Frage 1

Thema: Ordnungsaxiome

Wie heißen die drei Ordnungsaxiome?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 2

Thema: Ordnungsaxiome

Wie lautet das Trichotomiegesetz?

Hinweis Das Trichotomiegesetz hat damit zu tun, in welcher Beziehung zwei reelle Zahlen zueinander stehen können.

Frage 3

Thema: Ordnungsaxiome

Wie lautet das Transitivitätsgesetz?

Hinweis Was ist, wenn $a < b$ und $b < c$ gilt?

Frage 4

Thema: Ordnungsaxiome

Wie lauten die Monotoniegesetze?

Hinweis Was können Sie über $a + c$ und $b + c$ bzw. über ac und bc sagen, wenn Sie wissen, dass $a < b$ gilt?

Antwort 2

Thema: Ordnungsaxiome

Für je zwei reelle Zahlen a und b gilt genau eine der drei Beziehungen: $a < b$ oder $a = b$ oder $a > b$.

Antwort 1

Thema: Ordnungsaxiome

Sie heißen Trichotomiegesetz, Transitivitätsgesetz und Monotoniegesetze.

Antwort 4

Thema: Ordnungsaxiome

Ist $a < b$, so gilt $a + c < b + c$ für alle $c \in \mathbb{R}$ und $ac < bc$ für alle $c > 0$.

Antwort 3

Thema: Ordnungsaxiome

Ist $a < b$ und $b < c$, so folgt $b < c$.

Frage 5

Thema: Ordnungsaxiome

Wahr oder falsch? $\mathbb{Q}$ ist ein angeordneter Körper.

Hinweis Wahr.

Frage 6

Thema: Ordnungsaxiome

Wahr oder falsch? $\mathbb{F}_2$ ist ein angeordneter Körper.

Hinweis Falsch.

Frage 7

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Wie nennt man eine reelle Zahl, die keine rationale Zahl ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 8

Thema: Schnittaxiom

Wie ist ein Dedekind"scher Schnitt definiert?

Hinweis Ein Dedekindscher Schnitt $(A|B)$ besteht aus zwei Teilmengen A und B von $\mathbb{R}$ mit bestimmten Eigenschaften.

Antwort 6

Thema: Ordnungsaxiome

Falsch, denn man kann sowohl die Annahme $0 < 1$ als auch die Annahme $1 < 0$ zum Widerspruch führen.

Antwort 5
Thema: Ordnungsaxiome

Wahr, denn $\mathbb{Q}$ ist ein Körper und in $\mathbb{Q}$ gelten die Ordnungsaxiome.

Antwort 8
Thema: Schnittaxiom

Ein Dedekind"scher Schnitt $(A|B)$ erfüllt folgende Eigenschaften:

1. A und B sind nicht leere Teilmengen von $\mathbb{R}$.
2. $A \cup B = \mathbb{R}$.
3. Für alle $a \in A$ und alle $b \in B$ gilt $a < b$.

Antwort 7

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Eine reelle Zahl, die keine rationale Zahl ist, heißt irrationale Zahl.

Frage 9

Thema: Schnittaxiom

Wie ist die Trennungszahl eines Dedekind"schen Schnittes definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 10

Thema: Schnittaxiom

Sei $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 < 2 \text{ oder } x < 0 \text{ und } x^2 \geq 2\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x > 0 \text{ und } x^2 \geq 2\}$. Dann ist $(A|B)$ ein Dedekindscher Schnitt. Was ist die Trennungszahl?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 11

Thema: Schnittaxiom

Ist $(A|B)$ mit $A = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leq 2\}$ und $B = \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 > 2\}$ ein Dedekindscher Schnitt?

Hinweis Nein.

Frage 12

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Geben Sie ein Beispiel für eine irrationale Zahl.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 10

Thema: Schnittaxiom

Die Trennungszahl ist $\sqrt{2}$.

Antwort 9

Thema: Schnittaxiom

Eine Zahl $t \in \mathbb{R}$ heißt Trennungszahl des Dedekind"schen Schnittes $(A|B)$, wenn $a \leq t \leq b$ für alle $a \in A$ und $b \in B$ gilt.

Antwort 12

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Irrationale Zahlen sind zum Beispiel $\sqrt{2}$, e oder π.

