

# 1 扭结

下面我们谈论扭结理论.

一个扭结 (knot) 是嵌入

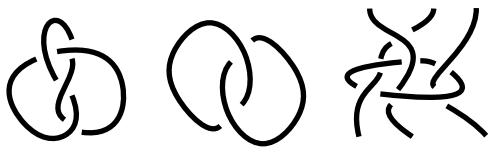
$$S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

的同痕类 (同痕 = 不发生自交的同伦). 一个 link 是嵌入

$$\sqcup^n S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

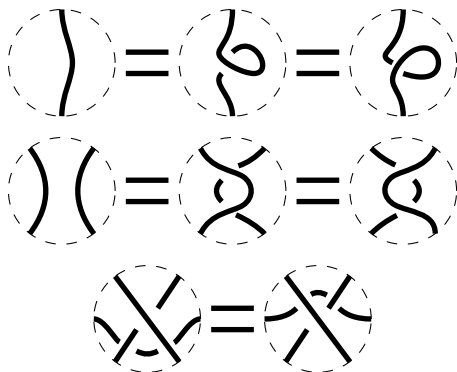
的一个同痕类.

其实之后我们操作就和同痕没关系了. 我们可以选择一个  $\mathbb{R}^3$  中一般位置的平面将其投影下来, 得到扭结图.



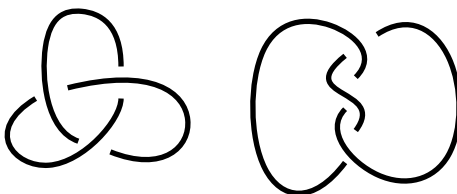
(严格来说应该标上定向)

问题是如何判断同一个扭结的不同投影相同呢? 考虑如下的 Reidemeister move



(带定向) 结论是两个扭结同构当且仅当二者可以通过上述操作转化.

但是实际上我们很难判断两个扭结是否是同一个, 例如这两个扭结是同一个.



(我没发现怎么把这俩折腾成一样的, 这个可能自己打个结试试就能看出来) 于是发现更多的扭结不变量来区分他们是扭结理论的核心问题.

请看[http://katlas.org/wiki/Main\\_Page](http://katlas.org/wiki/Main_Page).

## 1.1 Conway 和 Jones 多项式

扭结理论中最具启发性的结果无疑是 Conway 多项式和 Jones 多项式.

Conway 多项式是对 link 定义的, 是唯一使得

$$\nabla \left( \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) - \nabla \left( \begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array} \right) = z \nabla \left( \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \right) \nabla \left( \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nwarrow \end{array} \right)$$

$$\nabla \left( \bigcirc \right) = 1$$

的指定. 这里的意思是局部上的变形.

例如下面的例子,

$$\nabla \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) = \frac{1}{z} \nabla \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) - \frac{1}{z} \nabla \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) = \frac{1}{z} - \frac{1}{z} = 0$$

$$\nabla \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) = z \nabla \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) + \nabla \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) = z$$

$$\nabla \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) = -z \nabla \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) + \nabla \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) = -z$$

$$\nabla \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) = -z \nabla \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) + \nabla \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) = z^2 + 1$$

实际上, 这是扭结不变量是需要证明的, 即最终得到的多项式和“解开  $\begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array}$ ”的顺序无关.

Jones 多项式也是对 link 定义的, 是唯一使得

$$q^{-1} J \left( \begin{array}{c} \nearrow \\ \searrow \end{array} \right) - q J \left( \begin{array}{c} \nwarrow \\ \swarrow \end{array} \right) = (q^{\frac{1}{2}} - q^{-\frac{1}{2}}) J \left( \begin{array}{c} \nearrow \\ \nearrow \end{array} \right) J \left( \begin{array}{c} \nwarrow \\ \nwarrow \end{array} \right)$$

$$J \left( \bigcirc \right) = 1$$

的指定. 注意, Jones 多项式一般不是多项式.

