Frage 1

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$.

Entscheiden Sie, ob BA definiert ist, und geben Sie (falls möglich) die Anzahl der Zeilen und Spalten des Ergebnisses an.

Hinweis Das Produkt XY von zwei Matrizen X und Y ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X gleich der Anzahl der Zeilen von Y ist.

Frage 2

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{52}(\mathbb{K})$ und $D \in \mathrm{M}_{42}(\mathbb{K})$.

Entscheiden Sie, ob $AC + D$ definiert ist, und geben Sie (falls möglich) die Anzahl der Zeilen und Spalten des Ergebnisses an.

Hinweis Das Produkt XY von zwei Matrizen X und Y ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X gleich der Anzahl der Zeilen von Y ist. Die Summe $X + Y$ ist nur dann definiert, wenn X und Y gleich viele Zeilen und gleich viele Spalten haben.

Frage 3

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$ und $E \in \mathrm{M}_{54}(\mathbb{K})$.

Entscheiden Sie, ob $AE + B$ definiert ist, und geben Sie (falls möglich) die Anzahl der Zeilen und Spalten des Ergebnisses an.

Hinweis Das Produkt XY von zwei Matrizen X und Y ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X gleich der Anzahl der Zeilen von Y ist. Die Summe $X + Y$ ist nur dann definiert, wenn X und Y gleich viele Zeilen und gleich viele Spalten haben.

Frage 4

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$.

Entscheiden Sie, ob $AB + B$ definiert ist, und geben Sie (falls möglich) die Anzahl der Zeilen und Spalten des Ergebnisses an.

Hinweis Das Produkt XY von zwei Matrizen X und Y ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X gleich der Anzahl der Zeilen von Y ist.

Antwort 2

Thema: Matrizenrechnung

Das Produkt AC ist definiert, und das Ergebnis ist eine 4×2-Matrix. Auch D ist eine 4×2-Matrix. Somit ist die Summe $AC + D$ definiert, und das Ergebnis hat 4 Zeilen und 2 Spalten.

Antwort 1

Thema: Matrizenrechnung

Das Produkt BA ist nicht definiert, denn die Anzahl der Zeilen von A ist verschieden von der Anzahl der Spalten von B.

Antwort 4

Thema: Matrizenrechnung

Das Produkt AB ist nicht definiert, denn die Anzahl der Spalten von A ist verschieden von der Anzahl der Zeilen von B.

Antwort 3

Thema: Matrizenrechnung

Die Matrixx AE ist definiert, und sie ist eine 4×4-Matrix. Da B eine 4×5-Matrix ist, ist die Summe nicht definiert.

Frage 5

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$ und $E \in \mathrm{M}_{54}(\mathbb{K})$.

Entscheiden Sie, ob $E(A+B)$ definiert ist, und geben Sie (falls möglich) die Anzahl der Zeilen und Spalten des Ergebnisses an.

Hinweis Das Produkt XY von zwei Matrizen X und Y ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X gleich der Anzahl der Zeilen von Y ist.
Die Summe $X+Y$ ist nur dann definiert, wenn X und Y gleich viele Zeilen und gleich viele Spalten haben.

Frage 6

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{45}(\mathbb{K})$, $C \in \mathrm{M}_{52}(\mathbb{K})$ und $E \in \mathrm{M}_{54}(\mathbb{K})$.

Entscheiden Sie, ob $E(AC)$ definiert ist, und geben Sie (falls möglich) die Anzahl der Zeilen und Spalten des Ergebnisses an.

Hinweis Das Produkt XY von zwei Matrizen X und Y ist nur dann definiert, wenn die Anzahl der Spalten von X gleich der Anzahl der Zeilen von Y ist.

Frage 7

Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel für eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$, für die $a_{ij} = 0$ für alle $i \neq j$ gilt, und deren weitere Einträge $\neq 0$ sind.

Hinweis Der erste Index nummeriert die Zeilen, der zweite die Spalten.

Frage 8
Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel für eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$, für die $a_{ij} = 0$ für alle $i > j$ gilt, und deren weitere Einträge $\neq 0$ sind.

Hinweis Der erste Index nummeriert die Zeilen, der zweite die Spalten.

Antwort 6

Thema: Matrizenrechnung

Das Produkt AC ist definiert, und das Ergebnis ist eine 4×2-Matrix. Das Produkt $E(AC)$ ist ebenfalls definiert, und das Ergebnis hat 5 Zeilen und 2 Spalten.

Antwort 5

Thema: Matrizenrechnung

Die Summe $A+B$ ist definiert, und das Ergebnis ist eine 4×5-Matrix. Da E eine 5×4-Matrix ist, ist das Produkt $E(A+B)$ definiert, und das Ergebnis hat 5 Zeilen und 5 Spalten.

Antwort 8

Thema: Matrizenrechnung

Alle Einträge unterhalb der Diagonalen müssen 0 sein. Ein Beispiel ist etwa $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Antwort 7
Thema: Matrizenrechnung

Alle Einträge, die nicht auf der Diagonalen stehen, müssen 0 sein. Die 4×4-Einheitsmatrix liefert ein Beispiel.

Frage 9

Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel für eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$, für die $a_{ij} = 0$ für alle $i < j$ gilt, und deren weitere Einträge $\neq 0$ sind.

Hinweis Der erste Index nummeriert die Zeilen, der zweite die Spalten.

Frage 10

Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel für eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$, für die $a_{ij} = 0$ für alle $|i - j| = 1$ gilt, und deren weitere Einträge $\neq 0$ sind.

Hinweis Welche Einträge müssen 0 sein?

Frage 11

Thema: Matrizenrechnung

Bestimmen Sie eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$ über $\mathbb{R}$, für die $a_{ij} = i + j$ gilt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 12

Thema: Matrizenrechnung

Bestimmen Sie eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$ über $\mathbb{R}$, für die $a_{ij} = i^j$ gilt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 10

Thema: Matrizenrechnung

Die Einträge a_{12}, a_{21}, a_{32}, a_{23}, a_{43}, a_{34} müssen Null sein. Ein Beispiel liefert $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Antwort 9
Thema: Matrizenrechnung

Alle Einträge oberhalb der Diagonalen müssen 0 sein. Ein Beispiel ist etwa $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

Antwort 12

Thema: Matrizenrechnung

So eine Matrix hat die Form $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 8 & 16 \\ 3 & 9 & 27 & 81 \\ 4 & 16 & 64 & 256 \end{pmatrix}$.

Antwort 11

Thema: Matrizenrechnung

So eine Matrix hat die Form $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 5 & 6 \\ 4 & 5 & 6 & 7 \\ 5 & 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$.

Frage 13

Thema: Matrizenrechnung

Bestimmen Sie eine 4×4-Matrix $A = (a_{ij})$ über $\mathbb{R}$, für die $a_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{falls } |i-j| > 1 \\ -1, & \text{falls } |i-j| \leq 1 \end{cases}$ gilt.

Hinweis Ohne Hinweis

Frage 14

Thema: Matrizenrechnung

Wie lautet das Assoziativgesetz für die Matrizenmultiplikation?

Hinweis Wie viele Zeilen/Spalten haben die Matrizen, die miteinander multipliziert werden?

Frage 15

Thema: Matrizenrechnung

Wie lautet die Distributivgesetz der Matrizenrechnung?

Hinweis Wie viele Zeilen/Spalten müssen die Matrizen haben?

Frage 16
Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel dafür, dass in $\mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$, $n \geq 2$, das Kommutativgesetz nicht gilt.

Hinweis Machen Sie allgemein den Ansatz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} u & v \\ x & y \end{pmatrix}$. Bilden Sie AB und BA und vergleichen Sie die Einträge dieser Matrizen. Wählen Sie nun die Einträge so, dass AB und BA verschieden sind.

Antwort 14

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, $B \in \mathrm{M}_{ns}(\mathbb{K})$ und $C \in \mathrm{M}_{st}(\mathbb{K})$. Dann gilt $(AB)C = A(BC)$.

Antwort 13

Thema: Matrizenrechnung

Die Einträge a_{13}, a_{14}, a_{24}, a_{31}, a_{41} und a_{42} müssen 1 sein, die übrigen Einträge sind -1. Die gesuchte Matrix ist damit $\begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$.

Antwort 16

Thema: Matrizenrechnung

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, und sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, also $AB \neq BA$.

Antwort 15

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, $B, C \in \mathrm{M}_{ns}(\mathbb{K})$ und $D \in \mathrm{M}_{st}(\mathbb{K})$. Dann gilt $A(B+C) = AB + AC$ und $(B+C)D = BD + CD$.

Frage 17

Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix A, die nicht die Nullmatrix ist, für die aber A^2 die Nullmatrix ist.

Hinweis Machen Sie allgemein den Ansatz $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ und berechnen Sie $A^2 = AA$. Wählen Sie nun die Einträge in A so, dass A nicht die Nullmatrix aber A^2 die Nullmatrix ist.

Frage 18

Thema: Matrizenrechnung

Geben Sie ein Beispiel für eine Matrix A, die weder die Nullmatrix noch die Einheitsmatrix ist, und die die Gleichung $A^2 = A$ erfüllt.

Hinweis Die Matrix A darf nicht invertierbar sein.

Frage 19

Thema: Matrizenrechnung

Sei A eine invertierbare quadratische $n \times n$-Matrix, die die Gleichung $A^2 = A$ erfüllt. Warum ist A die Einheitsmatrix?

Hinweis Multiplizieren Sie die Gleichung mit A^{-1}.

Frage 20

Thema: Matrizenrechnung

Seien A und B Matrizen, für die AB gebildet werden kann. Kann dann auch $(AB)(AB)$ gebildet werden?

Hinweis Ist die Anzahl der Spalten von AB immer gleich der Anzahl der Zeilen von AB?

Antwort 18

Thema: Matrizenrechnung

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 17

Thema: Matrizenrechnung

Sei $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Dann gilt $A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 20

Thema: Matrizenrechnung

Nein, im Allgemeinen kann $(AB)(AB)$ nicht gebildet werden. Sei etwa $A \in \mathrm{M}_{12}(\mathbb{R})$, und sei $B \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt $AB \in \mathrm{M}_{12}(\mathbb{R})$, und es folgt, dass $(AB)(AB)$ nicht gebildet werden kann.

Antwort 19

Thema: Matrizenrechnung

Wir multiplizieren die Gleichung $A^2 = A$ mit A^{-1} und erhalten $A = I_n$.

Frage 21

Thema: Matrizenrechnung

Seien A und B Matrizen, für die $A + B$ und AB gebildet werden können. Warum müssen A und B quadratisch sein?

Hinweis Wie werden Matrizen addiert? Wie multipliziert?

Frage 22
Thema: Matrizenrechnung

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Wie lautet die Indizierung der

1. Diagonalelemente?
2. Einträge unterhalb der Diagonale?
3. Einträge oberhalb der Diagonale?

Hinweis Eine Merkregel für die Indizes: Die **Z**eilen **z**uerst, die **S**palten **sp**äter.

Frage 23

Thema: Matrizenrechnung

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Sei $a \in \mathbb{K}$. Geben Sie ein Beispiel für Matrizen X und Y, so dass $XA = AY = aA$ ist.

Hinweis Wie viele Zeilen/Spalten müssen X beziehungsweise Y haben? Welche Matrix können Sie von links an A multiplizieren, so dass im Ergebnis jeder Eintrag von A mit einer Konstanten a multipliziert wird?

Frage 24

Thema: Matrizenrechnung

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Wie viele Zeilen und Spalten muss eine Matrix B haben, damit AB eine quadratische Matrix ist?

Hinweis Wie viele Zeilen muss B haben, damit AB gebildet werden kann? Wie viele Zeilen/Spalten hat AB?

Antwort 22

Thema: Matrizenrechnung

1. Die Diagonalelemente sind die Elemente a_{ii}, $1 \leq i \leq n$.
2. Die Einträge unterhalb der Diagonale sind a_{ij}, $1 \leq j < i \leq n$.
3. Die Einträge oberhalb der Diagonale sind a_{ij}, $1 \leq i < j \leq n$.

Antwort 21

Thema: Matrizenrechnung

Seien $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$, und sei $B \in \mathrm{M}_{pq}(\mathbb{K})$. Da $A + B$ gebildet werden kann, folgt $m = p$ und $n = q$. Da AB gebildet werden kann, folgt $n = m$. Es folgt, dass A und B quadratisch sind.

Antwort 24

Thema: Matrizenrechnung

Damit AB quadratisch ist, muss B eine $n \times m$-Matrix sein, also $B \in \mathrm{M}_{nm}(K)$.

Antwort 23

Thema: Matrizenrechnung

Sei $X = \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$, und sei $Y = \begin{pmatrix} a & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & a \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{nn}(K)$. Dann gilt $XA = AY = aA$.

Frage 25

Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{M}_{nl}(\mathbb{K})$. Wenn A eine Nullzeile hat, dann auch AB.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 26

Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ und $B \in \mathrm{M}_{nl}(\mathbb{K})$. Wenn A eine Nullspalte hat, dann auch AB.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 27

Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{K})$ gilt

$$A^2 - (a+d)A + (ad - bc)I_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 28

Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien A, B, C Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$. Ist $AB = AC$, so folgt $B = C$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Antwort 26
Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist falsch.

Sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$, und sei $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$. Dann gilt $AB = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, das heißt, AB hat keine Nullspalte.

Antwort 25

Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist wahr.

Sei $A = (a_{ij})_{1\leq i\leq m, 1\leq j\leq n}$. Sei $1 \leq k \leq m$, und es gelte $a_{kj} = 0$ für alle $1 \leq j \leq n$ (die k-te Zeile von A ist also eine Nullzeile). Sei $B = (b_{ij})_{1\leq i\leq n, 1\leq j\leq l}$. Dann ist $AB = (c_{ij})$ mit $c_{ij} = \sum_{s=1}^{n} a_{is}b_{sj}$, und $c_{kj} = \sum_{s=1}^{n} a_{ks}b_{sj} = 0$ für alle $1 \leq j \leq l$. Die k-te Zeile von AB ist also eine Nullzeile.

Antwort 28

Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist falsch.

Seien etwa $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $C = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$. Es gilt $B \neq C$, aber $AB = AC = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 27
Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist wahr.