Antwort 11

Thema: Schnittaxiom

Nein, denn es gilt zum Beispiel $0 \in A$ und $-3 \in B$ und $0 > -3$.

Frage 13

Thema: Schnittaxiom

Wie lautet das Schnittaxiom?

Hinweis Das Schnittaxiom hat etwas mit Dedekind"schen Schnitten und Trennungszahlen zu tun.

Frage 14

Thema: Schnittaxiom

Welches Axiom unterscheidet die reellen Zahlen von den rationalen Zahlen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 15

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Seien $a, b, c \in \mathbb{R}$, und es gelte $a < b$ und $c < 0$. Was können Sie dann über ac und bc sagen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 16

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Was passiert mit Ungleichungen, wenn Sie diese mit einer negativen Zahl multiplizieren?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 14

Thema: Schnittaxiom

Das Schnittaxiom.

Antwort 13

Thema: Schnittaxiom

Das Schnittaxiom lautet: Jeder Dedekind"sche Schnitt besitzt genau eine Trennungszahl.

Antwort 16

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Das Ungleichungszeichen dreht sich um.

Antwort 15

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Es gilt $ac > bc$.

Frage 17

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wie kann man einen Bruch mit positivem Zähler und Nenner vergrößern?

Hinweis Entweder kann man den Zähler größer machen oder … ?

Frage 18

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Welches ist die größere Zahl, $\frac{136}{187}$ oder $\frac{135}{197}$?

Hinweis Es ist $\frac{136}{187} > \frac{135}{197}$. Warum?

Frage 19

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wie ist der Betrag einer reellen Zahl definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 20

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wie lautet die Dreiecksungleichung?

Hinweis Die Dreiecksungleichung vergleicht $|a|$, $|b|$ und $|a + b|$.

Antwort 18

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Es gilt $\frac{136}{187} > \frac{135}{197}$, denn $136 > 135$ und $187 < 197$.

Antwort 17

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Man kann den Zähler vergrößern oder den Nenner verkleinern. Der Nenner muss dabei allerdings positiv bleiben.

Antwort 20

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $|a+b| \leq |a| + |b|$.

Antwort 19

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Es gilt $|a| = a$, wenn $a \geq 0$ ist, und $|a| = -a$, wenn $a < 0$ ist.

Frage 21

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Gilt, analog zur Dreiecksungleichung, auch $|a - b| \leq |a| - |b|$?

Hinweis Nein.

Frage 22

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wie ist der Abstand zwischen zwei reellen Zahlen definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 23

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wie ist das arithmetische Mittel für zwei reelle Zahlen a und b definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 24

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Was sind die Randpunkte, was ist die Länge und was der Mittelpunkt des Intervalls $(-5, 7]$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 22

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann ist der Abstand zwischen a und b definiert durch $d(a, b) = |a - b|$.

Antwort 21

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Nein. Sei zum Beispiel $a = 0$ und $b = -1$. Dann ist $|a - b| = 1$ und $|a| - |b| = -1$.

Antwort 24

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Die Randpunkte sind -5 und 7, die Länge ist 12 und der Mittelpunkt ist $\frac{-5+7}{2} = 1$.

Antwort 23

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Das arithmetische Mittel ist $\frac{a+b}{2}$.

Frage 25

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Was sind a und b, wenn man $U_{\frac{1}{2}}(-1)$ als Intervall (a, b) schreibt.

Hinweis Es ist $U_\varepsilon(x_0) = \{x \in \mathbb{R} \mid |x - x_0| < \varepsilon\}$.

Frage 26

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ist 1 Minimum der Menge $\{1 + \frac{1}{n} \mid n \in \mathbb{N}\}$?

Hinweis Das Minimum einer Menge muss immer in der Menge enthalten sein.

Frage 27

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Wahr oder falsch? Ist M_1 eine Menge mit Maximum a_1 und M_2 eine Menge mit Maximum a_2, dann ist $\max(a_1, a_2)$ Maximum von $M_1 \cup M_2$.

Hinweis Wahr.

Frage 28

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Geben Sie mindestens zwei obere und mindestens zwei untere Schranken der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x \leq 1\}$ an.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 26

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Nein, denn 1 ist nicht in der Menge enthalten.

