Frage 1

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A, B und C Atome. Die Formel $(A \vee \neg B) \vee (B \vee C)$ ist erfüllbar.

Hinweis Eine Formel ist erfüllbar, wenn es eine Bewertung gibt, so dass die Formel die Bewertung 1 hat.

Frage 2

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A, B und C Atome. Die Formel $(A \vee \neg B) \vee (B \vee C)$ ist falsifizierbar.

Hinweis Eine Formel ist falsifizierbar, wenn es eine Bewertung gibt, so dass die Formel die Bewertung 0 hat.

Frage 3

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A, B und C Atome. Die Formel $(A \vee \neg B) \vee (B \vee C)$ ist tautologisch.

Hinweis Eine Formel ist tautologisch, wenn für jede Bewertung der Atome die Bewertung der Formel 1 ist.

Frage 4

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A, B und C Atome. Die Formel $(A \vee \neg B) \vee (B \vee C)$ ist widerspruchsvoll.

Hinweis Eine Formel ist widerspruchsvoll, wenn für jede Bewertung der Atome die Bewertung der Formel 0 ist.

Antwort 2

Thema: Aussagenlogik

Falsch. Wenn B die Bewertung 1 hat, dann ist die Bewertung der Formel 1, und wenn B die Bewertung 0 hat, dann ist die Bewertung der Formel ebenfalls 1, weil dann $\neg B$ die Bewertung 1 hat. Es gibt also keine Bewertung, so dass die Formel die Bewertung 0 hat.

Antwort 1

Thema: Aussagenlogik

Wahr, denn wenn A, B und C die Bewertung 1 haben, dann ist auch die Bewertung der Formel 1.

Antwort 4

Thema: Aussagenlogik

Falsch. Wenn zum Beispiel A, B und C die Bewertung 1 haben, dann ist die Bewertung der Formel 1, also kann sie nicht widerspruchsvoll sein.

Antwort 3

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn B die Bewertung 1 hat, dann ist die Bewertung der Formel 1, und wenn B die Bewertung 0 hat, dann ist die Bewertung der Formel ebenfalls 1, weil dann $\neg B$ die Bewertung 1 hat. Für jede Bewertung von A, B und C ist also die Bewertung der Formel 1.

Frage 5

Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei $\alpha = \forall x \forall y (P(x,y) \leftrightarrow P(y,x))$, wobei P ein zweistelliges Prädikatssymbol ist. Dann gibt es eine zu $\Sigma(\alpha)$ syntaktisch passende Interpretation mit Grundmenge $\mathbb{N}$, so dass die Formel die Bewertung 1 hat.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 6

Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei $\alpha = \forall x \forall y (P(x, y) \leftrightarrow P(y, x))$, wobei P ein zweistelliges Prädikatssymbol ist. Dann gibt es eine zu $\Sigma(\alpha)$ syntaktisch passende Interpretation mit Grundmenge $\mathbb{N}$, so dass die Formel die Bewertung 0 hat.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 7

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Sei A, B und C Aussagen. Die Formel $\neg(C \leftrightarrow A) \wedge ((C \rightarrow B) \vee (A \wedge B \rightarrow C))$ ist äquivalent zu $\neg((A \rightarrow C) \wedge (\neg C \vee A))$.

Hinweis Wahr.

Frage 8

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto 2\sin(\sqrt{x}) + 17$ ist eine Stammfunktion von $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$.

Hinweis Wahr.

Antwort 6

Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Wenn P die Kleiner-Beziehung zwischen natürlichen Zahlen modelliert, also $P(x, y) = 1$ genau dann, wenn $x < y$, dann ist die Formel falsch.

Antwort 5

Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Wenn P die Gleichheit von natürlichen Zahlen modelliert, also $P(x, y) = 1$ genau dann, wenn $x = y$ ist, dann ist die Formel wahr.

Antwort 8

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr, denn $F'' = f$.

Antwort 7
Thema: Aussagenlogik

Wahr. Der zweite Teil der ersten Formel, also $((C \to B) \vee (A \wedge B \to C))$ ist tautologisch. Es hat nämlich $C \to B$ nur dann die Bewertung 0, wenn C die Bewertung 1 und B die Bewertung 0 hat. Dann hat aber - egal, was die Bewertung von A ist - $(A \wedge B \to C)$ die Bewertung 1. Die erste Formel ist also äquivalent zur Formel $\neg(C \leftrightarrow A)$. Diese ist wieder äquivalent zu $\neg((C \to A) \wedge (A \to C))$. Ersetzt man nun das erste $\to$, erhält man die Formel $\neg((\neg C \vee A) \wedge (A \to C))$. Das Kommutativgesetz liefert jetzt die Äquivalenz zur zweiten Formel.

Frage 9

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto 2\sin(\sqrt{x}) + 17$ ist eine Stammfunktion von $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} - 6$.

Hinweis Falsch.

Frage 10
Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A, B und C Aussagen. Dann gilt $(A \vee B) \wedge C \models B \rightarrow C$.

Hinweis Wahr.

Frage 11

Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei (a_n) eine reelle Folge, auf die die Aussage $\exists a \in \mathbb{R} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad (|a_n - a| < \varepsilon)$ zutrifft. Dann ist (a_n) konvergent.

Hinweis Wahr.

Frage 12
Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei (a_n) eine reelle Folge, auf die die Aussage $\exists a \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \forall n \geq n_0 \quad (|a_n - a| < \varepsilon)$ zutrifft. Dann ist (a_n) konvergent.

Hinweis Wahr.

Antwort 10

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Ist die Bewertung der linken Formel 1, dann ist auf jeden Fall die Bewertung von C auch 1. Dann ist aber die Bewertung von $B \rightarrow C$ ebenfalls 1.

Antwort 9

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Falsch, denn $F'' \neq f$.

Antwort 12

Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Die Aussage bedeutet, dass für fast alle Folgenglieder $a_n = a$ gilt. Diese Eigenschaft hat die Konvergenz von (a_n) gegen a zur Folge.

Antwort 11
Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Die Aussage ist gerade die Definition für Konvergenz gegen a - in Quantorenschreibweise.

Frage 13

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{4}\sin^2(2x) + 3$ ist eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(2x)\cos(2x)$.

Hinweis Wahr.

Frage 14

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -\frac{1}{4}\cos^2(2x) + 3$ ist eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(2x)\cos(2x)$.

Hinweis Wahr.

Frage 15

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$ ist erfüllbar.

Hinweis Eine Formel ist erfüllbar, wenn es eine Bewertung der Atome gibt, so dass die Bewertung der Formel 1 ist.

Frage 16

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A)$ ist tautologisch.

Hinweis Eine Formel ist tautologisch, wenn die Bewertung der Formel für jede Bewertung der Atome 1 ist.

Antwort 14

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr, denn $F'' = f$.

Antwort 13

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr, denn $F'' = f$.

Antwort 16

Thema: Aussagenlogik

Wahr, denn für jede Bewertung der Atome ist die Bewertung der Formel 1.

Antwort 15

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Haben A und B beide die Bewertung 1, dann ist auch die Bewertung der Formel 1.