Es sind

$$A^2 = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + cd & bc + d^2 \end{pmatrix}$$

und

$$(a + d)A = (a + d) \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + ad & ab + bd \\ ac + cd & ad + d^2 \end{pmatrix}$$

und

$$(ad - bc)I_2 = \begin{pmatrix} ad - bc & 0 \\ 0 & ad - bc \end{pmatrix}.$$

Es folgt $A^2 - (a + d)A + (ad - bc)I_2 = 0$, die Behauptung.

Frage 29

Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Sei $A \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Ist $A^2 = I_n$, so gilt $A = I_n$ oder $A = -I_n$.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 30

Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^n = \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix}$.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 31
Thema: Matrizenrechnung

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien $A, B \in \mathrm{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Wenn die erste und die dritte Zeile von B gleich sind, dann sind die erste und die dritte Zeile von AB gleich.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 32

Thema: Elementarmatrizen

Wann werden zwei Matrizen A und B zeilenäquivalent genannt?

Hinweis Wiederholen Sie die Definition.

Antwort 30
Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist wahr.

Wir beweisen die Aussage mit Induktion nach n. Ist $n_0 = 1$, so gilt $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^1 = \begin{pmatrix} 1 & 3^1 - 1 \\ 0 & 3^1 \end{pmatrix}$
es gilt daher die Induktionsannahme. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, dass die Behauptung für $n \geq 1$ gilt. Es folgt

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{n+1} &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}^{n} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3^n - 1 \\ 0 & 3^n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 2 + 3^{n+1} - 3 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3^{n+1} - 1 \\ 0 & 3^{n+1} \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Mit dem Prinzip der vollständigen Induktion folgt die Behauptung.

Antwort 29

Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist falsch.

Sei $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$. Dann gilt

$$A^2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

aber $A \neq I_2$ und $A \neq -I_2$.

Antwort 32

Thema: Elementarmatrizen

Zwei Matrizen $A, B \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$ heißen zeilenäquivalent, wenn es Elementarmatrizen $E_1, \ldots, E_s$ so gibt, dass $A = E_1 \cdots E_s B$ ist.

Antwort 31

Thema: Matrizenrechnung

Die Aussage ist falsch.

Sei etwa $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$, und sei $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$. Dann gilt

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 0 \\ 16 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Die erste und dritte Zeile von AB sind also verschieden.

Frage 33

Thema: Elementarmatrizen

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Was für eine Matrix müssen Sie von links an A multiplizieren, um die ersten beiden Zeilen von A zu vertauschen?

Hinweis Nach welcher Elementarmatrix wird gesucht?

Frage 34

Thema: Elementarmatrizen

Nennen Sie mindestens drei Eigenschaften von Elementarmatrizen.

Hinweis Wie viele Zeilen/Spalten haben Elementarmatrizen? Welche Eigenschaft haben Inverse von Elementarmatrizen?

Frage 35

Thema: Elementarmatrizen

Sei $A \in \mathrm{M}_{mn}(\mathbb{K})$. Was für eine Matrix müssen Sie von links an A multiplizieren, um die erste Zeile von der zweiten zu subtrahieren?

Hinweis Gesucht ist nach einer Elementarmatrix.

Frage 36

Thema: Elementarmatrizen

Welche Matrix ist invers zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{F}_2)$?

Hinweis Die Matrix ist eine Elementarmatrix.

Antwort 34

Thema: Elementarmatrizen

1. Wenn wir eine Matrix von links mit einer Elementarmatrix multiplizieren, so führen wir eine elementare Zeilenumformung durch.

2. Elementarmatrizen sind invertierbar.

3. Elementarmatrizen sind quadratisch.

4. Inverse von Elementarmatrizen sind Elementarmatrizen.

Antwort 33

Thema: Elementarmatrizen

Wir müssen die Matrix $P_{12} \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ von links an A multiplizieren. Die Matrix P_{12} erhalten wir, indem wir in I_m die erste und die zweite Zeile vertauschen.

Antwort 36

Thema: Elementarmatrizen

Die Matrix ist eine Elementarmatrix vom Typ P_{23}. Eine solche Matrix ist zu sich selbst invers. Invers zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{F}_2)$ ist also $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 35
Thema: Elementarmatrizen

Sei $A = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}$. Wir suchen eine Elementartmatrix E, so dass gilt:

$$EA = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} - a_{11} & \cdots & a_{2n} - a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

Diese elementare Zeilenoperation wird durch die Matrix $T_{21}(-1) \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K})$ realisiert, also

$$T_{21}(-1) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ -1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{mm}(\mathbb{K}).$$

Frage 37

Thema: Elementarmatrizen

Welche Matrix ist invers zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{F}_2)$?

Hinweis Die Matrix ist eine Elementarmatrix.

Frage 38

Thema: Elementarmatrizen

Welche Matrix ist invers zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{M}_{33}(\mathbb{R})$?

Hinweis Die Matrix ist eine Elementarmatrix.

Frage 39
Thema: Elementarmatrizen

Welches ist der Typ der elementaren Zeilenumformung, der die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ in die Matrix $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ überführt? Welche Matrix müssen Sie von links multiplizieren, um diese elementare Zeilenumformung durchzuführen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 40

Thema: Elementarmatrizen

Welche 3×3-Elementarmatrizen gibt es, die Zeilenvertauschungen bewirken?

Hinweis Es gibt drei solcher Elementarmatrizen.

Antwort 38

Thema: Elementarmatrizen

Die Matrix ist eine Elementarmatrix vom Typ $D_2(3)$. Invers dazu ist die Matrix $D_2(\frac{1}{3})$.
Somit ist $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ invers zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Antwort 37
Thema: Elementarmatrizen

Die Matrix ist eine Elementarmatrix vom Typ $T_{31}(1)$. Invers dazu ist die Matrix $T_{31}(-1)$.
Da $1 = -1$ in $\mathbb{F}_2$, folgt, dass $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ invers zu $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ ist.

Antwort 40

Thema: Elementarmatrizen

Wir können die erste Zeile mit der zweiten, die erste mit der dritten und die zweite mit der dritten vertauschen. Die zugehörigen Elementarmatrizen sind $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Antwort 39
Thema: Elementarmatrizen

Es handelt sich um eine Zeilenumformung vom Typ Z_{12}. Die zugehörige Elementarmatrix ist $P_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Frage 41

Thema: Elementarmatrizen

Wie entstehen die $m \times m$-Elementarmatrizen aus der $m \times m$-Einheitsmatrix I_m?

Hinweis Wir müssen auf I_m elementare Zeilenumformungen anwenden.

Frage 42

Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Ist die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf M?

Hinweis Ja, aber warum ist das so?

Frage 43

Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Ist die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf M?

Hinweis Nein, aber warum nicht?

Frage 44

Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Ist die Matrizenaddition eine Verknüpfung auf M?

Hinweis Nein, aber warum nicht?

Antwort 42
Thema: Verknüpfungen

Wir müssen zeigen, dass das Produkt von zwei Matrizen, die in M liegen, wieder in M liegt. Dazu seien $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ in M. Es ist $AB = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Dies ist eine Matrix, die in M liegt. Also bildet die Matrizenmultiplikation zwei beliebige Matrizen $A, B \in M$ auf eine Matrix in M ab, und es folgt, dass die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf M ist.