Antwort 25

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Es ist $U_{\frac{1}{2}}(-1) = (-\frac{3}{2}, -\frac{1}{2})$.

Antwort 28

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Untere Schranken sind zum Beispiel 0 und -5, obere Schranken sind 1 und 7.

Antwort 27
Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Wahr. Sei nämlich $a = \max(a_1, a_2)$. Dann ist $a = a_1$ oder $a = a_2$, also $a \in M_1 \cup M_2$. Weiter gilt $a_1 \leq a$ und $a_2 \leq a$. Ist nun also $m \in M_1 \cup M_2$, dann gilt $m \in M_1$ oder $m \in M_2$. Ist $m \in M_1$, dann ist $m \leq a_1 \leq a$, und ist $m \in M_2$, dann ist $m \leq a_2 \leq a$. Es gilt also $m \leq a$ für alle $m \in M_1 \cup M_2$.

Frage 29

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ist jede obere Schranke ein Maximum?

Hinweis Nein.

Frage 30

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ist jedes Minimum ein Infimum?

Hinweis Ja.

Frage 31

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Geben Sie ein Beispiel für eine Teilmenge der reellen Zahlen, die ein Supremum aber kein Maximum besitzt.

Hinweis Ein Maximum muss immer zur Menge dazu gehören, ein Supremum aber nicht.

Frage 32

Thema: Schnittaxiom

Nennen Sie mindestens eine Aussage, durch die man das Schnittaxiom bei der Definition der reellen Zahlen ersetzen kann.

Hinweis Was sagt das Supremumsprinzip?

Antwort 30

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ja, denn wenn eine Menge ein Minimum besitzt, dann ist dies die größte untere Schranke dieser Menge.

Antwort 29

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Nein. Es ist zum Beispiel 5 eine obere Schranke der Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 1\}$, aber kein Maximum.

Antwort 32
Thema: Schnittaxiom

Man kann das Schnittaxiom zum Beispiel durch das Supremumsprinzip ersetzen. Dieses besagt, dass jede nicht leere, nach oben beschränkte Menge ein Supremum besitzt. Genauso gut kann man das Schnittaxiom auch durch das Infimumsprinzip ersetzen.

Antwort 31

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Die Menge $\{x \in \mathbb{R} \mid 0 < x < 1\}$ hat 1 als Supremum, besitzt aber kein Maximum.

Frage 33

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Nennen Sie mindestens eine Folgerung aus dem Supremumsprinzip.

Hinweis Eine Folgerung ist der Satz des Archimedes. Was besagt dieser?

Frage 34

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Was ist die dritte Wurzel aus -27?

Hinweis Wurzeln sind immer positiv.

Frage 35

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Wahr oder falsch? Die Wurzeln aus 4 sind 2 und -2.

Hinweis Falsch.

Frage 36

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wie sind arithmetisches und geometrisches Mittel definiert und welche Ungleichung gilt zwischen ihnen?

Hinweis Das arithmetische Mittel ist $\frac{a+b}{2}$ und das geometrische ist $\sqrt{ab}$.

Antwort 34

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Es gibt keine dritte Wurzel aus -27, denn es gilt zwar $(-3)^3 = -27$, aber Wurzeln sind immer ≥ 0.

Antwort 33

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Eine der Folgerungen aus dem Supremumsprinzip ist der Satz des Archimedes. Dieser besagt, dass die Menge der natürlichen Zahlen nicht nach oben beschränkt ist. Andere Folgerungen sind der Satz des Eudoxos und die Tatsache, dass $\mathbb{Q}$ dicht in $\mathbb{R}$ liegt.

Antwort 36

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Das arithmetische Mittel ist dann $\frac{a+b}{2}$. Das geometrische Mittel ist nur für $a, b > 0$ definiert und ist $\sqrt{ab}$. Es gilt $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}$.

Antwort 35

Thema: Logarithmus, Exponentialfunktion und allgemeine Potenz

Falsch. Wurzeln sind immer positiv, also ist nur 2 eine Wurzel aus 4.

Frage 37

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr oder falsch? Seien $a, b > 0$. Dann ist das arithmetische Mittel genau dann gleich dem geometrischen Mittel, wenn $a = b$ gilt.

Hinweis Wahr.