Frage 17
Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(((A \to B) \to A) \to A)$ ist widerspruchsvoll.

Hinweis Eine Formel ist widerspruchsvoll, wenn für jede Bewertung der Atome die Bewertung der Formel 0 ist.

Frage 18

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(((A \to B) \to A) \to A)$ ist falsifizierber.

Hinweis Eine Formel ist falsifizierbar, wenn es eine Bewertung der Atome gibt, so dass die Bewertung der Formel 0 ist.

Frage 19

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seine A und B Aussagen. Es gilt $(A \wedge B) \models (A \vee B)$.

Hinweis Wahr.

Frage 20

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \wedge B)$ ist erfüllbar.

Hinweis Eine Formel ist erfüllbar, wenn es eine Bewertung der Atome gibt, so dass die Bewertung der Formel 1 ist.

Antwort 18

Thema: Aussagenlogik

Falsch. Für jede Bewertung von A und B ist die Bewertung der Formel 1. Also ist die Formel nicht falsifizierbar.

Antwort 17
Thema: Aussagenlogik

Falsch. Wenn A und B zum Beispiel beide die Bewertung 1 haben, dann hat auch die Formel die Bewertung 1. Sie ist also nicht widerspruchsvoll.

Antwort 20

Thema: Aussagenlogik

Falsch. Wenn A und B verschiedene Bewertungen haben, dann ist die Bewertung von $(A \leftrightarrow B)$ gleich 0. Haben sie gleiche Bewertungen, dann ist die Bewertung von $(\neg A \wedge B)$ gleich 0. Es gibt also keine Bewertung von A und B, so dass die Bewertung der Formel 1 ist.

Antwort 19

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Die Bewertung von $A \wedge B$ ist genau dann 1, wenn die Bewertungen von A und B beide 1 sind. In diesem Fall ist auch die Bewertung von $A \vee B$ gleich 1.

Frage 21

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \wedge B)$ ist tautologisch.

Hinweis Eine Formel ist tautologisch, wenn für jede Bewertung der Atome die Bewertung der Formel 1 ist.

Frage 22
Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \wedge B)$ ist falsifizierbar.

Hinweis Eine Formel ist falsifizierbar, wenn es eine Bewertung der Atome gibt, so dass die Bewertung der Formel 0 ist.

Frage 23

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \leftrightarrow B) \wedge (\neg A \wedge B)$ ist widerspruchsvoll.

Hinweis Eine Formel ist widerspruchsvoll, wenn für jede Bewertung der Atome die Bewertung der Formel 0 ist.

Frage 24
Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Es gibt keine reelle Folge (a_n), auf die die Aussage $\forall G \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad (|a_n| < G)$.

Hinweis Wahr.

Antwort 22

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn A die Bewertung 1 und B die Bewertung 0 hat, dann ist die Bewertung von $A \leftrightarrow B$ und damit der gesamten Formel 0.

Antwort 21

Thema: Aussagenlogik

Falsch. Wenn A die Bewertung 1 und B die Bewertung 0 hat, dann ist die Bewertung von $A \leftrightarrow B$ und damit der gesamten Formel 0. Die Formel ist also nicht tautologisch.

Antwort 24

Thema: Prädikatenlogik

Wahr, denn es gilt immer $|a_n| \geq 0$. Ist also $G < 0$, ist die Formel nicht wahr.

Antwort 23

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn A und B verschiedene Bewertungen haben, dann ist die Bewertung von $(A \leftrightarrow B)$ gleich 0. Haben sie gleiche Bewertungen, dann ist die Bewertung von $(\neg A \wedge B)$ gleich 0. Jede Bewertung der Atome führt also zu einer Bewertung der Formel mit 0.

Frage 25

Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Es gibt keine reelle Folge (a_n), auf die Aussage $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall G \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq n_0 \quad (a_n \leq G)$ zutrifft.

Hinweis Wahr.

Frage 26

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Aussagen. Dann gilt $(A \wedge B) \models (B \rightarrow A)$.

Hinweis Wahr.

Frage 27

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}(x - \sin(x)\cos(x)) + 2$ ist eine Stammfunktion der Funktion $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin^2(x)$.

Hinweis Wahr.

Frage 28

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x^2+1} - 6$, ist eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$.

Hinweis Wahr.

Antwort 26

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Die einzige Bewertung, für die $A \wedge B$ die Bewertung 1 hat, ist, wenn A und B die Bewertung 1 haben. In diesem Fall ist die Bewertung von $B \rightarrow A$ ebenfalls 1.

Antwort 25

Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Wenn es ein solches n_0 gäbe, dann würde gelten $a_{n_0} \leq G$ für alle $G \in \mathbb{R}$. Das kann nicht sein.

Antwort 28

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr, denn $F'' = f$.

Antwort 27

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr. Es ist $F''(x) = \frac{1}{2}(1 - \cos^2(x) + \sin^2(x))$. Da $\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1$, also $1 - \cos^2(x) = \sin^2(x)$, folgt $F'' = f$.

Frage 29

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\sin^2(x) + 3$, ist eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \sin(x)\cos(x)$.

Hinweis Wahr.

Frage 30

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr oder falsch? Die Funktion $F : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto \frac{1}{2}\cos^2(x) + 4$ ist eine Stammfunktion von $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \mapsto -\sin(x)\cos(x)$.

Hinweis Wahr.

Frage 31
Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei (a_n) eine reelle Folge, auf die die Aussage $\forall G \in \mathbb{R} \quad \exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall n \geq n_0 \quad (|a_n| > G)$ zutrifft. Dann ist (a_n) divergent.

Hinweis Wahr.

Frage 32
Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Es gibt keine reelle Folge (a_n), auf die die Aussage $\exists n_0 \in \mathbb{N} \quad \forall G \in \mathbb{R} \quad \forall n \geq n_0 \quad (|a_n| > G)$ zutrifft.

Hinweis Wahr.

Antwort 30

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr, denn $F'' = f$.

Antwort 29

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wahr, denn es ist $F'' = f$.

Antwort 32

Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Wenn es eine solche Folge (a_n) gäbe, dann gälte für diese Folge $|a_{n_0}| > G$ für jedes $G \in \mathbb{R}$. Das kann nicht sein, denn $\mathbb{R}$ ist unbeschränkt.

Antwort 31

Thema: Prädikatenlogik

Wahr, denn die Aussage sagt, dass (a_n) unbeschränkt ist.

Frage 33

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Aussagen. Dann gilt $\neg(A \vee B) \models B \rightarrow \neg A$.

Hinweis Wahr.

Frage 34

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Die Formel $\neg(C \leftrightarrow A) \wedge ((C \rightarrow B) \vee (A \wedge B \rightarrow C))$ ist äquivalent zu $\neg((C \rightarrow A) \rightarrow B)$.

Hinweis Zwei Formeln sind äquivalent, wenn sie für jede Bewertung der Atome die gleiche Bewertung haben.

Frage 35

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \wedge B) \leftrightarrow A$ ist tautologisch.

Hinweis Eine Formel ist tautologisch, wenn sie für jede Bewertung der Atome die Bewertung 1 hat.