Antwort 41
Thema: Elementarmatrizen

Eine Elementarmatrix P_{ij} entsteht aus I_m, indem wir die i-te und die j-te Zeile vertauschen.

Eine Elementarmatrix $T_{ij}(s)$, $i \neq j$ und $s \in \mathbb{K}$, entsteht aus I_m, indem wir das s-Fache der j-ten Zeile zur i-ten Zeile addieren.

Eine Elementarmatrix $D_i(r)$, $r \neq 0$, entsteht aus I_m, indem wir die i-te Zeile mit r multiplizieren.

Antwort 44
Thema: Verknüpfungen

Nein, denn die Summe von zwei Matrizen in M liegt nicht in M, da die Elemente auf der Diagonalen 2 sind.

Antwort 43
Thema: Verknüpfungen

Nein, denn das Produkt von zwei Matrizen in M liegt nicht in M. Wenn $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, so gilt $A \in M$ und $A^2 = AA = I_2$, und I_2 liegt nicht in M.

Frage 45

Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$, und sei $N := \left\{ \begin{pmatrix} -1 & a \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Ist die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf $M \cup N$?

Hinweis Ja, aber warum ist das so?

Frage 46

Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Ist die Matrizenmultiplikation für Matrizen, die in M liegen, kommutativ?

Hinweis Ja, aber können Sie das auch beweisen?

Frage 47

Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Liegt I_2 in M, und ist jede Matrix in M bezüglich der Matrizenmultiplikation invertierbar? Liegt das inverse Element einer Matrix in M wieder in M?

Hinweis Ja, ja und ja.

Frage 48

Thema: Verknüpfungen

Sei $M := \{-1, 1\}$. Ist die Multiplikation eine Verknüpfung auf M?

Hinweis Ja, aber warum ist das so?

Antwort 46

Thema: Verknüpfungen

Ja, denn seien $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ zwei beliebige Matrizen in M. Dann gilt $AB = \begin{pmatrix} 1 & b+a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $BA = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, also $AB = BA$ für alle $A, B \in M$. Somit ist die Matrizenmultiplikation für Matrizen in M kommutativ.

Antwort 45
Thema: Verknüpfungen

Wir müssen zeigen, dass das Produkt von zwei Elementen $A, B \in M \cup N$ wieder in $M \cup N$ liegt.

Wenn A und B beide in M liegen, so gilt $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $B = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ für reelle Zahlen a und b. Dann gilt $AB = \begin{pmatrix} 1 & a+b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, und es folgt, dass AB in M, und damit in $M \cup N$ liegt.

Analog kann man zeigen, dass $AB \in M$ gilt, wenn $A, B \in N$ gilt, und dass $AB \in N$ gilt, wenn entweder $A \in N$ und $B \in M$ oder $A \in M$ und $B \in N$ gilt.

Da für je zwei Matrizen $A, B \in M \cup N$ auch das Produkt AB in $M \cup N$ liegt, folgt, dass die Matrizenmultiplikation eine Verknüpfung auf $M \cup N$ ist.

Antwort 48

Thema: Verknüpfungen

Es sind $1 \cdot 1 = 1$, $(-1) \cdot (-1) = 1$ und $1 \cdot (-1) = (-1) \cdot 1 = -1$. Das Produkt von je zwei Elementen in M liegt also wieder in M, und dies zeigt, dass die Multiplikation eine Verknüpfung auf M ist.

Antwort 47

Thema: Verknüpfungen

Die Matrix I_2 ist von der Bauart $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ mit $a = 0$. Sie liegt also in M.

Ist $A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, so gilt $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$. Somit ist jede Matrix A in M invertierbar, und die zu einer Matrix A inverse Matrix liegt wieder in M.

Frage 49

Thema: Verknüpfungen

Sei M eine Menge und sei $\mathcal{P}(M)$ die Menge aller Teilmengen von M. Ist $\cup$ eine Verknüpfung auf $\mathcal{P}(M)$?

Hinweis Ja, aber warum ist das so?

Frage 50

Thema: Verknüpfungen

Warum ist $\mathbb{Z}$ mit der Addition und der Multiplikation kein Körper?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 51

Thema: Verknüpfungen

Welche Gesetze müssen die Addition und die Multiplikation in einem Körper $\mathbb{K}$ erfüllen?

Hinweis Zunächst einmal müssen die Addition und die Multiplikation Verknüpfungen auf $\mathbb{K}$ sein. Was muss noch gelten?

Frage 52

Thema: Verknüpfungen

Nennen Sie drei verschiedene Körper.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 50

Thema: Verknüpfungen

Nur die Elemente -1 und 1 sind in $\mathbb{Z}$ invertierbar, denn für alle $a \neq \pm 1$ gibt es kein $a'' \in \mathbb{Z}$ mit $a \cdot a'' = a'' \cdot a = 1$. In einem Körper müssen aber alle Elemente $\neq 0$ invertierbar sein.

Antwort 49

Thema: Verknüpfungen

Wir müssen zeigen, dass die Vereinigung von zwei Teilmengen von M wieder eine Teilmenge von M ist. Dazu seien X und Y Teilmengen von M. Sei $m \in X \cup Y$. Wenn $m \in X$, so folgt $m \in M$, denn X ist eine Teilmenge von M. Wenn $m \in Y$, so folgt $m \in M$, denn Y ist eine Teilmenge von M. Es gilt also $X \cup Y \subseteq M$, und damit liegt $X \cup Y$ in $\mathcal{P}(M)$. Da durch die Vereinigung je zwei Teilmengen von M eine Teilmenge von M zugeordnet wird, ist $\cup$ eine Verknüpfung auf $\mathcal{P}(M)$.

Antwort 52

Thema: Verknüpfungen

$\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ und $\mathbb{F}_2$.

Antwort 51
Thema: Verknüpfungen

Zunächst einmal müssen die Addition und die Multiplikation Verknüpfungen auf $\mathbb{K}$ sein.

Die Addition muss das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz erfüllen, ein neutrales Element 0 besitzen, und jedes Element in $\mathbb{K}$ muss bezüglich der Addition invertierbar sein.

Die Multiplikation muss das Kommutativgesetz und das Assoziativgesetz erfüllen, ein neutrales Element 1 besitzen, und jedes Element in $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ muss bezüglich der Multiplikation invertierbar sein. Weiter muss $1 \neq 0$ gelten.

Ferner müssen Addition und Multiplikation das Distributivgesetz erfüllen.

Frage 53

Thema: Aussagen

Ist folgende Aussage wahr oder falsch? Wenn alle Autos rot sind, ist jeder Tag ein Feiertag.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 54

Thema: Aussagen

Ist folgende Aussage wahr oder falsch? Wenn alle Autos rot sind, so folgt auf jeden Dienstag ein Mittwoch.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Frage 55

Thema: Aussagen

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Wenn auf jeden Dienstag ein Mittwoch folgt, so ist jedes Auto rot.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 56

Thema: Aussagen

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch? Das Sauerland ist genau dann ein Mittelgebirge, wenn auf jeden Dienstag ein Mittwoch folgt.

Hinweis Die Aussage ist wahr.

Antwort 54
Thema: Aussagen

Die Aussage ist wahr. Wir haben hier eine Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, dabei ist $\mathcal{A}$ die Aussage „Alle Autos sind rot“, und $\mathcal{B}$ ist die Aussage „Auf jeden Dienstag folgt ein Mittwoch“. Die Aussage $\mathcal{A}$ ist falsch, die Aussage $\mathcal{B}$ ist wahr. Es folgt, dass $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wahr ist, denn aus einer falschen Voraussetzung kann alles folgen.

Antwort 53

Thema: Aussagen

Die Aussage ist wahr. Wir haben hier eine Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, dabei ist $\mathcal{A}$ die Aussage „Alle Autos sind rot“, und $\mathcal{B}$ ist die Aussage „Jeder Tag ist Feiertag“. Die Aussagen sind beide falsch, und es folgt, dass $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ wahr ist. (Aus einer falschen Voraussetzung kann alles folgen.)

Antwort 56

Thema: Aussagen

Die Aussage ist wahr. Wir haben hier eine Äquivalenz $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$, dabei ist $\mathcal{A}$ die Aussage „Das Sauerland ist ein Mittelgebirge“, und $\mathcal{B}$ ist die Aussage „Auf jeden Dienstag folgt ein Mittwoch“. Da beide Aussagen wahr sind, ist die Äquivalenz wahr.

Antwort 55

Thema: Aussagen

Die Aussage ist falsch. Wir haben hier eine Implikation $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$, dabei ist $\mathcal{A}$ die Aussage „Auf jeden Dienstag folgt ein Mittwoch“, und $\mathcal{B}$ ist die Aussage „Alle Autos sind rot“. Die Aussage $\mathcal{A}$ ist wahr, die Aussage $\mathcal{B}$ ist falsch. Es folgt, dass $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ falsch ist, denn aus einer wahren Aussage kann man nichts Falsches folgern.

Frage 57

Thema: Aussagen

Wie lautet die Negation der Aussage „Alle Fernstudentinnen sind fleißig."?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 58

Thema: Aussagen

Wie lautet die Negation der Aussage „Alle Fernstudentinnen sind fleißig und gut in Mathe.“?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 59

Thema: Aussagen

Wie lautet die Negation der Aussage „Alle Fernstudentinnen sind fleißig oder genial.“?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 60

Thema: Aussagen

Wie lautet die Negation der Aussage „Es gibt eine Mathematikprofessorin, die schlecht rechnen kann und gern Spagetti isst.“?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 58

Thema: Aussagen

Es gibt eine Fernstudentin, die nicht fleißig oder nicht gut in Mathe ist.

Antwort 57
Thema: Aussagen

Es gibt eine Fernstudentin, die nicht fleißig ist.

Antwort 60

Thema: Aussagen

Alle Mathematikprofessorinnen können gut rechnen oder essen ungern Spagetti.

Antwort 59

Thema: Aussagen

Es gibt eine Fernstudentin, die nicht fleißig und nicht genial ist.

Frage 61

Thema: Aussagen

Wie lautet die Negation der Aussage „Es gibt eine Mathematikprofessorin, die gern Spagetti isst oder Mini fährt.“?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 62
Thema: Aussagen

Wie lautet die Negation der Aussage „Genau dann kichert die Hexe, wenn Hänsel und Gretel sich im Wald verirren.“?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 63

Thema: Aussagen

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen. Nennen Sie eine zu $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$ logisch äquivalente Aussage.

Hinweis Ohne Hinweis

Frage 64
Thema: Aussagen

Seien $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$ Aussagen. Nennen Sie eine zu $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$ logisch äquivalente Aussage.

Hinweis

Antwort 62
Thema: Aussagen

Genau dann kichert die Hexe nicht, wenn Hänsel oder Gretel sich im Wald verirren.

Antwort 61
Thema: Aussagen

Alle Mathematikprofessorinnen essen ungern Spagetti und fahren nicht Mini.

Antwort 64

Thema: Aussagen

$(\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}) \wedge (\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{A})$.

Antwort 63
Thema: Aussagen

$\neg\mathcal{B} \Rightarrow \neg\mathcal{A}$

Frage 65
Thema: Aussagen

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Aussagen. Nennen Sie eine zu $\mathcal{A} \Rightarrow (\mathcal{B} \wedge \mathcal{C})$ logisch äquivalente Aussage.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 66

Thema: Aussagen

Seien $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ und $\mathcal{C}$ Aussagen. Nennen Sie eine zu $(\mathcal{A} \vee \mathcal{B}) \Rightarrow \mathcal{C}$ logisch äquivalente Aussage.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 67

Thema: Aussagen

Geben Sie ein Beispiel für eine Aussage, die immer wahr ist.

Hinweis Verknüpfen Sie geschickt eine wahre und eine falsche Aussage.

Frage 68
Thema: Aussagen

Geben Sie ein Beispiel für eine Aussage, die immer falsch ist.

Hinweis Verknüpfen Sie geschickt eine wahre und eine falsche Aussage.

Antwort 66

Thema: Aussagen

$(\neg\mathcal{C}) \Rightarrow \neg(\mathcal{A} \vee \mathcal{B})$, also $(\neg\mathcal{C}) \Rightarrow ((\neg\mathcal{A}) \wedge (\neg\mathcal{B}))$.

Antwort 65

Thema: Aussagen

$\neg(\mathcal{B} \wedge \mathcal{C}) \Rightarrow (\neg\mathcal{A})$, und wenn wir die linke Klammer noch auflösen $((\neg\mathcal{B}) \vee (\neg\mathcal{C})) \Rightarrow (\neg\mathcal{A})$

Antwort 68

Thema: Aussagen

Wenn $\mathcal{A}$ eine Aussage ist, dann ist $\mathcal{A} \wedge \neg\mathcal{A}$ immer falsch.

Antwort 67
Thema: Aussagen

Wenn $\mathcal{A}$ eine Aussage ist, dann ist $\mathcal{A} \vee \neg\mathcal{A}$ immer wahr.

Frage 69
Thema: Aussagen

Angenommen, Sie müssen beweisen, dass die Aussagen $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$, $\mathcal{C}$ und $\mathcal{D}$ äquivalent sind. Nehmen wir weiter an, Sie hätten bereits $\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{C}$ und $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C}$ und $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{A}$ bewiesen. Nennen Sie zwei Implikationen, die Sie noch beweisen müssen, um die Äquivalenz der vier Aussagen zu beweisen.

Hinweis Was ist ein Ringschluss?

Frage 70

Thema: Mengen

Erklären Sie das Prinzip der vollständigen Induktion. Wann kann es angewendet werden, und wie funktioniert es?

Hinweis

Frage 71

Thema: Aussagen

Auf welchem Prinzip beruhen Beweise durch Widerspruch?

Hinweis Es hat etwas mit den Wahrheitswerten der Implikation zu tun.

Frage 72

Thema: Aussagen

Nehmen wir an, Sie wollten die Aussage

$$\text{Für alle natürlichen Zahlen } n \text{ gilt } \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

durch vollständige Induktion beweisen.

Wie lautet der Induktionsanfang, wie die Induktionsvoraussetzung und was ist im Induktionsschritt zu tun?

Hinweis Im Induktionsanfang müssen Sie die Aussage $\mathcal{A}(1)$ beweisen, in der Induktionsvoraussetzung nehmen Sie an, $\mathcal{A}(n)$ sei wahr, und im Induktionsschritt müssen Sie zeigen, dass aus der Gültigkeit von $\mathcal{A}(n)$ folgt, dass $\mathcal{A}(n+1)$ wahr ist.

Antwort 70
Thema: Mengen

Beweise durch vollständige Induktion können wir führen, wenn wir beweisen wollen, dass Aussagen $\mathcal{A}(n)$, die über die natürlichen Zahlen indiziert sind, wahr sind.

Das Prinzip beruht darauf, dass wir, wenn wir die Gültigkeit einer Aussage $\mathcal{A}(n_0)$ für einen Startwert $n_0 \in \mathbb{N}$ bewiesen haben, und wenn wir für jedes $n \geq n_0$ zeigen können, dass $\mathcal{A}(n) \Rightarrow \mathcal{A}(n+1)$ gilt, die Aussagen $\mathcal{A}(n)$ für alle natürlichen Zahlen $n \geq n_0$ bewiesen haben.

Antwort 69
Thema: Aussagen

Wenn wir noch $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D}$ und $\mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B}$ beweisen können, sind wir fertig. Wir haben dann einen Ringschluss der Form $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{A}$ vorliegen, und wir kommen von jeder der Aussagen zu jeder anderen, indem wir den Implikationspfeilen folgen.

Eine andere Möglichkeit ist, $\mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B}$ und $\mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D}$ zu beweisen. Dann haben wir einen Ringschluss $\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{C} \Rightarrow \mathcal{B} \Rightarrow \mathcal{D} \Rightarrow \mathcal{A}$, und wieder kommen wir von jeder Aussage zu jeder anderen, indem wir den Implikationspfeilen folgen.

Antwort 72
Thema: Aussagen

Induktionsanfang: Es ist zu zeigen, dass $1 = \frac{1 \cdot 2}{2}$ gilt.

Induktionsvoraussetzung: Es gilt $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$.

Induktionsschritt: Hier wird gezeigt, dass aus $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$ folgt, dass $\displaystyle\sum_{k=1}^{n+1} k = \frac{(n+1)(n+2}{2}$ gilt.

Antwort 71
Thema: Aussagen

Auf dem Prinzip, dass man aus einer wahren Aussage nie etwas Falsches folgern kann.

Frage 73

Thema: Aussagen

Wie lautet die Wahrheitstafel für die Negation einer Aussage $\mathcal{A}$?

Hinweis Wenn $\mathcal{A}$ wahr ist, wie steht es dann mit $\neg\mathcal{A}$?

Frage 74

Thema: Aussagen

Wie lautet die Wahrheitsstafel für die Konjunktion von zwei Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Hinweis Die Konjunktion wurde mit $\wedge$ bezeichnet.

Frage 75

Thema: Aussagen

Wie lautet die Wahrheitsstafel für die Disjunktion von zwei Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Hinweis Die Disjunktion wurde mit $\vee$ bezeichnet.

Frage 76
Thema: Aussagen

Wie lautet die Wahrheitsstafel für die Implikation von zwei Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Hinweis Die Implikation wurde mit $\Rightarrow$ bezeichnet.

Antwort 74

Thema: Aussagen

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \wedge \mathcal{B}$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	f.

Antwort 73

Thema: Aussagen

$\mathcal{A}$	$\neg\mathcal{A}$
w	f
f	w

Antwort 76
Thema: Aussagen

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Rightarrow \mathcal{B}$
w	w	w
w	f	f
f	w	w
f	f	$w.$

Antwort 75

Thema: Aussagen

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \vee \mathcal{B}$
w	w	w
w	f	w
f	w	w
f	f	f.

Frage 77

Thema: Aussagen

Wie lautet die Wahrheitsstafel für die Äquivalenz von zwei Aussagen $\mathcal{A}$ und $\mathcal{B}$?

Hinweis Die Äquivalenz wurde mit $\Leftrightarrow$ bezeichnet.

Frage 78

Thema: Mengen

Wie viele Elemente hat $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2$?

Hinweis Vier, und welche sind das?

Frage 79

Thema: Mengen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, und sei $N := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Gilt $M \cup N = \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$?

Hinweis Nein, aber warum nicht?

Frage 80

Thema: Mengen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$, und sei $N := \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in \mathbb{R} \right\}$. Gilt $M \cap N = \emptyset$?

Hinweis Nein, aber warum nicht?

Antwort 78

Thema: Mengen

Es gilt $\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2 = \{(0,0),(0,1),(1,0),(1,1)\}$, also $|\mathbb{F}_2 \times \mathbb{F}_2| = 4$.

Antwort 77
Thema: Aussagen

$\mathcal{A}$	$\mathcal{B}$	$\mathcal{A} \Leftrightarrow \mathcal{B}$
w	w	w
w	f	f
f	w	f
f	f	w.

Antwort 80

Thema: Mengen

Nein, denn die Nullmatrix liegt in $M \cap N$.

Antwort 79
Thema: Mengen

Wenn A eine Matrix in $M \cup N$ ist, dann liegt A in M oder in N. Im ersten Fall hat A an der Stelle $(2, 1)$ den Eintrag 0, im zweiten Fall hat A an der Stelle $(1, 2)$ den Eintrag 0. Die Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ liegt also nicht in $M \cup N$, und es folgt, dass $M \cup N \neq \mathrm{M}_{22}(\mathbb{R})$ ist.

Frage 81

Thema: Mengen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$, und sei $N := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Gilt $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in M \cup N$?

Hinweis Nein, aber warum nicht?

Frage 82

Thema: Mengen

Sei $M := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$, und sei $N := \left\{ \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & 0 \end{pmatrix} \mid a \in \mathbb{R} \right\}$. Gilt $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in M \setminus N$?

Hinweis Nein, aber warum nicht?

Frage 83

Thema: Mengen

Sei $M := \{(a, b) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \mid a + b = 4\}$. Listen Sie alle Elemente in M auf.

Hinweis M enthält drei Elemente.

Frage 84
Thema: Mengen

Seien M und N endliche Mengen mit $|M| = m$ und $|N| = n$. Wie viele Elemente kann $M \cup N$ höchstens haben? Unter welchen Umständen wird diese Zahl angenommen?

Hinweis Die Menge $M \cup N$ hat höchstens $m + n$ Elemente.

Antwort 82

Thema: Mengen

Die Nullmatrix liegt in N. Da $M \setminus N = \{A \mid A \in M \text{ und } A \notin N\}$, folgt, dass die Nullmatrix nicht in $M \setminus N$ liegt.

Antwort 81
Thema: Mengen

Wenn eine Matrix A in $M \cup N$ liegt, dann liegt sie in M oder in N. Im ersten Fall ist der Eintrag an der Stelle $(2, 1)$ Null, im zweiten Fall ist der Eintrag an der Stelle $(1, 2)$ Null. Es folgt, dass $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ nicht in $M \cup N$ liegen kann.

Antwort 84
Thema: Mengen

Die Menge $M \cup N$ hat höchstens $m + n$ Elemente. Diese Zahl wird angenommen, wenn M und N disjunkt sind.

Antwort 83

Thema: Mengen

Es ist $M = \{(1,3),(2,2),(3,1)\}$.