例如下面的例子,

$$J \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) = \frac{q^{-1}}{q^{1/2} - q^{-1/2}} J \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) - \frac{q}{q^{1/2} - q^{-1/2}} J \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right)$$

$$= \frac{q^{-1} - q}{q^{1/2} - q^{-1/2}} = -q^{1/2} - q^{-1/2}$$

$$J \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) = \frac{q^{1/2} - q^{-1/2}}{q^{-1}} J \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) + q^2 J \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right)$$


$$= q^{3/2} - q^{1/2} - q^{3/2} - q^{5/2} = -q^{5/2} - q^{1/2}$$

$$J \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) = -\frac{q^{1/2} - q^{-1/2}}{q} J \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) + q^{-2} J \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right)$$

$$= -q^{-5/2} - q^{-1/2}$$

$$J \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) = -\frac{q^{1/2} - q^{-1/2}}{q^{-1}} J \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right) + q^{-2} J \left( \begin{array}{c} \bigcirc \\ \bigcirc \end{array} \right)$$

$$= (q^{3/2} - q^{1/2})(-q^{-5/2} - q^{-1/2}) + q^{-2} = -q^{-1} + q^{-3} - q^{-4}$$

实际上, 这是扭结不变量是需要证明的, 即最终得到的多项式和“解开  ”的顺序无关。

下面我们看 Conway 和 Jones 多项式的推广 — **HOMFLYPT 多项式** 是一个扭结不变量  $I$  使得


$$t \cdot I(\text{crossing}) - t^{-1} \cdot I(\text{crossing}) = x \cdot I(\text{two strands})$$

$$I(\text{circle}) = 1$$

其取值是  $\mathbb{Z}[t^{\pm 1}, x^{\pm 1}]$ .

**注意 1** 局部上的这些关系被称为 **skein relation**.

The HOMFLYPT polynomial was found independently and simultaneously by 4 different groups: Freyd and Yetter, Ocneanu, Millett and Lickorish and Hoste. All three sent their manuscripts to the same journal (BAMS) in October 1984. The editors noticed and a joint paper resulted.

Conway 多项式和 Jones 多项式启发 Vassiliev 定义 **有限形不变量**. 现在我们放松条件, 允许扭结图中出现交叉 . 记

$$X_n = \left\{ \text{有 } n \text{ 个 } \text{crossing} \text{ 的“扭结”类} \right\}.$$

那么  $X_0$  就是扭结.

一个  $v: X_0 \rightarrow$  某个 Abel 群 被称为 **扭结不变量**. 任何一个扭结不变量  $v$  都可以延拓到任何一个  $X_n$  上通过

$$v(\text{crossing}) = v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}).$$

我们说  $v$  的阶  $\leq n$  如果  $v(X_{n+1}) = 0$ .

例如 Conway 多项式  $\nabla$  的  $n$  次系数就是一个  $n$  阶不变量, 因为此时

$$\nabla(\text{crossing}) = z \nabla(\text{two strands}).$$

下面我们固定一个域  $\mathbb{F}$ . 考虑所有到  $\mathbb{F}$  上的所有  $\leq n$  阶的不变量  $\mathbf{V}_n$ , 这是一个线性空间. 记有限阶不变量

$$\mathbf{V} = \bigcup_{n \geq 0} \mathbf{V}_n.$$

这对逐点定义的乘法构成一个  $\mathbb{F}$  代数, 且

$$\mathbf{V}_n \mathbf{V}_m \subseteq \mathbf{V}_{m+n}.$$

我们有

$$\dim \mathbf{V}_0 = 1.$$

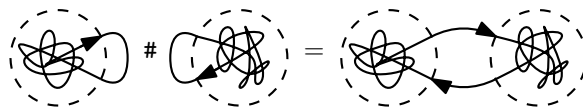
因为任何  $v \in \mathbf{V}_0$  都满足

$$0 = v(\text{crossing}) = v(\text{crossing}) - v(\text{crossing}).$$

说明扭结可以随意穿过自身而  $v$  不变. 这样的不变量只有常数.

**习题 1.** 证明对于扭结, Conway 多项式是常数项为 1 的偶函数. [提示: 证明有两个连通分支的一定是奇函数. 而  $z = 0$  时, 关系已经退化为  $\nabla(\text{crossing}) = \nabla(\text{crossing})$ .]

**习题 2.** 考虑扭结的 **连通和**



证明验证这和切断的点无关, 且

$$\nabla(K_1 \# K_2) = \nabla(K_1) \nabla(K_2),$$

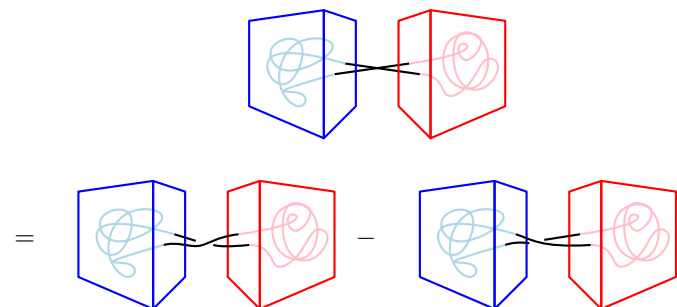
$$J(K_1 \# K_2) = J(K_1) J(K_2).$$

[提示: 因为可以给定义两边同时连通和, 然后实现归纳.]

**习题 3.** 证明 Jones 多项式作换元  $q = e^h = 1 + h + \frac{h^2}{2} + \dots$ , 作为幂级数在  $h^n$  前的系数是  $n$  阶不变量.

$$J(\text{crossing}) = h \cdot f(h) \cdot J(\text{two strands})$$

**习题 4.** 证明  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_0$ . [提示: 如果  $v \in \mathbf{V}_1$ , 那么  $v|_{X_2} = 0$ , 所以  $X_1$  中的“扭结”除了唯一的交叉, 其他部分可以随意穿过自身而  $v$  不变. 所以我们可以将扭结交叉整理到两端.]




但是图中红色箱子旋转  $360^\circ$  正好相等, 故抵消, 于是  $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_0$ .]

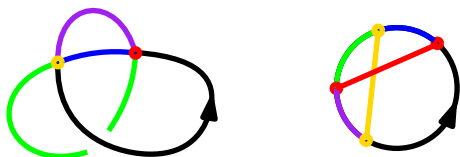
## 1.2 弦图

研究有限形不变量的基本工具是弦图.

回忆

$$X_n = \left\{ \text{有 } n \text{ 个 } \text{crossing} \text{ 的“扭结”类} \right\}.$$

取  $X_n$  中某个  $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^3$ , 那么存在  $S^1$  上  $n$  对点, 每对对应一个 . 我们把每对点用弦连起来, 称为弦图 (chord diagram).

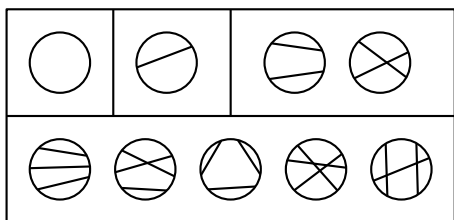


抽象地, 弦图是  $S^1$  上指定的  $n$  对点, 并且商掉一个同伦关系.

记称一个弦图的阶是弦的数目, 记

$$\mathbf{CD}_n = \{\text{有 } n \text{ 条弦的弦图}\}.$$

下图是 3 阶以内的所有弦图



(当然, 弦不必画成直线)

第一段给出了一个映射

$$X_n \longrightarrow \mathbf{CD}_n.$$

这实际上是具有范性质的.

$$\left. \begin{array}{l} \text{对于任何一个 } n \text{ 阶不变量} \\ v : X_n \rightarrow A, \text{ 存在唯一一个} \\ \hat{v} : \mathbf{CD}_n \rightarrow A \text{ 使得右图交换.} \end{array} \right| \begin{array}{c} X_n \\ \downarrow \quad \searrow v \\ \mathbf{CD}_n \xrightarrow[\hat{v}]{\exists!} A \end{array}$$

但是反之, 不是任何一个  $f : \mathbf{CD}_n \rightarrow A$  复合得到的  $X_n \rightarrow A$  都是一个不变量. 我们需要加一些关系才行. 已知的关系是 1T 关系 (一项关系) 和 4T 关系 (四项关系).

$$\begin{aligned} v \left( \text{circle with } n \text{ points} \right) &= 0 \\ v \left( \text{crossing} \right) &= v \left( \text{other crossing} \right) - v \left( \text{third crossing} \right) = 0 \\ v \left( \text{diagram 1} \right) - v \left( \text{diagram 2} \right) + v \left( \text{diagram 3} \right) - v \left( \text{diagram 4} \right) &= 0 \\ v \left( \text{diagram 5} \right) - v \left( \text{diagram 6} \right) + v \left( \text{diagram 7} \right) - v \left( \text{diagram 8} \right) &= 0 \end{aligned}$$

考虑

$$\mathcal{A}_n = \frac{\text{以 } \mathbf{CD}_n \text{ 为基生成} \\ \text{的自由 Abel 群}}{(1T \text{ 关系}, 4T \text{ 关系}).}$$

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}_n.$$

那么根据上面的讨论, 存在单射

$$\mathbf{V}_n / \mathbf{V}_{n+1} \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_n, \mathbb{F}).$$

Kontsevich 积分说明在  $\mathbf{F} = \mathbb{C}$  上时,

$$\mathbf{V}_n / \mathbf{V}_{n+1} \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_n, \mathbb{C}).$$

是同构.

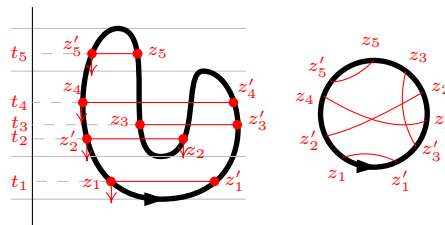
我们视  $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$ . 最后一个分类看做是高度. 对一个放在其中扭结  $L$ , 我们技术性地假设其临界点不在同一高度. 根据环绕数积分定义的启发, Kontsevich 定义了

$$K_n(L) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_t \sum_z (-1)^{\downarrow D} \bigwedge_{i=1}^n \frac{dz_i - dz'_i}{z_i - z'_i} \in \mathcal{A}_n.$$

其中

$\int_t$	取遍 $t_1 < \dots < t_n$ , 且其中每个 $t_i$ 都不含临界点.
$\sum_z$	取遍 $\{z_1, z'_1\}, \dots, \{z_n, z'_n\}$ , 其中每个 $z_i, z'_i$ 是 $L$ 上高度为 $t_i$ 的两个点.
$\downarrow$	全体 $z_i$ 和 $z'_i$ 中下降的次数 (扭结定向).
$D$	在 $S^1$ 原像上配对 $z_i$ 和 $z'_i$ 原像得到的弦图

注意 1 这个积分收敛利用了 1T 和 4T 关系.



图中的图形  被称为 hump.

定义

$$K(L) = \sum_{n \geq 0} K_n(L) \in \mathcal{A}.$$

定义

$$I(L) = \frac{K(L)}{K(\text{hump})^{c/2}} \in \mathcal{A}$$

其中  $c$  是  $L$  的临界点的数目, 分母按照幂级数的展开. 这是一个扭结不变量.

于是任何一个  $\mathcal{A}_n \xrightarrow{v} \mathbb{C}$ , 通过复合

$$X_0 \xrightarrow{I_n(L)} \mathcal{A}_n \xrightarrow{v} \mathbb{C}$$

都可以得到一个有限型不变量. 可以证明这是

$$\mathbf{V}_n / \mathbf{V}_{n+1} \longrightarrow \text{Hom}(\mathcal{A}_n, \mathbb{C})$$

的一个逆.

**习题 1.** 验证  $\mathcal{A}$  对连通和构成代数. [提示: 利用 4T 关系, 我们可以 ``把弦从一侧挪到另一侧''.]

## Jones 多项式的解释

Jones 多项式还有另一个构造的角度. 我们先暂时忽略定向, 定义 **Kauffman bracket**  $\langle \cdot \rangle$

$$\begin{aligned} \langle \text{X} \rangle &= a \cdot \langle \text{ ) } \rangle + b \cdot \langle \text{ ( } \rangle \\ \langle L \sqcup \bigcirc \rangle &= c \cdot \langle L \rangle \end{aligned}$$

其中  $a, b, c$  待确定.

我们要使得其在 Reidemeister move 下不变.

请看下面的计算.

$$\begin{aligned} \langle \text{X} \rangle &= a \langle \text{X} \rangle + b \langle \text{X} \rangle = (a + bc) \langle \text{X} \rangle \\ \langle \text{X} \rangle &= a \langle \text{X} \rangle + b \langle \text{X} \rangle = (ac + b) \langle \text{X} \rangle \\ \langle \text{X} \rangle &= ab \langle \text{X} \rangle + a^2 \langle \text{X} \rangle + b^2 \langle \text{X} \rangle + ab \langle \text{X} \rangle \\ &= (abc + a^2 + b^2) \langle \text{X} \rangle + ab \langle \text{X} \rangle \\ \langle \text{X} \rangle &= (abc + a^2 + b^2) \langle \text{X} \rangle + ab \langle \text{X} \rangle \\ \langle \text{X} \rangle &= a \langle \text{X} \rangle + b \langle \text{X} \rangle \\ \langle \text{X} \rangle &= a \langle \text{X} \rangle + b \langle \text{X} \rangle \end{aligned}$$

如果我们保证  $\langle \cdot \rangle$  在第二类 Reidemeister move 保持不变, 那么  $\langle \cdot \rangle$  在第三类 Reidemeister move 上将自动保持不变. 且此时

$$ab = 1, \quad a^2 + b^2 + abc = 0.$$

即  $b = a^{-1}$  且  $c = -a^2 - a^{-2}$ . 此时第一类 Reidemeister move 中出现的系数

$$\begin{aligned} a + bc &= a + a^{-1}(-a^2 - a^{-2}) = -a^{-3}, \\ ad + b &= a(-a^2 - a^{-2}) + a^{-1} = -a^3. \end{aligned}$$

此时我们似乎必须让  $a = -1$  才能让  $\langle \cdot \rangle$  在第一类 Reidemeister move 上将自动保持不变.

但是实际上我们某种意义上可以数清经历了多少次第一类 Reidemeister move. 记

$$w(L) = \text{出现次数} - \text{出现次数}.$$

令

$$J(L) = (-a)^{-3w(L)} \langle L \rangle,$$

那么  $J(L)$  是一个扭结不变量. 作替换  $a^4 = \mathbf{q}^{-1}$ , 就会得到 Jones 多项式.

定义

$$[L] = a^{-\text{交叉数}} \langle L \rangle.$$

那么

$$\begin{aligned} a^{-1} \langle \text{X} \rangle &= \langle \text{ ) } \rangle + a^{-2} \cdot \langle \text{ ( } \rangle \\ &\Downarrow \\ [\text{X}] &= [\text{ ) } \rangle + a^{-2} \cdot [\text{ ( } \rangle \\ &\Downarrow \\ [\text{X}] &= [\text{ ) } \rangle - v \cdot [\text{ ( } \rangle \end{aligned}$$

其中  $-v = a^{-2} = \mathbf{q}^{1/2}$ .

Khovanov 敏锐地发觉了上述构造中的精髓, 将 Jones 多项式范畴化为 Khovanov 同调. 具体来说, 他构造了一个加性范畴里的复形

$$\text{X} : \equiv \left[ 0 \rightarrow \text{ ) } \left( \xrightarrow{\quad} \text{X} \rightarrow 0 \right] \right]$$

那么复形对应的分次 Euler 示性数

$$\chi(C^\bullet) = \sum v^i [C^\bullet] \in \text{范畴的 Grothendieck 群}$$

就体现为

$$[\text{X}] = [\text{ ) } \rangle - v \cdot [\text{ ( } \rangle.$$

**注意 1** 另一方面, 从 Jones 多项式被构造之初, 大家就已经察觉到其与量子群表示和 Hecke 代数的联系 (量子版本的 Schur-Weyl 对偶, 尽管最开始来自于 Brauer 代数). 我们考虑  $\mathfrak{S}_n$  对应的 Hecke 代数,

$$(h_i + q)(h_i - q^{-1}) = 0 \iff h_i - h_i^{-1} = q - q^{-1}$$

即

$$[\text{crossing}] - [\text{crossing}] = (q - q^{-1})[\text{cup}][\text{cap}].$$

调整一个交点的数目就会重新得到 *Jones* 多项式的定义.

而 *Hecke* 代数本身已经被范畴化为 *Soergel* 双模, 这促使 *Rouquier* 定义出一个“由模组成”的复形从而将 *Khovanov* 同调变成了真正的同调. 最终 *HOMFLYPT* 多项式也通过 *Hochschild* 上同调后取同调实现.

## 参考文献

- Chmutov, Duzhin. Introduction to Vassiliev Knot Invariants (= the CD Book).
- Bar-Natan. On Khovanov's categorification of the Jones polynomial.
- Elias, Makisumi, Thiel, Williamson. Introduction to Soergel Bimodules.