Frage 36

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \wedge B) \leftrightarrow A$ ist erfüllbar.

Hinweis Eine Formel ist erfüllbar, wenn es eine Bewertung der Atome gibt, so dass die Bewertung der Formel 1 ist.

Antwort 34

Thema: Aussagenlogik

Falsch. Sind zum Beispiel die Bewertungen von A und B gleich 1 und ist die von C gleich 0, dann ist die Bewertung der ersten Formel 1 und die Bewertung der zweiten Formel 0.

Antwort 33

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Die Formel auf der linken Seite hat nur dann die Bewertung 1, wenn A und B beide die Bewertung 0 haben. In diesem Fall ist auch die Bewertung der Formel auf der rechten Seite 1.

Antwort 36

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn A und B beide die Bewertung 1 haben, dann ist auch die Bewertung der Formel 1. Also ist sie erfüllbar.

Antwort 35

Thema: Aussagenlogik

Falsch. Hat A die Bewertung 1 und B die Bewertung 0, dann ist die Bewertung der Formel 0. Also ist die Formel nicht tautologisch.

Frage 37

Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \wedge B) \leftrightarrow A$ ist falsifizierbar.

Hinweis Eine Formel ist falsifizierbar, wenn es eine Bewertung der Atome gibt, so dass die Bewertung der Formel 0 ist.

Frage 38
Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Seien A und B Atome. Die Formel $(A \wedge B) \leftrightarrow A$ ist widerspruchsvoll.

Hinweis Eine Formel ist widerspruchsvoll, wenn jede Bewertung der Atome eine Bewertung der Formel mit 0 ergibt.

Frage 39

Thema: Riemann-Integral

Sei $a < b$. Was ist eine Partition des Intervalls $[a, b]$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 40

Thema: Riemann-Integral

Sei $a < b$, und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Sei $t_0, \ldots, t_n$ eine Partition P von $[a, b]$. Wie sind die Ober- und die Untersumme von f für P definiert, und welche Beziehung gilt zwischen ihnen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 38

Thema: Aussagenlogik

Falsch. Wenn A und B beide die Bewertung 1 haben, dann ist die Bewertung der Formel 1. Sie kann also nicht widerspruchsvoll sein.

Antwort 37
Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn A die Bewertung 1 und B die Bewertung 0 hat, ist die Bewertung der Formel 0. Also ist sie falsifizierbar.

Antwort 40
Thema: Riemann-Integral

Für alle $1 \leq i \leq n$ sei $m_i = \inf\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$ und $M_i = \sup\{f(x) \mid t_{i-1} \leq x \leq t_i\}$. Dann ist die Untersumme $U(f,P) = \sum_{i=1}^{n} m_i(t_i - t_{i-1})$ und die Obersumme ist $O(f,P) = \sum_{i=1}^{n} M_i(t_i - t_{i-1})$. Es gilt immer $U(f,P) \leq O(f,P)$.

Antwort 39

Thema: Riemann-Integral

Eine Patition sind endlich viele Punkte $t_0, \ldots, t_n$ mit $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$.

Frage 41

Thema: Riemann-Integral

Wahr oder falsch? Sei $a < b$, sei P eine Partition von $[a, b]$, und sei Q eine Verfeinerung von P. Dann gilt $U(f, P) \leq U(f, Q)$ und $O(f, P) \leq O(f, Q)$.

Hinweis Eine der beiden Teilaussagen stimmt, die andere ist falsch.

Frage 42

Thema: Riemann-Integral

Sei $a < b$, und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ beschränkt. Wann ist f integrierbar auf $[a, b]$?

Hinweis Das hat etwas mit Ober- und Untersummen zu tun.

Frage 43
Thema: Riemann-Integral

Was ist im Integral $\int_0^5 e^{-t} dt$ die untere Integrationsgrenze, die obere Integrationsgrenze, der Integrand und die Integrationsvariable?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 44
Thema: Riemann-Integral

Geben Sie ein Beispiel für ein Intervall $[a, b]$ und eine beschränkte Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die nicht integrierbar ist.

Hinweis Dirichlet-Funktion.

Antwort 42

Thema: Riemann-Integral

Wenn $\inf\{O(f,P) \mid P \text{ Partition von } [a,b]\} = \sup\{U(f,P) \mid P \text{ Partition von } [a,b]\}$, dann ist f integrierbar.

Antwort 41

Thema: Riemann-Integral

Falsch. Es gilt zwar $U(f,P) \le U(f,Q)$, aber $O(f,P) \ge O(f,Q)$.

Antwort 44

Thema: Riemann-Integral

Sei $a < b$ und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ die Dirichlet-Funktion. Für $x \in [a, b]$ sei also $f(x) = 1$, falls $x \in \mathbb{Q}$ gilt, und $f(x) = 0$, falls $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ gilt. Dann ist f beschränkt, aber nicht integriebar, wie wir im Kurstext gezeigt haben.

Antwort 43
Thema: Riemann-Integral

Die untere Integrationsgrenze ist 0, die obere Integrationsgrenze ist 5, der Integrand ist die Funktion $f : [0, 5] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = e^{-x}$, und die Integrationsvariable ist t.

Frage 45
Thema: Riemann-Integral

Ist jede integrierbare Funktion stetig? Ist jede stetige Funktion integrierbar?

Hinweis Eine Antwort ist ja, die andere nein.

Frage 46

Thema: Riemann-Integral

Sei f integrierbar auf dem Intervall $[a, b]$. Wie ist das unbestimmte Integral von f definiert?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 47

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ stetig. Welche wichtige Eigenschaft hat dann das unbestimmte Integral F von f?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 48

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Geben Sie ein Beispiel für eine Funktion $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$, die integrierbar ist, und ein $c \in [a, b]$, so dass das unbestimmte Integral F in c nicht differenzierbar ist.

Hinweis Nehmen Sie ein f, das zwar integrierbar, aber nicht stetig ist.

Antwort 46

Thema: Riemann-Integral

Das unbestimmte Integral ist die Funktion $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $F(x) = \displaystyle\int_a^x f(t)dt$.

Antwort 45
Thema: Riemann-Integral

Die Funktion $f : [0, 2] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $0 \leq x \leq 1$ und $f(x) = 1$ für $1 < x \leq 2$ ist ein Beispiel für eine Funktion, die integrierbar, aber nicht stetig ist. Jede stetige Funktion ist integrierbar.

Antwort 48

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Sei $f : [-1,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 0$ für $x \leq 0$ und $f(x) = 1$ für $0 < x \leq 1$. Dann ist f integrierbar, und das unbestimmte Integral ist $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} 0dt = 0$ für $x \leq 0$ und $F(x) = \displaystyle\int_{-1}^{x} f(t)dt = \int_{-1}^{0} 0dt + \int_{0}^{x} 1dt = x$ für $0 < x \leq 1$. Im Punkt $x = 0$ gilt nun $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ h < 0}} \frac{F(h) - F(0)}{h} = 0$ und $\displaystyle\lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{F(h) - F(0)}{h} = \lim_{\substack{h \to 0 \\ h > 0}} \frac{h - 0}{h} = 1$. Also ist F in 0 nicht differenzierbar.