Frage 85

Thema: Mengen

Seien M und N endliche Mengen mit $|M| = m$ und $|N| = n$. Sei $m \geq n$. Wie viele Elemente muss $M \cup N$ mindestens haben? Unter welchen Umständen wird diese Zahl angenommen?

Hinweis Die Menge $M \cup N$ muss mindestens m Elemente enthalten.

Frage 86

Thema: Mengen

Seien M und N endliche Mengen mit $|M| = m$ und $|N| = n$. Wie viele Elemente kann $M \setminus N$ höchstens haben? Unter welchen Umständen wird diese Zahl angenommen?

Hinweis Die Menge $M \setminus N$ hat höchstens m Elemente.

Frage 87

Thema: Mengen

Seien M und N endliche Mengen mit $|M| = m$ und $|N| = n$. Sei $m \geq n$. Wie viele Elemente muss $M \setminus N$ mindestens haben? Unter welchen Umständen wird diese Zahl angenommen?

Hinweis Die Menge $M \setminus N$ muss mindesten $m - n$ Elemente enthalten.

Frage 88

Thema: Mengen

Wann werden Mengen M und N disjunkt genannt?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 86
Thema: Mengen

Die Menge $M \setminus N$ hat höchstens m Elemente. Diese Zahl wird angenommen, wenn M und N disjunkt sind.

Antwort 85

Thema: Mengen

Die Menge $M \cup N$ muss mindestens m Elemente enthalten. Diese Zahl wird angenommen, wenn N eine Teilmenge von M ist.

Antwort 88

Thema: Mengen

Zwei Mengen M und N heißen disjunkt, wenn $M \cap N = \emptyset$ gilt.

Antwort 87

Thema: Mengen

Die Menge $M \setminus N$ muss mindesten $m - n$ Elemente enthalten. Diese Zahl wird angenommen, wenn N eine Teilmenge von M ist.

Frage 89

Thema: Mengen

Seien M und N endliche Mengen, und sei $|M \times N| = 56$. Kann M eine Menge mit 6 Elementen sein?

Hinweis Nein.

Frage 90

Thema: Abbildungen

Definieren Sie eine bijektive Abbildung von $\{1\} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Hinweis Welche Elemente liegen in $\{1\} \times \mathbb{N}$? Notieren Sie einige dieser Elemente. Wiederholen Sie die Definitionen der Begriffe injektiv, surjektiv und bijektiv.

Frage 91

Thema: Mengen

Definieren Sie eine bijektive Abbildung von $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$.

Hinweis Abbildungen; 0,1,2

Basiswissen, Beispiel, Verständnisfrage

Frage 92

Thema: Abbildungen

Definieren Sie eine injektive Abbildung von $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die nicht surjektiv ist.

Hinweis Wiederholen Sie die Definitionen der Begriffe injektiv und surjektiv. Bilden Sie zum Beispiel die Elemente $(1, n)$ auf die geraden Zahlen und die Elemente $(2, n)$ auf die ungeraden Zahlen, die größer als 1 sind, ab.

Antwort 90

Thema: Abbildungen

Sei $f : \{1\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f((1,n)) = n$ für alle $(1,n) \in \{1\} \times \mathbb{N}$. Dann ist $g : \mathbb{N} \to \{1\} \times \mathbb{N}$, definiert durch $g(n) = (1,n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$, invers zu f. Es folgt, dass f bijektiv ist.

Antwort 89

Thema: Mengen

Nein, denn es gilt $|M \times N| = |M| \cdot |N|$. Da 6 Kein Teiler von 56 ist, kann M keine Menge mit 6 Elementen sein.

Antwort 92
Thema: Abbildungen

Sei $f : \{1,2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f((1,n)) = 2n$ und $f((2,n)) = 2n+1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Da es kein $(a,n) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}$ mit $f((a,n)) = 1$ gibt, ist f nicht surjektiv.

Wir zeigen nun, dass f injektiv ist. Dazu seien $(a,n),(b,m) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}$ mit $f((a,n)) = f((b,m)) = y \in \mathbb{N}$. Falls y gerade ist, so folgt $a = b = 1$ und $m = n = \frac{y}{2}$. Falls y ungerade ist, so folgt $a = b = 2$ und $m = n = \frac{y-1}{2}$. Es gilt also $(a,n) = (b,m)$. Somit ist f injektiv.

Antwort 91
Thema: Mengen

Sei $f : \{1,2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f((1,n)) = 2n$ und $f((2,n)) = 2n-1$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir zeigen zunächst, dass f surjektiv ist. Dazu sei $n \in \mathbb{N}$. Falls n gerade ist, dann ist $(1, \frac{n}{2})$ ein Urbild von n. Falls n ungerade ist, so ist $(2, \frac{n+1}{2})$ ein Urbild von n. Da jedes Element $n \in \mathbb{N}$ ein Urbild unter f hat, ist f surjektiv.

Wir zeigen nun, dass f injektiv ist. Dazu seien $(a,n), (b,m) \in \{1,2\} \times \mathbb{N}$ mit $f((a,n)) = f((b,m)) = y \in \mathbb{N}$. Falls y gerade ist, so folgt $a = b = 1$ und $m = n = \frac{y}{2}$. Falls y ungerade ist, so folgt $a = b = 2$ und $m = n = \frac{y+1}{2}$. Es gilt also $(a,n) = (b,m)$. Somit ist f injektiv.

Da f injektiv und surjektiv ist, folgt, dass f bijektiv ist.

Frage 93
Thema: Abbildungen

Definieren Sie eine surjektive Abbildung von $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die nicht injektiv ist.

Hinweis Wiederholen Sie die Definitionen der Begriffe injektiv und surjektiv. Welche Elemente liegen in $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$?

Frage 94

Thema: Abbildungen

Definieren Sie eine Abbildung von $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, die weder injektiv noch surjektiv ist.

Hinweis Wiederholen Sie die Definitionen der Begriffe injektiv und surjektiv.

Frage 95

Thema: Abbildungen

Definieren Sie eine surjektive Abbildung von $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ nach $\mathbb{N}$, so dass die Menge der Urbilder von 100 die Mächtigkeit 3 hat.

Hinweis Wiederholen Sie den Begriff surjektiv.

Welche Elemente liegen in $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$?

Wählen Sie nun drei Elemente in $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$, die Sie mit f auf 100 abbilden. Zum Beispiel die Elemente $(1, 100)$, $(2, 100)$, $(1, 101)$. Sie können natürlich auch andere Elemente in $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ wählen. Bilden Sie nun die übrigen Elemente von $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$ so auf die Elemente von $\mathbb{N}$ ab, dass jedes mindestens ein Urbild besitzt. Formalisieren Sie Ihre Konstruktion.

Frage 96

Thema: Abbildungen

Definieren Sie eine Abbildung $f : \{1, 2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ mit $\text{Bild}(f) = \{1, 2, 3, 4\}$, so dass jedes Element in $\{1, 2, 3, 4\}$ unendlich viele Urbilder hat.

Hinweis Wie ist das Bild einer Abbildung, und wie die Urbildmenge eines Elementes unter einer Abbildung definiert?
Welche Elemente liegen in $\{1, 2\} \times \mathbb{N}$?

Antwort 94

Thema: Abbildungen

Sei $f : \{1,2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f((1,n)) = f((2,n)) = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Diese Abbildung ist weder injektiv noch surjektiv.

