1 量子群

Lie 代数的标准技巧是 “拿 $\mathfrak{sl}_2$” 当尺子. 记

$$h = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \qquad e = \begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & \end{pmatrix} \qquad f = \begin{pmatrix} & 0 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

对于一个 $\mathfrak{sl}_2$ 的不可约表示 V, 记 $V_n = \{x \in V : hx = nx\}$.

熟知最高权为 n 的不可约表示形如

$$\begin{tikzcd} 0 & V_{-n} \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left, "e"] & V_{-n+2} \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left, "e"] & \cdots \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left, "e"] & V_{n-2} \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left, "e"] & V_n \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left, "e"] & 0 \end{tikzcd}$$

且 $\dim V_\bullet = 1$.

此时, 任意选取一个非零元 $b_i \in V_i$ 组成 $\mathcal{B}$. 那么我们可以定义 $\mathfrak{sl}_2$ 这把尺子的刻度

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \max\{i : e^i x \neq 0\} \\ \varphi(x) &= \max\{i : f^i x \neq 0\} \end{aligned}$$

所以 $x \in V_i$ 其中 $i = \varphi(x) - \epsilon(x)$.

如果我们 $\mathcal{B}$ 选得好, 那么

$$e_i(\mathcal{B}) \subseteq \quad \mathcal{B} \cup \{0\} \quad \supseteq f_i(\mathcal{B}).$$

1.1 $\mathfrak{sl}_n$ 的表示

回忆 $\mathfrak{sl}_n$ 中, Cartan 子代数

$$\mathfrak{h} = \{\operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n) : x_1 + \cdots + x_n = 0\}$$

将 $x_1, \ldots, x_n \in \mathfrak{h}^*$ 视作坐标. 单根取作 $\{\alpha_i = x_i - x_{i+1} : i = 1, \ldots, n-1\}$. 那么 $\mathfrak{sl}_2$-triple 对应

$$\begin{aligned} h_i &= \operatorname{diag}\Big(\ldots 0, \overset{i\ \ i+1}{\begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}}, 0 \ldots\Big) \\ e_i &= \operatorname{diag}\Big(\ldots 0, \overset{i\ \ i+1}{\begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & \end{pmatrix}}, 0 \ldots\Big) = E_{i,i+1} \\ f_i &= \operatorname{diag}\Big(\ldots 0, \overset{i\ \ i+1}{\begin{pmatrix} & 0 \\ 1 & \end{pmatrix}}, 0 \ldots\Big) = E_{i+1,i} \end{aligned}$$

回忆其的自然表示 $V = \mathbb{C}^n$. 记 $\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n$ 为自然基. 那么

$$\mathbb{C}\mathbf{v}_i = V_{x_i} = \{v \in V : \operatorname{diag}(x_1, \ldots, x_n)v = x_i v\}.$$

其作用由下表给出

	$\cdots$	$\mathbf{v}_{i-1}$	$\mathbf{v}_i$	$\mathbf{v}_{i+1}$	$\mathbf{v}_{i+2}$	$\cdots$
e_i	$\cdots$	0	0	$\mathbf{v}_i$	0	$\cdots$
f_i	$\cdots$	0	$\mathbf{v}_{i+1}$	0	0	$\cdots$

考虑 $V^{\otimes N}$, 此时

$$\mathfrak{gl}_n \underset{\text{左作用}}{\overset{\curvearrowright}{}} V^{\otimes N} \underset{\text{左作用}}{\overset{\curvearrowleft}{}} \mathfrak{S}_N$$

对于 N 的一个分拆 $\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots$, 并填入 1 到 N.

取 Young symmetriser $b_\lambda = c_\lambda r_\lambda$, 其中 c_λ 是列交错和, r_λ 是行和. 记

$$V_\lambda = V^{\otimes N} b_\lambda$$

把 $x_1 \otimes \cdots \otimes x_N$ 按照填入的数按顺序记入 Young 表, 并且将 $\mathbf{v}_i$ 在 Young 图中改写为 i.

$$\begin{aligned} r_\lambda &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{1,2,3,4\}} \times \mathfrak{S}_{\{5,6,7\}} \times \mathfrak{S}_{\{8\}}} \sigma \\ c_\lambda &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{1,5,8\}} \times \mathfrak{S}_{\{2,6\}} \times \mathfrak{S}_{\{3,7\}} \times \mathfrak{S}_{\{4\}}} (-1)^\sigma \sigma. \end{aligned} \qquad \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 \\ \hline 5 & 6 & 7 \\ \cline{1-3} 8 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_8 = \begin{array}{l} x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4 \\ \otimes \quad \otimes \quad \otimes \\ x_5 \otimes x_6 \otimes x_7 \\ \otimes \\ x_8 \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \mathbf{v}_4 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_4 \otimes \mathbf{v}_1 \\ \otimes \quad \otimes \quad \otimes \\ \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 \\ \otimes \\ \mathbf{v}_1 \end{array} = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 4 & 2 & 4 & 1 \\ \hline 3 & 2 & 1 \\ \cline{1-3} 1 \\ \cline{1-1} \end{array}$$

令 M 是一个 Young 表对应的单项式. 注意到:

- 当列中有重复元素时, $M \cdot b_\lambda = 0$.

  [因为列是交错和]

- (非零时) 其权为 $\phi_1 x_1 + \cdots + \phi_n x_n$, 其中 ϕ_i 是 Young 表中 i 的使用次数.

  回忆 x 在张量积上的作用是逐项作用再相加.

记 M_0 是第 i 行全部填 i 的 Young 表对应的单项式. 注意到:

- 第 i 行全部填 i 时, 记为 M_0, 那么 $M_0 \cdot b_\lambda \neq 0$.

  考虑 M 在 $M \cdot b_\lambda$ 前的系数.

- 任何一个 M, 都可以作用数次 $\{E_{ij}\}$ 进入 $\mathbb{C}M_0$. 且如果列元素不同, 那么可以作用数次 $\{E_{ij}\}$ 进入 $\mathbb{C}^\times M_0$.

  看下面的例子.

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \\ 4 & & & \end{array}$$

$$\xrightarrow{e_1=E_{12}} \begin{array}{llll} 1 & (1) & 3 & 2 \\ 2 & 3 & 4 & \\ 4 & & & \end{array} + \begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & (1) \\ 2 & 3 & 4 & \\ 4 & & & \end{array} + \begin{array}{llll} 1 & 2 & 3 & 2 \\ (1) & 3 & 4 & \\ 4 & & & \end{array}\ (=0)$$

$$\xrightarrow{e_1=E_{12}} \begin{array}{llll} 1 & 1 & 3 & (1) \\ 2 & 3 & 4 & \\ 4 & & & \end{array} + 0 + \begin{array}{llll} 1 & (1) & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \\ 4 & & & \end{array} + 0 = 2 \begin{array}{llll} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \\ 4 & & & \end{array}$$

$$\xrightarrow{E_{13}=[e_1,e_3]} 2 \begin{array}{llll} 1 & 1 & (1) & 1 \\ 2 & 3 & 4 & \\ 4 & & & \end{array} + 2 \begin{array}{llll} 1 & 1 & 3 & 1 \\ 2 & (1) & 4 & \\ 4 & & & \end{array}\ (=0)$$

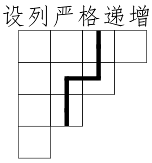
$$\xrightarrow{e_2} 2 \begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & (2) & 4 & \\ 4 & & & \end{array} \xrightarrow{E_{42}=[e_4,[e_3,e_2]]} 2 \begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & (2) & \\ 4 & & & \end{array} + 0$$

$$\xrightarrow{e_3=E_{43}} 2 \begin{array}{llll} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & \\ (3) & & & \end{array}$$

之后的步骤如下

- 从上面两点说明 V_λ 中含有一个 $\mathfrak{sl}_n$ 的一个最高权为 $\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x$ 的不可约表示.
- 证明列严格递增且行单调递增 (半标准 Young 表) 的 Young 表构成一组基.
- 此时再利用 Weyl 特征公式 (即 Schur 函数) 说明这个表示必定是整个 V_λ.

上述过程还可以用 Schur–Weyl 对偶来说明.

习题 1. *证明列严格递增且行单调递增 (半标准 Young 表) 的 Young 表构成一组基.* [提示：首先他们线性无关，说明每个半标准 Young 图都被一串 $E_{i<j}$ 提到 M_0，且作用在比其小（某个序下）Young 图上得 0. 再说明张成整个表示，我们说明任何一个 Young 表对应的单项式都可以. 首先可以假设列严格递增；找最先（某个序下）出现的的行递减. 考虑  中 ``标出位置'' 的对称群 $G \subseteq \mathfrak{S}_N$. 记 $g$ 是他们的交错和. 这是任何列内的置换 $\sigma$ 都一定存在一个两个 ``标出位置'' 位置出现在同一行. 因此行内变换含有一个 $\sigma^{-1} G \sigma$ 的对换，因此 $M \cdot g \cdot b_\lambda = 0$. 展开 Mg 归纳.]

1.2 Kashiwara 晶体基

上一节我们虽然说明

任何一个 M, 都可以作用数次 $\{E_{ij}\}$ 进入 $\mathbb{C}M_0$.

但是我们没法确定前面的系数.

以后见之明, 量子群告诉我们

$$\begin{array}{llll} 1 & 2 & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & \\ 3 & & & \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{llll} 1 & (1) & 2 & 4 \\ 2 & 3 & 4 & \\ 3 & & & \end{array} + q \begin{array}{llll} 1 & 2 & (1) & 4 \\ 2 & 3 & 4 & \\ 3 & & & \end{array}$$

即 $2 = (1+q)|_{q=1}$. 换句话说 Lie 代数作为 $q=1$ 的特殊情况, 把 Young 图上某种 "分次" 结构隐藏掉了. Kashiwara 的想法是取 $q=0$.

记 $\mathbb{I} = \{1, \ldots, n-1\}$, 权格 $\Lambda = \mathbb{Z}x_1 \oplus \cdots \oplus \mathbb{Z}x_n/(x_1 + \ldots + x_n)$, fundamental weight $\omega_i = x_1 + \ldots + x_i$.

我们定义 **Kashiwara 晶体基** 是 $\mathcal{B}$ 伴着下列映射

$$\begin{array}{rl} \text{作用} & e_i, f_i : \mathcal{B} \to \mathcal{B} \cup \{0\} \\ \text{尺度} & \epsilon_i, \varphi_i : \mathcal{B} \to \mathbb{Z} \cup \{0\} \\ \text{权} & \mathtt{wt} : \mathcal{B} \to \Lambda \end{array}$$

我们要求

$$e_i(x) = y \iff f_i(y) = x.$$

且此时 $\begin{cases} \epsilon_i(y) = \epsilon_i(x) - 1 \\ \varphi_i(y) = \varphi_i(x) + 1 \\ \mathtt{wt}(y) = \mathtt{wt}(x) + \alpha_i. \end{cases}$. 还要求

$$\varphi_i(x) - \epsilon_i(x) = \langle h_i, \mathtt{wt}(x) \rangle .$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ *这里的 e_i, f_i 是 Kashiwara operator 和 Lie 代数中的 e_i 和 f_i 不一样, 虽然有联系, 但是这里仅仅不妨理解为一个记号.*

$\boxed{\text{注意 2}}$ *实际上不如说 Kashiwara 晶体基是定义了一个带了一些结构的图 (**晶体图**). 为了画出这个图, 我们可以只标记 f_i, 且可以略去 $f_i(x) = 0$ 的那些. 下图中出现的情况, 都有*

$$\begin{aligned} \epsilon_i(x) &= \max\{k : e_i^k x \neq 0\} \\ \varphi_i(x) &= \max\{k : f_i^k x \neq 0\} \end{aligned}$$

例如, 仿照 $\mathfrak{sl}_n$ 的表示, 定义一个 Young 表的权是 $\ell_1 x_1 + \cdots + \ell_n x_n$, 其中 ℓ_i 是 i 使用的次数.

下面是一些例子

$\mathbb{I} = \{1\}$ $\quad \boxed{1\,1\,1} \xrightarrow{1} \boxed{1\,1\,2} \xrightarrow{1} \boxed{1\,2\,2} \xrightarrow{1} \boxed{2\,2\,2}$

$\mathbb{I} = \{1,2,3\}$ $\quad \boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \boxed{3} \xrightarrow{3} \boxed{4}$

$$\begin{tikzcd} 111 \arrow[r, "1"] & 112 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "2"] & 122 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "2"] & 222 \arrow[d, "2"] \\ & 113 \arrow[r, "1"] & 123 \arrow[r, "1"] \arrow[d, "2"] & 223 \arrow[d, "2"] \\ & & 133 \arrow[r, "1"] & 233 \arrow[d, "2"] \\ & & & 333 \end{tikzcd}$$

$\mathbb{I} = \{1,2\}$

$$\mathbb{I}=\{1,2,3\}$$

$$\begin{tikzcd}
 & & \begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array} \arrow[dr, "3"] & & \\
\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array} \arrow[r, "2"] & \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 3\\\hline\end{array} \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "3"'] & & \begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 4\\\hline\end{array} \arrow[r, "2"] & \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 4\\\hline\end{array} \\
 & & \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 4\\\hline\end{array} \arrow[ur, "1"'] & &
\end{tikzcd}$$

Kashiwara 晶体基的一个优点是在张量积下非常好. 对于两个晶体基 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$. 那么可以定义二者的张量积 $\mathtt{wt}(x\otimes y)=\mathtt{wt}(x)+\mathtt{wt}(y)$ 以及

$$f_i(x\otimes y)=\begin{cases} f_i(x)\otimes y & \varphi_i(y)\le\epsilon_i(x) \\ x\otimes f_i(y) & \varphi_i(y)>\epsilon_i(x)\end{cases}$$

$$e_i(x\otimes y)=\begin{cases} e_i(x)\otimes y & \varphi_i(y)<\epsilon_i(x) \\ x\otimes e_i(y) & \varphi_i(y)\ge\epsilon_i(x)\end{cases}$$

$$\varphi_i(x\otimes y)=\max\{\varphi_i(x),\varphi_j(y)+\langle h_i,\mathtt{wt}(x)\rangle\}$$

$$\epsilon_i(x\otimes y)=\max\{\epsilon_i(x),\epsilon_j(y)-\langle h_i,\mathtt{wt}(x)\rangle\}$$

这样定义是有动机的, 这是经典的 Clebsch–Gordan 公式

$x\otimes y$	y	$\boxed{111}$	$\longrightarrow$	$\boxed{112}$	$\longrightarrow$	$\boxed{122}$	$\longrightarrow$	$\boxed{222}$
x	$\epsilon(x)\ \varphi(y)$	3		2		1		0
$\boxed{1111}$	0	$\boxed{1111}\otimes\boxed{111}$	$\longrightarrow$	$\boxed{1111}\otimes\boxed{112}$	$\longrightarrow$	$\boxed{1111}\otimes\boxed{122}$	$\longrightarrow$	$\boxed{1111}\otimes\boxed{222}$
$\downarrow$								$\downarrow$
$\boxed{1112}$	1	$\boxed{1112}\otimes\boxed{111}$	$\longrightarrow$	$\boxed{1112}\otimes\boxed{112}$	$\longrightarrow$	$\boxed{1112}\otimes\boxed{122}$		$\boxed{1112}\otimes\boxed{222}$
$\downarrow$						$\downarrow$		$\downarrow$
$\boxed{1122}$	2	$\boxed{1122}\otimes\boxed{111}$	$\longrightarrow$	$\boxed{1122}\otimes\boxed{112}$		$\boxed{1122}\otimes\boxed{122}$		$\boxed{1122}\otimes\boxed{222}$
$\downarrow$				$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
$\boxed{1222}$	3	$\boxed{1222}\otimes\boxed{111}$		$\boxed{1222}\otimes\boxed{112}$		$\boxed{1222}\otimes\boxed{122}$		$\boxed{1222}\otimes\boxed{222}$
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
$\boxed{2222}$	4	$\boxed{2222}\otimes\boxed{111}$		$\boxed{2222}\otimes\boxed{112}$		$\boxed{2222}\otimes\boxed{122}$		$\boxed{2222}\otimes\boxed{222}$

例如

$x\otimes y$	y	$\boxed{1}$	$\xrightarrow{1}$	$\boxed{2}$	$\xrightarrow{2}$	$\boxed{3}$	$\xrightarrow{3}$	$\boxed{4}$
x	$\epsilon(x)\ \varphi(y)$	100		010		001		000
$\boxed{1}$	000	$\boxed{1}\otimes\boxed{1}$	$\xrightarrow{1}$	$\boxed{1}\otimes\boxed{2}$	$\xrightarrow{2}$	$\boxed{1}\otimes\boxed{3}$	$\xrightarrow{3}$	$\boxed{1}\otimes\boxed{4}$
$1\downarrow$				$\downarrow 1$		$\downarrow 1$		$\downarrow 1$
$\boxed{2}$	100	$\boxed{2}\otimes\boxed{1}$		$\boxed{2}\otimes\boxed{2}$	$\xrightarrow{2}$	$\boxed{2}\otimes\boxed{3}$	$\xrightarrow{3}$	$\boxed{2}\otimes\boxed{4}$
$2\downarrow$		$\downarrow 2$				$\downarrow 2$		$\downarrow 2$
$\boxed{3}$	010	$\boxed{3}\otimes\boxed{1}$	$\xrightarrow{1}$	$\boxed{3}\otimes\boxed{2}$		$\boxed{3}\otimes\boxed{3}$	$\xrightarrow{3}$	$\boxed{3}\otimes\boxed{4}$
$3\downarrow$		$\downarrow 3$		$\downarrow 3$				$\downarrow 3$
$\boxed{4}$	001	$\boxed{4}\otimes\boxed{1}$	$\xrightarrow{1}$	$\boxed{4}\otimes\boxed{2}$	$\xrightarrow{2}$	$\boxed{4}\otimes\boxed{3}$		$\boxed{4}\otimes\boxed{4}$

由此出发能够得到经典的 Littlewood–Richardson rule. 具体来说, 考虑自然表示 $V_\square$,

$$\boxed{1}\xrightarrow{1}\cdots\xrightarrow{n-1}\boxed{n}.$$

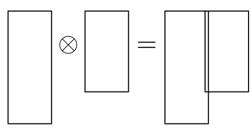
对每一个 fundamental weight $\omega_i=x_1+\cdots+x_N$ 对应的基本表示 V_i 可以嵌入 $V_\square^{\otimes N}$. 对应连通分支的晶体图是 $\boxed{i_1}\otimes\cdots\otimes\boxed{i_N}$ 使得 $i_1<\cdots<i_N$. 我们将其记为 $\begin{array}{|c|}\hline i_1\\\hline \vdots\\\hline i_N\\\hline\end{array}$. 一般地, 假如把任何一个权 λ 写成 ω_i 的和按照 $\omega_1>\omega_2>\cdots>\omega_{n-1}$ 降序

$$\lambda=\omega_{n-1}+\cdots+\omega_{n-2}+\cdots$$

可以把对应的表示嵌入到对应

$$V_{n-1}\otimes V_{n-1}\otimes\cdots\otimes V_{n-2}\otimes\cdots$$

中. 此时记为



对应的 Crystal graph 的连通分支恰好对应半标准 Young 表.

参考文献

- Bump, Schilling. Crystal Bases: Representations And Combinatorics
- Nakashima. Crystal base and a generalization of the Littlewood-Richardson rule for the classical Lie algebras.