Antwort 47

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Das unbestimmte Integral ist differenzierbar, und es gilt $F''(x) = f(x)$ für alle $x \in [a, b]$.

Frage 49

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wie lautet der erste Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 50

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Wie lautet der zweite Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 51

Thema: Riemann-Integral

Welche Intgrationsregel wird aus der Produktregel der Differentiation abgeleitet?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 52

Thema: Riemann-Integral

Welche Integrationsregel wird aus der Kettenregel der Differentiation abgeleitet?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 50

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Ist f auf einem Intervall $[a, b]$ integrierbar und ist g eine Stammfunktion von f auf $[a, b]$, so gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)dx = g(b) - g(a)$.

Antwort 49

Thema: Zusammenhang zwischen Differentiation und Integration

Sei $a < b$, und sei $f : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ integrierbar. Sei $F : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert durch $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ für alle $x \in [a, b]$. Ist f in $c \in [a, b]$ stetig, dann ist F in c differenzierbar, und es gilt $F''(c) = f(c)$.

Antwort 52

Thema: Riemann-Integral

Die Substitutionsregel.

Antwort 51

Thema: Riemann-Integral

Die partielle Integration.

Frage 53

Thema: Riemann-Integral

Wie funktioniert die partielle Integration?

Hinweis Die partielle Integration ist aus der Produktregel bei der Differentiation abgeleitet.

Frage 54

Thema: Riemann-Integral

Wie lautet die Substitutionsregel?

Hinweis Die Substitutionsregel ist aus der Kettenregel der Differentiation abgeleitet.

Frage 55

Thema: Riemann-Integral

Wenn Sie das Integral $\int_1^2 x\ln(x)dx$ mit partieller Integration berechnen sollen, was nehmen Sie als $f(x)$ und was als $g''(x)$?

Hinweis Von der Funktion, die Sie als $f(x)$ nehmen, sollten Sie die Ableitung kennen, von $g''(x)$ eine Stammfunktion.

Frage 56

Thema: Riemann-Integral

Wenn Sie das Integral $\int_0^\pi \frac{\sin(x)}{2+\cos(x)} dx$ mit der Substitutionsregel ausrechnen sollen, welche Funktion nehmen Sie als $f(x)$ und welche als $g(x)$, sodass der Integrand zu $f(g(x))g''(x)$ wird?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 54

Thema: Riemann-Integral

Sei I ein Intervall, und sei $f : I \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Sei $g : [a, b] \longrightarrow I$ differenzierbar, und sei g'' stetig. Dann gilt $\displaystyle\int_a^b f(g(x))g''(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(u)du$.

Antwort 53

Thema: Riemann-Integral

Sei $a < b$. Seien $f, g : [a,b] \longrightarrow \mathbb{R}$ differenzierbar, und seien f'' und g'' stetig. Dann gilt $\displaystyle\int_a^b f(x)g''(x)dx = f(x)g(x)|_a^b - \int_a^b f''(x)g(x)dx$.

Antwort 56

Thema: Riemann-Integral

Da $-\sin(x)$ die Ableitung von $\cos(x)$ ist, bietet es sich an $f(x) = -\frac{1}{x}$ und $g(x) = 2 + \cos(x)$ zu setzen. Dann ist $f(g(x))g''(x) = -\frac{1}{2+\cos(x)}(-\sin(x))$.

Antwort 55

Thema: Riemann-Integral

Da Sie sicher eine Stammfunktion von x kennen, aber keine von $\ln(x)$, sollten Sie $f(x) = \ln(x)$ und $g''(x) = x$ setzten. Der Wert des Integrals ergibt sich dann übrigens als $\int_1^2 x\ln(x)dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x)|_1^2 - \int_1^2 \frac{1}{2}x^2\frac{1}{x}dx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{2}\int_1^2 xdx = \frac{1}{2}x^2\ln(x) - \frac{1}{4}x^2|_1^2 = 2\ln(2) - 1 - \frac{1}{4} = 2\ln(2) - \frac{5}{4}$.

Frage 57

Thema: Riemann-Integral

Wenn Sie das Intgral $\int_a^b \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ mit der Substitutionsregel berechnen sollen, welche Funktion nehmen Sie als $f(x)$ und welche als $g(x)$, so dass der Integrand von der Form $f(g(x))g''(x)$ ist?

Hinweis Man bekommt es nicht genau hin, dass $f(g(x))g''(x)$ den Integranden ergibt, sondern nur $\frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} = 2f(g(x))g''(x)$.

Frage 58

Thema: Riemann-Integral

Wenn Sie das Integral $\displaystyle\int_a^b \frac{\ln(x)}{x} dx$ mit der Substitutionsregel berechnen sollen, welche Funktion nehmen Sie dann als $f(x)$ und welche als $g(x)$, sodass der Integrand von der Form $f(g(x))g''(x)$ ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 59

Thema: Riemann-Integral

Wenn Sie das Integral $\int_a^b (3x-2)^6 dx$ mit der Substitutionsregel ausrechnen sollen, welche Funktion nehmen Sie dann als $f(x)$ und welche als $g(x)$, so dass der Integrand von der Form $f(g(x))g''(x)$ ist?

Hinweis Man bekommt es nicht genau hin, dass $f(g(x))g''(x)$ den Integranden ergibt, sondern nur $(3-2x)^6 = -\frac{1}{2} f(g(x))g''(x)$.

Frage 60

Thema: Riemann-Integral

Wenn Sie das Integral $\int_0^\pi \sin^3(x)\cos(x)dx$ mit der Substitutionsregel ausrechnen sollen, welche Funktion nehmen Sie dann als $f(x)$ und welche als $g(x)$, so dass der Integrand von der Form $f(g(x))g''(x)$ ist?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 58

Thema: Riemann-Integral

Für $f(x) = x$ und $g(x) = \ln(x)$ gilt $f(g(x))g''(x) = \ln(x)\frac{1}{x} = \frac{\ln(x)}{x}$.

Antwort 57
Thema: Riemann-Integral

Für $f(x) = \cos(x)$ und $g(x) = \sqrt{x}$ ist $f(g(x))g''(x) = \cos(\sqrt{x})\frac{1}{2\sqrt{x}} = \frac{1}{2}\frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}$. Es kommt also nicht ganz der Integrand des gesuchten Integrals heraus, aber so kann man zuerst $\frac{1}{2}\int_a^b \frac{\cos(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$ berechnen und anschließend mit dem Faktor 2 multiplizieren.

Antwort 60

Thema: Riemann-Integral

Für $f(x) = x^3$ und $g(x) = \sin(x)$ ist $f(g(x))g''(x) = \sin^3(x)\cos(x)$.

Antwort 59

Thema: Riemann-Integral

Für $f(x) = x^6$ und $g(x) = 3x - 2$ ist $f(g(x))g''(x) = (3x-2)^6(-2)$. Das ist nicht genau der Integrand, aber Sie können nun zuerst $-2\displaystyle\int_a^b (3-2x)^6 dx$ berechnen und anschließend mit dem Faktor $-\frac{1}{2}$ multiplizieren.

Frage 61

Thema: Aussagenlogik

Seien α und β aussagenlogische Formeln. Bilden Sie aus diesen beiden Formeln mindestens fünf neue aussagenlogische Formeln.

Hinweis Ein Beispiel für eine solche Formel wäre $\alpha \wedge \beta$.

Frage 62

Thema: Aussagenlogik

Wie sieht die Formel $((\neg A) \wedge B) \to (C \vee B)$ mit möglichst wenig Klammern aus?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 63

Thema: Aussagenlogik

Sei α die Formel $((A \vee B) \wedge (C \vee D)) \leftrightarrow (\neg C \vee \neg A)$. Was ist atoms($\alpha$)?

Hinweis atoms(α) ist die Menge aller Atome, die in α vorkommen.

Frage 64

Thema: Aussagenlogik

Bestimmen Sie die Bewertung der Formel $((A \vee B) \wedge (C \vee D)) \leftrightarrow (\neg C \vee \neg A)$, wenn $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(C) = 1$ und $\mathcal{I}(B) = \mathcal{I}(D) = 1$ gilt.

Hinweis Die Bewertung ist **0**.

Antwort 62
Thema: Aussagenlogik

Lässt man überflüssige Klammern weg, wird $((\neg A) \wedge B) \rightarrow (C \vee B)$ zu $\neg A \wedge B \rightarrow C \vee B$.

Antwort 61

Thema: Aussagenlogik

Aussagenlogische Formeln sind zum Beispiel $\neg\alpha$, $\neg\beta$, $\alpha \wedge \beta$, $\alpha \vee \beta$ und $\alpha \leftrightarrow \beta$.

Antwort 64

Thema: Aussagenlogik

Die Formel $((A \vee B) \wedge (C \vee D))$ hat die Bewertung **1**, die Formel $(\neg C \vee \neg A)$ hat die Bewertung **0**. Die Bewertung der Formel ist also insgesamt **0**.

Antwort 63

Thema: Aussagenlogik

Es gilt $\text{atoms}(\alpha) = \{A, B, C, D\}$.

Frage 65

Thema: Aussagenlogik

Was ist die Bewertung der Formel $((\neg A \wedge B) \to C) \vee (B \to A \wedge \neg C)$, wenn $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B) = 1$ und $\mathcal{I}(C) = 0$ gilt?

Hinweis Die Bewertung der Formel ist **1**.

Frage 66

Thema: Aussagenlogik

Sei α eine aussagenlogische Formel. Wann heißt α erfüllbar?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 67

Thema: Aussagenlogik

Sei α eine aussagenlogische Formel. Wann heißt α tautologisch?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 68

Thema: Aussagenlogik

Sei α eine aussagenlogische Formel. Wann heißt α widerspruchsvoll?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 66

Thema: Aussagenlogik

Wenn es eine Bewertung $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ gibt.

Antwort 65
Thema: Aussagenlogik

Die Bewertung von $\neg A \wedge B$ ist **0**, also ist die Bewertung von $((\neg A \wedge B) \rightarrow C)$ gleich **1**. Damit ist schon klar, dass die Bewertung der gesamten Formel **1** ist.

Antwort 68

Thema: Aussagenlogik

Wenn α für jede Bewertung $\mathcal{I}$ den Wert $\mathcal{I}(\alpha) = 0$ besitzt.

Antwort 67

Thema: Aussagenlogik

Wenn α für jede Bewertung $\mathcal{I}$ den Wert $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ besitzt.

Frage 69

Thema: Aussagenlogik

Sei α eine aussagenlogische Formel. Wann heißt α falsifizierbar?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 70

Thema: Aussagenlogik

Geben Sie ein Beispiel für eine aussagenlogische Formel α, die erfüllbar ist.

Hinweis Es muss eine Bewertung $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ geben.

Frage 71

Thema: Aussagenlogik

Geben Sie ein Beispiel für eine aussagenlogische Formel α, die tautologisch ist.

Hinweis Jede Bewertung der Formel muss **1** ergeben.

Frage 72

Thema: Aussagenlogik

Geben Sie ein Beispiel für eine aussagenlogische Formel α, die widerspruchsvoll ist.

Hinweis Jede Bewertung der Formel muss **0** ergeben.

Antwort 70

Thema: Aussagenlogik

Sei $\alpha = A \vee B$. Dann ist $\mathcal{I}(\alpha) = 1$, wenn $\mathcal{I}(A) = \mathcal{I}(B) = 1$ gilt.

Antwort 69

Thema: Aussagenlogik

Wenn es eine Bewertung $\mathcal{I}$ gibt, so dass $\mathcal{I}(\alpha) = 0$ gilt.

Antwort 72
Thema: Aussagenlogik

Sei $\alpha = A \wedge \neg A$. Dann gilt für jede Bewertung $\mathcal{I}$ von A, dass $\mathcal{I}(\alpha) = 0$ gilt.

Antwort 71

Thema: Aussagenlogik

Sei $\alpha = A \vee \neg A$. Dann gilt für jede Bewertung $\mathcal{I}$ von A, dass $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ ist.

Frage 73

Thema: Aussagenlogik

Geben Sie ein Beispiel für eine aussagenlogische Formel α, die falsifizierbar ist.

Hinweis Es muss eine Bewertung $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\alpha) = 0$ geben.

Frage 74
Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Eine aussagenlogische Formel α ist genau dann tautologisch, wenn sie nicht falsifizierbar ist.

Hinweis Wahr.

Frage 75
Thema: Aussagenlogik

Wahr oder falsch? Eine aussagenlogische Formel α ist genau dann tautologisch, wenn $\neg\alpha$ widerspruchsvoll ist.

Hinweis Wahr.

Frage 76
Thema: Aussagenlogik

Geben Sie mindestens zwei äquivalente Aussagen zu der Aussage: „Die aussagenlogische Formel β ist eine semantische Folgerung aus α.“

Hinweis Eine wäre zum Beispiel, dass $\mathcal{I}(\beta) = 1$ für alle Bewertungen $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ gilt.

Antwort 74

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn α tautologisch ist, dann gilt für jede Bewertung $\mathcal{I}$, dass $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ gilt. Damit gibt es keine Bewertung $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\alpha) = 0$, also ist α nicht falsifizierbar. Ist umgekehrt α nicht falsifizierbar, dann gibt es keine Bewertung $\mathcal{I}$ mit $\mathcal{I}(\alpha) = 0$. Also gilt für jede Bewertung $\mathcal{I}$, dass $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ gilt, und damit ist α tautologisch.

Antwort 73

Thema: Aussagenlogik

Sei $\alpha = A \wedge B$. Dann ist für $\mathcal{I}(A) = 0 = \mathcal{I}(B)$ die Bewertung $\mathcal{I}(\alpha) = 0$.

Antwort 76

Thema: Aussagenlogik

1. Falls $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ gilt, dann folgt auch $\mathcal{I}(\beta) = 1$.
2. $\alpha \rightarrow \beta$ ist tautologisch.
3. $\alpha \wedge \neg\beta$ ist widerspruchsvoll.

Antwort 75

Thema: Aussagenlogik

Wahr. Wenn α tautologisch ist, dann ist $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ für jede Bewertung $\mathcal{I}$. Es folgt $\mathcal{I}(\neg\alpha) = 0$ für jede Bewertung $\mathcal{I}$, also ist $\neg\alpha$ widerspruchsvoll. Wenn umgekehrt $\neg\alpha$ widerspruchsvoll ist, dann ist $\mathcal{I}(\neg\alpha) = 0$ für alle Bewertungen $\mathcal{I}$. Damit ist $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ für alle Bewertungen $\mathcal{I}$, und α ist tautologisch.

Frage 77

Thema: Aussagenlogik

Wann heißen zwei aussagenlogische Formeln α und β äquivalent?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 78

Thema: Aussagenlogik

Wie hängen logische Äquivalenz und semantische Folgerungen zusammen?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 79

Thema: Aussagenlogik

Nennen Sie mindestens zwei Vererbungsregeln.

Hinweis Eine der Vererbungsregeln ist: Wenn $\alpha \approx \beta$, so gilt $\neg\alpha \approx \neg\beta$.

Frage 80

Thema: Aussagenlogik

Wie stellt man die Formel $\alpha \rightarrow \beta$ nur mit den Junktoren $\vee$ und $\neg$ dar?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 78

Thema: Aussagenlogik

Wenn α und β aussagenlogische Formeln sind, dann gilt $\alpha \leftrightarrow \beta$ genau dann, wenn $\alpha \models \beta$ und $\beta \models \alpha$ gilt.

Antwort 77
Thema: Aussagenlogik

Wenn $\mathcal{I}(\alpha) = \mathcal{I}(\beta)$ für alle Bewertungen $\mathcal{I}$ gilt.

Antwort 80

Thema: Aussagenlogik

Es gilt $\alpha \rightarrow \beta \approx \neg\alpha \vee \beta$.

Antwort 79

Thema: Aussagenlogik

Seien α, β und γ aussagenlogische Formeln. Dann gelten:

1. Wenn $\alpha \approx \beta$, so gilt $\neg\alpha \approx \neg\beta$.
2. Wenn $\alpha \approx \beta$, so gilt $\gamma \wedge \alpha \approx \gamma \wedge \beta$.
3. Wenn $\alpha \approx \beta$, so gilt $\gamma \vee \alpha \approx \gamma \vee \beta$.

Frage 81

Thema: Aussagenlogik

Wie stellt man die Formel $\alpha \wedge \beta$ nur mit den Junktoren $\vee$ und $\neg$ dar?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 82

Thema: Aussagenlogik

Wie nennt man die Äquivalenzregel, die besagt, dass $\neg\neg\alpha \approx \alpha$ gilt?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 83

Thema: Aussagenlogik

Wie nennt man die Äquivalenzregeln, die besagen, dass $\alpha \vee \alpha \approx \alpha$ und $\alpha \wedge \alpha \approx \alpha$ gilt?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 84

Thema: Aussagenlogik

Wie lauten die Regeln von de Morgan?

Hinweis Zu welchen Formeln sind die Formeln $\neg(\alpha \wedge \beta)$ und $\neg(\alpha \vee \beta)$ äquivalent?

Antwort 82
Thema: Aussagenlogik

Das ist die Negationsregel.

Antwort 81

Thema: Aussagenlogik

Es ist $\alpha \wedge \beta \approx \neg(\neg\alpha \vee \neg\beta)$.

Antwort 84

Thema: Aussagenlogik

Sind α und β aussagenlogische Formeln, dann gilt $\neg(\alpha\wedge\beta) \approx \neg\alpha\vee\neg\beta$ und $\neg(\alpha\vee\beta) \approx \neg\alpha\wedge\neg\beta$.

Antwort 83
Thema: Aussagenlogik

Das sind die Idempotenzregeln.

Frage 85

Thema: Aussagenlogik

Wann ist eine aussagenlogische Formel α in Negationsnormalform?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 86
Thema: Aussagenlogik

Ist die Negationsnormalform einer aussagenlogischen Formel eindeutig?

Hinweis Nein.

Frage 87

Thema: Aussagenlogik

Wann ist eine aussagenlogische Formel α in konjunktiver Normalform?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 88

Thema: Aussagenlogik

Wann ist eine aussagenlogische Formel α in disjunktiver Normelform?

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 86

Thema: Aussagenlogik

Nein. Es sind zum Beispiel $\neg\alpha \vee \beta$ und $\beta \vee \neg\alpha$ Negationsnormalformen ein und derselben Formel.

Antwort 85

Thema: Aussagenlogik

Wenn in α nicht die Junktoren $\rightarrow$ und $\leftrightarrow$ vorkommen, und wenn jedes Negationszeichen direkt vor einem Atom steht.

Antwort 88

Thema: Aussagenlogik

Wenn α eine Disjunktion von Monomen ist. Dabei ist eine Disjunktion von der Form $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$, und ein Monom ist von der Form $\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i$, wobei die α_i Atome oder negierte Atome sind.

Antwort 87

Thema: Aussagenlogik

Wenn α eine Konjunktion von Klauseln ist. Dabei ist eine Klausel von der Form $\bigvee_{i=1}^{n} \alpha_i$, wobei alle α_i Atome oder negierte Atome sind. Eine Konjunktion ist von der Form $\bigwedge_{i=1}^{n} \alpha_i$.

Frage 89
Thema: Aussagenlogik

Was ist eine Negationsnormalform von $\neg(A \vee \neg(B \wedge C))$?

Hinweis In der Negationsnormalform dürfen die Negationszeichen nur vor den Atomen stehen.

Frage 90

Thema: Aussagenlogik

Was ist eine Negationsnormalform von $A \leftrightarrow B$?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 91

Thema: Aussagenlogik

Bestimmen Sie eine disjunktive Normalform der Formel $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 92
Thema: Aussagenlogik

Bestimmen Sie eine konjunktive Normalform von $(A \wedge B) \vee (\neg A \wedge \neg B)$.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 90
Thema: Aussagenlogik

Mit der Junktorminimierung gilt $A \leftrightarrow B \approx \neg(\neg(\neg A \vee B) \vee \neg(\neg B \vee A))$. Mit den Regeln von de Morgan ist diese Formel äquivalent zu $\neg((\neg\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg\neg B \wedge \neg A))$. Die Negationsregel besagt, dass die Formel äquivalent ist zu $\neg((A \wedge \neg B) \vee (B \wedge \neg A))$. Nun werden wieder die Regeln von de Morgan angewendet: $\neg(A \wedge \neg B) \wedge \neg(B \wedge \neg A)$. Nochmaliges Anwenden der Regeln von der Morgan ergibt $(\neg A \vee \neg\neg B) \wedge (\neg B \vee \neg\neg A)$. Nun muss noch einmal die Negationsregel angewendet werden, um die doppelten Negationszeichen zu beseitigen, und wir erhalten die Formel $(\neg A \vee B) \wedge (\neg B \vee A)$ als Negationsnormalform.

Antwort 89

Thema: Aussagenlogik

Mit der Regel von de Morgan gilt $\neg(A \vee \neg(B \wedge C)) \approx \neg A \wedge \neg\neg(B \wedge C)$, und mit der Negationsregel gilt $\neg A \wedge \neg\neg(B \wedge C) \approx \neg A \wedge (B \wedge C)$, und dies ist eine Negationsnormalform.

Antwort 92
Thema: Aussagenlogik

Sei $\alpha = (\neg A \wedge \neg B)$. Die Distributivgesetze angewendet auf $(A \wedge B) \vee \alpha$ ergeben $(A \vee \alpha) \wedge (B \vee \alpha)$, also $(A \vee (\neg A \wedge \neg B)) \wedge (B \vee (\neg A \wedge \neg B))$. Nochmalige Anwendung der Distributivgesetze ergibt $((A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B)) \wedge ((B \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B))$. Ein paar überflüssige Klammern können noch entfernt werden, und wir erhalten die konjunktive Normalform $(A \vee \neg A) \wedge (A \vee \neg B) \wedge (B \vee \neg A) \wedge (B \vee \neg B)$.

Antwort 91
Thema: Aussagenlogik

Sei $\alpha = (\neg B \vee A)$. Die Distributivgesetze angewendet auf $(\neg A \vee B) \wedge \alpha$ ergeben $(\neg A \wedge \alpha) \vee (B \wedge \alpha)$, also $(\neg A \wedge (\neg B \vee A)) \vee (B \wedge (\neg B \vee A))$. Nochmalige Anwendung der Distributivgesetze ergibt $((\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A)) \vee ((B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A))$. Ein paar überflüssige Klammern können noch entfernt werden, und wir erhalten die disjunktive Normalform $(\neg A \wedge \neg B) \vee (\neg A \wedge A) \vee (B \wedge \neg B) \vee (B \wedge A)$.

Frage 93

Thema: Aussagenlogik

Bei den formalen Beweisen heißt eine Formel der Form $\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \to \beta$ ein gültiges Argument, wenn sie eine Tautologie ist. Ist es wahr, dass $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \to \beta$ genau dann ein gültiges Argument ist, wenn $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \models \beta$ bzw. $\alpha_1, \ldots, \alpha_n \models \beta$ gilt?

Hinweis Ja, die Behauptung ist wahr.

Frage 94

Thema: Aussagenlogik

Modellieren Sie die folgenden Aussage: Wenn der Hahn kräht auf dem Mist, dann ändert sich das Wetter oder es bleibt wie es ist. Dabei sei H die Aussage „Der Hahn kräht auf dem Mist“ und W die Aussage „Das Wetter ändert sich“.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 95
Thema: Aussagenlogik

Modellieren Sie die folgende Aussage: Mai kühl und nass füllt dem Bauern Scheun" und Fass. Dabei sei K die Aussage „Im Mai ist es kühl", N sei die Aussage „Im Mai ist es nass" und E sei die Aussage „Die Ernte ist gut."

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 96

Thema: Prädikatenlogik

Sei $M = \mathbb{Z}$. Geben Sie ein Beispiel für eine zweistellige Funktion und eine einstellige Relation auf M.

Hinweis Eine n-stellige Funktion auf einer Menge M ist eine Abbildung $M^n \longrightarrow M$, und eine n-stellige Relation R ist eine Teilmenge von M^n.

Antwort 94

Thema: Aussagenlogik

Die Aussage wird zu $H \to W \vee \neg W$.

Antwort 93

Thema: Aussagenlogik

Ja, das ist wahr, denn schließlich gilt $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \models \beta$ genau dann, wenn $\alpha_1 \wedge \cdots \wedge \alpha_n \to \beta$ eine Tautologie ist.

Antwort 96

Thema: Prädikatenlogik

Eine zweistellige Funktion ist eine Abbildung $f : \mathbb{Z}^2 \longrightarrow \mathbb{Z}$, also zum Beispiel $f(x, y) = xy$. Eine einstellige Relation R ist eine Teilmenge von $\mathbb{Z}$, also zum Beispiel $R = \{z \in \mathbb{Z} \mid z \text{ ist gerade}\}$.

Antwort 95
Thema: Aussagenlogik

Die Aussage wird zu $K \wedge N \to E$.

Frage 97

Thema: Prädikatenlogik

Was sind die wesentlichen Unterschiede zwischen aussagenlogischen und prädikatenlogischen Formeln?

Hinweis In einer aussagenlogischen Formel kommt zum Beispiel kein Existenzquantor vor.

Frage 98

Thema: Prädikatenlogik

Welche Variablen kommen in der Formel $\forall x P(f(x, y), z) \wedge \exists y S(h(g(y)))$ frei und welche gebunden vor?

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 99

Thema: Prädikatenlogik

Es sei P eine zweistellige Relation und f eine einstellige Funktion. Sei $\alpha = \exists x \forall y P(x, y) \vee (\neg(f(x) = f(y)))$. Sei $U = \mathbb{Z}$, $\mathcal{I}(P) = Q$ mit $Q = \{(a, b) \mid a > b\}$ und $\mathcal{I}(f) = g$ mit $g(a) = a^2$. Was ist $\mathcal{I}(\alpha)$?

Hinweis Es gilt $\mathcal{I}(\alpha) = 0$.

Frage 100

Thema: Prädikatenlogik

Konstruieren Sie eine Interpretation der Formel $\alpha = \exists x \forall y P(x, y) \vee (\neg(f(x) = f(y)))$, so dass $\mathcal{I}(\alpha) = 1$ gilt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 98
Thema: Prädikatenlogik

Die Variable x ist gebunden, z ist frei, und y kommt im ersten Teil frei und dann gebunden vor.

Antwort 97
Thema: Prädikatenlogik

In prädikatenlogischen Fromeln kommen zusätzlich noch Funktionen und Relationen sowie der Existenz- und der Allquantor vor.

Antwort 100
Thema: Prädikatenlogik

Es sei $U = \mathbb{N}$ und $\mathcal{I}(P) = Q$ mit $Q = \{(a, b) \mid a = b\}$. Weiter sei $\mathcal{I}(f) = g$ mit $g(a) = a$. Dann lautet die Formel $\exists x \in \mathbb{N}\ \forall y \in \mathbb{N}\ (x = y) \vee (x \neq y)$. Diese Formel ist offensichtlich wahr, also $\mathcal{I}(\alpha) = 1$.

Antwort 99

Thema: Prädikatenlogik

Die Formel sieht mit der Interpretation folgendermaßen aus: $\exists x \in \mathbb{Z}\ \forall y \in \mathbb{Z}\ (x > y) \vee (\neg(x^2 = y^2))$. Es gilt also $\mathcal{I}(\alpha) = 0$, denn für jedes $x \in \mathbb{Z}$ gilt für $y = x$ weder $x > y$ noch $x^2 \neq y^2$.

Frage 101
Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei P eine zweistellige Relation und f eine zweistellige Funktion. Die Formel $\alpha = \forall x \exists y P(x, y) \wedge P(x, f(x, y))$ ist tautologisch.

Hinweis Falsch.

Frage 102
Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei P eine zweistellige Relation und f eine zweistellige Funktion. Die Formel $\alpha = \forall x \exists y P(x,y) \wedge P(x, f(x,y))$ ist erfüllbar.

Hinweis Wahr.

Frage 103

Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei P eine zweistellige Relation und f eine zweistellige Funktion. Die Formel $\alpha = \forall x \exists y P(x,y) \land P(x, f(x,y))$ ist falsifizierbar.

Hinweis Wahr.

Frage 104

Thema: Prädikatenlogik

Wahr oder falsch? Sei P eine zweistellige Relation und f eine zweistellige Funktion. Die Formel $\alpha = \forall x \exists y P(x, y) \wedge P(x, f(x, y))$ ist widersprüchlich.

Hinweis Falsch.

Antwort 102
Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Sei $U = \mathbb{N}$ und $\mathcal{I}(P) = Q$ mit $Q = \{(a, b) \mid a \leq b\}$. Weiter sei $\mathcal{I}(f) = g$ mit $g(a, b) = a + b$. Dann ist die Formel $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (x \leq y) \wedge (x \leq x + y)$. Diese Aussage ist wahr, wenn man zum Beispiel für jedes $x \in \mathbb{N}$ einfach $y = x$ wählt. Das heißt $\mathcal{I}(\alpha) = 1$. Damit ist α erfüllbar.

Antwort 101

Thema: Prädikatenlogik

Falsch. Sei $U = \mathbb{N}$ und $\mathcal{I}(P) = Q$ mit $Q = \{(a,b) \mid a > b\}$. Weiter sei $\mathcal{I}(f) = g$ mit $g(a,b) = ab$. Dann ist die Formel $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (x > y) \wedge (x > xy)$. Für $x = 1$ gibt es jedoch kein $y \in \mathbb{N}$ mit $x > y$, das heißt $\mathcal{I}(\alpha) = 0$. Damit ist α nicht tautologisch.

Antwort 104
Thema: Prädikatenlogik

Falsch. Sei $U = \mathbb{N}$ und $\mathcal{I}(P) = Q$ mit $Q = \{(a, b) \mid a \leq b\}$. Weiter sei $\mathcal{I}(f) = g$ mit $g(a, b) = a + b$. Dann ist die Formel $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (x \leq y) \wedge (x \leq x + y)$. Dann ist diese Aussage wahr, wenn man zum Beispiel für jedes $x \in \mathbb{N}$ einfach $y = x$ wählt. Das heißt $\mathcal{I}(\alpha) = 1$. Damit ist α nicht widersprüchlich.

Antwort 103

Thema: Prädikatenlogik

Wahr. Sei $U = \mathbb{N}$ und $\mathcal{I}(P) = Q$ mit $Q = \{(a, b) \mid a > b\}$. Weiter sei $\mathcal{I}(f) = g$ mit $g(a, b) = ab$. Dann ist die Formel $\forall x \in \mathbb{N}\ \exists y \in \mathbb{N}\ (x > y) \wedge (x > xy)$. Für $x = 1$ gibt es jedoch kein $y \in \mathbb{N}$ mit $x > y$, das heißt $\mathcal{I}(\alpha) = 0$. Damit ist α falsifizierbar.

Frage 105
Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Nur Eisbären, die mit der Hand aufgezogen werden, mögen (einige) Menschen. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Säugetiere in deutschen Zoos und die Prädikate:

1. $E(x)$: x ist ein Eisbär.
2. $M(x)$: x ist ein Mensch.
3. $H(x)$: x wurde mit der Hand aufgezogen.
4. $m(x, y)$: x mag y.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 106
Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Eisbären, die mit der Hand aufgezogen werden, mögen keine anderen Eisbären. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Säugetiere in deutschen Zoos und die Prädikate:

1. $E(x)$: x ist ein Eisbär.
2. $H(x)$: x wurde mit der Hand aufgezogen.
3. $m(x, y)$: x mag y.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 107
Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Zeitschriften und Doktorarbeiten sind nicht ausleihbar. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Printmedien der Universitätsbibliothek und die Prädikate:

1. $z(x)$: x ist eine Zeitschrift.
2. $d(x)$: x ist eine Doktorarbeit.
3. $a(x)$: x ist ausleihbar.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 108

Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Nur Monographien, die Lehrbücher sind, sind ausleihbar. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Printmedien der Universitätsbibliothek und die Prädikate:

1. $m(x)$: x ist eine Monographie.
2. $l(x)$: x ist ein Lehrbuch.
3. $a(x)$: x ist ausleihbar.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 106
Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\forall x((E(x) \wedge H(x)) \rightarrow (\forall y(E(y) \rightarrow \neg m(x,y))))$.

Antwort 105

Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\forall x(E(x) \wedge (\exists y(M(y) \wedge m(x, y))) \rightarrow H(x))$.

Antwort 108

Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\forall x(m(x) \land a(x) \rightarrow l(x))$.

Antwort 107

Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\forall x(z(x) \vee d(x) \rightarrow \neg a(x))$.

Frage 109

Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Manche Monographien sind Doktorarbeiten, aber Doktorarbeiten sind keine Lehrbücher. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Printmedien der Universitätsbibliothek und die Prädikate:

1. $m(x)$: x ist eine Monographie.
2. $d(x)$: x ist eine Doktorarbeit.
3. $l(x)$: x ist ein Lehrbuch.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 110
Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Es gibt Hunde, die keine Kaninchen jagen. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Säugetiere und die Prädikate:

1. $h(x)$: x ist ein Hund.
2. $k(x)$: x ist ein Kaninchen.
3. $j(x, y)$: x jagt y.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 111

Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Nur Hunde jagen Kaninchen. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Säugetiere und die Prädikate:

1. $h(x)$: x ist ein Hund.
2. $k(x)$: x ist ein Kaninchen.
3. $j(x, y)$: x jagt y.

Hinweis Ohne Hinweis.

Frage 112

Thema: Prädikatenlogik

Gegeben sei die folgende umgangssprachliche Aussage: Hunde, die Kaninchen jagen, beißen nicht. Formalisieren Sie diese Aussage in Prädikatenlogik. Benutzen Sie als Grundmenge U alle Säugetiere und die Prädikate:

1. $h(x)$: x ist ein Hund.
2. $k(x)$: x ist ein Kaninchen.
3. $j(x, y)$: x jagt y.
4. $b(x)$: x beißt.

Hinweis Ohne Hinweis.

Antwort 110
Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\exists x(h(x) \wedge (\forall y(k(y) \rightarrow \neg j(x, y))))$.

Antwort 109

Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $(\exists x(m(x) \wedge d(x))) \wedge (\forall x(d(x) \to \neg l(x)))$.

Antwort 112
Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\forall x \forall y (h(x) \wedge k(y) \wedge j(x, y) \rightarrow \neg b(x))$.

Antwort 111
Thema: Prädikatenlogik

Die Aussage wird zu $\forall x(\exists y(k(y) \land j(x,y)) \rightarrow h(x))$.