Antwort 93

Thema: Abbildungen

Sei $f : \{1, 2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f((1, n)) = f((2, n)) = n$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann hat jedes $n \in \mathbb{N}$ genau zwei Urbilder unter f, und es folgt, dass f nicht injektiv aber surjektiv ist.

Antwort 96
Thema: Abbildungen

Sei $f : \{1, 2\} \times \mathbb{N} \to \{1, 2, 3, 4\}$ definiert durch $f((1, n)) = 1$, falls n gerade ist, $f((1, n)) = 2$, falls n ungerade ist, $f((2, n)) = 3$ falls n gerade ist und $f((2, n)) = 4$, falls n ungerade ist. Das Bild dieser Abbildung ist $\{1, 2, 3, 4\}$, und jedes Element des Bildes von f hat unendlich viele Urbilder.

Antwort 95
Thema: Abbildungen

Sei $f : \{1, 2\} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ definiert durch $f((1, n)) = f((2, n)) = n$ für alle $n \in \mathbb{N} \setminus \{100, 101\}$, und $f((1, 100)) = f((2, 100)) = f((1, 101)) = 100$, und $f((2, 101)) = 101$. Da jedes $n \in \mathbb{N}$ mindestens ein Urbild hat (nämlich $(2, n)$), ist f surjektiv. Die natürliche Zahl 100 hat nach Definition von f genau drei Urbilder.

Frage 97

Thema: Abbildungen

Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Nennen Sie drei Aussagen, die äquivalent sind zu der Aussage: f ist bijektiv.

Hinweis Wiederholen Sie die Begriffe injektiv, surjektiv, bijektiv und invertierbar.

Frage 98
Thema: Abbildungen

Seien X und Y Mengen, und sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Wie ist das Bild von f definiert?

Hinweis Wiederholen Sie die Definition des Bildes einer Abbildung.

Frage 99
Thema: Abbildungen

Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$, und sei $N = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Wie viele Urbilder kann $7 \in N$ maximal haben?

Hinweis Wie ist das Urbild eines Elementes unter einer Abbildung definiert?

Frage 100
Thema: Abbildungen

Sei $M = \{1, 2, 3, 4\}$, und sei $N = \{5, 6, 7, 8, 9\}$. Sei $f : M \to N$ eine Abbildung. Hat das Element $7 \in N$ immer ein Urbild?

Hinweis Wie ist das Urbild eines Elementes unter einer Abbildung definiert? Muss jedes Element im Wertebereich ein Urbild besitzen? Geben Sie ein Beispiel.

Antwort 98

Thema: Abbildungen

Es ist $\text{Bild}(f) = \{y \in Y \mid y = f(x) \text{f ür ein } x \in X\}$.

Antwort 97
Thema: Abbildungen

1. f ist injektiv und surjektiv.

2. f ist invertierbar.

3. Es gibt eine Abbildung $g : Y \to X$, so dass $f \circ g = \mathrm{id}_Y$ und $g \circ f = \mathrm{id}_X$ ist.

Antwort 100
Thema: Abbildungen

Nein, $7 \in N$ muss kein Urbild besitzen. Sei etwa $f : M \to N$ definiert durch $f(m) = 5$ für alle $m \in M$. Dann hat 7 kein Urbild unter f.

Antwort 99
Thema: Abbildungen

Das Element $7 \in N$ hat maximal 4 Urbilder, denn $4 = |M|$. Wenn $f : M \to N$ definiert ist durch $f(m) = 7$ für alle $m \in M$, so hat das Element $7 \in N$ auch genau 4 Urbilder.

Frage 101

Thema: Abbildungen

Seien X und Y Mengen. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen. Ist $f \circ g$ eine Abbildung von X nach X oder eine Abbildung von Y nach Y?

Hinweis Wiederholen Sie die Definition für die Komposition von Abbildungen.

Frage 102
Thema: Abbildungen

Seien X und Y Mengen. Seien $f : X \to Y$ und $g : Y \to X$ Abbildungen. Wie ist $f \circ g$ definiert, und wie $g \circ f$?

Hinweis Wiederholen Sie die Definition für die Komposition von Abbildungen.

Frage 103

Thema: Abbildungen

Seien X und Y Mengen. Sei $f : X \to Y$ eine Abbildung. Nennen Sie drei Aussagen, die äquivalent sind zu der Aussage: f ist invertierbar.

Hinweis Wiederholen Sie die Definition für den Begriff invertierbar.

Frage 104

Thema: Abbildungen

Seien M, N Mengen, und sei $f : M \to N$ eine injektive Abbildung. Sei $f'' : M \to \mathrm{Bild}(f)$ definiert durch $f''(m) = f(m)$ für alle $m \in M$. Begründen Sie, warum f'' invertierbar ist.

Hinweis Die Abbildung f'' ist genau dann invertierbar, wenn sie bijektiv ist. Warum ist f'' bijektiv?

Antwort 102

Thema: Abbildungen

Es gilt: $f \circ g : Y \to Y$ ist definiert durch $(f \circ g)(y) = f(g(y))$ für alle $y \in Y$. Analog ist $g \circ f : X \to X$ definiert durch $(g \circ f)(x) = g(f(x))$ für alle $x \in X$.

Antwort 101

Thema: Abbildungen

$f \circ g$ ist eine Abbildung von Y nach Y.

Antwort 104

Thema: Abbildungen

Da f injektiv ist, ist auch f'' injektiv. Da $\text{Bild}(f) = \text{Bild}(f'')$, ist f'' auch surjektiv. Es folgt, dass f'' bijektiv ist. Damit ist f'' invertierbar.

Antwort 103
Thema: Abbildungen

1. f ist bijektiv.
2. f ist injektiv und surjektiv.
3. Es gibt eine Abbildung $g : Y \to X$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_X$ und $f \circ g = \mathrm{id}_Y$.

Frage 105
Thema: Abbildungen

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$, $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $h : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ Abbildungen. Dann ist $f \circ g \circ h$ definiert.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 106
Thema: Abbildungen

Ist die folgende Aussage wahr oder falsch?

Seien $a, b \in \mathbb{R}$, und sei $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$ definiert durch $f((x, y)) = (ax, by)$ für alle $(x, y) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Wenn $a \neq 0$ oder $b \neq 0$, dann ist f nicht injektiv.

Hinweis Die Aussage ist falsch.

Frage 107
Thema:

Hinweis

Frage 108
Thema:

Hinweis

Antwort 106
Thema: Abbildungen

Die Aussage ist falsch.

Da in der Mathematik das Wort „oder“ im Sinne von „$a \neq 0$ oder $b \neq 0$ oder beide sind $\neq 0$“ gebraucht wird, ist $a = b = 1$ ein Gegenbeispiel zu der Aussage. In diesem Fall ist f nämlich injektiv.

Antwort 105
Thema: Abbildungen

Die Aussage ist falsch.

Der Wertebereich vom h ist $\mathbb{R}$, und der Definitionsbereich von g ist $\mathbb{Z}$. Da diese verschieden sind, ist $g \circ h$ nicht definiert. Es folgt, dass $f \circ g \circ h$ nicht definiert ist.

Antwort 108
Thema:

Antwort 107
Thema: