für ein endliches Erzeugendensystem von V.

Hinweis Ohne Hinweis

Frage 220

Thema: Erzeugendensystem

Sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems $Ax = 0$ über einem Körper $\mathbb{K}$. Skizzieren Sie, wie Sie ein endliches Erzeugendensystem von $\mathcal{U}$ konstruieren können.

Hinweis Wie war noch mal der Algorithmus zur Berechnung der Lösungsmenge eines homogenen linearen Gleichungssystems?

Antwort 218

Thema: Erzeugendensystem

$1, T, T^2, \ldots, T^n.$

Antwort 217
Thema: Erzeugendensystem

Wenn wir eine endliche Menge M von Polynomen haben, dann gibt es unter diesen eines, das den maximalen Grad hat. Bezeichnen wir diesen Grad mit r. Linearkombinationen der Polynome in M haben dann alle maximal den Grad r. Das bedeutet, dass Polynome in $\mathbb{K}[T]$, deren Grad größer als r ist, nicht als Linearkombination der Polynome in M geschrieben werden können. Somit ist $\mathbb{K}[T]$ nicht endlich erzeugt.

Antwort 220
Thema: Erzeugendensystem

Wir überführen die Matrix A in Treppennormalform. Wir streichen alle Nullzeilen. Wir fügen Nullzeilen so ein, dass die Pivot-Elemente auf der Diagonalen stehen. Wir ersetzen die Nullen auf der Diagonale durch -1. Die Spalten, bei denen wir -1 eingefügt haben, bilden ein Erzeugendensystem von $\mathcal{U}$.

Antwort 219

Thema: Erzeugendensystem

$$\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\\0\end{pmatrix},\dots,\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\\1\end{pmatrix}.$$

Frage 221
Thema: Erzeugendensystem

Sei V der Vektorraum der $m \times n$-Matrizen über einem Körpern $\mathbb{K}$. Geben Sie ein Beispiel für ein endliches Erzeugendensystem von V.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 222

Thema: Erzeugendensystem

Sei V der Vektorraum der Polynome über einem Körper $\mathbb{K}$. Geben Sie ein Beispiel für ein Erzeugendensystem von V.

Hinweis Hier brauchen Sie unendlich viele Polynome.

Frage 223

Thema: Erzeugendensystem

Wann wird ein Vektorraum V endlich erzeugt genannt?

Hinweis Diese Definition ist zentral. Die müssen Sie auswendig kennen.

Frage 224

Thema: Erzeugendensystem

Nennen Sie zwei Erzeugendensysteme von $\{0\}$

Hinweis Ein Erzeugendensystem gibt es nach Definition. Und dann kann man natürlich immer alle Elemente von V als Erzeugendensystem von V nehmen.

Antwort 222

Thema: Erzeugendensystem

$1, T, T^2, T^3, \ldots$. Mit anderen Worten: Wir nehmen alle T^i mit $i \in \mathbb{N}_0$.

Antwort 221
Thema: Erzeugendensystem

Wir nehmen alle Matrizen, die genau einem Eintrag 1 haben, und bei denen alle anderen Einträge Null sind. Diese bilden ein Erzeugendensystem von $\mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$.

Antwort 224
Thema: Erzeugendensystem

Ein Erzeugendensystem gibt es nach Definition. Man setzt einfach $\langle\emptyset\rangle = \{0\}$. Ein weiteres Erzeugendensystem ist der ganze Vektorraum, also 0.

Antwort 223
Thema: Erzeugendensystem

Ein Vektorraum V heißt endlich erzeugt, wenn es endlich viel Vektoren in V gibt, sodass jeder Vektor in V sich als Linearkombination dieser Vektoren schreiben lässt.

Frage 225
Thema: Erzeugendensystem

Seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in einem $\mathbb{K}$-Vektorraum V, die alle $\neq 0$ sind. Liegt der Nullvektor im Erzeugnis $\langle v_1, \ldots, v_n \rangle$?

Hinweis Ja.

Frage 226
Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V. Wann heißen diese Vektoren linear unabhängig?

Hinweis Diese Definition ist zentral. Die müssen Sie auswendig wissen.

Frage 227

Thema: lineare Unabhängigkeit

Wann wird eine Linearkombination $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ trivial genannt?

Hinweis Für welche Skalare ist diese Gleichung immer richtig?

Frage 228

Thema: lineare Unabhängigkeit

Wann werden Sie beim Arbeiten mit Vektoren in endlich erzeugten Vektorräumen fast regelmäßig auf das Lösen homogener linearer Gleichungssysteme geführt?

Hinweis Was ist zu tun, um zu zeigen, dass Vektoren linear unabhängig sind?

Antwort 226
Thema: lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ sind genau dann linear unabhängig, wenn gilt: Falls $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ für Skalare $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$, dann folgt $a_i = 0$ für alle $1 \leq i \leq n$.

Antwort 225

Thema: Erzeugendensystem

Da $0 = \sum_{i=1}^{n} 0v_i$ ist, ist der Nullvektor eine Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$. Es folgt $0 \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$.

Antwort 228

Thema: lineare Unabhängigkeit

Wenn wir überprüfen wollen, ob Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, müssen wir in der Regel ein homogenes lineares Gleichungsystem lösen.

Antwort 227

Thema: lineare Unabhängigkeit

Eine Linearkombination $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ von Vektoren $v_1, \ldots, v_n \in V$ heißt trivial, wenn $a_i = 0$ ist für alle $1 \leq i \leq n$.

Frage 229

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Nehmen wir an, Sie müssen beweisen, dass diese Vektoren linear unabhängig sind. Was ist der erste Satz Ihres Beweises?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 230

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $v, w \in V$. Wann genau sind v und w linear abhängig?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 231

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Wann werden $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig genannt?

Hinweis Es muss eine nicht triviale Linearkombination des Nullvektors existieren.

Frage 232
Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $v_1, v_2, v_3 \in V$. Wenn v_1, v_2 und v_1, v_3 und v_2, v_3 linear unabhängig sind, sind dann auch v_1, v_2, v_3 linear unabhängig?

Hinweis Nein. Versuchen Sie, ein Gegenbeispiel zu konstruieren.

Antwort 230

Thema: lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren v und w sind genau dann linear abhängig, wenn die Vektoren skalare Vielfache voneinander sind, wenn es also einen Skalar a so gibt, dass $v = aw$ ist.

Antwort 229

Thema: lineare Unabhängigkeit

Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{K}$ mit $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$.

Antwort 232
Thema: lineare Unabhängigkeit

Nein, dass muss nicht sein. Sei zum Beispiel $V = \mathbb{R}^2$, und seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$. Dann sind v_1, v_2 und v_1, v_3 und v_2, v_3 linear unabhängig, aber v_1, v_2, v_3 sind linear abhängig.

Antwort 231

Thema: lineare Unabhängigkeit

Die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ heißen linear abhängig, wenn es eine nicht triviale Linearkombination des Nullvektors gibt. Das heißt, es gibt Skalare $a_1, \ldots, a_n$, die nicht alle Null sind, und für die $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ gilt.

Frage 233

Thema: lineare Unabhängigkeit

Seien $p_1 = 1 + T$, $p_2 = 2 + 3T$ und $p_3 = T^3$ in $\mathbb{R}[T]$. Sind p_1, p_2, p_3 linear unabhängig?

Hinweis Ja.

Frage 234

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und seien $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{K})$. Sind A, B, C linear unabhängig?

Hinweis Ja.

Frage 235

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Sei $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Sind $v, v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig?

Hinweis Nein.

Frage 236

Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Sei $v \notin \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$. Sind $v, v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig?

Hinweis Nein.

Antwort 234

Thema: lineare Unabhängigkeit

Ja. Seien $a, b, c \in \mathbb{K}$ so, dass

$$a \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+b & a+b+c \\ b+c & a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Es folgt $a+b=0$, $a+b+c=0$, $b+c=0$ und $a=0$. Aus $a=0$ folgt $b=0$ und damit auch $c=0$. Da $a=b=c=0$ folgt, dass die Matrizen linear unabhängig sind.

Antwort 233
Thema: lineare Unabhängigkeit

Ja. Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, und sei $a(1+T)+b(2+3T)+cT^3 = (a+2b)+(a+3b)T+cT^3 = 0$, das Nullpolynom. Dann sind alle Koeffizienten Null, also $c = 0$ und $a + 2b = 0$ und $a + 3b = 0$. Ziehen wir die letzten beiden Gleichungen voneinander ab, so folgt $b = 0$ und damit $a = 0$. Die Skalare a, b, c müssen also alle 0 sein, und es folgt, dass die Polynome linear unabhängig sind.

Antwort 236
Thema: lineare Unabhängigkeit

Nein. Das Problem ist, dass von den Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig sein müssen, dass es also eine nicht triviale Linearkombination $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ des Nullvektors geben kann. Dann ist $0v + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ ebenfalls eine nicht triviale Linearkombination des Nullvektors, und dies zeigt, dass die Vektoren $v, v_1, \ldots, v_n$ im Allgemeinen nicht linear unabhängig sind.

Antwort 235

Thema: lineare Unabhängigkeit

Nein. Da $v \in \langle v_1, \ldots, v_n \rangle$, gibt es eine Linearkombination $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Dann ist $0 = -v + \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ eine nicht triviale Linearkombination des Nullvektors, und es folgt, dass die Vektoren $v, v_1, \ldots, v_n$ nicht linear unabhängig sind.

Frage 237
Thema: lineare Unabhängigkeit

Sei V ein Vektorraum, und sei U ein Unterraum von V. Seien u_1, u_2 linear unabhängige Vektoren in U. Sind u_1, u_2 auch linear unabhängig in V?

Hinweis Ja.

Frage 238
Thema: Basen

Sei $V = \mathbb{R}^3$. Geben Sie ein Beispiel für Vektoren, die ein Erzeugendensystem von V aber keine Basis von V sind.

Hinweis Wie ist eine Basis definiert?

Frage 239

Thema: Basen

Sei $V = \mathbb{R}^3$. Geben Sie ein Beispiel für Vektoren in V, die linear unabhängig aber keine Basis von V sind.

Hinweis Wie ist eine Basis definiert?

Frage 240
Thema: Basen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und seien $v_1, \ldots, v_n$ Vektoren in V. Wann wird $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V genannt?

Hinweis Kein Hinweis. Diese Definition ist zentral, die müssen Sie auswendig lernen.

Antwort 238

Thema: Basen

Es ist $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$ ein Erzeugendensystem von V, das keine Basis ist, denn die Vektoren sind nicht linear unabhängig.

Antwort 237

Thema: lineare Unabhängigkeit

Ja. Denn wenn sich u_1 und u_2 nur trivial zum Nullvektor linear kombinieren lassen, dann gilt das unabhängig davon, ob sie Vektoren in U oder in V sind.

Antwort 240
Thema: Basen

$v_1, \ldots, v_n$ ist genau dann eine Basis von V, wenn die Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, und wenn sie ein Erzeugendensystem von V sind.

Antwort 239
Thema: Basen

Die Vektoren $\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ sind linear unabhängig in V aber keine Basis von V, da sie den Vektorraum nicht erzeugen.

Frage 241
Thema: Basen

Seien $v_1, \ldots, v_n$ und $w_1, \ldots, w_m$ zwei Basen eines Vektorraums V über einem Körper $\mathbb{K}$. Warum gilt $m = n$?

Hinweis Dies ist eine Folgerung aus dem Austauschsatz oder dem Basisergänzungssatz. Wie ist der genaue Zusammenhang?

Frage 242

Thema: Basen

Wenn v_1, v_2 eine Basis von $\mathbb{Q}^2$ ist, ist v_1, v_2 dann auch eine Basis von $\mathbb{R}^2$?

Hinweis Ja. Stellen Sie die Dtandardbasisvektoren von $\mathbb{Q}^2$ als Linearkombinationen von v_1, v_2 dar.

Frage 243
Thema: Basen

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Besitzt ein Vektorraum V eine Basis aus n Vektoren, so erzeugen mehr als n Vektoren den Vektorraum V.

Hinweis Suchen Sie nach einem Gegenbeispiel.

Frage 244
Thema: Basen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Sei U ein Unterraum von V. Können Sie die Basis $v_1, \ldots, v_n$ so „ausdünnen“, das heißt Vektoren entfernen, dass die verbleibenden Vektoren eine Basis von U sind?

Hinweis Suchen Sie nach einem Gegenbeispiel.

Antwort 242
Thema: Basen

Wir zeigen, dass v_1, v_2 ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ ist. Zunächst einmal gibt es Skalare $a, b, c, d \in \mathbb{Q}$ so, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = av_1 + bv_2$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = cv_1 + dv_2$ ist, denn $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ liegen in $\mathbb{Q}^2$, und v_1, v_2 ist eine Basis von $\mathbb{Q}$. Sei nun $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ ein beliebiger Vektor in $\mathbb{R}$. Dann gilt $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Jetzt setzen wir für $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ die Linearkombinationen oben ein und erhalten

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x(av_1 + bv_2) + y(cv_1 + dv_2) = (xa + yc)v_1 + (xb + yd)v_2.$$

Die Koeffizienten $xa + yc$ und $xb + yd$ sind reelle Zahlen. Damit isst jeder Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ eine Linearkombination mit reellen Koeffizienten von v_1, v_2, und dies zeigt, dass v_1, v_2 ein Erzeugendensystem von $\mathbb{R}^2$ ist. Da zwei Vektoren in einem Vektorraum der Dimension 2, die ein Erzeugendensystem bilden, bereits eine Basis sind, folgt, dass v_1, v_2 eine Basis von $\mathbb{R}^2$ ist.

Antwort 241
Thema: Basen

Die Aussage ist eine Folgerung aus dem Austauschsatz von Steinitz. Aus dem Austauschsatz folgt: Wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, und $w_1, \ldots, w_m$ linear unabhängig in V sind (was sie sind, da sie eine Basis bilden), dann gilt $m \leq n$.

Analog gilt auch: Wenn $w_1, \ldots, w_m$ eine Basis von V ist, und $v_1, \ldots, v_n$ linear unabhängig sind, dann ist $n \leq m$. Beides zusammen impliziert $m = n$.

Antwort 244
Thema: Basen

Nein, das geht in der Regel nicht. Sei etwa $V = \mathbb{R}^2$, und seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Sei $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle$. Wenn wir v_1 aus der Basis v_1, v_2 entfernen, dann ist v_2 keine Basis von U, denn der Vektor v_2 liegt nicht einmal in U. Dasselbe geschieht, wenn wir v_2 aus der Basis v_1, v_2 entfernen. Wir können die vorgegebene Basis also nicht zu einer Basis von U „ausdünnen“.

Antwort 243
Thema: Basen

Die Aussage ist falsch.

Sei etwa $V = \mathbb{R}^2$. Dann besitzt V eine Basis aus 2 Vektoren. Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Diese drei Vektoren erzeugen aber nicht den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sie erzeugen also nicht den Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

Frage 245

Thema: Basen

Sei $U = \langle \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathbb{R}^2$. Geben Sie unendlich viele Basen von U an.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 246
Thema: Basen

Geben Sie (die) zwei Beispiele an, wo die Aussage „Sei $\mathcal{B}$ die Basis von V." richtig ist.

Hinweis Das Kitzlige in der Aussage ist der bestimmte Artikel.

Frage 247
Thema: Basen

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei $U = \langle 1 + T + T^2 \rangle \subseteq \mathbb{K}[T]$. Warum ist $1, T, T^2$ keine Basis von U?

Hinweis Liegt T in U?

Frage 248

Thema: Austauschsatz

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis eines Vektorraums V, und ist $x = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ mit $a_n \neq 0$, so ist $v_1, \ldots, v_{n-1}, x$ eine Basis von V.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Antwort 246
Thema: Basen

In der Regel hat ein Vektorraum viele, wenn der zugrunde liegende Körper unendlich ist, sogar unendlich viele Basen. „Die Basis“ suggeriert aber, dass es genau eine Basis gibt. Und es gibt in der Tat Vektorräume, die genau eine Basis haben, aber nur zwei solcher Vektorräume. Der eine ist $\{0\}$. Der hat nach Definition eine Basis, nämlich $\emptyset$. Der andere ist der $\mathbb{F}_2$-Vektorraum $\mathbb{F}_2$. Der enthält nur die Vektoren 0 und 1. Der Nullvektor ist keine Basis von F_2. Somit ist 1 die einzige Basis von $\mathbb{F}_2$.

Antwort 245
Thema: Basen

Der Vektorraum U hat die Dimension 1. Jeder Vektor $v \neq 0$ aus U ist eine Basis von U, denn er ist linear unabhängig, und ein linear unabhängiger Vektor in einem Vektorraum der Dimension 1 ist bereits eine Basis von U.

Antwort 248

Thema: Austauschsatz

Wahr, diese Aussage folgt unmittelbar aus dem Austauschlemma.

Antwort 247
Thema: Basen

Die Elemente in U sind von der Form $a + aT + aT^2$ mit $a \in \mathbb{K}$. Die Polynome $1, T, T^2$ sind aber nicht von dieser Bauart, sie liegen also nicht in U. Die Elemente einer Basis von einem Vektorraum müssen aber immer in dem Vektorraum liegen.

Frage 249

Thema: Austauschsatz

Wie lautet das Austauschlemma?

Hinweis Dabei ging es darum, einen Basisvektor durch einen von Null verschiedenen Vektor auszutauschen. Wie ist die genaue Formulierung?

Frage 250

Thema: Austauschsatz

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum, und sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Sei $u \in V$, $u \neq 0$. Welche der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$ können Sie durch u ersetzen, so dass die Vektoren weiterhin eine Basis bilden?

Hinweis Schreiben Sie u als Linearkombination der Basisvektoren.

Frage 251
Thema: Austauschsatz

Was ist falsch an folgender Aussage?

„Sei V ein Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K}$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und sei $u \in V$. Dann gibt es i, mit $1 \leq i \leq n$, so dass $v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist."

Hinweis Dürfen Sie wirklich jeden Vektor u in die Basis hinein tauschen?

Frage 252
Thema: Austauschsatz

Was ist schief an folgender Aussage?

„Sei V ein Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K}$. Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Dann gibt es ein $1 \leq i \leq n$, sodass v_i durch einen Vektor $u \neq 0$ so ausgetauscht werden kann, dass $v_1, \ldots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist.“

Hinweis Diese Aussage ist offensichtlich.

Antwort 250

Thema: Austauschsatz

Wir schreiben u als Linearkombination der Vektoren $v_1, \ldots, v_n$. Dies ist möglich, da die Vektoren eine Basis von V bilden. Wenn $u = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$ mit Skalaren $a_1, \ldots, a_n$ ist, dann können wir u für alle diejenigen v_i einsetzen, für die $a_i \neq 0$ ist.

Antwort 249
Thema: Austauschsatz

Sei V ein Vektorraum über einen Körper $\mathbb{K}$. Sei $v_1, \dots, v_n$ eine Basis von V, und sei $u \in V$, $u \neq 0$. Dann gibt es i, mit $1 \leq i \leq n$, so dass $v_1, \dots, v_{i-1}, u, v_{i+1}, \dots, v_n$ eine Basis von V ist.

Antwort 252

Thema: Austauschsatz

Diese Aussage ist offensichtlich, als u können wir zum Beispiel den Vektor v_i selbst nehmen.

Antwort 251

Thema: Austauschsatz

Der Vektor u darf nicht der Nullvektor sein. Wenn $u = 0$, dann ist die Aussage falsch.

Frage 253

Thema: Austauschsatz

Nennen Sie zwei Folgerungen aus dem Austauschsatz.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 254

Thema: Austauschsatz

Wie wird das Austauschlemma im Beweis des Austauschsatzes benutzt?

Hinweis Der Austauschsatz wird mit Induktion beweisen.

Frage 255

Thema: Austauschsatz

Wie lautet der Basisergänzungssatz?

Hinweis Schlagen Sie im Studienbrief nach.

Frage 256

Thema: Austauschsatz

Nennen Sie drei Folgerungen aus dem Basisergänzungssatz.

Hinweis Warum macht der Begriff der Dimension eines endlich erzeugten Vektorraums Sinn?

Antwort 254
Thema: Austauschsatz

Der Austauschsatz wird mit Induktion beweisen. Das Austauschlemma dient als Induktionsanfang.

Antwort 253

Thema: Austauschsatz

1. Je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums haben gleich viele Elemente.
2. Der Basisergänzungssatz folgt aus dem Austauschsatz.
3. Ist $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V, und sind $u_1, \ldots, u_m$ linear unabhängig in V, dann gilt $m \leq n$.

Antwort 256
Thema: Austauschsatz

1. Die Tatsache, dass je zwei Basen eines endlich erzeugten Vektorraums gleich viele Vektoren haben.

2. Die Dimensionsformel für Unterräume.

3. Die Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt von Vektorräumen.

Antwort 255

Thema: Austauschsatz

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Jede Menge von linear unabhängigen Vektoren in V lässt sich zu einer Basis von V ergänzen.

Frage 257

Thema: Dimension

Wie ist die Dimension eines endlich erzeugten Vektorraums V definiert?

Hinweis Diese Definition ist zentral, die müssen Sie auswendig können.

Frage 258
Thema: Dimension

Nennen Sie zwei Dimensionsformeln.

Hinweis Es gibt eine Formel für Unterräume und eine für Summe und Durchschnitt von Unterräumen.

Frage 259
Thema: Dimension

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei V der Vektorraum der Polynome vom Grad $\leq n$. Was ist die Dimension von V? Geben Sie eine Basis von V an.

Hinweis Es ist $\dim(V) = n + 1$.

Frage 260

Thema: Dimension

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper, und sei V der Vektorraum der $m \times n$-Matrizen über $\mathbb{K}$. Was ist die Dimension von V? Geben Sie eine Basis von V an.

Hinweis Es ist $\dim(V) = mn$.

Antwort 258
Thema: Dimension

1. Sei U ein Unterraum eines endlich erzeugten Vektorraums V. Dann gilt $\dim(U) \leq \dim(V)$.
2. Seien U und W Unterräume eines endlich erzeugten Vektorraums V. Dann gilt $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap W)$.

Antwort 257
Thema: Dimension

Wenn $V = \{0\}$, dann wird $\dim(V)$ als 0 definiert. Ist $V \neq \{0\}$, so wird $\dim(V)$ als die Anzahl der Elemente einer Basis (und damit aller Basen) definiert.

Antwort 260
Thema: Dimension

Es ist $\dim(V) = mn$. Eine Basis bilden etwa alle $m \times n$-Matrizen, die genau einen Eintrag 1 haben, und deren übrige Einträge 0 sind.

Antwort 259

Thema: Dimension

Es ist $\dim(V) = n + 1$. Eine Basis ist beispielsweise $1, T, T^2, \ldots, T^n$.

Frage 261
Thema: Dimension

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $\mathcal{U}$ die Lösungsmenge von $Ax = 0$. Was ist die Dimension von $\mathcal{U}$?

Hinweis Wie berechnen Sie die Lösungsmenge von $Ax = 0$?

Frage 262

Thema: Dimension

Skizzieren Sie den Beweis der Dimensionsformel für Unterräume.

Hinweis Wir beginnen mit einer Basis des Unterraums. Dann benutzen wir den Basisergänzungssatz.

Frage 263

Thema: Dimension

Skizzieren Sie den Beweis der Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt von Unterräumen.

Hinweis Wir beginnen mit einer Basis des Durchschnitts und benutzen dann den Basisergänzungssatz.

Frage 264

Thema: Dimension

Nennen Sie zwei Beispiele für $\mathbb{K}$-Vektorräume der Dimension 3, die verschieden von $\mathbb{K}^3$ sind.

Hinweis Lösungsmengen linearer Gleichungssysteme, Unterräume des Vektorraums der Polynome über K, Unterräume von Vektorräumen von Matrizen, ...

Antwort 262
Thema: Dimension

Sei U ein Unterraum eines endlich erzeugten Vektorraums V.

Zunächst wird gezeigt, dass auch U endlich erzeugt ist. Dann wählen wir eine Basis $u_1, \ldots, u_r$ von U. Diese Vektoren sind linear unabhängig in V, und wir können den Basisergänzungssatz anwenden. Wir können also $u_1, \ldots, u_r$ zu einer Basis von V ergänzen, und es folgt $\dim(U) \leq \dim(V)$.

Antwort 261

Thema: Dimension

Es ist $\dim(\mathcal{U}) = n - \operatorname{Rg}(A)$.

Antwort 264
Thema: Dimension

1. Sei V der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{K}$ vom Grad kleiner oder gleich 2. Dann ist $1, T, T^2$ eine Basis von V und V hat die Dimension 3 über $\mathbb{K}$.

2. Sei $V = \langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \rangle \subseteq \mathrm{M}_{22}(\mathbb{K})$.

   Die Matrizen $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ sind linear unabhängig in V.

   Nach Definition sind sie auch ein Erzeugendensystem von V. Es folgt, dass V die Dimension 3 hat.

Antwort 263
Thema: Dimension

Seien U und W Unterräume eines endlich erzeugten Vektorraums V. Die Dimensionsformel besagt, dass $\dim(U+W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$ gilt.

Zum Beweis wählen wir eine Basis $x_1, \ldots, x_r$ von $U \cap W$. Diese ergänzen zum Einen zu einer Basis von U und zum Anderen zu einer Basis von W. Dann zeigen wir, dass die ergänzten Vektoren zusammen mit $x_1, \ldots, x_r$ eine Basis von $U + W$ sind. Jetzt müssen wir nur noch nachzählen, wie viele Vektoren das sind.

Frage 265

Thema: Dimension

Sei V ein Vektorraum der Dimension n. Warum gibt zu jedem m mit $0 \leq m \leq n$ einen Unterraum U_m von V der Dimension m?

Hinweis Beginnen Sie mit einer Basis von V und betrachten Sie Erzeugendensysteme von Teilmengen dieser Basis.

Frage 266
Thema: Dimension

Sei V ein Vektorraum der Dimension 5, und seien U und W Unterräume der Dimension 3 von V. Welche Dimensionen kann $U \cap W$ haben?

Hinweis Die Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt von Unterräumen hilft weiter.

Frage 267
Thema: Dimension

Sei V ein Vektorraum der Dimension 5, und seien U und W Unterräume der Dimension 3 von V. Welche Dimensionen kann $U + W$ haben?

Hinweis Die Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt von Unterräumen hilft weiter.

Frage 268
Thema: Dimension

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Besitzt ein Vektorraum V eine Basis aus n Vektoren, so erzeugen mehr als n Vektoren den Vektorraum V.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Antwort 266
Thema: Dimension

Mit der Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt gilt $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$. Der Vektorraum $U + W$ ist ein Unterraum von V, und es folgt, dass $\dim(U+W) \leq 5$ ist. Weiter ist $U \cap W$ ein Unterraum von U und von W, also $\dim(U \cap W) \leq 3$. Somit sind folgende Fälle möglich:

1. $\dim(U + W) = 5$, und $\dim(U \cap W) = 1$,
2. $\dim(U + W) = 4$, und $\dim(U \cap W) = 2$, oder
3. $\dim(U + W) = 3$, und $\dim(U \cap W) = 3$.

Antwort 265
Thema: Dimension

Sei $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V. Für alle $1 \leq m \leq n$ setzen wir $U_m = \langle v_1, \ldots, v_m \rangle$. Da die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ linear unabhängig sind, ist $v_1, \ldots, v_m$ eine Basis von U_m (ein Erzeugendensystem von U_m sind die Vektoren $v_1, \ldots, v_m$ nach Definition). Es gilt also $\dim(U_m) = m$. Einen Unterraum der Dimension 0 liefert der Unterraum $\{0\}$.

Antwort 268
Thema: Dimension

Die Aussage ist falsch.

Sei etwa $V = \mathbb{R}^2$. Dann besitzt V eine Basis aus 2 Vektoren. Seien $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $v_3 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$. Diese drei Vektoren erzeugen aber nicht den Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, sie erzeugen also nicht den Vektorraum $\mathbb{R}^2$.

Antwort 267
Thema: Dimension

Mit der Dimensionsformel für Summe und Durchschnitt gilt $\dim(U + W) = \dim(U) + \dim(W) - \dim(U \cap W)$. Der Vektorraum $U + W$ ist ein Unterraum von V, und es folgt, dass $\dim(U+W) \leq 5$ ist. Weiter ist $U \cap W$ ein Unterraum von U und von W, also $\dim(U \cap W) \leq 3$. Somit sind folgende Fälle möglich:

1. $\dim(U + W) = 5$, und $\dim(U \cap W) = 1$,
2. $\dim(U + W) = 4$, und $\dim(U \cap W) = 2$, oder
3. $\dim(U + W) = 3$, und $\dim(U \cap W) = 3$.

Frage 269
Thema: Dimension

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Es gibt einen $\mathbb{R}$-Vektorraum V der Dimension 4, der keinen Unterraum der Dimension 3 besitzt.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 270

Thema: Dimension

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Wenn es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ immer n linear unabhängige Vektoren in V gibt, dann ist $\dim_K(V) = \infty$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 271

Thema: Eigenschaften

Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to W$ eine Abbildung. Wann wird f linear genannt?

Hinweis Diese Definition ist zentral. Die müssen Sie auswendig kennen.

Frage 272
Thema: Eigenschaften

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Nennen Sie mindestens zwei Aussagen, die äquivalent zu der Aussage sind: Die Vektorräume V und W sind isomorph.

Hinweis Wie lautet der Struktursatz endlich erzeugter Vektorräume?

Antwort 270
Thema: Dimension

Die Aussage ist wahr.

Angenommen, die Dimension von V sei endlich, etwa $\dim(V) = m$. Dann gibt es eine Basis $v_1 \ldots, v_m$ von V. Sei $n > m$. Nach Annahme gibt es n Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ in V, die linear unabhängig sind. Als Folgerung aus dem Austauschsatz folgt $n \leq m$, ein Widerspruch, und somit gilt $\dim_(V) = \infty$.

Antwort 269
Thema: Dimension

Die Aussage ist falsch.

Sei V ein $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension 4, und sei v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von V. Sei $U = \langle v_1, v_2, v_3 \rangle$. Der Vektorraum U ist ein Unterraum von V, und nach Definition ist v_1, v_2, v_3 ein Erzeugendensystem von U. Die Vektoren v_1, v_2, v_3 sind als Teil einer Basis von V auch linear unabhängig. Somit ist U ein Unterraum der Dimension 3 von V.

Antwort 272

Thema: Eigenschaften

1. Es gibt eine bijektive, lineare Abbildung von V nach W.
2. Es gibt eine bijektive, lineare Abbildung von W nach V.
3. Die Vektorräume V und W haben dieselbe Dimension.

Antwort 271
Thema: Eigenschaften

Eine Abbildung $f : V \to W$ heißt linear, wenn die beiden folgenden Bedingungen erfüllt sind:

1. Für alle $v, v'' \in V$ gilt $f(v + v'') = f(v) + f(v'')$.
2. Für alle $a \in \mathbb{K}$ und alle $v \in V$ gilt $f(av) = af(v)$.

Frage 273

Thema: Eigenschaften

Wie lautet der Struktursatz endlich erzeugter Vektorräume?

Hinweis Bei dem Satz geht es darum, wann endlich erzeugte Vektorräume isomorph sind.

Frage 274
Thema: Eigenschaften

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n. Welches ist der denkbar einfachste Vektorraum, zu dem V isomorph ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 275
Thema: Eigenschaften

Wann werden zwei endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume V und W isomorph genannt? Wie können Sie entscheiden, ob V und W isomorph sind?

Hinweis Wie lautet der Struktursatz endlich erzeugter Vektorräume?

Frage 276
Thema: Eigenschaften

Geben sie ein Beispiel für eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die linear ist und ein Beispiel für eine Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$, die nicht linear ist.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 274

Thema: Eigenschaften

V ist isomorph zu $\mathbb{K}^n$.

Antwort 273

Thema: Eigenschaften

1. Je zwei endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume derselben Dimension sind isomorph.

2. Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension n, so ist V isomorph zu $\mathbb{K}^n$.

Antwort 276
Thema: Eigenschaften

Die identische Abbildung von $\mathbb{R}$ nach $\mathbb{R}$ ist linear.

Die Abbildung $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch $f(a) = a + 1$ für alle $a\mathbb{R}$ ist nicht linear, denn $f(0) = 1 \neq 0$.

Antwort 275
Thema: Eigenschaften

V und W werden isomorph genannt, wenn es eine bijektive, lineare Abbildung von V nach W gibt. V und W sind genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben.

Frage 277

Thema: Eigenschaften

Geben Sie ein Beispiel für zwei verschiedene Vektorräume, die isomorph sind.

Hinweis Wie lautet der Struktursatz endlich erzeugter Vektorräume?

Frage 278
Thema: Eigenschaften

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Abbildung $f : \mathbb{F}_2[T] \to \mathbb{F}_2[T]$ definiert durch $f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^{i+1}$ für alle $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathbb{F}_2[T]$, ist linear.

Hinweis Wahr.

Frage 279

Thema: Eigenschaften

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, $f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy \\ 0 \\ x+y \end{pmatrix}$, für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, ist linear.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 280
Thema: Eigenschaften

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Abbildung $f : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$, $f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i + 17T$ für alle $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathbb{R}[T]$ ist linear.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Antwort 278
Thema: Eigenschaften

Die Aussage ist wahr.

Die Abbildung f bildet jedes Polynom $p \in \mathbb{F}_2[T]$ auf Tp ab. Seien p und q Polynome in $\mathbb{F}_2[T]$. Dann gilt $f(p+q) = T(p+q) = Tp + Tq = f(p) + f(q)$. Sei $a \in \mathbb{F}_2$, und sei $\sum\limits_{i=0}^{n} a_i T^i$ in $\mathbb{F}_2[T]$. Dann gilt

$$f\left(a \sum_{i=0}^{n} a_i T^i\right) = f\left(\sum_{i=0}^{n} a a_i T^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a a_i T^{i+1} = af\left(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\right).$$

Somit ist f linear.

Antwort 277
Thema: Eigenschaften

Sei V_1 der $\mathbb{R}$-Vektorraum $\mathbb{R}$, und sei $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathbb{R}^2$.

Beide Vektorräume sind $\mathbb{R}$-Vektorräume der Dimension 1. Es folgt, dass sie isomorph sind.

Antwort 280
Thema: Eigenschaften

Die Aussage ist falsch.

Lineare Abbildungen bilden das Nullelement auf das Nullelement ab. Da $f(0) = 17T \neq 0$, ist f nicht linear.

Antwort 279
Thema: Eigenschaften

Die Aussage ist falsch.

Es sind $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und $2 \in \mathbb{R}$. Es gelten

$$f\left(2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix},$$

und

$$2f\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Da diese Vektoren verschieden sind, folgt, dass f nicht linear ist.

Frage 281
Thema: Eigenschaften

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Abbildung $f : \mathbb{Q}[T] \to \mathbb{Q}[T]$, $f\left(\sum_{i=0}^{n} a_i T^i\right) = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i - a_n T^n$ für alle $\sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathbb{Q}[T]$ ist linear.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 282

Thema: Eigenschaften

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Die Abbildung $f : \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a$, für alle $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, ist linear.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 283

Thema: Kern und Bild

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Nennen Sie drei Aussagen, die äquivalent sind zu der Aussage: f ist injektiv.

Hinweis Der Kern von f liefert ein mögliches Kriterium. Weiter ist es nützlich, die Bilder einer Basis unter f zu beobachten.

Frage 284

Thema: Kern und Bild

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Nennen Sie drei Aussagen, die äquivalent sind zu der Aussage: f ist surjektiv.

Hinweis Das Bild von f liefert ein mögliches Kriterium. Weiter ist es nützlich, die Bilder einer Basis unter f zu beobachten.

Antwort 282

Thema: Eigenschaften

Die Aussage ist wahr.

Seien $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}$ in $\mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und sei $r \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$f\left(\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix}\right) = a + a'' = f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} a'' & b'' \\ c'' & d'' \end{pmatrix},$$

und

$$f\left(r\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\right) = ra = rf\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}.$$

Es folgt, dass f linear ist.

Antwort 281
Thema: Eigenschaften

Die Aussage ist falsch.

Seien $p = T$ und $q = T^2$. Dann gilt $f(p) = 0 = f(q)$, also $f(p)+f(q) = 0$. Es ist $p+q = T+T^2$, und es folgt $f(p + q) = T \neq 0$. Dies zeigt, dass f nicht linear ist.

Antwort 284
Thema: Kern und Bild

1. $\mathrm{Bild}(f) = W$.
2. Wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, dann ist $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ ein Erzeugendensystem von W.
3. $\mathrm{Rg}(f) = \dim(W)$.
4. Zu jedem $w \in W$ gibt es ein $v \in V$ mit $f(v) = w$.

Antwort 283
Thema: Kern und Bild

1. Der Kern von f ist $\{0\}$.
2. Wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, dann sind $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear unabhängig in W.
3. Wenn $v_1, \ldots, v_n$ eine Basis von V ist, dann ist $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.
4. $\dim(V) = \dim(\mathrm{Bild}(f)) = \mathrm{Rg}(f)$.

Frage 285

Thema: Kern und Bild

Wie lautet der Rangsatz?

Hinweis Man könnte ihn auch „Dimensionsformel für Kern und Bild linearer Abbildungen“ nennen.

Frage 286
Thema: Kern und Bild

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper K, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wenn $V = W$ ist, und wenn $\mathrm{Kern}(f) = \mathrm{Bild}(f)$ ist, so ist $\dim(V)$ gerade.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 287
Thema: Eigenschaften

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper K, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Wenn $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear abhängig sind, und wenn f injektiv ist, dann sind $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 288
Thema: Kern und Bild

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wenn f injektiv ist, so gilt $\dim(V) \leq \dim(W)$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Antwort 286
Thema: Kern und Bild

Die Aussage ist wahr.

Sei $m = \dim(\mathrm{Kern}(f))$. Mit dem Rangsatz gilt $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f)) = m + m$, das heißt, $\dim(V)$ ist gerade.

Antwort 285

Thema: Kern und Bild

Seien V und W Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei V endlich erzeugt. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Der Rangsatz besagt, dass $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \mathrm{Rg}(f)$ ist.

Antwort 288
Thema: Kern und Bild

Die Aussage ist wahr.

Die Aussage folgt aus dem Rangsatz und der Tatsache, dass $\text{Kern}(f) = \{0\}$ ist. Dann gilt nämlich $\dim(V) = \dim(\text{Bild}(f)) \leq \dim(W)$, denn $\text{Bild}(f)$ ist ein Unterraum von W.

Antwort 287
Thema: Eigenschaften

Die Aussage ist wahr.

Seien $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear abhängig, und sei f injektiv. Es gibt Skalare $a_1, \ldots, a_n$, die nicht alle 0 sind, mit $\sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i) = 0$. Es folgt $f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = 0$, denn f ist linear, also $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i \in \mathrm{Kern}(f)$. Da f injektiv ist, folgt $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$, also $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$. Es folgt, dass $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig sind.

Frage 289
Thema: Kern und Bild

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wenn f surjektiv ist, so gilt $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 290

Thema: Kern und Bild

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wenn $V = W$, so ist f genau dann injektiv, wenn f surjektiv ist.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 291

Thema: Kern und Bild

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ mit der Eigenschaft, dass $f(x)$ genau dann Null ist, wenn $x = 0$ gilt.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 292

Thema: Kern und Bild

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Es gibt eine lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^5 \to \mathbb{C}^5$ mit $\text{Bild}(f) = \text{Kern}(f)$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Antwort 290
Thema: Kern und Bild

Die Aussage ist wahr. Es gilt nämlich:

$$\begin{aligned} f \text{ ist injektiv} &\Leftrightarrow \operatorname{Kern}(f) = \{0\} \\ &\Leftrightarrow \dim(\operatorname{Bild}(f)) = \dim(W) \\ &\Leftrightarrow f \text{ ist surjektiv.} \end{aligned}$$

Antwort 289
Thema: Kern und Bild

Die Aussage ist wahr.

Die Aussage folgt aus dem Rangsatz und der Tatsache, dass $\mathrm{Bild}(f) = W$ ist. Dann gilt nämlich $\dim(V) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(W)$, also $\dim(V) \geq \dim(W)$.

Antwort 292
Thema: Kern und Bild

Die Aussage ist falsch.

Angenommen, es gäbe eine solche lineare Abbildung. Mit dem Rangsatz folgt $\dim(\mathbb{R}^5) = \dim(\mathrm{Kern}(f)) + \dim(\mathrm{Bild}(f))$. Dies ist ein Widerspruch, denn links des Gleichheitszeichens steht 5, eine ungerade Zahl, und rechts des Gleichheitszeichens steht eine gerade Zahl.

Antwort 291
Thema: Kern und Bild

Die Aussage ist falsch.

Angenommen, es gibt eine solche Abbildung. Dann ist $\mathrm{Kern}(f) = \{0\}$, also $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 0$. Da das Bild von f ein Unterraum von $\mathbb{R}$ ist, folgt $\dim(\mathrm{Bild}(f)) \leq 1$. Mit dem Rangsatz folgt $2 \leq 0 + 1$, ein Widerspruch.

Frage 293
Thema: Lin.Abb. und Basen

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis $v_1, \dots, v_n$ von V, und seien $w_1, \dots, w_n$ Vektoren in W. Gibt es immer eine lineare Abbildung $f : V \to W$, für die $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt? Wenn ja, wie viele lineare Abbildungen gibt es, die diese Eigenschaft haben?

Hinweis Was besagt der Satz über die Beschreibung linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis?

Frage 294

Thema: Lin.Abb. und Basen

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $\mathcal{B}$ und $\mathcal{B}''$ Basen von V. Was ist ein Basiswechsel oder eine Basistransformation von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}''$?

Hinweis Was besagt der Satz über die Beschreibung linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis?

Frage 295
Thema: Kern und Bild

Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume derselben Dimension. Sei $f : V \to W$ linear. Nehmen wir an, Sie möchten beweisen, dass f ein Isomorphismus ist. Warum ist es ausreichend, zu beweisen, dass f injektiv ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 296

Thema: Kern und Bild

Seien V und W endlich erzeugte $\mathbb{K}$-Vektorräume derselben Dimension. Sei $f : V \to W$ linear. Nehmen wir an, Sie möchten beweisen, dass f ein Isomorphismus ist. Warum ist es ausreichend, zu beweisen, dass f surjektiv ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 294
Thema: Lin.Abb. und Basen

Die Basis $\mathcal{B}$ bestehe aus den Vektoren $v_1, \ldots, v_n$, und die Basis $\mathcal{B}''$ bestehe aus den Vektoren $w_1, \ldots, w_n$. Ein Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}''$ ist die eindeutig bestimmte lineare Abbildung $f : V \to V$, die durch $f(v_i) = w_i$, für alle $1 \leq i \leq n$, definiert ist.

Antwort 293

Thema: Lin.Abb. und Basen

Der Satz über die Beschreibung linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis besagt, dass es immer genau eine lineare Abbildung $f : V \to W$ gibt, für die $f(v_i) = w_i$ für alle $1 \leq i \leq n$ gilt.

Antwort 296
Thema: Kern und Bild

Eine surjektive, lineare Abbildung zwischen zwei endlich erzeugten Vektorräumen derselben Dimension ist automatisch injektiv.

Antwort 295
Thema: Kern und Bild

Eine injektive, lineare Abbildung zwischen zwei endlich erzeugten Vektorräumen derselben Dimension ist automatisch surjektiv.

Frage 297
Thema: Lin.Abb. und Basen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 4, und sei W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 5. Definieren Sie eine lineare Abbildung $f : V \to W$, deren Kern die Dimension 2 hat.

Hinweis Was besagt der Satz über die Beschreibung linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis?

Frage 298

Thema: Lin.Abb. und Basen

Sei V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 4, und sei W ein $\mathbb{K}$-Vektorraum der Dimension 5. Definieren Sie eine lineare Abbildung $f : V \to W$, deren Bild die Dimension 3 hat.

Hinweis Was besagt der Satz über die Beschreibung linearer Abbildungen durch Bilder einer Basis?

Frage 299

Thema: Eigenschaften

Sei $\mathbb{K}$ ein Körper. Nennen Sie drei Beispiele für $\mathbb{K}$-Vektorräume der Dimension 3, die isomorph zu $\mathbb{K}^3$, aber verschieden von $\mathbb{K}^3$ sind.

Hinweis Wie lautet der Struktursatz endlich erzeugter Vektorräume?

Frage 300
Thema: Eigenschaften

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Seien $v_1, \ldots, v_n \in V$. Wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig sind, so sind $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear abhängig.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Antwort 298

Thema: Lin.Abb. und Basen

Sei v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von V, und sei w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 eine Basis von W. Sei $f : V \to W$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, die durch $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$, $f(v_3) = w_3$ und $f(v_4) = 0$ definiert ist. Die Dimension des Bildes von f ist 3, denn w_1, w_2, w_3 ist eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$.

Antwort 297

Thema: Lin.Abb. und Basen

Sei v_1, v_2, v_3, v_4 eine Basis von V, und sei w_1, w_2, w_3, w_4, w_5 eine Basis von W. Sei $f : V \to W$ die eindeutig bestimmte lineare Abbildung, die durch $f(v_1) = w_1$, $f(v_2) = w_2$ und $f(v_3) = f(v_4) = 0$ definiert ist. Die Dimension des Bildes von f ist 2, denn w_1, w_2 ist eine Basis von $\mathrm{Bild}(f)$. Mit dem Rangsatz folgt $\dim(\mathrm{Kern}(f)) = 2$.

Antwort 300
Thema: Eigenschaften

Die Aussage ist wahr.

Wenn $v_1, \ldots, v_n$ linear abhängig sind, dann gibt es Skalare $a_1, \ldots, a_n \in K$, die nicht alle Null sind, so dass $\sum_{i=1}^{n} a_i v_i = 0$ ist. Es folgt

$$0 = f(0) = f\left(\sum_{i=1}^{n} a_i v_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i),$$

denn f ist linear. Es folgt, dass $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ linear abhängig sind, denn $0 = \sum_{i=1}^{n} a_i f(v_i)$ ist eine nicht-triviale Darstellung des Nullvektors in W.

Antwort 299
Thema: Eigenschaften

Sei V_1 der Vektorraum der Polynome über $\mathbb{K}$ vom Grad kleiner oder gleich 2.

Sei $V_2 = \left\langle \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq \mathrm{M}_{22}(\mathbb{K})$.

Sei V_3 die Lösungsmenge des homogenen linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

über $\mathbb{K}$.

Die Vektorräume V_1, V_2 und V_3 sind alle isomorph zu $\mathbb{K}^3$, denn sie sind $\mathbb{K}$-Vektorräume der Dimension 3.

Frage 301

Thema: Hom-Räume

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Wie ist der Vektorraum $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ definiert? Wie sind Addition und Skalarmultiplikation definiert?

Hinweis Wiederholen Sie die Definition.

Frage 302

Thema: Hom-Räume

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Welche Dimension hat $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 303

Thema: Hom-Räume

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Seien $\dim(V) = n$ und $\dim(W) = m$. Geben Sie ein Beispiel für einen Isomorphismus von $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ nach $\mathrm{M}_{mn}(K)$.

Hinweis Stichwort: Matrixdarstellung

Frage 304
Thema: Hom-Räume

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, und sei $\mathcal{C}$ eine Basis von W. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wie ist ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ definiert?

Hinweis Wir brauchen die Koordinatenvektoren der Bilder der Basiselemente von $\mathcal{B}$.

Antwort 302
Thema: Hom-Räume

Sei $n = \dim(V)$, und sei $m = \dim(W)$. Dann gilt $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)) = mn$.

Antwort 301
Thema: Hom-Räume

Die Elemente in $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ sind die linearen Abbildungen von V nach W.

Wenn f und g lineare Abbildungen von V nach W sind, so ist $f + g : V \to W$ definiert durch $(f + g)(v) = f(v) + g(v)$ für alle $v \in V$.

Wenn $a \in \mathbb{K}$ und $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$, so ist $af : V \to W$ definiert durch $(af)(v) = af(v)$ für alle $v \in V$.

Antwort 304
Thema: Hom-Räume

Seien $v_1, \ldots, v_n$ die Basisvektoren in $\mathcal{B}$. Die Koordinatenvektoren von $f(v_1), \ldots, f(v_n)$ bezüglich $\mathcal{C}$ sind die Spalten von ${}_\mathcal{C}\mathrm{M}_\mathcal{B}(f)$.

Antwort 303
Thema: Hom-Räume

Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, und sei $\mathcal{C}$ eine Basis von W. Die Abbildung, die jeder linearen Abbildung $f : V \to W$ ihre Matrixdarstellung ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ zuordnet, ist ein Isomorphismus.

Frage 305

Thema: Hom-Räume

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum über einem Körper $\mathbb{K}$. Was ist die Dimension von $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})$?

Hinweis Wie lautet die Dimensionsformel für Homomorphismenräume?

Frage 306

Thema: Hom-Räume

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sind $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$ isomorph? Begründen Sie ihre Antwort.

Hinweis Welche Dimensionen haben $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\operatorname{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$?

Frage 307
Thema: Hom-Räume

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$, und sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Wenn $V = W$, so gilt $f \circ f = f + f$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 308
Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum der Dimension n über einem Körper $\mathbb{K}$. Geben sie einen Isomorphismus von V nach $\mathbb{K}^n$ an.

Hinweis Denken Sie an Koordinatenvektoren.

Antwort 306

Thema: Hom-Räume

Ja, die Vektorräume $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, W)$ und $\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(W, V)$ sind isomorph, denn sie haben dieselbe Dimension.

Antwort 305
Thema: Hom-Räume

Wenn $n = \dim(V)$, so gilt $\dim(\mathrm{Hom}_{\mathbb{K}}(V, \mathbb{K})) = n$, denn $\dim(\mathbb{K}) = 1$.

Antwort 308

Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Sei $(v_1, \ldots, v_n) = \mathcal{B}$ eine Basis von V. Die Abbildung $f : V \to \mathbb{K}^n$, die jedem Vektor $v \in V$ seinen Koordinatenvektor bezüglich $\mathcal{B}$ zuordnet, ist ein Isomorphismus.

Antwort 307
Thema: Hom-Räume

Die Aussage ist falsch.

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = 3x$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dann ist f linear. Es gilt $(f \circ f)(1) = f(3) = 9$, und $(f + f)(1) = 3 + 3 = 6$. Es folgt, dass $f \circ f \neq f + f$ ist.

Frage 309
Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Sei V ein endlich erzeugter Vektorraum der Dimension n über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $(v_1, \ldots, v_n) = \mathcal{B}$ eine Basis von V, und sei $v \in V$. Wie ist der Koordinatenvektor von v bezüglich $\mathcal{B}$ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 310
Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, und sei $\mathcal{C}$ eine Basis von W. Sei $A = {}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$, und sei $v \in V$. Was ist der Zusammenhang zwischen dem Koordinatenvektor a von v bezüglich $\mathcal{B}$ und dem Koordinatenvektor b von $f(v)$ bezüglich $\mathcal{C}$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 311
Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper $\mathbb{K}$. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei A eine Matrixdarstellung von f bezüglich Basen von V und W. Wie viele Zeilen und wie viele Spalten hat A?

Hinweis Wie ist die Matrixdarstellung von f definiert?

Frage 312

Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper K. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung. Sei A eine Matrixdarstellung von f bezüglich Basen von V und W. Nennen Sie mindestens drei Eigenschaften von f, die Sie an A ablesen können.

Hinweis Wann ist f injektiv, surjektiv, bijektiv?

Antwort 310
Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Es gilt $Aa = b$.

Antwort 309
Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Wir schreiben v als Linearkombination der Basiselemente, also $v = \sum_{i=1}^{n} a_i v_i$. Dann ist $\begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ der Koordinatenvektor von v bezüglich $\mathcal{B}$.

Antwort 312
Thema: Lin.Abb. und Matrizen

1. f ist genau dann bijektiv, wenn A invertierbar ist.
2. $\mathrm{Rg}(A) = \mathrm{Rg}(f)$.
3. f ist genau dann surjektiv, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \dim(W)$ ist.
4. f ist genau dann injektiv, wenn $\mathrm{Rg}(A) = \dim(V)$ ist.

Antwort 311

Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Sei $n = \dim(V)$, und sei $m = \dim(W)$. Die Matrix A hat m Zeilen und n Spalten.

Frage 313

Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Seien V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper K. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von V, und sei $\mathcal{C}$ eine Basis von W. Sei $f : V \to W$ eine lineare Abbildung, und sei ${}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)$ die Matrixdarstellung von f bezüglich der vorgegebenen Basen. Was ist der Zusammenhang zwischen $\mathrm{Rg}({}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f))$ und $\mathrm{Rg}(f)$?

Hinweis Wenn Sie den Glauben an die Mathematik noch nicht verloren haben, dürfen Sie jetzt raten.

Frage 314

Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Skizzieren Sie den Zusammenhang zwischen Matrizenmultiplikation und der Komposition von Abbildungen.

Hinweis Matrizenmultiplikation entspricht der Komposition von Abbildungen. Machen Sie diese Aussage präzise. Wählen Sie Basen, Matrixdarstellungen und so weiter.

Frage 315

Thema: Ordnungsaxiome

Wie heißen die drei Ordnungsaxiome?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 316

Thema: Ordnungsaxiome

Wie lautet das Trichotomiegesetz?

Hinweis Das Trichotomiegesetz hat damit zu tun, in welcher Beziehung zwei reelle Zahlen zueinander stehen können.

Antwort 314
Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Sein U, V und W endlich erzeugte Vektorräume über einem Körper K. Sei $\mathcal{B}$ eine Basis von U, $\mathcal{C}$ eine Basis von V und $\mathcal{D}$ eine Basis von W. Seien $f : U \to V$ und $g : V \to W$ lineare Abbildungen. Dann ist $g \circ f$ eine lineare Abbildung von U nach W. Die Matrixdarstellung von $g \circ f$ bezüglich der Basen $\mathcal{B}$ von U und $\mathcal{D}$ von W ist das Produkt der Matrixdarstellungen von g und f. Genauer, es gilt

$$_{\mathcal{D}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(g \circ f) = {}_{\mathcal{D}}\mathrm{M}_{\mathcal{C}}(g)_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f).$$

Antwort 313

Thema: Lin.Abb. und Matrizen

Es gilt $\mathrm{Rg}({}_{\mathcal{C}}\mathrm{M}_{\mathcal{B}}(f)) = \mathrm{Rg}(f)$.

Antwort 316

Thema: Ordnungsaxiome

Für je zwei reelle Zahlen a und b gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.

Antwort 315
Thema: Ordnungsaxiome

Sie heißen Trichotomiegesetz, Transitivitätsgesetz und Monotoniegesetze.

Frage 317

Thema: Ordnungsaxiome

Wie lautet das Transitivitätsgesetz?

Hinweis Was ist, wenn $a < b$ und $b < c$ gilt?

Frage 318

Thema: Ordnungsaxiome

Wie lauten die Monotoniegesetze?

Hinweis Was können Sie über $a + c$ und $b + c$ bzw. über ac und bc sagen, wenn Sie wissen, dass $a < b$ gilt?

Frage 319

Thema: Ordnungsaxiome

Wahr oder falsch? $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper.

Hinweis Wahr.

Frage 320

Thema: Ordnungsaxiome

Wahr oder falsch? $\mathbb{F}_2$ ist ein angeordneter Körper.

Hinweis Falsch.

Antwort 318

Thema: Ordnungsaxiome

Ist $a < b$, so gilt $a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und $ac < bc$ für alle $c > 0$.

Antwort 317

Thema: Ordnungsaxiome

Ist $a < b$ und $b < c$, so folgt $b < c$.

Antwort 320
Thema: Ordnungsaxiome

Falsch, denn man kann sowohl die Annahme $0 < 1$ als auch die Annahme $1 < 0$ zum Widerspruch führen.

Antwort 319

Thema: Ordnungsaxiome

Wahr, denn $\mathbb{Q}$ ist ein Körper und in $\mathbb{Q}$ gelten die Ordnungsaxiome.

Frage 321

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Wie nennt man eine reelle Zahl, die keine rationale Zahl ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 322

Thema: Schnittaxiom

Wie ist ein Dedekind"scher Schnitt definiert?

Hinweis Ein Dedekindscher Schnitt $(A|B)$ besteht aus zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ mit bestimmten Eigenschaften.

Frage 323

Thema: Schnittaxiom

Wie ist die Trennungszahl eines Dedekind"schen Schnittes definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 324
Thema: Schnittaxiom

Sei $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2 \text{ oder } x < 0 \text{ und } x^2 \geq 2\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ und } x^2 \geq 2\}$. Dann ist $(A|B)$ ein Dedekindscher Schnitt. Was ist die Trennungszahl?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 322
Thema: Schnittaxiom

Ein Dedekind"scher Schnitt $(A|B)$ erfüllt folgende Eigenschaften:

1. A und B sind nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$.
2. $A \cup B = \mathbb{R}$.
3. Für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt $a < b$.

Antwort 321

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Eine reelle Zahl, die keine rationale Zahl ist, heißt irrationale Zahl.

Antwort 324

Thema: Schnittaxiom

Die Trennungszahl ist $\sqrt{2}$.

Antwort 323
Thema: Schnittaxiom

Eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ heißt Trennungszahl des Dedekind"schen Schnittes $(A|B)$, wenn $a \leq t \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt.

Frage 325

Thema: Schnittaxiom

Ist $(A|B)$ mit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 2\}$ ein Dedekindscher Schnitt?

Hinweis Nein.

Frage 326

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Geben Sie ein Beispiel für eine irrationale Zahl.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 327
Thema: Schnittaxiom

Wie lautet das Schnittaxiom?

Hinweis Das Schnittaxiom hat etwas mit Dedekind"schen Schnitten und Trennungszahlen zu tun.

Frage 328

Thema: Schnittaxiom

Welches Axiom unterscheidet die reellen Zahlen von den rationalen Zahlen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 326

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Irrationale Zahlen sind zum Beispiel $\sqrt{2}$, e oder π.

Antwort 325

Thema: Schnittaxiom

Nein, denn es gilt zum Beispiel $0 \in A$ und $-3 \in B$ und $0 > -3$.

Antwort 328

Thema: Schnittaxiom

Das Schnittaxiom.

Antwort 327
Thema: Schnittaxiom

Das Schnittaxiom lautet: Jeder Dedekind"sche Schnitt besitzt genau eine Trennungszahl.

Frage 329

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, und es gelte $a < b$ und $c < 0$. Was können Sie dann über ac und bc sagen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 330

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Was passiert mit Ungleichungen, wenn Sie diese mit einer negativen Zahl multiplizieren?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 331

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wie kann man einen Bruch mit positivem Zähler und Nenner vergrößern?

Hinweis Entweder kann man den Zähler größer machen oder ... ?

Frage 332

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Welches ist die größere Zahl, $\frac{136}{187}$ oder $\frac{135}{197}$?

Hinweis Es ist $\frac{136}{187} > \frac{135}{197}$. Warum?

Antwort 330

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Das Ungleichungszeichen dreht sich um.

Antwort 329

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Es gilt $ac > bc$.

Antwort 332

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Es gilt $\frac{136}{187} > \frac{135}{197}$, denn $136 > 135$ und $187 < 197$.

Antwort 331

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Man kann den Zähler vergrößern oder den Nenner verkleinern. Der Nenner muss dabei allerdings positiv bleiben.

Frage 333

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wie ist der Betrag einer reellen Zahl definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 334

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wie lautet die Dreiecksungleichung?

Hinweis Die Dreiecksungleichung vergleicht $|a|$, $|b|$ und $|a+b|$.

Frage 335

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Gilt, analog zur Dreiecksungleichung, auch $|a - b| \leq |a| - |b|$?

Hinweis Nein.

Frage 336

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wie ist der Abstand zwischen zwei reellen Zahlen definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 334

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|a + b| \leq |a| + |b|$.

Antwort 333

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Es gilt $|a| = a$, wenn $a \geq 0$ ist, und $|a| = -a$, wenn $a < 0$ ist.

Antwort 336

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist der Abstand zwischen a und b definiert durch $d(a, b) = |a - b|$.

Antwort 335

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Nein. Sei zum Beispiel $a = 0$ und $b = -1$. Dann ist $|a - b| = 1$ und $|a| - |b| = -1$.

Frage 337

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wie ist das arithmetische Mittel für zwei reelle Zahlen a und b definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 338

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Was sind die Randpunkte, was ist die Länge und was der Mittelpunkt des Intervalls $(-5, 7]$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 339

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Was sind a und b, wenn man $U_{\frac{1}{2}}(-1)$ als Intervall (a, b) schreibt.

Hinweis Es ist $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$.

Frage 340

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ist 1 Minimum der Menge $\{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$?

Hinweis Das Minimum einer Menge muss immer in der Menge enthalten sein.

Antwort 338

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Die Randpunkte sind -5 und 7, die Länge ist 12 und der Mittelpunkt ist $\frac{-5+7}{2} = 1$.

Antwort 337

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Das arithmetische Mittel ist $\frac{a+b}{2}$.

Antwort 340

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Nein, denn 1 ist nicht in der Menge enthalten.

Antwort 339

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Es ist $U_{\frac{1}{2}}(-1) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

Frage 341

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Wahr oder falsch? Ist M_1 eine Menge mit Maximum a_1 und M_2 eine Menge mit Maximum a_2, dann ist $\max(a_1, a_2)$ Maximum von $M_1 \cup M_2$.

Hinweis Wahr.

Frage 342

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Geben Sie mindestens zwei obere und mindestens zwei untere Schranken der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ an.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 343

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ist jede obere Schranke ein Maximum?

Hinweis Nein.

Frage 344

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ist jedes Minimum ein Infimum?

Hinweis Ja.

Antwort 342

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Untere Schranken sind zum Beispiel 0 und -5, obere Schranken sind 1 und 7.

Antwort 341

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Wahr. Sei nämlich $a = \max(a_1, a_2)$. Dann ist $a = a_1$ oder $a = a_2$, also $a \in M_1 \cup M_2$. Weiter gilt $a_1 \leq a$ und $a_2 \leq a$. Ist nun also $m \in M_1 \cup M_2$, dann gilt $m \in M_1$ oder $m \in M_2$. Ist $m \in M_1$, dann ist $m \leq a_1 \leq a$, und ist $m \in M_2$, dann ist $m \leq a_2 \leq a$. Es gilt also $m \leq a$ für alle $m \in M_1 \cup M_2$.

Antwort 344
Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ja, denn wenn eine Menge ein Minimum besitzt, dann ist dies die größte untere Schranke dieser Menge.

Antwort 343

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Nein. Es ist zum Beispiel 5 eine obere Schranke der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, aber kein Maximum.

Frage 345

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Geben Sie ein Beispiel für eine Teilmenge der reellen Zahlen, die ein Supremum aber kein Maximum besitzt.

Hinweis Ein Maximum muss immer zur Menge dazu gehören, ein Supremum aber nicht.

Frage 346

Thema: Schnittaxiom

Nennen Sie mindestens eine Aussage, durch die man das Schnittaxiom bei der Definition der reellen Zahlen ersetzen kann.

Hinweis Was sagt das Supremumsprinzip?

Frage 347

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Nennen Sie mindestens eine Folgerung aus dem Supremumsprinzip.

Hinweis Eine Folgerung ist der Satz des Archimedes. Was besagt dieser?

Frage 348

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

---

Was ist die dritte Wurzel aus -27?

Hinweis Wurzeln sind immer positiv.

Antwort 346

Thema: Schnittaxiom

Man kann das Schnittaxiom zum Beispiel durch das Supremumsprinzip ersetzen. Dieses besagt, dass jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt. Genauso gut kann man das Schnittaxiom auch durch das Infimumsprinzip ersetzen.

Antwort 345
Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ hat 1 als Supremum, besitzt aber kein Maximum.

Antwort 348

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Es gibt keine dritte Wurzel aus -27, denn es gilt zwar $(-3)^3 = -27$, aber Wurzeln sind immer ≥ 0.

Antwort 347

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Eine der Folgerungen aus dem Supremumsprinzip ist der Satz des Archimedes. Dieser besagt, dass die Menge der natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Andere Folgerungen sind der Satz des Eudoxos und die Tatsache, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt.

Frage 349

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Die Wurzeln aus 4 sind 2 und -2.

Hinweis Falsch.

Frage 350

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wie sind arithmetisches und geometrisches Mittel definiert und welche Ungleichung gilt zwischen ihnen?

Hinweis Das arithmetische Mittel ist $\frac{a+b}{2}$ und das geometrische ist $\sqrt{ab}$.

Frage 351

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr oder falsch? Seien $a, b > 0$. Dann ist das arithmetische Mittel genau dann gleich dem geometrischen Mittel, wenn $a = b$ gilt.

Hinweis Wahr.

Frage 352

Thema: Schnittaxiom

Ist $(A|B)$ mit $A = \{r \in \mathbb{R} \mid r^3 < 8\}$ und $B = \{r \in \mathbb{R} \mid r^3 \geq 8\}$ ein Dedekind"scher Schnitt?

Hinweis Ja.

Antwort 350

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Das arithmetische Mittel ist dann $\frac{a+b}{2}$. Das geometrische Mittel ist nur für $a, b > 0$ definiert und ist $\sqrt{ab}$. Es gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Antwort 349
Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Falsch. Wurzeln sind immer positiv, also ist nur 2 eine Wurzel aus 4.

Antwort 352
Thema: Schnittaxiom

Ja, denn A und B sind nicht leer, und es gilt $A \cup B = \mathbb{R}$. Weiter gilt für $r \in A$, dass $r^3 < 8$, also $r < 2$ ist. Ist $r'' \in B$, dann ist $r''^3 \geq 8$, also $r'' \geq 2$, und damit $r < r''$.

Antwort 351

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr. Angenommen das arithmetische ist gleich dem geometrischen Mittel, also $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$. Dann folgt $\frac{(a+b)^2}{4} = ab$, also $a^2+2ab+b^2 = 4ab$ oder $a^2-2ab+b^2 = 0$. Dann ist $(a-b)^2 = 0$, das heißt $a = b$. Umgekehrt gilt für $a = b$ auch $\frac{a+b}{2} = a = \sqrt{ab}$.

Frage 353

Thema: Grenzwertbegriff

Nennen Sie zwei verschiedene Definitionen, wann eine Folge (a_n) gegen a konvergiert.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 354

Thema: Grenzwertbegriff

Welchen Grenzwert hat die Folge $(\frac{(-1)^n}{n})$?

Hinweis Der Grenzwert ist 0. Warum?

Frage 355
Thema: Grenzwertbegriff

Wahr oder falsch? Wenn (a_n) gegen 0 konvergiert und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \neq 0$, dann ist $(\frac{1}{a_n})$ unbeschränkt.

Hinweis Wahr.

Frage 356

Thema: Grenzwertbegriff

Ist die Folge $(n^2 + 1)$ konvergent?

Hinweis Nein.

Antwort 354

Thema: Grenzwertbegriff

Sei $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Dann gilt für $n > n_0$:

$$|\frac{(-1)^n}{n} - 0| = |\frac{1}{n}| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

also $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

Antwort 353

Thema: Grenzwertbegriff

1. Wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder von (a_n) liegen.
2. Wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

Antwort 356

Thema: Grenzwertbegriff

Nein, denn sie ist nicht beschränkt.

Antwort 355

Thema: Grenzwertbegriff

Wahr. Sei $S \in \mathbb{N}$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \frac{1}{S}$ für alle $n > n_0$. Es folgt $\frac{1}{|a_n|} > S$ für alle $n > n_0$, das heißt, $(\frac{1}{a_n})$ ist unbeschränkt.

Frage 357

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wahr oder falsch? Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Hinweis Falsch.

Frage 358

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Geben Sie ein Beispiel für eine Folge, die beschränkt, aber nicht konvergent ist.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 359

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Geben Sie ein Beispiel für eine Folge (a_n), die selbst nicht konvergiert, die aber eine konvergente Teilfolge besitzt.

Hinweis Denken Sie an die Folge $((-1)^n)$.

Frage 360

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Was besagt der Vergleichssatz?

Hinweis Was kann man über die Grenzwerte von zwei Folgen sagen, wenn man weiß, dass die Folgenglieder der einen Folge fast immer höchstens so groß wie die der anderen Folge sind?

Antwort 358

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Die Folge $((-1)^n)$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Antwort 357

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Falsch, denn nicht jede beschränkte Folge ist konvergent.

Antwort 360

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Konvergiert (a_n) gegen a und (b_n) gegen b und gilt fast immer $a_n \leq b_n$, dann folgt $a \leq b$.

Antwort 359

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Die Folge $((-1)^n)$ ist eine solche Folge, denn sie konvergiert nicht, aber die Folge $((-1)^{2n}) = (1)$ ist eine konvergente Teilfolge.

Frage 361

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wie kann man den Einschnürungssatz benutzen, um zu zeigen, dass $\left(\frac{(-1)^n}{n}\right)$ konvergiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 362

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wahr oder falsch? Wenn $(a_n + b_n)$ konvergiert, dann konvergieren auch (a_n) und (b_n).

Hinweis Falsch.

Frage 363

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wahr oder falsch? Wenn (a_n) und (b_n) konvergieren, dann auch $(a_n b_n)$.

Hinweis Wahr.

Frage 364

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wahr oder falsch? Wenn $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt und (αa_n) konvergiert, dann auch (a_n).

Hinweis Falsch.

Antwort 362

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Falsch. Sei zum Beispiel $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n + b_n) = (0)$, konvergiert also, während (a_n) und (b_n) nicht konvergieren.

Antwort 361

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$ folgt nun mit dem Einschnürungssatz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

Antwort 364

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Falsch. Für $\alpha = 0$ ist (αa_n) immer konvergent, auch wenn (a_n) nicht konvergent ist.

Antwort 363

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wahr. Es gilt nämlich: Konvergieren (a_n) gegen a und (b_n) gegen b, dann konvergiert $(a_n b_n)$ gegen ab.

Frage 365

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wahr oder falsch? Wenn $\alpha \neq 0$ ist und (αa_n) konvergiert, dann konvergiert auch (a_n).

Hinweis Wahr.

Frage 366

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Was ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3+2n+5}$?

Hinweis Der Grenzwert ist 0.

Frage 367
Thema: Grenzwertbegriff

Was ist eine Nullfolge?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 368

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Nennen Sie drei der vier Prinzipien der Konvergenztheorie.

Hinweis Eins davon ist das Cauchy"sche Konvergenzprinzip.

Antwort 366

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Es ist $\frac{n^2+1}{n^3+2n+5} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3}}$, und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^3} = 0$, und $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{5}{n^3} = 1$, also folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3+2n+5} = \dfrac{0}{1} = 0$.

Antwort 365

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wahr. Wenn nämlich (αa_n) konvergiert, dann auch $\frac{1}{\alpha}(\alpha a_n) = (a_n)$.

Antwort 368
Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Die vier Prinzipien der Konvergenztheorie sind das Monotonieprinzip, das Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß, das Cauchy"sche Konvergenzprinzip und das Prinzip der Intervallschachtelung.

Antwort 367
Thema: Grenzwertbegriff

Eine Nullfolge ist eine Folge (a_n) mit $\lim\limits_{n \to \infty} a_n = 0$.

Frage 369

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \leq a_{n+1} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Folge?

Hinweis Monotonieprinzip.

Frage 370

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Was besagt das Monotonieprinzip?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 371
Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Welche Bedingung muss für eine monotone Folge erfüllt sein, damit sie konvergiert?

Hinweis Monotonieprinzip.

Frage 372

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Was ist die Beweisidee zum Beweis, dass die Folge $((1 + \frac{1}{n})^{n+1})$ konvergiert?

Hinweis Monotonieprinzip.

Antwort 370
Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Jede monotone, beschränkte Folge konvergiert.

Antwort 369

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Ja, denn sie ist monoton wachsend und beschränkt, und mit dem Monotonieprinzip folgt also, dass sie konvergiert.

Antwort 372

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Man zeigt, dass sie monoton fallend und beschränkt ist. Mit dem Monotonieprinzip folgt dann, dass die Folge konvergiert.

Antwort 371

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Sie muss beschränkt sein, dann folgt mit dem Monotonieprinzip, dass sie konvergiert. Ist sie unbeschränkt, kann sie nicht konvergent sein.

Frage 373

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Was besagt das Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 374

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Geben Sie ein Beispiel für eine beschränkte, divergente Folge und eine konvergente Teilfolge dieser Folge.

Hinweis Denken Sie an die Folge $((-1)^n)$.

Frage 375

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wann ist eine Folge eine Cauchyfolge?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 376

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wahr oder falsch? Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 374

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Sei $(a_n) = ((-1)^n)$. Dann ist (a_n) beschränkt und nicht konvergent. Die Teilfolge $((-1)^{2n}) = (1)$ ist dagegen konvergent.

Antwort 373

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Antwort 376

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wahr.

Antwort 375

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Eine Folge (a_n) ist eine Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > n_0$.

Frage 377

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wahr oder falsch? Jede Cauchyfolge konvergiert.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 378

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wie lautet das Cauchy"sche Konvergenzprinzip?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 379

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Seien (a_n) und (b_n) Folgen. Ist es möglich, dass (a_n) und $(a_n + b_n)$ konvergieren, aber (b_n) divergiert?

Hinweis Nein.

Frage 380

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wie lautet das Prinzip der Intervallschachtelung?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 378

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Antwort 377

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wahr.

Antwort 380

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

In jeder Intervallschachtelung $\langle a_n | b_n \rangle$ gibt es genau eine reelle Zahl a, die in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegt.

Antwort 379

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Nein. Wenn (a_n) und $(a_n + b_n)$ konvergieren, dann auch $((a_n + b_n) - a_n) = (b_n)$.

Frage 381
Thema: Grenzwertbegriff

Geben Sie drei Beispiele für konvergente Folgen.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 382
Thema: Grenzwertbegriff

Geben Sie drei Beispiele für divergente Folgen.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 383
Thema: Grenzwertbegriff

Nennen Sie zwei verschiedene Definitionen der Eulerschen Zahl e.

Hinweis Man kann e als Grenzwert einer Folge oder einer Reihe definieren.

Frage 384

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Wahr oder falsch? Seien $r, x \in \mathbb{R}$, so dass r rational und x irrational ist. Dann ist $r + x$ irrational.

Hinweis Wahr.

Antwort 382
Thema: Grenzwertbegriff

Divergente Folgen sind zum Beispiel (n), $((-1)^n)$ und $(\sqrt{n})$.

Antwort 381

Thema: Grenzwertbegriff

Konvergente Folgen sind zum Beispiel $(\frac{1}{n})$, (c) und $(\sqrt[n]{n})$.

Antwort 384
Thema: Reelle und rationale Zahlen

Wahr. Angenommen, $r+x$ ist rational. Da das Negative einer rationalen Zahl und die Summe von zwei rationalen Zahlen wieder rational sind, folgt dann $(r + x) + (-r) = x$ ist rational, ein Widerspruch.

Antwort 383

Thema: Grenzwertbegriff

Es gilt $e = \lim_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

Frage 385

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Wahr oder falsch? Die Summe zweier irrationaler Zahlen ist eine irrationale Zahl.

Hinweis Falsch.

Frage 386

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Konvergiert die Folge $((-1)^n \frac{n+2}{3n^2-1})$? Wenn ja, gegen welchen Grenzwert?

Hinweis Ja.

Frage 387

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Konvergiert die Folge $(\frac{2n^2-n+2}{n^2-1})$ und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?

Hinweis Ja.

Frage 388

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Was ist der Abstand von -5 und 18?

Hinweis Der Abstand zweier reeller Zahlen a und b ist definiert als $d(a, b) = |a - b|$.

Antwort 386

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Ja, es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n+2}{3n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}} = 0.$

Antwort 385

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Falsch. Zum Beispiel ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl, und auch $-\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl. Die Summe von beiden ergibt aber 0, eine rationale Zahl.

Antwort 388

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Es gilt $d(-5, 18) = |-5 - 18| = 23.$

Antwort 387

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Ja, denn es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - n + 2}{n^2 - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \dfrac{2}{1} = 2.$

Frage 389

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr oder falsch? Wenn a und b reelle Zahlen sind, dann ist $d(a, b) = d(-a, -b)$.

Hinweis Wahr.

Frage 390

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr oder falsch? Sind a, b, c reelle Zahlen, dann ist $d(a + c, b + c) = d(a, b)$.

Hinweis Wahr.

Frage 391

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr oder falsch? Wenn a, b, c reelle Zahlen sind, dann ist $d(ac, ab) = c(d(a, b))$.

Hinweis Falsch.

Frage 392

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ist die Menge $\{\frac{|x|}{1+|x|} \mid x \in \mathbb{R}\}$ beschränkt?

Hinweis Ja.

Antwort 390

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr. Es ist $d(a+c, b+c) = |a+c-(b+c)| = |a-b| = d(a,b)$.

Antwort 389

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr. Es ist $d(-a,-b) = |-a-(-b)| = |-(a-b)| = |a-b| = d(a,b)$.

Antwort 392

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ja, denn es gilt $|x| < |x| + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also folgt $0 \leq \frac{|x|}{|x|+1} < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Antwort 391

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Falsch. Seien zum Beispiel $a = 1$, $b = 0$ und $c = -1$. Dann ist $d(ac, bc) = d(-1, 0) = 1$ und $c(d(a, b)) = -1$.

Frage 393
Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Gibt es reelle Folgen (a_n) und (b_n), so dass $\sup\{a_n+b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\}+\sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist?

Hinweis Ja.

Frage 394

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Ist die Folge $(a_n) = (\frac{3n}{4n+1})$ monoton?

Hinweis Ja.

Frage 395

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Ist die Folge $(a_n) = (n + \frac{2}{n})$ monoton?

Hinweis Ja.

Frage 396

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr oder falsch? Die Menge der $x \in \mathbb{R}$, die die Ungleichung $|4x - 1| \geq 1$ erfüllen, ist ein Intervall.

Hinweis Falsch.

Antwort 394

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Es gilt $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{3n(4n+5)}{(4n+1)(3n+3)} = \frac{12n^2+15n}{12n^2+15n+3} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Folge ist streng monoton wachsend.

Antwort 393

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ja. Sei zum Beispiel $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1 = \sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, also $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} + \sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 2$, aber $\sup\{a_n + b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Antwort 396

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Falsch. Die Menge ist $(-\infty, 0] \cup [\frac{1}{2}, \infty)$.

Antwort 395

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Es gilt $a_{n+1} - a_n = n + 1 + \frac{2}{n+1} - n - \frac{2}{n} = 1 + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = 1 + \frac{2n-2(n+1)}{n(n+1)} = 1 - \frac{2}{n(n+1)} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn $2 \leq n(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge monoton wachsend.

Frage 397
Thema: Grenzwertbegriff

Wahr oder falsch? Eine konvergente Folge ganzer Zahlen ist von einem n_0 an konstant.

Hinweis Wahr.

Frage 398
Thema: Grenzwertbegriff

Sei (a_n) eine Folge. Beschreiben Sie das Faktum „die Folge (a_n) divergiert“ so, dass dabei keine Negation („nicht“, „kein“, „un-“ oder ähnlich) verwendet wird.

Hinweis Folgende Aussage muss verneint werden: Es gibt ein $a \in \mathbb{R}$, so dass für jedes $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ existiert mit $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

Frage 399

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Ist die Folge $(a_n) = \prod_{i=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}$ konvergent? Dabei ist allgemein $\prod_{k=1}^{n} x_k = x_1 \cdot \ldots \cdot x_n$.

Hinweis Versuchen Sie zu zeigen, dass die Folge monoton und beschränkt ist.

Frage 400

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$, dann ist $f''(x) = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

Hinweis Quotientenregel.

Antwort 398

Thema: Grenzwertbegriff

Für jedes $a \in \mathbb{R}$ gibt es ein $\varepsilon > 0$, so dass es für jedes $n_0 \in \mathbb{N}$ ein $n > n_0$ mit $|a - a_n| > \varepsilon$ gibt.

Antwort 397
Thema: Grenzwertbegriff

Wahr. Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $a_n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei a der Grenzwert dieser Folge. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \frac{1}{2}$ für alle $n > n_0$. Da die Folge gegen a konvergiert, existiert so ein n_0. Die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $|a - x| < \frac{1}{2}$ enthält nur eine einzige ganze Zahl z, das heißt, für alle $n > n_0$ muss gelten $a_n = z$.

Antwort 400

Thema: Differentiationsregeln

Wahr, denn mit der Quotientenregel ist $f''(x) = \frac{2x(x^2+1)-(x^2-1)2x}{(x^2+1)^2} = \frac{4x}{(x^2+1)^2}$.

Antwort 399

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Ja. Es gilt nämlich $0 < a_n < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn jeder Faktor von a_n erfüllt diese Ungleichungen. Das heißt, die Folge ist beschränkt. Außerdem ist

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{\prod_{i=1}^{n} \frac{2k-1}{2k}}{\prod_{i=1}^{n+1} \frac{2k-1}{2k}} = \frac{1}{\frac{2(n+1)-1}{2(n+1)}} = \frac{2n+2}{2n+1} > 1.$$

Die Folge ist also monoton fallend und damit konvergent.

Frage 401

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = x\sin(x)$, dann ist $f''(x) = x\cos(x) + \sin(x)$.

Hinweis Produktregel.

Frage 402

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \exp(\sin(x))$, dann ist $f''(x) = \cos(x)\exp(\sin(x))$.

Hinweis Kettenregel.

Frage 403

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Wenn $\log_2(x+3) = 5$ ist, dann ist $x = 29$.

Hinweis Wahr.

Frage 404

Thema: Trigonometrische Funktionen

Wahr oder falsch? $\lim_{x \to 0} \dfrac{\sin(3x)}{\sin(7x)} = \dfrac{7}{3}$.

Hinweis Falsch.

Antwort 402
Thema: Differentiationsregeln

Wahr mit der Kettenregel.

Antwort 401

Thema: Differentiationsregeln

Wahr mit der Produktregel.

Antwort 404

Thema: Trigonometrische Funktionen

Falsch. Für $x \neq 0$ gilt nämlich $\frac{\sin(3x)}{\sin(7x)} = 3x\frac{\sin(3x)}{3x}\frac{1}{7x}\frac{7x}{\sin(7x)} = \frac{3}{7}\frac{\sin(3x)}{3x}\frac{7x}{\sin(7x)}$. Ist (x_n) eine Nullfolge, dann sind auch $(3x_n)$ und $(7x_n)$ Nullfolgen, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sin(3x_n)}{3x_n} = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{7x_n}{\sin(7x_n)} = 1$. Damit folgt $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin(3x)}{\sin(7x)} = \lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{3}{7}\dfrac{\sin(3x)}{3x}\dfrac{7x}{\sin(7x)} = \dfrac{3}{7}$.

Antwort 403

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr, denn aus $\log_2(x + 3) = 5$ folgt $2^5 = x + 3$, also $x = 32 - 3 = 29$.

Frage 405

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? $\lim\limits_{x \to 0} \frac{|x|}{x}$ existiert nicht.

Hinweis Wahr.

Frage 406

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to a} g(x)$ beide nicht existieren, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to a}(f+g)(x)$ nicht.

Hinweis Falsch.

Frage 407

Thema: Definition von Stetigkeit

Geben Sie ein Beispiel für Funktionen $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, so dass $f + g$, $f \cdot g$ und $\frac{f}{g}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig sind, aber f und g sind in keinem Punkt stetig.

Hinweis Denken Sie an die Dirichlet-Funktion und wandeln Sie diese etwas ab.

Frage 408

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$ existiert nicht.

Hinweis Erweitern Sie den Bruch mit $\sqrt{x+3}+\sqrt{3}$.

Antwort 406

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Falsch. Sei $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{1}{x}$. Sei $(x_n) = (\frac{1}{n})$. Dann ist $(f(x_n)) = (n)$ unbeschränkt, also nicht konvergent. Es folgt, dass $\lim\limits_{x \to 0} f(x)$ nicht existiert. Sei $g = -f$. Auch $\lim\limits_{x \to 0} g(x)$ existiert nicht. Aber $f + g = \hat{0}$, die konstante Funktion, also $\lim\limits_{x \to 0} (f+g)(x) = 0$.

Antwort 405

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr. Sei $(x_n) = (\frac{1}{n})$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|\frac{1}{n}|}{\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1$. Ist $(y_n) = (-\frac{1}{n})$, dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|-\frac{1}{n}|}{-\frac{1}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} -1 = -1$. Damit exist $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|}{x}$ nicht.

Antwort 408

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Falsch. Für $x \neq 0$ gilt $\frac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \frac{(\sqrt{x+3}-\sqrt{3})(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \frac{x+3-3}{x(\sqrt{x+3}+\sqrt{3})} = \frac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}}$. Damit ist $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1}{\sqrt{x+3}+\sqrt{3}} = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}$.

Antwort 407
Thema: Definition von Stetigkeit

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} -1, & x \in \mathbb{Q} \\ 1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ -1, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.
Ein ähnlicher Beweis wie der, dass die Dirichlet-Funktion in keinem Punkt stetig ist, zeigt auch, dass f und g in keinem Punkt stetig sind. Es gilt aber $f + g = \hat{0}$, $f \cdot g = (\widehat{-1})$ und $\frac{f}{g} = (\widehat{-1})$, also sind diese Funktionen auf ganz $\mathbb{R}$ stetig.

Frage 409

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x^2 + x - 2}{(x-1)^2}$ existiert nicht.

Hinweis Wahr.

Frage 410

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Wenn $\lim_{x\to a} f(x)$ und $\lim_{x\to a}(f(x) + g(x))$ existieren, dann existiert auch $\lim_{x\to a} g(x)$.

Hinweis Wahr.

Frage 411

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to a}((fg)(x))$ existieren, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Hinweis Falsch.

Frage 412

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \frac{3x+2}{2x+3}$, dann ist $f''(x) = \frac{5}{(2x+3)^2}$.

Hinweis Quotientenregel.

Antwort 410

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr, denn wenn $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ und $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x))$ existieren, dann existiert auch $\lim\limits_{x\to a}(f(x)+g(x)-f(x)) = \lim\limits_{x\to a} g(x)$.

Antwort 409

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr. Für $x \neq 1$ ist $\frac{x^2+x-2}{(x-1)^2} = \frac{(x+2)(x-1)}{(x-1)^2} = \frac{x+2}{x-1}$. Sei nun $(x_n) = (1 + \frac{1}{n})$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1 + \frac{1}{n} + 2}{1 + \frac{1}{n} - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} n(3 + \dfrac{1}{n}) = \lim\limits_{n\to\infty} (3n+1)$. Da die Folge $(3n+1)$ unbeschränkt ist, existiert der Grenzwert nicht.

Antwort 412
Thema: Differentiationsregeln

Wahr mit der Quotientenregel.

Antwort 411
Thema: Grenzwerte von Funktionen

Falsch, denn für $f = \hat{0}$ gilt immer $\lim_{x \to a}((fg)(x)) = 0$, egal, wie g aussieht.

Frage 413

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \sqrt{1+\sqrt{x}}$ ist, dann ist $f''(x) = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

Hinweis Kettenregel.

Frage 414

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \exp(\frac{\sin(x)}{\cos(x)})$ ist, dann ist $f''(x) = \frac{1}{\cos^2(x)\exp(\frac{\sin(x)}{\cos(x)})}$.

Hinweis Ketten- und Quotientenregel.

Frage 415

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Wenn $\log_2(2^{4x}) = 20$ ist, dann ist $x = 5$.

Hinweis Wahr.

Frage 416

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \frac{x}{x^2+1}$, dann ist $f''(x) = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Hinweis Quotientenregel.

Antwort 414

Thema: Differentiationsregeln

Falsch. Mit Ketten- und Quotientenregel ist $f''(x) = \frac{\cos^2(x)+\sin^2(x)}{\cos^2(x)} \exp(\frac{\sin(x)}{\cos(x)}) = \frac{1}{\cos^2(x)} \exp(\frac{\sin(}{\cos(}$

Antwort 413

Thema: Differentiationsregeln

Wahr, denn $f''(x) = (1+\sqrt{x})'' \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{1}{2\sqrt{x}} \frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{x}}} = \frac{1}{4\sqrt{x}\sqrt{1+\sqrt{x}}}$.

Antwort 416

Thema: Differentiationsregeln

Wahr, denn mit der Quotientenregel ist $f''(x) = \frac{(x^2+1)-x(2x)}{(x^2+1)^2} = \frac{1-x^2}{(x^2+1)^2}$.

Antwort 415

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr, denn wenn $\log_2(2^{4x}) = 20$ gilt, dann ist $2^{20} = 2^{4x}$, also $4x = 20$.

Frage 417

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = \sin(x^3)$, dann ist $f''(x) = \cos(x^3)3x^2$.

Hinweis Kettenregel.

Frage 418

Thema: Differentiationsregeln

Wenn $f(x) = \cos^2(x)$, dann ist $f''(x) = -2\sin(x)\cos(x)$.

Hinweis Wahr.

Frage 419

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2}$ existiert nicht.

Hinweis Erweitern Sie den Bruch mit $\sqrt{x^2+3}+2$.

Frage 420

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Sei $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) = \frac{2x}{2|x|}$. Dann existiert $\lim_{x \to 0} f(x)$ nicht.

Hinweis Wahr.

Antwort 418

Thema: Differentiationsregeln

Wahr mit der Kettenregel.

Antwort 417

Thema: Differentiationsregeln

Wahr mit der Kettenregel.

Antwort 420

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr. Sei $(x_n) = (\frac{(-1)^n}{n})$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{2\frac{(-1)^n}{n}}{\frac{2}{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} (-1)^n$, das heißt, der Grenzwert existiert nicht.

Antwort 419

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Falsch. Für $x \neq 1$ gilt $\frac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \frac{(x-1)(\sqrt{x^2+3}+2)}{(\sqrt{x^2+3}-2)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{(x-1)\sqrt{x^2+3}+2}{x^2-1} = \frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1}$, also $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{\sqrt{x^2+3}-2} = \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1} = 2.$

Frage 421

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Wenn $\log_2(x^2) + \log_2(x) = 4$ ist, dann ist $x = \sqrt[3]{16}$.

Hinweis Wahr.

Frage 422

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = x^2 \sin(\frac{1}{x})$ für $x \neq 0$, dann ist $f''(x) = 2x \sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$.

Hinweis Produkt- und Kettenregel.

Frage 423

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = (\frac{x}{1+x})^5$, dann ist $f''(x) = \frac{5x^4}{(1+x)^6}$.

Hinweis Ketten- und Quotientenregel.

Frage 424

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Es gibt kein $x \in \mathbb{R}$, das die Gleichung $\exp(x) - 3\exp(-x) = 2$ erfüllt.

Hinweis Falsch.

Antwort 422

Thema: Differentiationsregeln

Wahr. Es ist $f''(x) = 2x\sin(\frac{1}{x}) + x^2(-\frac{1}{x^2})\cos(\frac{1}{x}) = 2x\sin(\frac{1}{x}) - \cos(\frac{1}{x})$.

Antwort 421

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr, denn wenn $\log_2(x^2) + \log_2(x) = \log_2(x^3) = 4$ gilt, dann ist $2^4 = 16 = x^3$, also $x = \sqrt[3]{16}$.

Antwort 424

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

---

Falsch. Es ist $\exp(x) - 3\exp(-x) = \exp(x) - \frac{3}{\exp(x)} = 2$ genau dann, wenn $(\exp(x))^2 - 3 = 2\exp(x)$ oder $(\exp(x))^2 - 2\exp(x) - 3 = 0$ gilt. Ist $\exp(x) = 3$, dann wird diese Gleichung erfüllt. Für $x = \ln(3)$ gilt also $\exp(x) - 3\exp(-x) = 2$.

Antwort 423

Thema: Differentiationsregeln

Wahr. Es ist $f''(x) = 5(\frac{x}{1+x})^4(\frac{1+x-x}{(1+x)^2}) = \frac{5x^4}{(1+x)^6}$.

Frage 425

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Wenn $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert und $\lim_{x \to a} g(x)$ nicht existiert, dann kann auch $\lim_{x \to a}(f+g)(x)$ nicht existieren.

Hinweis Wahr.

Frage 426

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{1}{x-1}$ existiert nicht.

Hinweis Wahr.

Frage 427
Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wie ist die Dirichletfunktion definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 428

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Was ist der Unterschied zwischen der Definition der Komposition zweier Abbildungen f und g aus Kurseinheit 1 und der Definition der Komposition zweier Funktionen aus Kurseinheit 5?

Hinweis Es geht um den Wertebereich von f und den Definitionsbereich von g.

Antwort 426

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr. Sei $(x_n) = (1 + \frac{1}{n})$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = 1$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{1-(1+\frac{1}{n})} = \lim\limits_{n\to\infty}(-n)$. Da dieser Grenzwert nicht existiert, existiert auch $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{1-x}$ nicht.

Antwort 425

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr. Wenn nämlich $\lim_{x\to a}(f+g)(x)$ existiert, dann auch $\lim_{x\to a}((f+g)(x)-f(x)) = \lim_{x\to a} g(x)$.

Antwort 428
Thema: Eigenschaften von Funktionen

In Kurseinheit 1 muss der Wertebereich von f gleich dem Definitionsbereich von g sein, in Kurseinheit 5 reicht es, wenn der Wertebereich von f im Definitionsbereich von g enthalten ist.

Antwort 427

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Es ist die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q} \\ 0, & x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$.

Frage 429

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Was ist der Definitionsbereich einer Funktion?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 430

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wie ist der Graph einer Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 431

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Kann man jeden Funktionsgraph einer Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ malen?

Hinweis Nein.

Frage 432

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x)$. Sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = x^3$. Was ist $f \circ g$ und was ist $g \circ f$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 430

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Der Graph einer Funktion ist definiert als $\{(x, f(x)) \mid x \in D\}$.

Antwort 429

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Der Definitionsbereich ist eine nicht leere Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Antwort 432

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Für alle $x \in \mathbb{R}$ ist $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = \sin(x^3)$ und $(g \circ f)(x) = g(f(x)) = (\sin(x))^3$.

Antwort 431

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Nein. Es müssen zum Beispiel D und der Wertebereich von f beschränkt sein. Aber selbst dann lassen sich nicht alle Funktionsgraphen malen, wie das Beispiel der Dirichletfunktion zeigt.

Frage 433

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion. Was ist die Bedingung, die erfüllt sein muss, damit f eine Umkehrfunktion f^{-1} besitzt?

Hinweis Die Umkehrfunktion f^{-1} von f erfüllt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(D)}$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$.

Frage 434

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Was ist die Umkehrfunktion der Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$?

Hinweis Die Umkehrfunktion f^{-1} von f erfüllt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(D)}$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$.

Frage 435

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Besitzt die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp(x^2)$ eine Umkehrfunktion?

Hinweis Nein.

Frage 436

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Was ist die Umkehrfunktion der Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp(x^2)$?

Hinweis Die Umkehrfunktion f^{-1} von f erfüllt $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{f(D)}$ und $f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_D$.

Antwort 434

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Die Umkehrfunktion ist f selbst.

Antwort 433

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Die Funktion f muss injektiv sein.

Antwort 436

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Die Umkehrfunktion ist $g : \{x \in \mathbb{R} \mid x \geq 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = \sqrt{\ln(x)}$. Dann gilt nämlich $g \circ f(x) = g(f(x)) = g(\exp(x^2)) = \sqrt{\ln(\exp(x^2))} = x$ für alle $x \geq 0$ und $f \circ g(x) = f(\sqrt{\ln(x)}) = x$ für alle $x \geq 1$.

Antwort 435

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Nein. Es gilt $f(1) = f(-1)$, das heißt, f ist nicht injektiv und besitzt damit auch keine Umkehrfunktion.

Frage 437

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wahr oder falsch? Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x-1}{x^2+1}$ ist monoton.

Hinweis Falsch.

Frage 438
Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wahr oder falsch? Die Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = -\frac{1}{x}$ ist streng monoton wachsend.

Hinweis Wahr.

Frage 439
Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wahr oder falsch? Wenn f streng monoton wachsend ist, dann ist die Umkehrfunktion streng monoton fallend.

Hinweis Falsch.

Frage 440

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion, die monoton, aber nicht streng monoton ist.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 438

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wahr. Seien $a, b \in \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0\}$ mit $a < b$. Dann ist $f(a) = -\frac{1}{a} < -\frac{1}{b} = f(b)$.

Antwort 437

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Falsch. Es ist $f(0) = -1$ und $f(1) = 0$, also ist f nicht monoton fallend. Wegen $f(2) = \frac{1}{5} > \frac{3}{17} = f(4)$ ist f aber auch nicht monoton wachsend.

Antwort 440
Thema: Eigenschaften von Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 5$ für alle x. Dann ist f monoton, denn $f(a) \leq f(b)$ für alle $a \leq b$, aber f ist nicht streng monoton.

Antwort 439

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Falsch. Wenn f streng monoton wachsend ist, dann ist auch die Umkehrfunktion streng monoton wachsend.

Frage 441

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Seien $f, g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2$ und $g(x) = \sin(x)$. Wie sind $f + g$, fg und $-f$ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 442

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wie kann man den Graph der Umkehrfunktion f^{-1} geometrisch beschreiben?

Hinweis Der Graph von f muss an einer bestimmten Achse gespiegelt werden.

Frage 443

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wahr oder falsch? Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 15$ ist nach unten beschränkt.

Hinweis Wahr.

Frage 444

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Wieviele Nullstellen kann ein Polynom vom Grad n über einem Körper $\mathbb{K}$ höchstens haben?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 442

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Man erhält den Funktionsgraph von f^{-1}, indem man den Graph von f an der Diagonalen $\{(x, x) \mid x \in \mathbb{R}\}$ spiegelt.

Antwort 441

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Es sind $f+g, fg, -f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $(f+g)(x) = x^2 + \sin(x)$, $(fg)(x) = x^2 \sin(x)$ und $(-f)(x) = -x^2$.

Antwort 444

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Es kann höchstens n verschiedene Nullstellen haben.

Antwort 443

Thema: Eigenschaften von Funktionen

Wahr. Da $x^2 \geq 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt, ist $x^2 - 15 \geq -15$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und f ist nach unten beschränkt.

Frage 445

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Sei $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \in \mathbb{R}[T]$. Wie ist die zugehörige Polynomfunktion $\tilde{\mathrm{p}}$ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 446

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 + 3x + 1$. Wie sind f^2 und $f \circ f$ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 447

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Wie lautet der Identitätssatz für Polynomfunktionen?

Hinweis Es geht darum, wann zwei Polynome gleich sind.

Frage 448

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Gibt es Polynome p und q aus $\mathbb{R}[T]$ mit $p \neq q$ und $\tilde{\mathrm{p}} = \tilde{\mathrm{q}}$?

Hinweis Nein.

Antwort 446

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Es sind $f^2, f \circ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f^2(x) = f(x)f(x) = (x^2+3x+1)(x^2+3x+1) = x^4+6x^3+11x^2+6x+1$ und $f \circ f(x) = f(f(x)) = f(x^2+3x+1) = (x^2+3x+1)^2+3(x^2+3x+1)+1 = x^4+6x^3+11x^2+6x+1+3x^2+9x+3+1 = x^4+6x^3+14x^2+15x+5$.

Antwort 445

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Es ist $\tilde{\mathrm{p}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\tilde{\mathrm{p}}(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$.

Antwort 448

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Nein. Über den reellen Zahlen folgt aus $p \neq q$ immer schon $\tilde{\mathrm{p}} \neq \tilde{\mathrm{q}}$.

Antwort 447

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Seien $p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i, q = \sum_{i=0}^{n} b_i T^i \in \mathbb{R}[T]$, und seien $\tilde{\mathrm{p}}$ und $\tilde{\mathrm{q}}$ die zugehörigen Polynomfunktionen. Sei $\mathrm{Grad}(p) = n$ und sei $\mathrm{Grad}(q) = m$. Gilt $\tilde{\mathrm{p}}(x) = \tilde{\mathrm{q}}(x)$ für $\max(n, m) + 1$ verschiedene $x \in \mathbb{R}$, so ist $n = m$ und $a_i = b_i$ für alle $0 \leq i \leq n$. Insbesondere gilt $\tilde{\mathrm{p}}(x) = \tilde{\mathrm{q}}(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Frage 449

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Wahr oder falsch? Sei $p = T^2 - 1$ und $q = T - 1$. Dann ist $\frac{\tilde{\mathrm{p}}}{\tilde{\mathrm{q}}} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{\tilde{\mathrm{p}}}{\tilde{\mathrm{q}}}(x) = x + 1$.

Hinweis Achten Sie auf den Definitionsbereich.

Frage 450

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Wie sieht der Definitionsbereich einer rationalen Funktion $\frac{\tilde{p}}{\tilde{q}}$ aus?

Hinweis Was ist mit den Nullstellen von $\tilde{q}$?

Frage 451

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Sei ρ eine irrationale Zahl und sei $a \in \mathbb{R}$ mit $a > 0$. Wie ist a^ρ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 452

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Wenn $0 < a < 1$ ist und $\rho, \sigma \in \mathbb{R}$ mit $\rho < \sigma$, dann ist $a^\rho < a^\sigma$.

Hinweis Falsch.

Antwort 450

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Der Definitionsbereich ist $\mathbb{R} \setminus \{\text{Nullstellen von } q\}$.

Antwort 449

Thema: Polynomfunktionen und rationale Funktionen

Falsch. Es ist $\frac{\tilde{\mathrm{p}}}{\tilde{\mathrm{q}}} : \mathbb{R} \setminus \{1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\frac{\tilde{\mathrm{p}}}{\tilde{\mathrm{q}}}(x) = \frac{x^2-1}{x-1} = x + 1$.

Antwort 452

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Falsch, es gilt dann $a^\rho > a^\sigma$.

Antwort 451

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Sei (r_n) eine Folge rationaler Zahlen mit Grenzwert ρ. Dann ist $a^\rho = \lim\limits_{n\to\infty} a^{r_n}$. Dabei ist $a^{\frac{p}{q}}$ für eine rationale Zahl $\frac{p}{q}$ definiert als $\sqrt[q]{a^p}$.

Frage 453

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Für welche reellen Zahlen a und ρ ist der Ausdruck a^ρ definiert?

Hinweis Er ist zum Beispiel definiert für $a > 0$ und beliebiges ρ.

Frage 454

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Ist $(-27)^{\frac{1}{3}}$ definiert?

Hinweis Nein.

Frage 455

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Wie lautet der Zwischenwertsatz von Bolzano?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 456

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Ist e^π definiert?

Hinweis Ja.

Antwort 454

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Nein, denn der Ausdruck a^ρ ist nur für $\rho \notin \mathbb{Z}$ definiert, wenn $a > 0$ ist.

Antwort 453

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Der Ausdruck ist für alle $a > 0$ und $\rho \in \mathbb{R}$ definiert. Außerdem ist er definiert für $a < 0$ und $\rho \in \mathbb{Z}$ und für $a = 0$ und $\rho > 0$.

Antwort 456

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Ja, denn es ist $e > 0$ und $\pi \in \mathbb{R}$.

Antwort 455

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, und sei $d \in \mathbb{R}$ mit $f(a) \leq d \leq f(b)$, falls $f(a) \leq f(b)$, oder $f(a) \geq d \geq f(b)$, falls $f(a) \geq f(b)$. Dann gibt es ein $x \in [a, b]$ mit $f(x) = d$.

Frage 457

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Was können Sie über die Funktion $\exp_1$ sagen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 458

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Ist $0 < a < 1$, dann ist das Bild von $\exp_a : \{x \in \mathbb{R} \mid x < 0\} \longrightarrow \mathbb{R}$ die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\}$.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 459

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

---

Wahr oder falsch? Für $x, y \in (0, \infty)$ und $a > 0$ mit $a \neq 1$ gilt $\log_a(x + y) = \log_a(x) \log_a(y)$.

Hinweis Falsch.

Frage 460

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Für $a > 0$ und $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp_a(xy) = \exp_a(x)^y$.

Hinweis Wahr.

Antwort 458

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr.

Antwort 457

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Es gilt $\exp_1 = \hat{1}$.

Antwort 460

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr, denn für alle $a > 0$ und alle $x, y \in \mathbb{R}$ gilt $\exp_a(xy) = a^{xy} = (a^x)^y = \exp_a(x)^y$.

Antwort 459

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Falsch. Sei $a = 2$. Dann ist $\log_2(4) = 2$ und $\log_2(2) = 1$. Dann ist $\log_2(4)\log_2(2) = 2 \cdot 1 = 2 \neq \log_2(2+4) = \log_2(6)$.

Frage 461
Thema: Definition von Stetigkeit

Geben Sie zwei verschiedene Definitionen der Stetigkeit einer Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ im Punkt $a \in D$.

Hinweis Es gibt das $\varepsilon - \delta-$Kriterium und eine Definition über Folgen.

Frage 462

Thema: Definition von Stetigkeit

Wahr oder falsch? Seien $f, g : D \longrightarrow \mathbb{R}$. Wenn f und fg stetig sind, dann ist auch g stetig.

Hinweis Falsch.

Frage 463

Thema: Definition von Stetigkeit

Wahr oder falsch? Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sqrt{\exp(x) + x^2 + 1}$ ist stetig.

Hinweis Wahr.

Frage 464

Thema: Definition von Stetigkeit

Wahr oder falsch? Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \begin{cases} x^2 + 1, & \text{für } x \leq 0 \\ \cos(x), & \text{für } x > 0 \end{cases}$ ist stetig.

Hinweis Wahr.

Antwort 462

Thema: Definition von Stetigkeit

Falsch. Ist $f = \hat{0}$, dann ist fg immer stetig.

Antwort 461

Thema: Definition von Stetigkeit

1. Ist (a_n) eine Folge in D mit Grenzwert a, dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = f(a)$.
2. Für jedes $\varepsilon > 0$ gibt es ein $\delta > 0$ mit $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ für alle $x \in D$ mit $|x - a| < \delta$.

Antwort 464
Thema: Definition von Stetigkeit

Wahr. Die Funktionen x^2+1 und $\cos(x)$ sind stetig. Es muss also nur noch untersucht werden, ob f auch im Punkt 0 stetig ist. Sei also $\varepsilon > 0$. Dann gibt ein $\delta_1 > 0$ mit $|\cos(x) - 1| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta_1$, denn die Funktion cos ist stetig in 0. Weiter gibt es ein $\delta_2 > 0$ mit $|x^2 + 1 - 1| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta_2$, denn die Funktion $x^2 + 1$ ist stetig in 0. Sei also nun $\delta = \min(\delta_1, \delta_2)$. Dann gilt $|f(x) - f(0)| = |f(x) - 1| < \varepsilon$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \delta$. Damit ist f überall stetig.

Antwort 463

Thema: Definition von Stetigkeit

Wahr. Die Funktion f ist eine Verkettung stetiger Funktionen und damit stetig.

Frage 465

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Wie lautet der Nullstellensatz von Bolzano?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 466

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Wie kann man zeigen, dass die Funktion $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\exp(1-x)}}$ mindestens eine Nullstelle besitzt?

Hinweis Nullstellensatz von Bolzano.

Frage 467

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Was ist die Beweisidee, wenn man den Zwischenwertsatz von Bolzano mit dem Nullstellensatz von Bolzano beweisen möchte?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 468
Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Wahr oder falsch? Wenn $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ist, und das Intervall I ist beschränkt, dann ist auch $f(I)$ beschränkt.

Hinweis Betrachten Sie die Funktion $f : (0, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1}{x}$.

Antwort 466

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Mit dem Nullstellensatz von Bolzano. Es ist nämlich $f(0) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\exp(1)}} = 1 - \sqrt{\frac{2}{e}} > 0$, denn $e > 2$, also $\frac{2}{e} < 1$ und $\sqrt{\frac{2}{e}} < 1$. Weiter ist $f(1) = 1 - \sqrt{\frac{2}{\exp(0)}} = 1 - \sqrt{2} < 0$. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano folgt, dass es mindestens eine Nullstelle von f gibt.

Antwort 465

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $f(a) < 0$ und $f(b) > 0$ (oder $f(a) > 0$ und $f(b) < 0$). Dann gibt es ein $x \in (a, b)$ mit $f(x) = 0$.

Antwort 468

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Falsch. Es ist zum Beispiel das Intervall $(0,1]$ beschränkt, und $f:(0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x)=\frac{1}{x}$ ist stetig, aber $f((0,1])$ ist unbeschränkt.

Antwort 467
Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Beim Zwischenwertsatz hat man eine stetige Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ und ein d zwischen $f(a)$ und $f(b)$ gegeben. Man wendet dann den Nullstellensatz auf die Funktion $g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $g(x) = f(x) - d$ an.

Frage 469

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Was können Sie über das Bild einer stetigen Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall sagen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 470
Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Durch welche Eigenschaft ist ein Intervall gekennzeichnet?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 471

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Was sagt der Satz vom Minimum und Maximum?

Hinweis Es geht darum, dass eine stetige Funktion auf einem abgeschlossenen Intervall Minimum und Maximum annimmt.

Frage 472

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Wahr oder falsch? Wenn $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und injektiv ist, dann ist f streng monoton.

Hinweis Wahr.

Antwort 470
Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Für ein Intervall I gilt immer, dass für $x_1, x_2 \in I$ auch alle Punkte zwischen x_1 und x_2 in I liegen.

Antwort 469

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Das Bild ist ein abgeschlossenes Intervall.

Antwort 472

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Wahr.

Antwort 471

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es $x_1, x_2 \in [a,b]$ mit $f(x_1) \leq f(x) \leq f(x_2)$ für alle $x \in [a,b]$.

Frage 473

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wann ist $a \in \mathbb{R}$ Häufungspunkt einer Teilmenge M von $\mathbb{R}$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 474

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Wenn M eine nicht leere beschränkte Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist, dann sind $\sup M$ und $\inf M$ Häufungspunkte von M.

Hinweis Falsch.

Frage 475

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $a \in D$ stetig ist, wobei a ein Häufungspunkt von D ist. Wann heißt f konvergent in a?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 476

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr oder falsch? Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ für $x \neq 1$ und $f(1) = 17$. Dann ist f konvergent in 1.

Hinweis Wahr.

Antwort 474

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Falsch. Sei zum Beispiel $M = [0,1] \cup \{2\}$. Dann ist M nicht leer und beschränkt mit $\sup M = 2$. Es gibt aber keine Folge in $M \setminus \{2\}$, die gegen 2 konvergiert. Also ist 2 kein Häufungspunkt von M.

Antwort 473

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wenn es mindestens eine Folge in $M \setminus \{a\}$ gibt, deren Grenzwert a ist.

Antwort 476
Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wahr. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{R}\setminus\{1\}$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 1$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n^2 - 1}{a_n - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + 1 = 2$, das heißt, f ist konvergent in 1.

Antwort 475

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Wenn für jede Folge (a_n) in $D \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert, auch die Folge $(f(a_n))$ konvergiert.

Frage 477

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Was ist eine hebbare Unstetigkeit?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 478

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2+x}{x^3-1}$ für $x \neq 1$ und $f(1) = 0$. Hat f in 1 eine hebbare Unstetigkeit?

Hinweis Nein.

Frage 479

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und a ein Häufungspunkt von D. Wann und wie ist $\lim\limits_{x \to a} f(x)$ definiert?

Hinweis Der Grenzwert ist definiert, wenn f in a konvergent ist. Wie ist er in diesem Fall definiert?

Frage 480

Thema: Differentiationsregeln

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, wobei I ein Intervall ist. Sei $a \in I$. Wann ist a in I differenzierbar?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 478

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Nein. Die Folge $(x_n) = (1+\frac{1}{n})$ konvergiert gegen 1, und es gilt $f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(1+\frac{1}{n})^2 + 1 + \frac{1}{n}}{(1+\frac{1}{n})^3 - 1} = \dfrac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}+1+\frac{1}{n}}{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}-1} = \dfrac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}} = \dfrac{2n+2+\frac{1}{n}}{3+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}$. Für $n \to \infty$ konvergiert der Nenner des Bruchs gegen 3, während der Zähler unbeschränkt ist. Insgesamt ist die Folge also unbeschränkt, und damit existiert $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ nicht. Die Unstetigkeit von f in 1 ist also nicht hebbar.

Antwort 477
Thema: Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, die in $a \in D$ nicht stetig ist, wobei a ein Häufungspunkt von D ist. Wenn $f|_{D\setminus\{a\}}$ auf D stetig fortgesetzt werden kann, dann hat f in a eine hebbare Unstetigkeit.

Antwort 480

Thema: Differentiationsregeln

Wenn $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ bzw. $\lim\limits_{h\to 0} \dfrac{f(a+h)-f(a)}{h}$ existiert.

Antwort 479

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Der Grenzwert ist definiert, wenn f in a konvergent ist. Ist das der Fall, dann ist $\lim_{x\to a} f(x) = \lim_{n\to\infty} f(a_n)$ für jede Folge (a_n) aus $D \setminus \{a\}$, die gegen a konvergiert.

Frage 481

Thema: Differentiationsregeln

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, wobei I ein Intervall ist, in $a \in I$ differenzierbar. Geben Sie zwei verschiedene Definitionen für $f''(a)$.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 482

Thema: Differentiationsregeln

Berechnen Sie die Ableitung von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 4x^2 + x$ mit dem Differentialquotienten.

Hinweis Der Differentialquotient ist $\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$.

Frage 483

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn eine Funktion in einem Punkt $a \in D$ stetig ist, dann ist sie in a auch differenzierbar.

Hinweis Falsch.

Frage 484
Thema: Extrema

Wahr oder falsch? Ein globales Extremum ist immer auch ein lokales Extremum.

Hinweis Wahr.

Antwort 482
Thema: Differentiationsregeln

Seien $x, a \in \mathbb{R}$ mit $x \neq a$. Dann ist $\frac{f(x)-f(a)}{x-a} = \frac{4x^2+x-4a^2-a}{x-a} = \frac{4x^2-4a^2+(x-a)}{x-a} = \frac{4(x+a)(x-a)+(x-}{x-a}$ $4(x+a)+1$, also $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} = \lim\limits_{x\to a} 4(x+a)+1 = 8a+1$. Also ist $f''(x) = 8x+1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Antwort 481

Thema: Differentiationsregeln

Es gilt $f''(a) = \lim\limits_{x \to a} \dfrac{f(x) - f(a)}{x - a} = \lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(a+h) - f(a)}{h}$.

Antwort 484
Thema: Extrema

Wahr. Für ein globales Extremum a gilt $f(a) \geq f(x)$ bzw. $f(a) \leq f(x)$ für alle $x \in D$, also gilt die entsprechende Ungleichung insbesondere in einer δ-Umgebung von a.

Antwort 483
Thema: Differentiationsregeln

Falsch. Die Betragsfunktion ist zum Beispiel im Punkt 0 stetig, aber nicht differenzierbar.

Frage 485

Thema: Extrema

Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und ein $a \in D$, so dass f in a ein lokales, aber kein globales Maximum besitzt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 486
Thema: Extrema

Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und ein $a \in D$, so dass f ein lokales Minimum in a hat, aber in a nicht differenzierbar ist.

Hinweis Betragsfunktion.

Frage 487

Thema: Extrema

Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$ und ein $a \in D$ mit $f''(a) = 0$, aber f hat in a kein lokales Extremum.

Hinweis Betrachten Sie $f(x) = x^3$.

Frage 488
Thema: Extrema

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \exp(x^3 - 3x^2 + 1)$. Geben Sie eine zweielementige Teilmenge von $\mathbb{R}$ an, die auf jeden Fall alle lokalen Extrema der Funktion enthält.

Hinweis Ist f differenzierbar in a und hat ein lokales Extremum in a, dann gilt $f''(a) = 0$.

Antwort 486
Thema: Extrema

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |x|$. Dann hat f in 0 ein lokales Minimum, ist aber nicht differenzierbar bei 0.

Antwort 485
Thema: Extrema

Sei $f(x) = 1$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 0$ für $x > 0$. Dann ist in $a = 1$ ein lokales, aber kein globales Maximum.

Antwort 488
Thema: Extrema

Da f überall differenzierbar ist, gilt für alle $a \in \mathbb{R}$, in denen f ein lokales Extremum besitzt, dass $f''(a) = 0$ gilt. Es müssen also nur die Nullstellen der Ableitung von f berechnet werden. Es gilt $f''(x) = (3x^2 - 6x)\exp(x^3 - 3x^2 + 1)$ mit der Kettenregel. Da exp immer größer als 0 ist, sind die Nullstellen von f'' die $x \in \mathbb{R}$ mit $3x^2 - 6x = 0$, also $3x(x-2) = 0$, das heißt, $x = 0$ oder $x = 2$. Die gesuchte Menge ist also $\{0, 2\}$.

Antwort 487
Thema: Extrema

Sei $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^3$. Dann gilt $f''(0) = 0$, aber f hat in 0 kein lokales Extremum.

Frage 489

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig und streng monoton. Sei f in $a \in I$ differenzierbar. Dann ist bekanntlich f^{-1} in $f(a) = b$ differenzierbar. Aber was ist $(f^{-1})''(b)$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 490

Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Wenn $f(x) = x^\pi$ für $x > 0$ ist, dann ist $f''(x) = \pi x^{\pi-1}$.

Hinweis Wahr.

Frage 491

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Besitzt die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{x^2+2x-2}{x^2+1}$ im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle?

Hinweis Nullstellensatz von Bolzano.

Frage 492

Thema: Differentiationsregeln

Zeigen Sie, dass $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 6x - 1$ stetig ist und geben Sie zu jedem ε ein passendes δ an.

Hinweis Versuchen Sie es mit $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$.

Antwort 490

Thema: Differentiationsregeln

Wahr. Die Ableitung der allgemeinen Potenzfunktion $x \mapsto x^a$ für $x > 0$ und $a \in \mathbb{R}$ ist $x \mapsto ax^{a-1}$.

Antwort 489

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Es ist $(f^{-1})''(b) = \frac{1}{f''(a)}$.

Antwort 492

Thema: Differentiationsregeln

Sei $a \in \mathbb{R}$ und sei $\varepsilon > 0$. Sei $\delta = \frac{\varepsilon}{6}$. Für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x - a| < \delta$ gilt dann $|f(x) - f(a)| = |6x - 6a| = 6|x - a| < 6\frac{\varepsilon}{6} = \varepsilon$. Also ist f stetig in a.

Antwort 491

Thema: Stetige Funktionen auf Intervallen

Ja, denn die Funktion ist als rationale Funktion stetig, und es gilt $f(0) = -2$ und $f(1) = \frac{1}{2}$. Mit dem Nullstellensatz von Bolzano folgt, dass f im Intervall $[0, 1]$ eine Nullstelle besitzt.

Frage 493
Thema: Differentiationsregeln

Wahr oder falsch? Sind $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ stetige Funktionen und gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{Q}$, dann gilt schon $f = g$.

Hinweis Wahr.

Frage 494
Thema: Differentiationsregeln

Wie lautet die Produktregel?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 495
Thema: Differentiationsregeln

Wie lautet die Quotientenregel?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 496

Thema: Differentiationsregeln

Wie lautet die Kettenregel?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 494

Thema: Differentiationsregeln

Seien $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und sei $a \in I$ so, dass f und g in a differenzierbar sind. Dann ist fg in a differenzierbar, und es gilt $(fg)''(a) = f''(a)g(a) + f(a)g''(a)$.

Antwort 493
Thema: Differentiationsregeln

Wahr. Sei nämlich $x \in \mathbb{R} \backslash \mathbb{Q}$. Dann gibt es eine Folge (x_n) aus $\mathbb{Q}$, die gegen x konvergiert. Da f und g stetig sind, gilt dann $f(x) = \lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = \lim\limits_{n\to\infty} g(x_n) = g(x)$. Also gilt $f(x) = g(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Antwort 496

Thema: Differentiationsregeln

Seien $f : I_f \longrightarrow \mathbb{R}$ und $g : I_g \longrightarrow \mathbb{R}$ Funktionen mit $g(I_g) \subseteq I_f$, und sei $a \in I_g$ so, dass g in a und f in $g(a)$ differenzierbar ist. Dann ist $f \circ g$ in a differenzierbar, und es gilt $(f \circ g)''(a) = g''(a)f''(g(a))$.

Antwort 495
Thema: Differentiationsregeln

Seien $f, g : I \longrightarrow \mathbb{R}$ und sei $a \in I$ so, dass f und g in a differenzierbar sind und $g(a) \neq 0$ gilt. Dann ist $\frac{f}{g}$ in a differenzierbar, und es gilt $(\frac{f}{g})''(a) = \frac{f''(a)g(a)-f(a)g''(a)}{g(a)^2}$.

Frage 497

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Sei $f : D \longrightarrow \mathbb{R}$, und sei a ein Häufungspunkt von D, so dass $\lim_{x \to a} f(x)$ existiert. Beschreiben Sie, wann f stetig ist, wann f eine hebbare Unstetigkeit in a besitzt, und wann f eine stetige Fortsetzung in a besitzt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 498

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt[n]{2}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 499

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n}{4^n}$ ist konvergent.

Hinweis Quotientenkriterium.

Frage 500

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n}^{-1}$ ist konvergent.

Hinweis Quotientenkriterium.

Antwort 498
Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Sei $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{2}$. Es ist $a_n = (-1)^n 2^{\frac{1}{n}} = (-1)^n \exp(\ln(2)\frac{1}{n})$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} \exp(\ln(2)\dfrac{1}{n}) = \exp(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(2)}{n}) = \exp(0) = 1$, ist (a_n) keine Nullfolge, denn sie enthält die gegen 1 konvergente Teilfolge (a_{2n}).

Antwort 497

Thema: Grenzwerte von Funktionen

Ist $a \in D$ und gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$, dann ist f stetig in a. Ist $a \in D$ und gilt $\lim\limits_{x \to a} f(x) \neq f(a)$, dann besitzt f in a eine hebbare Unstetigkeit. Gilt $a \notin D$, dann besitzt f eine stetige Fortsetzung in a.

Antwort 500
Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Sei $a_n = \binom{2n}{n}^{-1} = \frac{1}{\binom{2n}{n}} = \frac{1\cdots n}{(n+1)\cdots(2n)}$. Für $n \geq 1$ ist dann $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1\cdots(n+1)}{(n+2)\cdots(2n+2)} \frac{(n+1)\cdots(2n}{1\cdots n}$ $\frac{(n+1)^2}{(2n+2)(2n+1)} = \frac{n^2+2n+1}{4n^2+6n+2} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{4+\frac{6}{n}+\frac{2}{n^2}}$, das heißt, $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \dfrac{1}{4} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergiert.

Antwort 499

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Sei $a_n = \frac{2n}{4^n}$. Für $n \geq 1$ ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{2n+2}{4^{n+1}}\frac{4^n}{2n} = \frac{2n+2}{8n} = \frac{n+1}{4n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{4}$, das heißt $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{1}{4} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergiert.

Frage 501

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(5+(-1)^n)^n}$ konvergiert für alle $x \in (-4, 4)$.

Hinweis Wurzelkriterium.

Frage 502

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{n-1}{n}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 503

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\ln(n)}$ ist konvergent.

Hinweis Leibniz-Kriterium.

Frage 504

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-3)^n}{2^n}$ ist konvergent.

Hinweis Geometrische Reihe.

Antwort 502

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n-1}{n} = 1$, also kann $((-1)^n \frac{n-1}{n})$ keine Nullfolge sein, und die Reihe konvergiert nicht.

Antwort 501

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr. Sei $a_n = \frac{x^n}{(5+(-1)^n)^n}$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{|x|}{5+(-1)^n} \leq \frac{|x|}{4} < 1$ für $x \in (-4, 4)$. Mit dem Wurzelkriterium und $q = \frac{|x|}{4}$ folgt, dass die Reihe für $x \in (-4, 4)$ konvergiert.

Antwort 504

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Diese Reihe ist die geometrische Reihe mit $q = -\frac{3}{2}$. Da $|-\frac{3}{2}| > 1$ gilt, ist die Reihe nicht konvergent.

Antwort 503

Thema: Konvergenzkriterien

Da $(\ln(n))$ monoton wachsend und unbeschränkt ist, ist $(\frac{1}{\ln(n)})$ eine Nullfolge. Mit dem Leibniz-Kriterium folgt nun, dass die Reihe konvergiert.

Frage 505

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2)^n}{3^n}$ ist konvergent.

Hinweis Geometrische Reihe.

Frage 506

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{nx^n}{10^n}$ ist 10.

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Frage 507

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{2n-1}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 508

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} n^2(-2)^{-n}$ ist konvergent.

Hinweis Quotientenkriterium.

Antwort 506

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr. Für $n \geq 0$ sei $a_n = \frac{n}{10^n}$. Dann ist $\sqrt[n]{a_n} = \frac{\sqrt[n]{n}}{10}$ und wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\sqrt[n]{n}}{10} = \dfrac{1}{10}$. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt die Behauptung.

Antwort 505

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Die Reihe ist die geometrische Reihe für $q = -\frac{2}{3}$. Da $|-\frac{2}{3}| < 1$ gilt, konvergiert die Reihe.

Antwort 508

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = n^2(-2)^{-n} = (-1)^n \frac{n^2}{2^n}$. Für alle $n \geq 1$ gilt dann $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(n+1)^2 2^n}{2^{n+1} n^2} = \frac{n^2+2n+1}{2n^2} = \frac{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}}{2}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} |\dfrac{a_{n+1}}{a_n}| = \dfrac{1}{2} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergiert.

Antwort 507

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n+1}{2n-1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1+\frac{1}{n}}{2-\frac{1}{n}} = \dfrac{1}{2}$, das heißt, $(\frac{n+1}{2n-1})$ ist keine Nullfolge, und die Reihe ist nicht konvergent.

Frage 509

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$ ist konvergent.

Hinweis Wurzelkriterium.

Frage 510

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n+\sqrt{n}}$ ist konvergent.

Hinweis Leibniz-Kriterium.

Frage 511

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{n+1}{2n-1}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 512
Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt[n]{3}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Antwort 510
Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Für alle $n \geq 1$ gilt $0 < \frac{1}{n+\sqrt{n}} < \frac{1}{n}$. Mit dem Einschnürungssatz folgt, dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+\sqrt{n}} = 0$ gilt. Da außerdem die Folge $(\frac{1}{n+\sqrt{n}})$ monoton fallend ist, gilt nun mit dem Leibniz-Kriterium, dass die Reihe konvergiert.

Antwort 509

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{1}{10^n}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{10^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{10} = \dfrac{1}{10} < 1$. Mit dem Wurzelkriterium folgt, dass die Reihe konvergiert.

Antwort 512

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \sqrt[n]{3} = 3^{\frac{1}{n}} = \exp(\ln(3)\frac{1}{n})$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} \exp(\ln(3)\dfrac{1}{n}) = \exp(\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\ln(3)}{n}) = \exp(0) = 1$. Die Folge a_n ist also keine Nullfolge, und damit ist die Reihe nicht konvergent.

Antwort 511

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Für $n \geq 1$ sei $a_n = (-1)^n \frac{n+1}{2n-1}$. Dann gilt $(a_{2n}) = (\frac{2n+1}{4n-1}) = (\frac{2+\frac{1}{n}}{4-\frac{1}{n}})$, und $\lim\limits_{n\to\infty} a_{2n} = \dfrac{1}{2}$. Die Folge (a_n) besitzt also eine Teilfolge, die nicht gegen 0 konvergiert und kann daher keine Nullfolge sein. Dann ist aber die Reihe nicht konvergent.

Frage 513

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n^2}{10^n} x^n$ ist 10.

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Frage 514
Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ ist 0.

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Frage 515

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sqrt[n]{3}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 516

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$ ist konvergent.

Hinweis Quotientenkriterium.

Antwort 514

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Falsch. Für $n \geq 0$ sei $a_n = \frac{1}{n^n}$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{\dfrac{1}{n^n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} = 0$. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius ∞ ist.

Antwort 513

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr. Für $n \geq 0$ sei $a_n = \frac{n^2}{10^n}$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{n^2}{10^n}} = \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{10}$, und wegen $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{10}$. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard gilt nun, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe 10 ist.

Antwort 516

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{n}{3^n}$. Dann ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(n+1)3^n}{n3^{n+1}} = \frac{n+1}{3n} = \frac{1+\frac{1}{n}}{3}$, also $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1+\frac{1}{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1$. Mit dem Quotientenkriterium folgt, dass die Reihe konvergiert.

Antwort 515

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Für $n \geq 1$ sei $a_n = (-1)^n \sqrt[n]{3}$. Dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_{2n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2n]{3} = \lim_{n\to\infty} \exp(\ln(3)\frac{1}{2n}) = \exp(\lim_{n\to\infty} \frac{\ln(3)}{2n}) = \exp(0) = 1$. Da (a_n) also eine Teilfolge enthält, die nicht gegen 0 konvergiert, kann die Reihe nicht konvergent sein.

Frage 517
Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{n^3+1000}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 518

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{(4+(-1)^n)^n}$ konvergiert für alle $x \in (-3, 3)$.

Hinweis Wurzelkriterium.

Frage 519
Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 520

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}$ ist konvergent.

Hinweis Leibniz-Kriterium.

Antwort 518

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{x^n}{(4+(-1)^n)^n}$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{(4+(-1)^n)^n}} = \frac{|x|}{4+(-1)^n} \leq \frac{|x|}{3} < 1$ für $x \in (-3, 3)$. Mit dem Wurzelkriterium und $q = \frac{|x|}{3}$ konvergiert die Reihe also für alle $x \in (-3, 3)$.

Antwort 517

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{n^2}{n^3+1000}$. Für alle $n > 9$ gilt dann $a_n \geq \frac{n^2}{2n^3} = \frac{1}{2n}$. Wäre also $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent, so wäre diese Reihe eine Majorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Da die harmonische Reihe aber divergent ist, folgt, dass auch die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent ist.

Antwort 520

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Die Wurzelfunktion ist streng monoton wachsend, also ist die Folge $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ streng monoton fallend. Da die Wurzelfunktion zusätzlich noch unbeschränkt ist, folgt, dass $(\frac{1}{\sqrt{n}})$ eine Nullfolge ist. Mit dem Leibnizkriterium ist die Reihe konvergent.

Antwort 519

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Für $n \geq 1$ sei $a_n = (-1)^{n-1}\frac{n+1}{n}$. Für ungerade n ist dann $a_n = \frac{n+1}{n} \geq 1$. Damit kann (a_n) keine Nullfolge sein, und die Reihe ist nicht konvergent.

Frage 521

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? Der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ ist 1.

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Frage 522

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{n!}$ ist konvergent.

Hinweis Quotientenkriterium.

Frage 523

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10(-1)^n}{n^2+1}$ ist konvergent.

Hinweis Leibniz-Kriterium.

Frage 524

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2})$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Antwort 522

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{(n+1)^2}{n!}$. Dann ist $|\frac{a_{n+1}}{a_n}| = \frac{(n+2)^2 n!}{(n+1)!(n+1)^2} = \frac{(n+2)^2}{(n+1)^3} = \frac{n^2+4n+4}{n^3+3n^2+3n+1} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{4}{n^2}+\frac{4}{n^3}}{1+\frac{3}{n}+\frac{3}{n^2}+\frac{1}{n^3}}$ für $n \geq 1$. Es folgt $\lim\limits_{n\to\infty} |\frac{a_{n+1}}{a_n}| = 0$, also konvergiert die Reihe mit dem Quotientenkriterium.

Antwort 521

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = \frac{1}{n^2}$. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{\sqrt[n]{n}} = 1$. Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ gleich 1 ist.

Antwort 524

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Angenommen, die Reihe konvergiert. Dann wäre auch $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} + \frac{1}{n^2}) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ konvergent, denn die Reihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ ist konvergent. Das ist ein Widerspruch, denn die harmonische Reihe ist divergent.

Antwort 523

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Die Folge $(\frac{1}{n^2+1})$ ist eine monoton fallende Nullfolge, also auch die Folge $(\frac{10}{n^2+1})$. Mit dem Leibniz-Kriterium folgt nun, dass die Reihe konvergiert.

Frage 525

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\sum_{n=1}^{\infty}(\frac{n+2}{2n+1})^n$ ist konvergent.

Hinweis Wurzelkriterium.

Frage 526
Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3n^2 - 1}$ ist konvergent.

Hinweis Falsch.

Frage 527

Thema: Mittelwertsatz

Was besagt der Mittelwertsatz der Differentialrechnung?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 528

Thema: Mittelwertsatz

Was besagt der Satz von Rolle?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 526

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Für alle $n \geq 1$ gilt $\frac{n}{3n^2-1} \geq \frac{n}{3n^2} = \frac{1}{3n} = \frac{1}{3}\frac{1}{n}$. Wäre die Reihe also konvergent, dann wäre sie eine konvergente Majorante von $\frac{1}{3}\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$. Die harmonische Reihe ist aber divergent.

Antwort 525

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Für $n \geq 1$ sei $a_n = (\frac{n+2}{2n+1})^n$. Dann gilt $\sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{(\frac{n+2}{2n+1})^n} = \frac{n+2}{2n+1} = \frac{1+\frac{2}{n}}{2+\frac{1}{n}}$, also $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \dfrac{1}{2}$. Mit dem Wurzelkriterium folgt, dass die Reihe konvergiert.

Antwort 528

Thema: Mittelwertsatz

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die in (a, b) differenzierbar ist. Sei $f(a) = f(b)$. Dann gibt es ein $x_0 \in (a, b)$ mit $f''(x_0) = 0$.

Antwort 527

Thema: Mittelwertsatz

Sei $f : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die im Inneren des Intervalls $[a,b]$ differenzierbar ist. Dann gibt es mindestens ein $x_0 \in (a,b)$ mit $f''(x_0) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

Frage 529

Thema: Mittelwertsatz

Nennen Sie mindestens zwei Folgerungen aus dem Mittelwertsatz der Differentialrechnung.

Hinweis Eine der Folgerungen ist die Charakterisierung der e-Funktion. Ein anderes Korollar sagt aus, wie man Monotonie von f anhand von f'' feststellen kann.

Frage 530
Thema: Mittelwertsatz

Was können Sie über eine Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sagen, die differenzierbar ist, und für die $f(x) = f''(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt?

Hinweis Fällt Ihnen eine Funktion ein, die diese Eigenschaft besitzt?

Frage 531

Thema: Mittelwertsatz

Ist die Funktion $f : \{x \in \mathbb{R} \mid x > 1\} \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \frac{1+x}{1-x}$ streng monoton wachsend?

Hinweis Welche Eigenschaft muss die Ableitung von f erfüllen, damit f streng monoton wachsend ist?

Frage 532

Thema: Mittelwertsatz

Wahr oder falsch? Wenn f auf einem Intervall I stetig und im Inneren von I differenzierbar ist, und $f''(x) \leq 0$ für alle x im Inneren von I ist, dann ist f im Inneren von I streng monoton fallend.

Hinweis Falsch.

Antwort 530
Thema: Mittelwertsatz

Für diese Funktion gilt $f = c\exp$ für ein $c \in \mathbb{R}$.

Antwort 529
Thema: Mittelwertsatz

Eine der Folgerungen aus dem Mittelwersatz ist die Charakterisierung der e-Funktion. Sie besagt, dass die Funktion exp die einzige differenzierbare Funktion f mit $f = f''$ und $f(0) = 1$ ist. Eine andere Folgerung ist die Eindeutigkeit der Winkelfunktionen. Diese sagt, dass, wenn es Funktionen $\sin, \cos : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gibt, die (SinKos-1) bis (SinKos-5) erfüllen, dann sind diese eindeutig.

Antwort 532

Thema: Mittelwertsatz

Falsch. Wenn $f''(x) \leq 0$ ist, kann man nur schließen, dass f monoton fallend ist, aber nicht, dass f streng monoton fallend ist. Die konstante Funktion $\hat{c}$ erfüllt zum Beispiel $f''(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, aber f ist nicht streng monoton fallend.

Antwort 531
Thema: Mittelwertsatz

Die Funktion f ist als rationale Funktion für $x > 1$ differenzierbar. Es gilt $f''(x) = \frac{1-x+(1+x)}{(1-x)^2} = \frac{2}{(1-x)^2} > 0$ für alle $x > 1$. Also ist f streng monoton wachsend.

Frage 533

Thema: Extrema

Die Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto (x^2 - 3)\exp(x+2)$ hat lokale Extrema an den Stellen $x_1 = 1$ und $x_2 = -3$. Welche lokalen Extrema liegen dort jeweils vor?

Hinweis Betrachten Sie die zweite Ableitung der Funktion.

Frage 534

Thema: Extrema

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, und sei f auf einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von $x_0 \in I$ differenzierbar. Sei $f''(x_0) = 0$, und sei f'' in x_0 differenzierbar. Sei $f''''(x_0) > 0$. Was kann man über f an der Stelle x_0 sagen?

Hinweis f hat an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, aber welches?

Frage 535
Thema: Extrema

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, und sei f auf einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von $x_0 \in I$ differenzierbar. Sei $f''(x_0) = 0$, und sei f'' in x_0 differenzierbar. Sei $f''''(x_0) < 0$. Was kann man über f an der Stelle x_0 sagen?

Hinweis f hat an der Stelle x_0 ein lokales Extremum, aber welches?

Frage 536
Thema: Extrema

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$, und sei f auf einer ε-Umgebung $U_\varepsilon(x_0)$ von $x_0 \in I$ differenzierbar. Sei $f''(x_0) = 0$, und sei f'' in x_0 differenzierbar. Sei $f'''(x_0) = 0$. Was kann man über f an der Stelle x_0 sagen?

Hinweis Nichts.

Antwort 534
Thema: Extrema

Die Funktion f hat dann an der Stelle x_0 ein lokales Minimum.

Antwort 533
Thema: Extrema

Da die Funktion beliebig oft differenzierbar ist, reicht es die zweite Ableitung auszurechnen und die Stellen, an denen Extremwerte vorliegen, einzusetzen. Es gilt $f''(x) = 2x\exp(x+2) + (x^2-3)\exp(x+2) = (x^2+2x-3)\exp(x+2)$ und $f''''(x) = (2x+2)\exp(x+2) + (x^2+2x-3)\exp(x+2) = (x^2+4x-1)\exp(x+2)$. Also ist $f''''(1) = 4\exp(3) > 0$ und $f''''(-3) = -4\exp(-1) < 0$. Es liegt also bei $x_1 = 1$ ein lokales Minimum und bei $x_2 = -3$ ein lokales Maximum vor.

Antwort 536
Thema: Extrema

Gar nichts. Die Funktion f kann an der Stelle x_0 ein lokales Maximum, ein lokales Minimum oder nichts von beiden haben.

Antwort 535
Thema: Extrema

Die Funktion f hat dann an der Stelle x_0 ein lokales Maximum.

Frage 537
Thema: Mittelwertsatz

Was sagt die Regel von de l"Hospital?

Hinweis Es geht um den Grenzwert $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, wenn $\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} g(x) = 0$ gilt.

Frage 538
Thema: Taylor

Sei f eine beliebige Funktion und sei $a \in \mathbb{R}$ so, dass $f^{(1)}(a), \ldots, f^{(n)}(a)$ alle existieren. Wie ist das n-te Taylorpolynom von f in a definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 539
Thema: Taylor

Sei p ein Polynom n-ten Grades und $\tilde{\mathrm{p}}$ die zugehörige Polynomfunktion. Wie sieht das n-te Taylorpolynom von $\tilde{\mathrm{p}}$ in 0 aus?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 540

Thema: Taylor

Warum betrachtet man überhaupt Taylorpoynome?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 538
Thema: Taylor

Es ist definiert als $P_{n,a}(x) = a_0 + a_1(x-a) + a_2(x-a)^2 + \ldots + a_n(x-a)^n$, wobei $a_k = \frac{f^{(k)}(a)}{k!}$ für alle $0 \leq k \leq n$ gilt.

Antwort 537

Thema: Mittelwertsatz

Seien f und g auf einem offenen Intervall I definierte Funktionen, und sei $a \in I$. Seien $\lim_{x \to a} g(x) = \lim_{x \to a} f(x) = 0$. Falls $\lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$ existiert, so existiert $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)}$, und es gilt $\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to a} \frac{f''(x)}{g''(x)}$.

Antwort 540
Thema: Taylor

Mit Taylorpolynomen kann man viele Funktionen (wie zum Beispiel sin, cos, ln und exp) durch Polynome approximieren. Das heißt, statt den Wert der Funktion an einer Stelle zu berechnen - was nicht immer so leicht ist - berechnet man den Wert des entsprechenden Taylorpolynoms. Das entspricht dann zwar nicht immer genau dem Funktionswert, aber je nachdem bis zu welchem Grad n man das Taylorpolynom ausrechnet, kommt man beliebig nah an den Funktionswert heran. Man muss nur vorher sicherstellen, dass die Taylorpolynome wirklich gegen die Funktion konvergieren. Der Satz von Taylor mit der Abschätzung der Restglieder hilft einem dann noch bei der Berechnung, wie genau die Approximation ist.

Antwort 539
Thema: Taylor

Das ist wieder p.

Frage 541

Thema: Taylor

Nennen Sie eine Folgerung aus dem Satz von Taylor.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 542

Thema: Konvergenzkriterien

Nennen Sie zwei Beispiele für divergente und zwei Beispiele für konvergente Reihen.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 543

Thema: Konvergenzkriterien

Nennen Sie mindestens drei Kriterien, die Sie benutzen können, um zu zeigen, dass eine Reihe konvergiert.

Hinweis Es gibt zum Beispiel das Quotientenkriterium.

Frage 544

Thema: Konvergenzkriterien

Nennen Sie mindesten zwei Methoden, mit denen Sie zeigen können, dass eine Reihe divergent ist.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 542

Thema: Konvergenzkriterien

Die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ und die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $|q| > 1$ sind Beispiele für divergente Reihen. Die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$ mit $|q| < 1$ sind konvergente Reihen.

Antwort 541

Thema: Taylor

Eine der Folgerungen war zum Beispiel, dass e eine irrationale Zahl ist.

Antwort 544
Thema: Konvergenzkriterien

Wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ ist und man zeigen kann, dass (a_n) keine Nullfolge ist, dann folgt, dass die Reihe divergent ist. Man kann auch versuchen, eine „divergente Minorante“ zu finden. Das heißt, ist die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und gilt $0 \leq b_n \leq a_n$ für alle (oder fast alle) $n \in \mathbb{N}$ und ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ divergent, dann muss auch $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent sein.

Antwort 543
Thema: Konvergenzkriterien

Man kann das Quotientenkriterium, das Wurzelkriterium, das Majorantenkriterium und das Leibniz-Kriterium benutzen.

Frage 545

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? Wenn $0 \leq a_n \leq b_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ ist divergent, dann ist auch $\sum\limits_{n=1}^{\infty} b_n$ divergent.

Hinweis Wahr.

Frage 546

Thema: Konvergenzkriterien

Wie ist die harmonische Reihe definiert? Ist sie konvergent oder divergent?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 547

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wie ist die geometrische Reihe definiert. Für welche q konvergiert sie und gegen welchen Grenzwert?

Hinweis Die geometrische Reihe ist $\sum_{n=0}^{\infty} q^n$.

Frage 548
Thema: Taylor

Sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion, für die $f^{(n)}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ existiert. Sei $a \in I$. Wie ist die Taylorreihe von f im Entwicklungspunkt a definiert?

Hinweis Die Taylorreihe sieht so ähnlich aus wie die Taylorpolynome.

Antwort 546

Thema: Konvergenzkriterien

Die harmonische Reihe ist $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$. Sie divergiert.

Antwort 545

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr. Angenommen $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert. Dann ist diese Reihe eine konvergente Majorante für die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und diese müsste konvergieren.

Antwort 548

Thema: Taylor

Die Taylorreihe ist definiert als $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$.

Antwort 547

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei $q \in \mathbb{R}$. Dann ist die geometrische Reihe definiert als $\sum\limits_{n=0}^{\infty} q^n$. Sie divergiert für $|q| \geq 1$ und konvergiert gegen $\frac{1}{1-q}$ für $|q| < 1$.

Frage 549
Thema: Taylor

Wahr oder falsch? Die Taylorreihe von $\cos(x)$ im Entwicklungspunkt 0 ist $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$.

Hinweis Falsch.

Frage 550
Thema: Konvergenzkriterien

Was können Sie über eine Reihe sagen, deren Glieder alle ≥ 0 sind und bei der die Folge der Partialsummen beschränkt ist?

Hinweis Eine monoton wachsende, beschränkte Folge konvergiert.

Frage 551

Thema: Konvergenzkriterien

Wie lautet das Majorantenkriterium (allgemeiner Fall)?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 552

Thema: Konvergenzkriterien

Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Es gelte $b_n = a_n$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Begründen Sie, warum dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ konvergiert.

Hinweis Betrachten Sie die Reihe, die aus den Gliedern $b_n - a_n$ besteht.

Antwort 550

Thema: Konvergenzkriterien

Diese Reihe konvergiert, denn die Folge der Partialsummen ist monoton wachsend und beschränkt.

Antwort 549
Thema: Taylor

Falsch. Es gilt $\cos(0) = 1$. Setzt man aber $x = 0$ in die Reihe ein, dann erhält man 0. Kein Wunder, denn das ist die Reihe für den Sinus.

Antwort 552

Thema: Konvergenzkriterien

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $c_n = b_n - a_n$. Dann gilt $c_n = 0$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$. Es gibt also nur endlich viele $n \in \mathbb{N}$ mit $c_n \neq 0$. Also konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$. Damit konvergiert dann aber auch $\sum_{n=1}^{\infty} a_n + \sum_{n=1}^{\infty} c_n = \sum_{n=1}^{\infty} b_n$.

Antwort 551

Thema: Konvergenzkriterien

Ist $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ eine konvergente Reihe mit nicht negativen Gliedern, und gilt fast immer $b_n \geq |a_n|$, so sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent.

Frage 553

Thema: Konvergenzkriterien

Wie lautet das Quotientenkriterium?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 554

Thema: Konvergenzkriterien

Kann man mit dem Quotientenkriterium beweisen, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert?

Hinweis Nein.

Frage 555

Thema: Konvergenzkriterien

Geben Sie zwei Beispiele für Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$. Dabei soll eine der beiden Reihen konvergieren und die andere divergieren.

Hinweis Harmonische Reihe.

Frage 556

Thema: Konvergenzkriterien

Was besagt das Wurzelkriterium?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 554

Thema: Konvergenzkriterien

Nein, denn wenn $a_n = \frac{1}{n^2}$ ist, dann ist $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n^2}{(n+1)^2} = \frac{n^2}{n^2+2n+1} = \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es gilt allerdings $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = 1$, das heißt, es gibt kein $q < 1$ mit $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$ für fast alle n.

Antwort 553
Thema: Konvergenzkriterien

Ist mit einer festen, positiven Zahl $q < 1$ fast immer $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \leq q$, dann sind $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ und $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergent. Gilt jedoch fast immer $\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} \geq 1$, so ist $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ divergent.

Antwort 556

Thema: Konvergenzkriterien

Ist mit einer festen, positiven Zahl $q < 1$ fast immer $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$, so folgt, dass die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergent sind. Gilt jedoch fast immer $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$, so sind $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ divergent.

Antwort 555
Thema: Konvergenzkriterien

Für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, und die Reihe divergiert. Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \frac{n^2}{(n+1)^2} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}} = 1$, und die Reihe konvergiert.

Frage 557

Thema: Konvergenzkriterien

Geben Sie zwei Beispiele für Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1$. Dabei soll eine der beiden Reihen konvergieren und die andere divergieren.

Hinweis Denken Sie an die harmonische Reihe.

Frage 558

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Beschreiben Sie das Konvergenzverhalten der Binomialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ für $\alpha \notin \mathbb{N}_0$.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 559

Thema: Konvergenzkriterien

Wann ist eine Reihe alternierend?

Hinweis Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ ist ein Beispiel für eine alternierende Reihe.

Frage 560

Thema: Konvergenzkriterien

Was besagt das Leibniz-Kriterium?

Hinweis Es geht darum, wann eine alternierende Reihe konvergiert.

Antwort 558

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Diese Reihe konvergiert für $|x| < 1$ und divergiert für $|x| > 1$.

Antwort 557

Thema: Konvergenzkriterien

Für die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n}} = 1$, und die Reihe divergiert.

Für $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} (\frac{1}{\sqrt[n]{n}})^2 = 1$, und die Reihe konvergiert.

Antwort 560

Thema: Konvergenzkriterien

Ist b_n eine monoton fallende Nullfolge, dann konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$.

Antwort 559

Thema: Konvergenzkriterien

Wenn die Glieder wechselnde Vorzeichen haben.

Frage 561

Thema: Konvergenzkriterien

Geben Sie ein Beispiel für eine Nullfolge b_n, so dass die alternierende Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n$ nicht konvergiert.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 562

Thema: Konvergenzkriterien

Wahr oder falsch? Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann auch $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$.

Hinweis Falsch.

Frage 563

Thema: Konvergenzkriterien

Wann heißt eine Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ absolut konvergent?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 564

Thema: Konvergenzkriterien

Was kann alles passieren, wenn man Reihen umordnet, die zwar konvergent, aber nicht absolut konvergent sind?

Hinweis Umordnungssatz von Riemann.

Antwort 562

Thema: Konvergenzkriterien

Falsch. Die alternierende harmonische Reihe ist zum Beispiel konvergent, aber nicht absolut konvergent.

Antwort 561

Thema: Konvergenzkriterien

Sei $(b_n) = (\frac{(-1)^{n-1}}{n})$. Dann ist (b_n) eine Nullfolge, und die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}b_n = \sum\limits_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n}$ ist divergent.

Antwort 564
Thema: Konvergenzkriterien

Der Umordnungssatz von Riemann sagt, dass man konvergente Reihen, die nicht absolut konvergent sind, so umordnen kann, dass sie divergent sind oder auch so, dass sie gegen jede beliebige Zahl $c \in \mathbb{R}$ konvergieren.

Antwort 563

Thema: Konvergenzkriterien

Wenn die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ konvergiert.

Frage 565

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Was ist eine Potenzreihe?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 566

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wahr oder falsch? Wenn eine Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n$ für ein x_0 konvergiert, dann konvergiert sie für dieses x_0 auch absolut.

Hinweis Falsch.

Frage 567

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wie ist der Konvergenzradius einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ definiert?

Hinweis Der Konvergenzradius hat etwas mit der Menge $M = \{x \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ konvergiert$\}$ zu tun.

Frage 568

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Geben Sie zwei Beispiele von Potenzreihen einschließlich ihrer Konvergenzradien.

Hinweis Die Konvergenzradien der Exponentialreihe, der geometrischen Reihe und der Sinus- und Kosinusreihe sollten Sie kennen.

Antwort 566

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Falsch. Daraus, dass die Potenzreihe für x_0 konvergiert, folgt nur, dass sie für $|x| < |x_0|$ absolut konvergiert. Die Logarithmusreihe $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{x^n}{n}$ konvergiert zum Beispiel für $x_0 = 1$, aber nicht absolut, denn $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ ist die harmonische Reihe, und die ist divergent.

Antwort 565

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Eine Potenzreihe ist eine Reihe der Form $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Antwort 568

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

1. Die geometrische Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ hat den Konvergenzradius 1.

2. Die Exponentialreihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ hat den Konvergenzradius ∞.

Antwort 567

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei $M = \{x \geq 0 \mid \sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n| \text{ konvergiert}\}$. Ist M beschränkt, dann ist der Konvergenzradius $R = \sup M$. Ist M unbeschränkt, dann ist $R = \infty$.

Frage 569

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R < \infty$. Konvergiert die Potenzreihe für $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| = R$?

Hinweis Denken Sie an die Logarithmusreihe.

Frage 570

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = a \neq 0$. Was können Sie über den Konvergenzradius der Potenzreihe sagen?

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Frage 571

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0$. Was können Sie über den Konvergenzradius der Potenzreihe sagen?

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Frage 572

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe, so dass $(\sqrt[n]{|a_n|})$ unbeschränkt ist. Was können Sie über den Konvergenzradius der Potenzreihe sagen?

Hinweis Satz von Cauchy-Hadamard.

Antwort 570

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius $R = \frac{1}{a}$ ist.

Antwort 569

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Das ist nicht so klar. Die Logarithmusreihe hat zum Beispiel den Konvergenzradius 1 und konvergiert für $x = 1$, aber sie divergiert für $x = -1$.

Antwort 572

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius $R = 0$ ist.

Antwort 571

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Mit dem Satz von Cauchy-Hadamard folgt, dass der Konvergenzradius $R = \infty$ ist.

Frage 573

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Wie ist die Summenfunktion zu einer Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit Konvergenzradius $R > 0$ definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 574

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Was ist die Ableitung der zur Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} x^n$ gehörenden Summenfunktion?

Hinweis Die Ableitung einer Summenfunktion erfolgt gliedweise.

Frage 575

Thema: Trigonometrische Funktionen

Was sind die Nullstellen von sin und cos im Intervall $[0, 2\pi)$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 576

Thema: Mittelwertsatz

Berechnen Sie $\lim_{x \to 0} \frac{\ln(1-x)}{\sin(x)}$ mit der Regel von de l"Hospital.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 574

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Der Konvergenzradius der Potenzreihe ist 1. Also ist die zugehörige Summenfunktion $f : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. Es folgt $f'' : (-1,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1}$.

Antwort 573

Thema: Potenzreihen und Summenfunktionen

Sei K das Konvergenzintervall der Potenzreihe, also $K = (-R, R)$, wenn $R < \infty$ gilt, und $K = \mathbb{R}$, wenn $R = \infty$ gilt. Dann ist die Summenfunktion definiert als $f : K \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Antwort 576

Thema: Mittelwertsatz

Es gilt $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{(\ln(1-x))''}{(\sin(x))''} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{-\frac{1}{1-x}}{\cos(x)} = \lim\limits_{x\to 0} -\dfrac{1}{(1-x)\cos(x)} = -1$, also $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1-x)}{\sin(x)} = -1$ mit der Regel von de l"Hospital.

Antwort 575

Thema: Trigonometrische Funktionen

Die Nullstellen von sin im Intervall $[0, 2\pi)$ sind 0 und π. Die Nullstellen von cos im Intervall $[0, 2\pi)$ sind $\frac{\pi}{2}$ und $\frac{3\pi}{2}$.

Frage 577

Thema: Mittelwertsatz

Berechnen Sie $\lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$ mit der Regel von de l" Hospital.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 578

Thema: Mittelwertsatz

Was ist $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x - \sin(x)}{x^3}$?

Hinweis Mehrfache Anwendung der Regel von de l”Hospital.

Frage 579
Thema: Mittelwertsatz

Wahr oder falsch? Wenn eine differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ unendlich viele Nullstellen besitzt, dann besitzt auch f'' unendlich viele Nullstellen.

Hinweis Satz von Rolle.

Frage 580

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A, B und C Atome. Die Formel $(A \vee \neg B) \vee (B \vee C)$ ist erfüllbar.

Hinweis Eine Formel ist erfüllbar, wenn es eine Bewertung gibt, so dass die Formel die Bewertung 1 hat.

Antwort 578
Thema: Mittelwertsatz

Hier kann die Regel von de l”Hospital mehrfach angewendet werden: Da der letzte Grenzwert existiert und bei jedem betrachteten Grenzwert Zähler und Nenner gegen 0 gehen, existieren auch alle vorherigen, und es gilt $\lim_{x\to 0} \frac{x - \sin(x)}{x^3} = \lim_{x\to 0} \frac{1 - \cos(x)}{3x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{6x} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{6} = \frac{1}{6}$.

Antwort 577

Thema: Mittelwertsatz

Es gilt $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(1-\cos(x))''}{(\sin(x))''} = \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} = 0$, also $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{\sin(x)} = 0$ mit der Regel von de l"Hospital.

Antwort 580

Thema: Aussagenlogik

Wahr, denn wenn A, B und C die Bewertung 1 haben, dann ist auch die Bewertung der Formel 1.

Antwort 579

Thema: Mittelwertsatz

Wahr. Mit dem Satz von Rolle gilt: Ist $a < b$ und $f(a) = f(b) = 0$, dann gibt es ein $x_0 \in [a, b]$ mit $f''(x_0) = 0$. Das heißt, zwischen je zwei aufeinander folgenden Nullstellen von f liegt je eine Nullstelle von f''.

Frage 581

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A, B und C Atome. Die Formel $(A \vee \neg B) \vee (B \vee C)$ ist falsifizierbar.

Hinweis Eine Formel ist falsifizierbar, wenn es eine Bewertung gibt, so dass die Formel die Bewertung 0 hat.

Frage 582

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A, B und C Atome. Die Formel $(A \lor \neg B) \lor (B \lor C)$ ist tautologisch.

Hinweis Eine Formel ist tautologisch, wenn für jede Bewertung der Atome die Bewertung der Formel 1 ist.

Frage 583
Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A, B und C Atome. Die Formel $(A \vee \neg B) \vee (B \vee C)$ ist widerspruchsvoll.

Hinweis Eine Formel ist widerspruchsvoll, wenn für jede Bewertung der Atome die Bewertung der Formel 0 ist.

Frage 584
Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei $\alpha = \forall x \forall y (P(x,y) \leftrightarrow P(y,x))$, wobei P ein zweistelliges Prädikatssymbol ist. Dann gibt es eine zu $\Sigma(\alpha)$ syntaktisch passende Interpretation mit Grundmenge $\mathbb{N}$, so dass die Formel die Bewertung 1 hat.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 582
Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn B die Bewertung 1 hat, dann ist die Bewertung der Formel 1, und wenn B die Bewertung 0 hat, dann ist die Bewertung der Formel ebenfalls 1, weil dann $\neg B$ die Bewertung 1 hat. Für jede Bewertung von A, B und C ist also die Bewertung der Formel 1.

Antwort 581
Thema: Aussagenlogik

Falsch. Wenn B die Bewertung 1 hat, dann ist die Bewertung der Formel 1, und wenn B die Bewertung 0 hat, dann ist die Bewertung der Formel ebenfalls 1, weil dann $\neg B$ die Bewertung 1 hat. Es gibt also keine Bewertung, so dass die Formel die Bewertung 0 hat.

Antwort 584
Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Wenn P die Gleichheit von natürlichen Zahlen modelliert, also $P(x, y) = 1$ genau dann, wenn $x = y$ ist, dann ist die Formel wahr.

Antwort 583

Thema: Aussagenlogik

Falsch. Wenn zum Beispiel A, B und C die Bewertung 1 haben, dann ist die Bewertung der Formel 1, also kann sie nicht widerspruchsvoll sein.

Frage 585
Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei $\alpha = \forall x \forall y (P(x, y) \leftrightarrow P(y, x))$, wobei P ein zweistelliges Prädikatssymbol ist. Dann gibt es eine zu $\Sigma(\alpha)$ syntaktisch passende Interpretation mit Grundmenge $\mathbb{N}$, so dass die Formel die Bewertung 0 hat.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 586

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Sei A, B und C Aussagen. Die Formel $\neg(C \leftrightarrow A) \wedge ((C \rightarrow B) \vee (A \wedge B \rightarrow C))$ ist äquivalent zu $\neg((A \rightarrow C) \wedge (\neg C \vee A))$.

Hinweis Wahr.

Frage 587

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2\sin(\sqrt{x}) + 17$ ist eine Stammfunktion von $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

Hinweis Wahr.

Frage 588

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2\sin(\sqrt{x}) + 17$ ist eine Stammfunktion von $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - 6$.

Hinweis Falsch.

Antwort 586
Thema: Aussagenlogik

Wahr. Der zweite Teil der ersten Formel, also $((C \to B) \vee (A \wedge B \to C))$ ist tautologisch. Es hat nämlich $C \to B$ nur dann die Bewertung 0, wenn C die Bewertung 1 und B die Bewertung 0 hat. Dann hat aber - egal, was die Bewertung von A ist - $(A \wedge B \to C)$ die Bewertung 1. Die erste Formel ist also äquivalent zur Formel $\neg(C \leftrightarrow A)$. Diese ist wieder äquivalent zu $\neg((C \to A) \wedge (A \to C))$. Ersetzt man nun das erste $\to$, erhält man die Formel $\neg((\neg C \vee A) \wedge (A \to C))$. Das Kommutativgesetz liefert jetzt die Äquivalenz zur zweiten Formel.

Antwort 585
Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Wenn P die Kleiner-Beziehung zwischen natürlichen Zahlen modelliert, also $P(x, y) = 1$ genau dann, wenn $x < y$, dann ist die Formel falsch.

Antwort 588

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Falsch, denn $F'' \neq f$.

Antwort 587

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr, denn $F'' = f$.

Frage 589

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A, B und C Aussagen. Dann gilt $(A \vee B) \wedge C \models B \rightarrow C$.

Hinweis Wahr.

Frage 590
Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei (a_n) eine reelle Folge, auf die die Aussage $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad (|a_n - a| < \varepsilon)$ zutrifft. Dann ist (a_n) konvergent.

Hinweis Wahr.

Frage 591
Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei (a_n) eine reelle Folge, auf die die Aussage $\exists a \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad (|a_n - a| < \varepsilon)$ zutrifft. Dann ist (a_n) konvergent.

Hinweis Wahr.

Frage 592

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{4}\sin^2(2x) + 3$ ist eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(2x)\cos(2x)$.

Hinweis Wahr.

Antwort 590

Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Die Aussage ist gerade die Definition für Konvergenz gegen a - in Quantorenschreibweise.

Antwort 589
Thema: Aussagenlogik

Wahr. Ist die Bewertung der linken Formel 1, dann ist auf jeden Fall die Bewertung von C auch 1. Dann ist aber die Bewertung von $B \to C$ ebenfalls 1.

Antwort 592

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr, denn $F'' = f$.

Antwort 591
Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Die Aussage bedeutet, dass für fast alle Folgenglieder $a_n = a$ gilt. Diese Eigenschaft hat die Konvergenz von (a_n) gegen a zur Folge.

Frage 593

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{4}\cos^2(2x) + 3$ ist eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(2x)\cos(2x)$.

Hinweis Wahr.

Frage 594
Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$ ist erfüllbar.

Hinweis Eine Formel ist erfüllbar, wenn es eine Bewertung der Atome gibt, so dass die Bewertung der Formel 1 ist.

Frage 595
Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$ ist tautologisch.

Hinweis Eine Formel ist tautologisch, wenn die Bewertung der Formel für jede Bewertung der Atome 1 ist.

Frage 596

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$ ist widerspruchsvoll.

Hinweis Eine Formel ist widerspruchsvoll, wenn für jede Bewertung der Atome die Bewertung der Formel 0 ist.

Antwort 594

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Haben A und B beide die Bewertung 1, dann ist auch die Bewertung der Formel 1.

Antwort 593

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr, denn $F'' = f$.

Antwort 596

Thema: Aussagenlogik

Falsch. Wenn A und B zum Beispiel beide die Bewertung 1 haben, dann hat auch die Formel die Bewertung 1. Sie ist also nicht widerspruchsvoll.

Antwort 595

Thema: Aussagenlogik

Wahr, denn für jede Bewertung der Atome ist die Bewertung der Formel 1.

Frage 597

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(((A \to B) \to A) \to A)$ ist falsifizierber.

Hinweis Eine Formel ist falsifizierbar, wenn es eine Bewertung der Atome gibt, so dass die Bewertung der Formel 0 ist.

Frage 598

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seine A und B Aussagen. Es gilt $(A \wedge B) \models (A \vee B)$.

Hinweis Wahr.

Frage 599

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \wedge B)$ ist erfüllbar.

Hinweis Eine Formel ist erfüllbar, wenn es eine Bewertung der Atome gibt, so dass die Bewertung der Formel 1 ist.

Frage 600

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \wedge B)$ ist tautologisch.

Hinweis Eine Formel ist tautologisch, wenn für jede Bewertung der Atome die Bewertung der Formel 1 ist.

Antwort 598
Thema: Aussagenlogik

Wahr. Die Bewertung von $A \wedge B$ ist genau dann 1, wenn die Bewertungen von A und B beide 1 sind. In diesem Fall ist auch die Bewertung von $A \vee B$ gleich 1.

Antwort 597
Thema: Aussagenlogik

Falsch. Für jede Bewertung von A und B ist die Bewertung der Formel 1. Also ist die Formel nicht falsifizierbar.

Antwort 600
Thema: Aussagenlogik

Falsch. Wenn A die Bewertung 1 und B die Bewertung 0 hat, dann ist die Bewertung von $A \leftrightarrow B$ und damit der gesamten Formel 0. Die Formel ist also nicht tautologisch.

Antwort 599
Thema: Aussagenlogik

Falsch. Wenn A und B verschiedene Bewertungen haben, dann ist die Bewertung von $(A \leftrightarrow B)$ gleich 0. Haben sie gleiche Bewertungen, dann ist die Bewertung von $(\neg A \wedge B)$ gleich 0. Es gibt also keine Bewertung von A und B, so dass die Bewertung der Formel 1 ist.

Frage 601

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \wedge B)$ ist falsifizierbar.

Hinweis Eine Formel ist falsifizierbar, wenn es eine Bewertung der Atome gibt, so dass die Bewertung der Formel 0 ist.

Frage 602

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \wedge B)$ ist widerspruchsvoll.

Hinweis Eine Formel ist widerspruchsvoll, wenn für jede Bewertung der Atome die Bewertung der Formel 0 ist.

Frage 603

Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Es gibt keine reelle Folge (a_n), auf die die Aussage $\forall G \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad (|a_n| < G)$.

Hinweis Wahr.

Frage 604

Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Es gibt keine reelle Folge (a_n), auf die Aussage $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall G \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq n_0 \quad (a_n \leq G)$ zutrifft.

Hinweis Wahr.

Antwort 602
Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn A und B verschiedene Bewertungen haben, dann ist die Bewertung von $(A \leftrightarrow B)$ gleich 0. Haben sie gleiche Bewertungen, dann ist die Bewertung von $(\neg A \wedge B)$ gleich 0. Jede Bewertung der Atome führt also zu einer Bewertung der Formel mit 0.

Antwort 601

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn A die Bewertung 1 und B die Bewertung 0 hat, dann ist die Bewertung von $A \leftrightarrow B$ und damit der gesamten Formel 0.

Antwort 604

Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Wenn es ein solches n_0 gäbe, dann würde gelten $a_{n_0} \leq G$ für alle $G \in \mathbb{R}$. Das kann nicht sein.

Antwort 603
Thema: Prädikatenlogik

Wahr, denn es gilt immer $|a_n| \geq 0$. Ist also $G < 0$, ist die Formel nicht wahr.

Frage 605

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Aussagen. Dann gilt $(A \wedge B) \models (B \to A)$.

Hinweis Wahr.

Frage 606

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + 2$ ist eine Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin^2(x)$.

Hinweis Wahr.

Frage 607

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - 6$, ist eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Hinweis Wahr.

Frage 608

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\sin^2(x) + 3$, ist eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$.

Hinweis Wahr.

Antwort 606

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr. Es ist $F''(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos^2(x) + \sin^2(x))$. Da $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, also $1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$, folgt $F'' = f$.

Antwort 605
Thema: Aussagenlogik

Wahr. Die einzige Bewertung, für die $A \wedge B$ die Bewertung 1 hat, ist, wenn A und B die Bewertung 1 haben. In diesem Fall ist die Bewertung von $B \rightarrow A$ ebenfalls 1.

Antwort 608

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr, denn es ist $F'' = f$.

Antwort 607

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr, denn $F'' = f$.

Frage 609

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\cos^2(x) + 4$ ist eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -\sin(x)\cos(x)$.

Hinweis Wahr.

Frage 610

Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei (a_n) eine reelle Folge, auf die die Aussage $\forall G \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad (|a_n| > G)$ zutrifft. Dann ist (a_n) divergent.

Hinweis Wahr.

Frage 611
Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Es gibt keine reelle Folge (a_n), auf die die Aussage $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall G \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq n_0 \quad (|a_n| > G)$ zutrifft.

Hinweis Wahr.

Frage 612
Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Aussagen. Dann gilt $\neg(A \vee B) \models B \to \neg A$.

Hinweis Wahr.

Antwort 610
Thema: Prädikatenlogik

Wahr, denn die Aussage sagt, dass (a_n) unbeschränkt ist.

Antwort 609

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr, denn $F'' = f$.

Antwort 612
Thema: Aussagenlogik

Wahr. Die Formel auf der linken Seite hat nur dann die Bewertung 1, wenn A und B beide die Bewertung 0 haben. In diesem Fall ist auch die Bewertung der Formel auf der rechten Seite 1.

Antwort 611
Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Wenn es eine solche Folge (a_n) gäbe, dann gälte für diese Folge $|a_{n_0}| > G$ für jedes $G \in \mathbb{R}$. Das kann nicht sein, denn $\mathbb{R}$ ist unbeschränkt.

Frage 613
Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Die Formel $\neg(C \leftrightarrow A) \wedge ((C \to B) \vee (A \wedge B \to C))$ ist äquivalent zu $\neg((C \to A) \to B)$.

Hinweis Zwei Formeln sind äquivalent, wenn sie für jede Bewertung der Atome die gleiche Bewertung haben.

Frage 614

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \wedge B) \leftrightarrow A$ ist tautologisch.

Hinweis Eine Formel ist tautologisch, wenn sie für jede Bewertung der Atome die Bewertung 1 hat.

Frage 615

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \wedge B) \leftrightarrow A$ ist erfüllbar.

Hinweis Eine Formel ist erfüllbar, wenn es eine Bewertung der Atome gibt, so dass die Bewertung der Formel 1 ist.

Frage 616

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \wedge B) \leftrightarrow A$ ist falsifizierbar.

Hinweis Eine Formel ist falsifizierbar, wenn es eine Bewertung der Atome gibt, so dass die Bewertung der Formel 0 ist.

Antwort 614

Thema: Aussagenlogik

Falsch. Hat A die Bewertung 1 und B die Bewertung 0, dann ist die Bewertung der Formel 0. Also ist die Formel nicht tautologisch.

Antwort 613
Thema: Aussagenlogik

Falsch. Sind zum Beispiel die Bewertungen von A und B gleich 1 und ist die von C gleich 0, dann ist die Bewertung der ersten Formel 1 und die Bewertung der zweiten Formel 0.

Antwort 616
Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn A die Bewertung 1 und B die Bewertung 0 hat, ist die Bewertung der Formel 0. Also ist sie falsifizierbar.

Antwort 615
Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn A und B beide die Bewertung 1 haben, dann ist auch die Bewertung der Formel 1. Also ist sie erfüllbar.

Frage 617

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \land B) \leftrightarrow A$ ist widerspruchsvoll.

Hinweis Eine Formel ist widerspruchsvoll, wenn jede Bewertung der Atome eine Bewertung der Formel mit 0 ergibt.

Frage 618

Thema: Riemann-Integral

Sei $a < b$. Was ist eine Partition des Intervalls $[a, b]$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 619
Thema: Riemann-Integral

Sei $a < b$, und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Sei $t_0, \ldots, t_n$ eine Partition P von $[a, b]$. Wie sind die Ober- und die Untersumme von f für P definiert, und welche Beziehung gilt zwischen ihnen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 620

Thema: Riemann-Integral

Wahr oder falsch? Sei $a < b$, sei P eine Partition von $[a, b]$, und sei Q eine Verfeinerung von P. Dann gilt $U(f, P) \leq U(f, Q)$ und $O(f, P) \leq O(f, Q)$.

Hinweis Eine der beiden Teilaussagen stimmt, die andere ist falsch.

Antwort 618
Thema: Riemann-Integral

Eine Patition sind endlich viele Punkte $t_0, \ldots, t_n$ mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Antwort 617

Thema: Aussagenlogik

Falsch. Wenn A und B beide die Bewertung 1 haben, dann ist die Bewertung der Formel 1. Sie kann also nicht widerspruchsvoll sein.

Antwort 620
Thema: Riemann-Integral

Falsch. Es gilt zwar $U(f,P) \leq U(f,Q)$, aber $O(f,P) \geq O(f,Q)$.

Antwort 619

Thema: Riemann-Integral

Für alle $1 \leq i \leq n$ sei $m_i = \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ und $M_i = \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$. Dann ist die Untersumme $U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$ und die Obersumme ist $O(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$. Es gilt immer $U(f,P) \leq O(f,P)$.

Frage 621
Thema: Riemann-Integral

Sei $a < b$, und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Wann ist f integrierbar auf $[a, b]$?

Hinweis Das hat etwas mit Ober- und Untersummen zu tun.

Frage 622

Thema: Riemann-Integral

Was ist im Integral $\int_0^5 e^{-t} dt$ die untere Integrationsgrenze, die obere Integrationsgrenze, der Integrand und die Integrationsvariable?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 623
Thema: Riemann-Integral

Geben Sie ein Beispiel für ein Intervall $[a, b]$ und eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die nicht integrierbar ist.

Hinweis Dirichlet-Funktion.

Frage 624

Thema: Riemann-Integral

Ist jede integrierbare Funktion stetig? Ist jede stetige Funktion integrierbar?

Hinweis Eine Antwort ist ja, die andere nein.

Antwort 622
Thema: Riemann-Integral

Die untere Integrationsgrenze ist 0, die obere Integrationsgrenze ist 5, der Integrand ist die Funktion $f : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-x}$, und die Integrationsvariable ist t.

Antwort 621

Thema: Riemann-Integral

Wenn $\inf\{O(f,P) \mid P$ Partition von $[a,b]\} = \sup\{U(f,P) \mid P$ Partition von $[a,b]\}$, dann ist f integrierbar.

Antwort 624

Thema: Riemann-Integral

Die Funktion $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $0 \leq x \leq 1$ und $f(x) = 1$ für $1 < x \leq 2$ ist ein Beispiel für eine Funktion, die integrierbar, aber nicht stetig ist. Jede stetige Funktion ist integrierbar.

Antwort 623

Thema: Riemann-Integral

Sei $a < b$ und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Dirichlet-Funktion. Für $x \in [a, b]$ sei also $f(x) = 1$, falls $x \in \mathbb{Q}$ gilt, und $f(x) = 0$, falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt. Dann ist f beschränkt, aber nicht integriebar, wie wir im Kurstext gezeigt haben.

Frage 625

Thema: Riemann-Integral

Sei f integrierbar auf dem Intervall $[a, b]$. Wie ist das unbestimmte Integral von f definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 626

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Welche wichtige Eigenschaft hat dann das unbestimmte Integral F von f?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 627

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die integrierbar ist, und ein $c \in [a, b]$, so dass das unbestimmte Integral F in c nicht differenzierbar ist.

Hinweis Nehmen Sie ein f, das zwar integrierbar, aber nicht stetig ist.

Frage 628

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wie lautet der erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 626

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Das unbestimmte Integral ist differenzierbar, und es gilt $F''(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Antwort 625

Thema: Riemann-Integral

Das unbestimmte Integral ist die Funktion $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Antwort 628

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Sei $a < b$, und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$ für alle $x \in [a, b]$. Ist f in $c \in [a, b]$ stetig, dann ist F in c differenzierbar, und es gilt $F''(c) = f(c)$.

Antwort 627

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Sei $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 1$ für $0 < x \leq 1$. Dann ist f integrierbar, und das unbestimmte Integral ist $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} 0 dt = 0$ für $x \leq 0$ und $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 1dt = x$ für $0 < x \leq 1$. Im Punkt $x = 0$ gilt nun $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{F(h) - F(0)}{h} = 0$ und $\displaystyle\lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{\substack{h\to 0\\ h>0}} \frac{h-0}{h} = 1$. Also ist F in 0 nicht differenzierbar.

Frage 629

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wie lautet der zweite Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 630

Thema: Riemann-Integral

Welche Intgrationsregel wird aus der Produktregel der Differentiation abgeleitet?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 631
Thema: Riemann-Integral

Welche Integrationsregel wird aus der Kettenregel der Differentiation abgeleitet?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 632

Thema: Riemann-Integral

Wie funktioniert die partielle Integration?

Hinweis Die partielle Integration ist aus der Produktregel bei der Differentiation abgeleitet.

Antwort 630

Thema: Riemann-Integral

Die partielle Integration.

Antwort 629

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Ist f auf einem Intervall $[a, b]$ integrierbar und ist g eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$, so gilt $\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

Antwort 632

Thema: Riemann-Integral

Sei $a < b$. Seien $f, g : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und seien f'' und g'' stetig. Dann gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)g''(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f''(x)g(x)dx$.

Antwort 631

Thema: Riemann-Integral

Die Substitutionsregel.

Frage 633

Thema: Riemann-Integral

Wie lautet die Substitutionsregel?

Hinweis Die Substitutionsregel ist aus der Kettenregel der Differentiation abgeleitet.

Frage 634

Thema: Riemann-Integral

Wenn Sie das Integral $\int_1^2 x \ln(x) dx$ mit partieller Integration berechnen sollen, was nehmen Sie als $f(x)$ und was als $g''(x)$?

Hinweis Von der Funktion, die Sie als $f(x)$ nehmen, sollten Sie die Ableitung kennen, von $g''(x)$ eine Stammfunktion.

Frage 635

Thema: Riemann-Integral

Wenn Sie das Integral $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)}dx$ mit der Substitutionsregel ausrechnen sollen, welche Funktion nehmen Sie als $f(x)$ und welche als $g(x)$, sodass der Integrand zu $f(g(x))g''(x)$ wird?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 636

Thema: Riemann-Integral

Wenn Sie das Intgral $\int_a^b \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ mit der Substitutionsregel berechnen sollen, welche Funktion nehmen Sie als $f(x)$ und welche als $g(x)$, so dass der Integrand von der Form $f(g(x))g''(x)$ ist?

Hinweis Man bekommt es nicht genau hin, dass $f(g(x))g''(x)$ den Integranden ergibt, sondern nur $\frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 2f(g(x))g''(x)$.

Antwort 634
Thema: Riemann-Integral

Da Sie sicher eine Stammfunktion von x kennen, aber keine von $\ln(x)$, sollten Sie $f(x) = \ln(x)$ und $g''(x) = x$ setzten. Der Wert des Integrals ergibt sich dann übrigens als $\int_1^2 x\ln(x)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x)|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2|_1^2 = 2\ln(2) - 1 - \frac{1}{4} = 2\ln(2) - \frac{5}{4}$.

Antwort 633

Thema: Riemann-Integral

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $g : [a, b] \longrightarrow I$ differenzierbar, und sei g'' stetig. Dann gilt $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g''(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$.

Antwort 636
Thema: Riemann-Integral

Für $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = \sqrt{x}$ ist $f(g(x))g''(x) = \cos(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Es kommt also nicht ganz der Integrand des gesuchten Integrals heraus, aber so kann man zuerst $\frac{1}{2}\displaystyle\int_a^b \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$ berechnen und anschließend mit dem Faktor 2 multiplizieren.

Antwort 635
Thema: Riemann-Integral

Da $-\sin(x)$ die Ableitung von $\cos(x)$ ist, bietet es sich an $f(x) = -\frac{1}{x}$ und $g(x) = 2 + \cos(x)$ zu setzen. Dann ist $f(g(x))g''(x) = -\frac{1}{2+\cos(x)}(-\sin(x))$.

Frage 637

Thema: Riemann-Integral

Wenn Sie das Integral $\int_a^b \frac{\ln(x)}{x}dx$ mit der Substitutionsregel berechnen sollen, welche Funktion nehmen Sie dann als $f(x)$ und welche als $g(x)$, sodass der Integrand von der Form $f(g(x))g''(x)$ ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 638

Thema: Riemann-Integral

Wenn Sie das Integral $\int_a^b (3x-2)^6 dx$ mit der Substitutionsregel ausrechnen sollen, welche Funktion nehmen Sie dann als $f(x)$ und welche als $g(x)$, so dass der Integrand von der Form $f(g(x))g''(x)$ ist?

Hinweis Man bekommt es nicht genau hin, dass $f(g(x))g''(x)$ den Integranden ergibt, sondern nur $(3-2x)^6 = -\frac{1}{2} f(g(x))g''(x)$.

Frage 639

Thema: Riemann-Integral

Wenn Sie das Integral $\int_0^\pi \sin^3(x)\cos(x)dx$ mit der Substitutionsregel ausrechnen sollen, welche Funktion nehmen Sie dann als $f(x)$ und welche als $g(x)$, so dass der Integrand von der Form $f(g(x))g''(x)$ ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 640

Thema: Aussagenlogik

Seien α und β aussagenlogische Formeln. Bilden Sie aus diesen beiden Formeln mindestens fünf neue aussagenlogische Formeln.

Hinweis Ein Beispiel für eine solche Formel wäre $\alpha \wedge \beta$.

Antwort 638

Thema: Riemann-Integral

Für $f(x) = x^6$ und $g(x) = 3x - 2$ ist $f(g(x))g''(x) = (3x-2)^6(-2)$. Das ist nicht genau der Integrand, aber Sie können nun zuerst $-2\int_a^b (3-2x)^6 dx$ berechnen und anschließend mit dem Faktor $-\frac{1}{2}$ multiplizieren.

Antwort 637

Thema: Riemann-Integral

Für $f(x) = x$ und $g(x) = \ln(x)$ gilt $f(g(x))g''(x) = \ln(x)\frac{1}{x} = \frac{\ln(x)}{x}$.

Antwort 640

Thema: Aussagenlogik

Aussagenlogische Formeln sind zum Beispiel $\neg\alpha$, $\neg\beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$ und $\alpha \leftrightarrow \beta$.

Antwort 639

Thema: Riemann-Integral

Für $f(x) = x^3$ und $g(x) = \sin(x)$ ist $f(g(x))g''(x) = \sin^3(x)\cos(x)$.

Frage 641

Thema: Aussagenlogik

Wie sieht die Formel $((\neg A) \wedge B) \rightarrow (C \vee B)$ mit möglichst wenig Klammern aus?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 642

Thema: Aussagenlogik

Sei α die Formel $((A \vee B) \wedge (C \vee D)) \leftrightarrow (\neg C \vee \neg A)$. Was ist atoms($\alpha$)?

Hinweis atoms(α) ist die Menge aller Atome, die in α vorkommen.

Frage 643

Thema: Aussagenlogik

Bestimmen Sie die Bewertung der Formel $((A \vee B) \wedge (C \vee D)) \leftrightarrow (\neg C \vee \neg A)$, wenn $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(C) = 1$ und $\mathcal{I}(B) = \mathcal{I}(D) = 1$ gilt.

Hinweis Die Bewertung ist **0**.

Frage 644

Thema: Aussagenlogik

Was ist die Bewertung der Formel $((\neg A \wedge B) \to C) \vee (B \to A \wedge \neg C)$, wenn $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B) = 1$ und $\mathcal{I}(C) = 0$ gilt?

Hinweis Die Bewertung der Formel ist **1**.

Antwort 642

Thema: Aussagenlogik

Es gilt atoms$(\alpha) = \{A, B, C, D\}$.

Antwort 641
Thema: Aussagenlogik

Lässt man überflüssige Klammern weg, wird $((\neg A) \wedge B) \rightarrow (C \vee B)$ zu $\neg A \wedge B \rightarrow C \vee B$.

Antwort 644
Thema: Aussagenlogik

Die Bewertung von $\neg A \wedge B$ ist **0**, also ist die Bewertung von $((\neg A \wedge B) \rightarrow C)$ gleich **1**. Damit ist schon klar, dass die Bewertung der gesamten Formel **1** ist.

Antwort 643

Thema: Aussagenlogik

Die Formel $((A \vee B) \wedge (C \vee D))$ hat die Bewertung **1**, die Formel $(\neg C \vee \neg A)$ hat die Bewertung **0**. Die Bewertung der Formel ist also insgesamt **0**.

Frage 645

Thema: Aussagenlogik

Sei α eine aussagenlogische Formel. Wann heißt α erfüllbar?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 646
Thema: Aussagenlogik

Sei α eine aussagenlogische Formel. Wann heißt α tautologisch?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 647

Thema: Aussagenlogik

Sei α eine aussagenlogische Formel. Wann heißt α widerspruchsvoll?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 648
Thema: Aussagenlogik

Sei α eine aussagenlogische Formel. Wann heißt α falsifizierbar?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 646

Thema: Aussagenlogik

Wenn α für jede Bewertung $\mathcal{I}$ den Wert $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ besitzt.

Antwort 645
Thema: Aussagenlogik

Wenn es eine Bewertung $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ gibt.

Antwort 648

Thema: Aussagenlogik

Wenn es eine Bewertung $\mathcal{I}$ gibt, so dass $\mathcal{I}(\alpha) = 0$ gilt.

Antwort 647

Thema: Aussagenlogik

Wenn α für jede Bewertung $\mathcal{I}$ den Wert $\mathcal{I}(\alpha) = 0$ besitzt.

Frage 649
Thema: Aussagenlogik

Geben Sie ein Beispiel für eine aussagenlogische Formel α, die erfüllbar ist.

Hinweis Es muss eine Bewertung $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ geben.

Frage 650

Thema: Aussagenlogik

Geben Sie ein Beispiel für eine aussagenlogische Formel α, die tautologisch ist.

Hinweis Jede Bewertung der Formel muss **1** ergeben.

Frage 651

Thema: Aussagenlogik

Geben Sie ein Beispiel für eine aussagenlogische Formel α, die widerspruchsvoll ist.

Hinweis Jede Bewertung der Formel muss **0** ergeben.

Frage 652

Thema: Aussagenlogik

Geben Sie ein Beispiel für eine aussagenlogische Formel α, die falsifizierbar ist.

Hinweis Es muss eine Bewertung $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\alpha) = 0$ geben.

Antwort 650

Thema: Aussagenlogik

Sei $\alpha = A \vee \neg A$. Dann gilt für jede Bewertung $\mathcal{I}$ von A, dass $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ ist.

Antwort 649

Thema: Aussagenlogik

Sei $\alpha = A \vee B$. Dann ist $\mathcal{I}(\alpha) = 1$, wenn $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B) = 1$ gilt.

Antwort 652

Thema: Aussagenlogik

Sei $\alpha = A \wedge B$. Dann ist für $\mathcal{I}(A) = 0 = \mathcal{I}(B)$ die Bewertung $\mathcal{I}(\alpha) = 0$.

Antwort 651
Thema: Aussagenlogik

Sei $\alpha = A \wedge \neg A$. Dann gilt für jede Bewertung $\mathcal{I}$ von A, dass $\mathcal{I}(\alpha) = 0$ gilt.

Frage 653

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Eine aussagenlogische Formel α ist genau dann tautologisch, wenn sie nicht falsifizierbar ist.

Hinweis Wahr.

Frage 654

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Eine aussagenlogische Formel α ist genau dann tautologisch, wenn $\neg\alpha$ widerspruchsvoll ist.

Hinweis Wahr.

Frage 655
Thema: Aussagenlogik

Geben Sie mindestens zwei äquivalente Aussagen zu der Aussage: „Die aussagenlogische Formel β ist eine semantische Folgerung aus α.“

Hinweis Eine wäre zum Beispiel, dass $\mathcal{I}(\beta) = 1$ für alle Bewertungen $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ gilt.

Frage 656

Thema: Aussagenlogik

Wann heißen zwei aussagenlogische Formeln α und β äquivalent?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 654

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn α tautologisch ist, dann ist $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ für jede Bewertung $\mathcal{I}$. Es folgt $\mathcal{I}(\neg\alpha) = 0$ für jede Bewertung $\mathcal{I}$, also ist $\neg\alpha$ widerspruchsvoll. Wenn umgekehrt $\neg\alpha$ widerspruchsvoll ist, dann ist $\mathcal{I}(\neg\alpha) = 0$ für alle Bewertungen $\mathcal{I}$. Damit ist $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ für alle Bewertungen $\mathcal{I}$, und α ist tautologisch.

Antwort 653
Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn α tautologisch ist, dann gilt für jede Bewertung $\mathcal{I}$, dass $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ gilt. Damit gibt es keine Bewertung $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\alpha) = 0$, also ist α nicht falsifizierbar. Ist umgekehrt α nicht falsifizierbar, dann gibt es keine Bewertung $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\alpha) = 0$. Also gilt für jede Bewertung $\mathcal{I}$, dass $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ gilt, und damit ist α tautologisch.

Antwort 656

Thema: Aussagenlogik

Wenn $\mathcal{I}(\alpha) = \mathcal{I}(\beta)$ für alle Bewertungen $\mathcal{I}$ gilt.

Antwort 655

Thema: Aussagenlogik

1. Falls $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ gilt, dann folgt auch $\mathcal{I}(\beta) = 1$.
2. $\alpha \rightarrow \beta$ ist tautologisch.
3. $\alpha \wedge \neg\beta$ ist widerspruchsvoll.

Frage 657
Thema: Aussagenlogik

Wie hängen logische Äquivalenz und semantische Folgerungen zusammen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 658

Thema: Aussagenlogik

Nennen Sie mindestens zwei Vererbungsregeln.

Hinweis Eine der Vererbungsregeln ist: Wenn $\alpha \approx \beta$, so gilt $\neg\alpha \approx \neg\beta$.

Frage 659

Thema: Aussagenlogik

Wie stellt man die Formel $\alpha \to \beta$ nur mit den Junktoren $\vee$ und $\neg$ dar?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 660

Thema: Aussagenlogik

Wie stellt man die Formel $\alpha \wedge \beta$ nur mit den Junktoren $\vee$ und $\neg$ dar?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 658
Thema: Aussagenlogik

Seien α, β und γ aussagenlogische Formeln. Dann gelten:

1. Wenn $\alpha \approx \beta$, so gilt $\neg\alpha \approx \neg\beta$.
2. Wenn $\alpha \approx \beta$, so gilt $\gamma \wedge \alpha \approx \gamma \wedge \beta$.
3. Wenn $\alpha \approx \beta$, so gilt $\gamma \vee \alpha \approx \gamma \vee \beta$.

Antwort 657
Thema: Aussagenlogik

Wenn α und β aussagenlogische Formeln sind, dann gilt $\alpha \leftrightarrow \beta$ genau dann, wenn $\alpha \models \beta$ und $\beta \models \alpha$ gilt.

Antwort 660

Thema: Aussagenlogik

Es ist $\alpha \wedge \beta \approx \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$.

Antwort 659

Thema: Aussagenlogik

Es gilt $\alpha \rightarrow \beta \approx \neg\alpha \vee \beta$.

Frage 661

Thema: Aussagenlogik

Wie nennt man die Äquivalenzregel, die besagt, dass $\neg\neg\alpha \approx \alpha$ gilt?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 662

Thema: Aussagenlogik

Wie nennt man die Äquivalenzregeln, die besagen, dass $\alpha \vee \alpha \approx \alpha$ und $\alpha \wedge \alpha \approx \alpha$ gilt?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 663
Thema: Aussagenlogik

Wie lauten die Regeln von de Morgan?

Hinweis Zu welchen Formeln sind die Formeln $\neg(\alpha \wedge \beta)$ und $\neg(\alpha \vee \beta)$ äquivalent?

Frage 664

Thema: Aussagenlogik

Wann ist eine aussagenlogische Formel α in Negationsnormalform?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 662
Thema: Aussagenlogik

Das sind die Idempotenzregeln.

Antwort 661

Thema: Aussagenlogik

Das ist die Negationsregel.

Antwort 664

Thema: Aussagenlogik

Wenn in α nicht die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ vorkommen, und wenn jedes Negationszeichen direkt vor einem Atom steht.

Antwort 663

Thema: Aussagenlogik

Sind α und β aussagenlogische Formeln, dann gilt $\neg(\alpha \wedge \beta) \approx \neg\alpha \vee \neg\beta$ und $\neg(\alpha \vee \beta) \approx \neg\alpha \wedge \neg\beta$.

Frage 665

Thema: Aussagenlogik

Ist die Negationsnormalform einer aussagenlogischen Formel eindeutig?

Hinweis Nein.

Frage 666

Thema: Aussagenlogik

Wann ist eine aussagenlogische Formel α in konjunktiver Normalform?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 667
Thema: Aussagenlogik

Wann ist eine aussagenlogische Formel α in disjunktiver Normelform?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 668

Thema: Aussagenlogik

Was ist eine Negationsnormalform von $\neg(A \vee \neg(B \wedge C))$?

Hinweis In der Negationsnormalform dürfen die Negationszeichen nur vor den Atomen stehen.

Antwort 666
Thema: Aussagenlogik

Wenn α eine Konjunktion von Klauseln ist. Dabei ist eine Klausel von der Form $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$, wobei alle α_i Atome oder negierte Atome sind. Eine Konjunktion ist von der Form $\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Antwort 665

Thema: Aussagenlogik

Nein. Es sind zum Beispiel $\neg\alpha \vee \beta$ und $\beta \vee \neg\alpha$ Negationsnormalformen ein und derselben Formel.

Antwort 668
Thema: Aussagenlogik

Mit der Regel von de Morgan gilt $\neg(A \vee \neg(B \wedge C)) \approx \neg A \wedge \neg\neg(B \wedge C)$, und mit der Negationsregel gilt $\neg A \wedge \neg\neg(B \wedge C) \approx \neg A \wedge (B \wedge C)$, und dies ist eine Negationsnormalform.

Antwort 667

Thema: Aussagenlogik

Wenn α eine Disjunktion von Monomen ist. Dabei ist eine Disjunktion von der Form $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$, und ein Monom ist von der Form $\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i$, wobei die α_i Atome oder negierte Atome sind.

Frage 669

Thema: Aussagenlogik

Was ist eine Negationsnormalform von $A \leftrightarrow B$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 670

Thema: Aussagenlogik

Bestimmen Sie eine disjunktive Normalform der Formel $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 671

Thema: Aussagenlogik

Bestimmen Sie eine konjunktive Normalform von $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 672
Thema: Aussagenlogik

Bei den formalen Beweisen heißt eine Formel der Form $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ ein gültiges Argument, wenn sie eine Tautologie ist. Ist es wahr, dass $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \rightarrow \beta$ genau dann ein gültiges Argument ist, wenn $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \models \beta$ bzw. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ gilt?

Hinweis Ja, die Behauptung ist wahr.

Antwort 670

Thema: Aussagenlogik

Sei $\alpha = (\neg B \vee A)$. Die Distributivgesetze angewendet auf $(\neg A \vee B) \wedge \alpha$ ergeben $(\neg A \wedge \alpha) \vee (B \wedge \alpha)$, also $(\neg A \wedge (\neg B \vee A)) \vee (B \wedge (\neg B \vee A))$. Nochmalige Anwendung der Distributivgesetze ergibt $((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A)) \vee ((B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A))$. Ein paar überflüssige Klammern können noch entfernt werden, und wir erhalten die disjunktive Normalform $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)$.

Antwort 669

Thema: Aussagenlogik

Mit der Junktorminimierung gilt $A \leftrightarrow B \approx \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A))$. Mit den Regeln von de Morgan ist diese Formel äquivalent zu $\neg((\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg B \wedge \neg A))$. Die Negationsregel besagt, dass die Formel äquivalent ist zu $\neg((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A))$. Nun werden wieder die Regeln von de Morgan angewendet: $\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)$. Nochmaliges Anwenden der Regeln von der Morgan ergibt $(\neg A \vee \neg\neg B) \wedge (\neg B \vee \neg\neg A)$. Nun muss noch einmal die Negationsregel angewendet werden, um die doppelten Negationszeichen zu beseitigen, und wir erhalten die Formel $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ als Negationsnormalform.

Antwort 672
Thema: Aussagenlogik

Ja, das ist wahr, denn schließlich gilt $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \models \beta$ genau dann, wenn $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \to \beta$ eine Tautologie ist.

Antwort 671

Thema: Aussagenlogik

Sei $\alpha = (\neg A \wedge \neg B)$. Die Distributivgesetze angewendet auf $(A \wedge B) \vee \alpha$ ergeben $(A \vee \alpha) \wedge (B \vee \alpha)$, also $(A \vee (\neg A \wedge \neg B)) \wedge (B \vee (\neg A \wedge \neg B))$. Nochmalige Anwendung der Distributivgesetze ergibt $((A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B)) \wedge ((B \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B))$. Ein paar überflüssige Klammern können noch entfernt werden, und wir erhalten die konjunktive Normalform $(A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)$.

Frage 673

Thema: Aussagenlogik

Modellieren Sie die folgenden Aussage: Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, dann ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist. Dabei sei H die Aussage „Der Hahn kräht auf dem Mist“ und W die Aussage „Das Wetter ändert sich“.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 674
Thema: Aussagenlogik

Modellieren Sie die folgende Aussage: Mai kühl und nass füllt dem Bauern Scheun” und Fass. Dabei sei K die Aussage „Im Mai ist es kühl“, N sei die Aussage „Im Mai ist es nass“ und E sei die Aussage „Die Ernte ist gut.“

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 675

Thema: Prädikatenlogik

Sei $M = \mathbb{Z}$. Geben Sie ein Beispiel für eine zweistellige Funktion und eine einstellige Relation auf M.

Hinweis Eine n-stellige Funktion auf einer Menge M ist eine Abbildung $M^n \longrightarrow M$, und eine n-stellige Relation R ist eine Teilmenge von M^n.

Frage 676

Thema: Prädikatenlogik

Was sind die wesentlichen Unterschiede zwischen aussagenlogischen und prädikatenlogischen Formeln?

Hinweis In einer aussagenlogischen Formel kommt zum Beispiel kein Existenzquantor vor.

Antwort 674
Thema: Aussagenlogik

Die Aussage wird zu $K \wedge N \to E$.

Antwort 673

Thema: Aussagenlogik

Die Aussage wird zu $H \to W \vee \neg W$.

Antwort 676
Thema: Prädikatenlogik

In prädikatenlogischen Fromeln kommen zusätzlich noch Funktionen und Relationen sowie der Existenz- und der Allquantor vor.

Antwort 675
Thema: Prädikatenlogik

Eine zweistellige Funktion ist eine Abbildung $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$, also zum Beispiel $f(x, y) = xy$. Eine einstellige Relation R ist eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$, also zum Beispiel $R = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist gerade}\}$.

Frage 677

Thema: Prädikatenlogik

Welche Variablen kommen in der Formel $\forall x P(f(x, y), z) \wedge \exists y S(h(g(y)))$ frei und welche gebunden vor?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 678
Thema: Prädikatenlogik

Es sei P eine zweistellige Relation und f eine einstellige Funktion. Sei $\alpha = \exists x \forall y P(x, y) \vee (\neg(f(x) = f(y)))$. Sei $U = \mathbb{Z}$, $\mathcal{I}(P) = Q$ mit $Q = \{(a, b) \mid a > b\}$ und $\mathcal{I}(f) = g$ mit $g(a) = a^2$. Was ist $\mathcal{I}(\alpha)$?

Hinweis Es gilt $\mathcal{I}(\alpha) = 0$.

Frage 679
Thema: Prädikatenlogik

Konstruieren Sie eine Interpretation der Formel $\alpha = \exists x \forall y P(x, y) \vee (\neg(f(x) = f(y)))$, so dass $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ gilt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 680

Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei P eine zweistellige Relation und f eine zweistellige Funktion. Die Formel $\alpha = \forall x \exists y P(x, y) \wedge P(x, f(x, y))$ ist tautologisch.

Hinweis Falsch.

Antwort 678
Thema: Prädikatenlogik

Die Formel sieht mit der Interpretation folgendermaßen aus: $\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}\ (x > y) \vee (\neg(x^2 = y^2))$. Es gilt also $\mathcal{I}(\alpha) = 0$, denn für jedes $x \in \mathbb{Z}$ gilt für $y = x$ weder $x > y$ noch $x^2 \neq y^2$.

Antwort 677
Thema: Prädikatenlogik

Die Variable x ist gebunden, z ist frei, und y kommt im ersten Teil frei und dann gebunden vor.

Antwort 680

Thema: Prädikatenlogik

Falsch. Sei $U = \mathbb{N}$ und $\mathcal{I}(P) = Q$ mit $Q = \{(a, b) \mid a > b\}$. Weiter sei $\mathcal{I}(f) = g$ mit $g(a, b) = ab$. Dann ist die Formel $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (x > y) \wedge (x > xy)$. Für $x = 1$ gibt es jedoch kein $y \in \mathbb{N}$ mit $x > y$, das heißt $\mathcal{I}(\alpha) = 0$. Damit ist α nicht tautologisch.

Antwort 679
Thema: Prädikatenlogik

Es sei $U = \mathbb{N}$ und $\mathcal{I}(P) = Q$ mit $Q = \{(a, b) \mid a = b\}$. Weiter sei $\mathcal{I}(f) = g$ mit $g(a) = a$. Dann lautet die Formel $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (x = y) \vee (x \neq y)$. Diese Formel ist offensichtlich wahr, also $\mathcal{I}(\alpha) = 1$.

Frage 681
Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei P eine zweistellige Relation und f eine zweistellige Funktion. Die Formel $\alpha = \forall x \exists y P(x,y) \wedge P(x, f(x,y))$ ist erfüllbar.

Hinweis Wahr.

Frage 682

Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei P eine zweistellige Relation und f eine zweistellige Funktion. Die Formel $\alpha = \forall x \exists y P(x, y) \wedge P(x, f(x, y))$ ist falsifizierbar.

Hinweis Wahr.

Frage 683

Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei P eine zweistellige Relation und f eine zweistellige Funktion. Die Formel $\alpha = \forall x \exists y P(x, y) \land P(x, f(x, y))$ ist widersprüchlich.

Hinweis Falsch.

Frage 684
Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Nur Eisbären, die mit der Hand aufgezogen werden, mögen (einige) Menschen. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Säugetiere in deutschen Zoos und die Prädikate:

1. $E(x)$: x ist ein Eisbär.
2. $M(x)$: x ist ein Mensch.
3. $H(x)$: x wurde mit der Hand aufgezogen.
4. $m(x, y)$: x mag y.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 682

Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Sei $U = \mathbb{N}$ und $\mathcal{I}(P) = Q$ mit $Q = \{(a, b) \mid a > b\}$. Weiter sei $\mathcal{I}(f) = g$ mit $g(a, b) = ab$. Dann ist die Formel $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (x > y) \wedge (x > xy)$. Für $x = 1$ gibt es jedoch kein $y \in \mathbb{N}$ mit $x > y$, das heißt $\mathcal{I}(\alpha) = 0$. Damit ist α falsifizierbar.

Antwort 681

Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Sei $U = \mathbb{N}$ und $\mathcal{I}(P) = Q$ mit $Q = \{(a,b) \mid a \leq b\}$. Weiter sei $\mathcal{I}(f) = g$ mit $g(a,b) = a + b$. Dann ist die Formel $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (x \leq y) \wedge (x \leq x + y)$. Diese Aussage ist wahr, wenn man zum Beispiel für jedes $x \in \mathbb{N}$ einfach $y = x$ wählt. Das heißt $\mathcal{I}(\alpha) = 1$. Damit ist α erfüllbar.

Antwort 684
Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\forall x(E(x) \wedge (\exists y(M(y) \wedge m(x,y))) \rightarrow H(x))$.

Antwort 683

Thema: Prädikatenlogik

Falsch. Sei $U = \mathbb{N}$ und $\mathcal{I}(P) = Q$ mit $Q = \{(a,b) \mid a \leq b\}$. Weiter sei $\mathcal{I}(f) = g$ mit $g(a,b) = a + b$. Dann ist die Formel $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (x \leq y) \wedge (x \leq x + y)$. Dann ist diese Aussage wahr, wenn man zum Beispiel für jedes $x \in \mathbb{N}$ einfach $y = x$ wählt. Das heißt $\mathcal{I}(\alpha) = 1$. Damit ist α nicht widersprüchlich.

Frage 685
Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Eisbären, die mit der Hand aufgezogen werden, mögen keine anderen Eisbären. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Säugetiere in deutschen Zoos und die Prädikate:

1. $E(x)$: x ist ein Eisbär.
2. $H(x)$: x wurde mit der Hand aufgezogen.
3. $m(x, y)$: x mag y.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 686
Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Zeitschriften und Doktorarbeiten sind nicht ausleihbar. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Printmedien der Universitätsbibliothek und die Prädikate:

1. $z(x)$: x ist eine Zeitschrift.
2. $d(x)$: x ist eine Doktorarbeit.
3. $a(x)$: x ist ausleihbar.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 687

Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Nur Monographien, die Lehrbücher sind, sind ausleihbar. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Printmedien der Universitätsbibliothek und die Prädikate:

1. $m(x)$: x ist eine Monographie.
2. $l(x)$: x ist ein Lehrbuch.
3. $a(x)$: x ist ausleihbar.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 688
Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Manche Monographien sind Doktorarbeiten, aber Doktorarbeiten sind keine Lehrbücher. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Printmedien der Universitätsbibliothek und die Prädikate:

1. $m(x)$: x ist eine Monographie.
2. $d(x)$: x ist eine Doktorarbeit.
3. $l(x)$: x ist ein Lehrbuch.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 686

Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\forall x(z(x) \vee d(x) \rightarrow \neg a(x))$.

Antwort 685
Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\forall x((E(x) \wedge H(x)) \rightarrow (\forall y(E(y) \rightarrow \neg m(x, y))))$.

Antwort 688

Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $(\exists x(m(x) \wedge d(x))) \wedge (\forall x(d(x) \rightarrow \neg l(x)))$.

Antwort 687
Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\forall x(m(x) \wedge a(x) \rightarrow l(x))$.

Frage 689
Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Es gibt Hunde, die keine Kaninchen jagen. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Säugetiere und die Prädikate:

1. $h(x)$: x ist ein Hund.
2. $k(x)$: x ist ein Kaninchen.
3. $j(x, y)$: x jagt y.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 690
Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Nur Hunde jagen Kaninchen. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Säugetiere und die Prädikate:

1. $h(x)$: x ist ein Hund.
2. $k(x)$: x ist ein Kaninchen.
3. $j(x, y)$: x jagt y.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 691

Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Hunde, die Kaninchen jagen, beißen nicht. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Säugetiere und die Prädikate:

1. $h(x)$: x ist ein Hund.
2. $k(x)$: x ist ein Kaninchen.
3. $j(x, y)$: x jagt y.
4. $b(x)$: x beißt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 692

Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Alle grünen Drachen können fliegen. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Drachen und die Prädikate:

1. $g(x)$: x ist grün.
2. $f(x)$: x kann fliegen.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 690

Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\forall x(\exists y(k(y) \wedge j(x,y)) \rightarrow h(x))$.

Antwort 689
Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\exists x(h(x) \land (\forall y(k(y) \to \neg j(x,y))))$.

Antwort 692
Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\forall x(g(x) \rightarrow f(x))$.

Antwort 691

Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\forall x \forall y (h(x) \wedge k(y) \wedge j(x, y) \rightarrow \neg b(x))$.