Frage 38

Thema: Schnittaxiom

Ist $(A|B)$ mit $A = \{r \in \mathbb{R} \mid r^3 < 8\}$ und $B = \{r \in \mathbb{R} \mid r^3 \geq 8\}$ ein Dedekind"scher Schnitt?

Hinweis Ja.

Frage 39

Thema: Grenzwertbegriff

Nennen Sie zwei verschiedene Definitionen, wann eine Folge (a_n) gegen a konvergiert.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 40

Thema: Grenzwertbegriff

Welchen Grenzwert hat die Folge $(\frac{(-1)^n}{n})$?

Hinweis Der Grenzwert ist 0. Warum?

Antwort 38
Thema: Schnittaxiom

Ja, denn A und B sind nicht leer, und es gilt $A \cup B = \mathbb{R}$. Weiter gilt für $r \in A$, dass $r^3 < 8$, also $r < 2$ ist. Ist $r'' \in B$, dann ist $r''^3 \geq 8$, also $r'' \geq 2$, und damit $r < r''$.

Antwort 37

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr. Angenommen das arithmetische ist gleich dem geometrischen Mittel, also $\frac{a+b}{2} = \sqrt{ab}$. Dann folgt $\frac{(a+b)^2}{4} = ab$, also $a^2 + 2ab + b^2 = 4ab$ oder $a^2 - 2ab + b^2 = 0$. Dann ist $(a-b)^2 = 0$, das heißt $a = b$. Umgekehrt gilt für $a = b$ auch $\frac{a+b}{2} = a = \sqrt{ab}$.

Antwort 40

Thema: Grenzwertbegriff

Sei $\varepsilon > 0$ und $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < \varepsilon$. Dann gilt für $n > n_0$:

$$\left|\frac{(-1)^n}{n} - 0\right| = \left|\frac{1}{n}\right| = \frac{1}{n} < \frac{1}{n_0} < \varepsilon,$$

also $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{(-1)^n}{n} = 0.$

Antwort 39

Thema: Grenzwertbegriff

1. Wenn in jeder ε-Umgebung von a fast alle Folgenglieder von (a_n) liegen.
2. Wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a - a_n| < \varepsilon$ für alle $n > n_0$.

Frage 41

Thema: Grenzwertbegriff

Wahr oder falsch? Wenn (a_n) gegen 0 konvergiert und für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $a_n \neq 0$, dann ist $(\frac{1}{a_n})$ unbeschränkt.

Hinweis Wahr.

Frage 42
Thema: Grenzwertbegriff

Ist die Folge $(n^2 + 1)$ konvergent?

Hinweis Nein.

Frage 43

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wahr oder falsch? Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie beschränkt ist.

Hinweis Falsch.

Frage 44

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Geben Sie ein Beispiel für eine Folge, die beschränkt, aber nicht konvergent ist.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 42

Thema: Grenzwertbegriff

Nein, denn sie ist nicht beschränkt.

Antwort 41

Thema: Grenzwertbegriff

Wahr. Sei $S \in \mathbb{N}$. Da $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$, gibt es ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a_n| < \frac{1}{S}$ für alle $n > n_0$. Es folgt $\frac{1}{|a_n|} > S$ für alle $n > n_0$, das heißt, $(\frac{1}{a_n})$ ist unbeschränkt.

Antwort 44

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Die Folge $((-1)^n)$ ist beschränkt, aber nicht konvergent.

Antwort 43

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Falsch, denn nicht jede beschränkte Folge ist konvergent.

Frage 45

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Geben Sie ein Beispiel für eine Folge (a_n), die selbst nicht konvergiert, die aber eine konvergente Teilfolge besitzt.

Hinweis Denken Sie an die Folge $((-1)^n)$.

Frage 46

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Was besagt der Vergleichssatz?

Hinweis Was kann man über die Grenzwerte von zwei Folgen sagen, wenn man weiß, dass die Folgenglieder der einen Folge fast immer höchstens so groß wie die der anderen Folge sind?

Frage 47

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wie kann man den Einschnürungssatz benutzen, um zu zeigen, dass $(\frac{(-1)^n}{n})$ konvergiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 48

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wahr oder falsch? Wenn $(a_n + b_n)$ konvergiert, dann konvergieren auch (a_n) und (b_n).

Hinweis Falsch.

Antwort 46

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Konvergiert (a_n) gegen a und (b_n) gegen b und gilt fast immer $a_n \leq b_n$, dann folgt $a \leq b$.

Antwort 45

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Die Folge $((-1)^n)$ ist eine solche Folge, denn sie konvergiert nicht, aber die Folge $((-1)^{2n}) = (1)$ ist eine konvergente Teilfolge.

Antwort 48
Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Falsch. Sei zum Beispiel $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(a_n + b_n) = (0)$, konvergiert also, während (a_n) und (b_n) nicht konvergieren.

Antwort 47

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $-\frac{1}{n} \leq \frac{(-1)^n}{n} \leq \frac{1}{n}$. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} -\dfrac{1}{n} = 0 = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n}$ folgt nun mit dem Einschnürungssatz $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{(-1)^n}{n} = 0$.

Frage 49

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wahr oder falsch? Wenn (a_n) und (b_n) konvergieren, dann auch $(a_n b_n)$.

Hinweis Wahr.

Frage 50

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wahr oder falsch? Wenn $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt und (αa_n) konvergiert, dann auch (a_n).

Hinweis Falsch.

Frage 51
Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wahr oder falsch? Wenn $\alpha \neq 0$ ist und (αa_n) konvergiert, dann konvergiert auch (a_n).

Hinweis Wahr.

Frage 52

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Was ist $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3+2n+5}$?

Hinweis Der Grenzwert ist 0.

Antwort 50

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Falsch. Für $\alpha = 0$ ist (αa_n) immer konvergent, auch wenn (a_n) nicht konvergent ist.

Antwort 49

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wahr. Es gilt nämlich: Konvergieren (a_n) gegen a und (b_n) gegen b, dann konvergiert $(a_n b_n)$ gegen ab.

Antwort 52

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Es ist $\frac{n^2+1}{n^3+2n+5} = \frac{\frac{1}{n}+\frac{1}{n^3}}{1+\frac{2}{n^2}+\frac{5}{n^3}}$, und $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n^3} = 0$, und $\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \dfrac{2}{n^2} + \dfrac{5}{n^3} = 1$, also folgt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{n^2+1}{n^3+2n+5} = \dfrac{0}{1} = 0$.

Antwort 51

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Wahr. Wenn nämlich (αa_n) konvergiert, dann auch $\frac{1}{\alpha}(\alpha a_n) = (a_n)$.

Frage 53
Thema: Grenzwertbegriff

Was ist eine Nullfolge?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 54

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Nennen Sie drei der vier Prinzipien der Konvergenztheorie.

Hinweis Eins davon ist das Cauchy"sche Konvergenzprinzip.

Frage 55

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Sei (a_n) eine Folge mit $a_n \leq a_{n+1} \leq 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Folge?

Hinweis Monotonieprinzip.

Frage 56

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Was besagt das Monotonieprinzip?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 54

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Die vier Prinzipien der Konvergenztheorie sind das Monotonieprinzip, das Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß, das Cauchy"sche Konvergenzprinzip und das Prinzip der Intervallschachtelung.

Antwort 53

Thema: Grenzwertbegriff

Eine Nullfolge ist eine Folge (a_n) mit $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

Antwort 56

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Jede monotone, beschränkte Folge konvergiert.

Antwort 55

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Ja, denn sie ist monoton wachsend und beschränkt, und mit dem Monotonieprinzip folgt also, dass sie konvergiert.

Frage 57
Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Welche Bedingung muss für eine monotone Folge erfüllt sein, damit sie konvergiert?

Hinweis Monotonieprinzip.

Frage 58

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Was ist die Beweisidee zum Beweis, dass die Folge $((1+\frac{1}{n})^{n+1})$ konvergiert?

Hinweis Monotonieprinzip.

Frage 59

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Was besagt das Auswahlprinzip von Bolzano-Weierstraß?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 60
Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Geben Sie ein Beispiel für eine beschränkte, divergente Folge und eine konvergente Teilfolge dieser Folge.

Hinweis Denken Sie an die Folge $((-1)^n)$.

Antwort 58

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Man zeigt, dass sie monoton fallend und beschränkt ist. Mit dem Monotonieprinzip folgt dann, dass die Folge konvergiert.

Antwort 57

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Sie muss beschränkt sein, dann folgt mit dem Monotonieprinzip, dass sie konvergiert. Ist sie unbeschränkt, kann sie nicht konvergent sein.

Antwort 60

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Sei $(a_n) = ((-1)^n)$. Dann ist (a_n) beschränkt und nicht konvergent. Die Teilfolge $((-1)^{2n}) = (1)$ ist dagegen konvergent.

Antwort 59

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Jede beschränkte Folge besitzt eine konvergente Teilfolge.

Frage 61

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wann ist eine Folge eine Cauchyfolge?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 62

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wahr oder falsch? Jede konvergente Folge ist eine Cauchyfolge.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 63

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wahr oder falsch? Jede Cauchyfolge konvergiert.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 64

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wie lautet das Cauchy"sche Konvergenzprinzip?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 62

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wahr.

Antwort 61

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Eine Folge (a_n) ist eine Cauchyfolge, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a_n - a_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > n_0$.

Antwort 64

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Eine Folge ist genau dann konvergent, wenn sie eine Cauchyfolge ist.

Antwort 63

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wahr.

Frage 65

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Seien (a_n) und (b_n) Folgen. Ist es möglich, dass (a_n) und $(a_n + b_n)$ konvergieren, aber (b_n) divergiert?

Hinweis Nein.

Frage 66
Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Wie lautet das Prinzip der Intervallschachtelung?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 67

Thema: Grenzwertbegriff

Geben Sie drei Beispiele für konvergente Folgen.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 68
Thema: Grenzwertbegriff

Geben Sie drei Beispiele für divergente Folgen.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 66

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

In jeder Intervallschachtelung $\langle a_n | b_n \rangle$ gibt es genau eine reelle Zahl a, die in allen Intervallen $[a_n, b_n]$ liegt.

Antwort 65

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Nein. Wenn (a_n) und $(a_n + b_n)$ konvergieren, dann auch $((a_n + b_n) - a_n) = (b_n)$.

Antwort 68
Thema: Grenzwertbegriff

Divergente Folgen sind zum Beispiel (n), $((-1)^n)$ und $(\sqrt{n})$.

Antwort 67
Thema: Grenzwertbegriff

Konvergente Folgen sind zum Beispiel $(\frac{1}{n})$, (c) und $(\sqrt[n]{n})$.

Frage 69

Thema: Grenzwertbegriff

Nennen Sie zwei verschiedene Definitionen der Eulerschen Zahl e.

Hinweis Man kann e als Grenzwert einer Folge oder einer Reihe definieren.

Frage 70

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Wahr oder falsch? Seien $r, x \in \mathbb{R}$, so dass r rational und x irrational ist. Dann ist $r + x$ irrational.

Hinweis Wahr.

Frage 71

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Wahr oder falsch? Die Summe zweier irrationaler Zahlen ist eine irrationale Zahl.

Hinweis Falsch.

Frage 72

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Konvergiert die Folge $((-1)^n \frac{n+2}{3n^2-1})$? Wenn ja, gegen welchen Grenzwert?

Hinweis Ja.

Antwort 70

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Wahr. Angenommen, $r+x$ ist rational. Da das Negative einer rationalen Zahl und die Summe von zwei rationalen Zahlen wieder rational sind, folgt dann $(r+x)+(-r)=x$ ist rational, ein Widerspruch.

Antwort 69

Thema: Grenzwertbegriff

Es gilt $e = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{n})^{n+1} = \lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

Antwort 72

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Ja, es gilt $\lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{n+2}{3n^2+1} = \lim\limits_{n\to\infty}(-1)^n\dfrac{\frac{1}{n}+\frac{2}{n}}{3+\frac{1}{n^2}} = 0.$

Antwort 71

Thema: Reelle und rationale Zahlen

Falsch. Zum Beispiel ist $\sqrt{2}$ eine irrationale Zahl, und auch $-\sqrt{2}$ ist eine irrationale Zahl. Die Summe von beiden ergibt aber 0, eine rationale Zahl.

Frage 73

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Konvergiert die Folge $\left(\frac{2n^2-n+2}{n^2-1}\right)$ und wenn ja, gegen welchen Grenzwert?

Hinweis Ja.

Frage 74

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Was ist der Abstand von -5 und 18?

Hinweis Der Abstand zweier reeller Zahlen a und b ist definiert als $d(a, b) = |a - b|$.

Frage 75

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr oder falsch? Wenn a und b reelle Zahlen sind, dann ist $d(a, b) = d(-a, -b)$.

Hinweis Wahr.

Frage 76

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr oder falsch? Sind a, b, c reelle Zahlen, dann ist $d(a + c, b + c) = d(a, b)$.

Hinweis Wahr.

Antwort 74

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Es gilt $d(-5, 18) = |-5 - 18| = 23$.

Antwort 73

Thema: Rechnen mit konvergenten Folgen

Ja, denn es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2n^2 - n + 2}{n^2 - 1} = \lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{2 - \frac{1}{n} + \frac{2}{n^2}}{1 - \frac{1}{n^2}} = \dfrac{2}{1} = 2.$

Antwort 76

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr. Es ist $d(a+c, b+c) = |a+c-(b+c)| = |a-b| = d(a,b)$.

Antwort 75
Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr. Es ist $d(-a, -b) = |-a - (-b)| = |-(a - b)| = |a - b| = d(a, b)$.

Frage 77

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Wahr oder falsch? Wenn a, b, c reelle Zahlen sind, dann ist $d(ac, ab) = c(d(a, b))$.

Hinweis Falsch.

Frage 78

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ist die Menge $\{\frac{|x|}{1+|x|} \mid x \in \mathbb{R}\}$ beschränkt?

Hinweis Ja.

Frage 79

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Gibt es reelle Folgen (a_n) und (b_n), so dass $\sup\{a_n + b_n \mid n \in \mathbb{N}\} \neq \sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} + \sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$ ist?

Hinweis Ja.

Frage 80

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Ist die Folge $(a_n) = (\frac{3n}{4n+1})$ monoton?

Hinweis Ja.

Antwort 78

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ja, denn es gilt $|x| < |x| + 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$, also folgt $0 \leq \frac{|x|}{|x|+1} < 1$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Antwort 77

Thema: Folgerungen aus den Ordnungsaxiomen

Falsch. Seien zum Beispiel $a = 1$, $b = 0$ und $c = -1$. Dann ist $d(ac, bc) = d(-1, 0) = 1$ und $c(d(a, b)) = -1$.

Antwort 80

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Es gilt $\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{3n(4n+5)}{(4n+1)(3n+3)} = \frac{12n^2+15n}{12n^2+15n+3} < 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also gilt $a_n < a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$, und die Folge ist streng monoton wachsend.

Antwort 79

Thema: Folgerungen aus dem Schnittaxiom

Ja. Sei zum Beispiel $a_n = (-1)^n$ und $b_n = (-1)^{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 1 = \sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\}$, also $\sup\{a_n \mid n \in \mathbb{N}\} + \sup\{b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 2$, aber $\sup\{a_n + b_n \mid n \in \mathbb{N}\} = 0$.

Frage 81

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Ist die Folge $(a_n) = (n + \frac{2}{n})$ monoton?

Hinweis Ja.

Frage 82
Thema: Grenzwertbegriff

Wahr oder falsch? Eine konvergente Folge ganzer Zahlen ist von einem n_0 an konstant.

Hinweis Wahr.

Frage 83
Thema:

Hinweis

Frage 84
Thema:

Hinweis

Antwort 82

Thema: Grenzwertbegriff

Wahr. Sei (a_n) eine konvergente Folge mit $a_n \in \mathbb{Z}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und sei a der Grenzwert dieser Folge. Sei $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|a - a_n| < \frac{1}{2}$ für alle $n > n_0$. Da die Folge gegen a konvergiert, existiert so ein n_0. Die Menge aller $x \in \mathbb{R}$ mit $|a - x| < \frac{1}{2}$ enthält nur eine einzige ganze Zahl z, das heißt, für alle $n > n_0$ muss gelten $a_n = z$.

Antwort 81

Thema: Prinzipien der Konvergenztheorie

Es gilt $a_{n+1} - a_n = n + 1 + \frac{2}{n+1} - n - \frac{2}{n} = 1 + \frac{2}{n+1} - \frac{2}{n} = 1 + \frac{2n-2(n+1)}{n(n+1)} = 1 - \frac{2}{n(n+1)} \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, denn $2 \leq n(n+1)$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Also ist die Folge monoton wachsend.

Antwort 84
Thema:

Antwort 83
Thema: