几何拓扑自驾游

熊锐

2021 年 1 月 5 日

Contents

1 上同调速成

本节介绍如何理解和使用奇异 (singular) 上同调 (cohomology) 群.

对于拓扑空间 X, 上同调群 $H^*(X)$ 是 ____.

就像即使并不懂电脑的运行原理, 但是却可以使用电脑. 但是, **每多理解一点原理, 能做的事儿就多一点**.

本节大部分内容成立都是需要条件的, 通常会在提及之后的评注中给出.

实际上, 代数拓扑的使用原则是

$$\boxed{\text{绝不使用定义直接计算}}.$$

我们永远是发展足够多的理论, 再用刻画让计算成功.

代数拓扑在组合中的相当于提供另一种计数工具. 其有行之有效原因在于, 相当一部分计算其实可以约化成计算集合. 如果我们相信不同计数方法计算数目给出相同结果, 那我们也应该相信不同拓扑方法计算同调群会给出相同结果.

1.1 胞腔

我们在本小节需要下同调 $H_*(X)$ 和相对下同调 $H_*(X,Y)$, 其中 $Y\subseteq X$ 是一个子集.

记 n 维球面 (sphere) 和 n 维圆盘 (disk) 为

$$S^n=\{(x_1,\dots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}:x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1\};$$

$$D^n=\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n:x_1^2+\cdots+x_n^2\le 1\}.$$

注意 $S^{n-1}\subseteq D^n$ (上标是维数).

需要知道的基本事实是

	0	1	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$
$H_*(S^n)$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$
$H_*(D^{n+1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$H_*(D^{n+1},S^n)$	0	0	$\cdots$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$

最后一行来自于长正合序列. 可以这样记:

D^{n+1} 相对 $S^n=D^{n+1}/S^n$ 相对于缩点 $=S^{n+1}$ 相对于一个点.

这里 D^{n+1}/S^n 表示把 D^{n+1} 上的 S^n 粘成一点 (缩点).

上同调其实是一样的

	0	1	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$
$H^*(S^n)$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$
$H^*(D^{n+1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$H^*(D^{n+1},S^n)$	0	0	$\cdots$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$

我们说一个拓扑空间 X 是**CW 复形 (CW complex)**, 如果 X 是由圆盘 D^n 按照维数顺序粘结而成.

准确一点: X^0 是一些离散的点; X^1 是往 X^0 上粘 $D^1=$ 区间$[0,1]$, 使得 $0,1$ 粘到 X^0 上; X^2 是往 X^1 上粘 D^2, 使得 D^2 的边界 S^1 粘到 X^1 上; 以此类推.

这样依次得到的 X^n 叫作 X 的**骨架 (skeleton)**, 每个黏上去的 D^n 叫作一个 n 维胞腔.

注意 1 *D^n 的边界 S^{n-1} 必须落在低一维的 "骨架" X^{n-1} 上. (不能不粘)*

注意 2 *D^n 的内部到 X 是单射. (不能粘)*

注意 3 *严格来说, CW 的复形的拓扑是弱拓扑, 即使得每个胞腔的粘结映射连续的最弱拓扑. (C=cellular, W=weak) 其实 CW 复形的拓扑有很多点集拓扑的良好性质, 请见 [Bredon].*

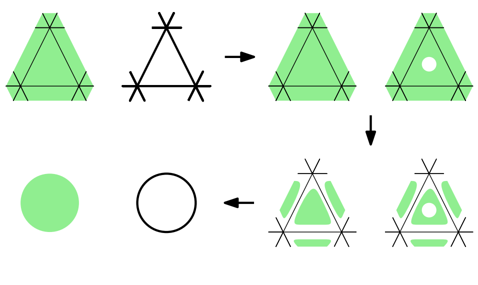
如果 X 有 CW 复形的结构, 记 X^n 是 n 维的骨架. 那么 $X^0\subseteq X^1\subseteq X^2\subseteq\cdots$. 我们可以考虑相对同调 $H_*(X^i,X^{i-1})$ 和相对上同调 $H^*(X^i,X^{i-1})$.

有下面这个重要事实

$$\boxed{H^*(X^n,X^{n-1})=\begin{cases}\text{以所有 n-维胞腔为基生成的自由 Abel 群.} & *=n\\ 0 & *\neq n.\end{cases}}$$

这里 $X^{-1}=\varnothing$. 下同调结果是一样的. 请对比 $H_*(D^n,S^{n-1})$. 这是**切除定理 (excision)**的一个应用.

证明如下



(图中全是三角形, 但是 CW 复形不一定要求是三角形)

例如 S^n 是一个 CW 复形. 因为我们可以把 D^n 的边界 S^{n-1} 整个粘到一个点上得到 S^n. 最简单的胞腔取法是

维数	0	1	$\cdots$	$n-1$	n
胞腔数量	1	0	$\cdots$	0	1
骨架	点	点	$\cdots$	点	S^n
$H_n(X^n,X^{n-1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$

例如 D^n 本身也是一个 CW 复形. 最简单的胞腔取法是

维数	0	1	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
胞腔数量	1	0	$\cdots$	1	1	1
骨架	点	点	$\cdots$	点	S^{n-1}	D^n
$H_n(X^n,X^{n-1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

下面假设 X 是 CW 复形, 记 $C_n=H_n(X^n,X^{n-1})$. 那么存在一条复形

$$\cdots\longrightarrow C_n\longrightarrow\cdots\longrightarrow C_1\longrightarrow C_0\longrightarrow 0$$

使得其同调群同构于 $H_*(X)$. 记 $C^n=H^n(X^n,X^{n-1})$. 那么存在一条复形

$$0\longrightarrow C^0\longrightarrow C^1\longrightarrow\cdots\longrightarrow C^n\longrightarrow\cdots$$

使得其上同调群同构于 $H^*(X)$. 这被称为**胞腔 (cellular) 同调**.

这个定理本质上只是同调代数的追图, 见 [姜].

注意 1 *在一些 "正则" 的情况, 这个复形之间的微分 ∂ 是可以 "看出来" 的. 例如, 当 X 是多面体的情况, n 维抱歉就是一个 n 维面, 那么*

$$\partial(\text{某个 } n \text{ 维面})=\sum \text{这个面的 } n-1 \text{ 维边}.$$

这里的 "和" 需要根据预先指定的定向决定正负.

注意 2 *有一些书喜爱使用***单纯复形 (simplicial complex)***, 此时要任何一个单纯形 (三角形) 每条边都不黏在一起不相交, 因此往往简单的图形需要多次重分才能做到. 但是这样的好处是可以计算乘法结构.*

注意 3 *在 [Hatcher] 中, 他还定义了 Δ 复形, 这时全部都是单纯形 (三角形), 但是允许一个单纯形内部的边相交. 但是实际上三角形, 四边形, 五边形, 甚至二边形都是可以的.*

如果对于紧致的 Hausdorff 空间 X(例如流形), 如果有一个**分层 (stratification)**

$$X_0\subseteq X_1\subseteq\cdots\subseteq X$$

使得每个 X_k 都是闭的, 且 $X_k \setminus X_{k-1} \cong \mathbb{R}^{a_k}$ 对某个 a_k. 我们称这个分层给出一个胞腔结构. 我们也称 $X_k \setminus X_{k-1}$ 是一个 a_k 维胞腔.

记 $X^k = \bigcup_{\dim X_i \le k}$, 那么同样也有

$$\boxed{H^*(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \text{以所有 n-维胞腔} \\ \text{为基生成的自由 Abel 群.} & * = n \\ 0 & * \neq n. \end{cases}}$$

所以一切照旧.

对于线性空间 $V = \mathbb{C}^n$, 一个**旗 (flag)** 是一串子线性空间

$$V^0 \subseteq V^1 \subseteq \cdots \subseteq V^n$$

使得 $\dim V^i = i$. 此时为了区别也叫**完全 (complete) 旗**. 考虑 $\mathcal{F}\ell(n)$ 为 n 维复向量的所有旗 (flag) 组成的集合, 这可以被赋予流形和代数簇的结构. 我们称 $\mathcal{F}\ell(n)$ 为**旗流形 (flag manifold)** 或**旗簇 (flag variety)**.

记 $G = \mathrm{GL}_n$, B 是全体上三角矩阵. 将每一个 $x \in \mathrm{GL}_n$ 视作 n 个线性无关的列向量 $(x_1, \ldots, x_n)$, 我们得到一个其**张成的旗** $\operatorname{span} x$

$$0 \subseteq \operatorname{span}(x_1) \subseteq \operatorname{span}(x_1, x_2) \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_n).$$

这定义了一个 (连续) 映射 $\operatorname{span} : \mathrm{GL}_n \to \mathcal{F}\ell(n)$.

通过线性代数, 不难发现 span 是满射, 且

$$\operatorname{span} x = \operatorname{span} y \iff x = yb \text{对某个 } b \in B.$$

换言之, $G/B \to \mathcal{F}\ell(n)$ 是双射 (同胚).

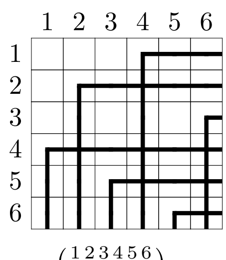
对于置换 $w \in \mathfrak{S}_n$, 记 w 是对应的置换矩阵, 即使得 $w(e_i) = e_{w(i)}$, 其中 e_i 是标准基. 也就是在 $i = 1, \ldots, n$ 位置 $(i, w(i))$ 上是 1, 其他位置是 0 的矩阵.

利用 Gauss 消元法, 可以得到 **Bruhat 分解**

$$G = \bigcup_{w \in \mathfrak{S}_n} BwB \qquad \text{(无交并)}.$$

其实就是打洞. 实际上这是 G 的双陪集分解. 等价地, 这说明 B 在 G/B 上作用的轨道与对称群元素一一对应. 其中 BwB/B 被称为 **Schubert 胞腔**.

按下图表定义 U_w



$\binom{123456}{426135}$

$$U_w = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 0 & \mathbb{C} & 0 & \mathbb{C} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

那么利用打洞的技巧 (见 [Fulton]), 可以得到

$$\operatorname{span} : U_w \to BwB/B$$

是双射 (同胚).

用 ℓ 表示逆序数. 于是 $BwB/B \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$, 换句话说拓扑维数是 $2\ell(w)$. 因为 U_w 中 "$\mathbb{C}$" 的数目是 Rothe 图中 $\boxplus$ 的的数目.

现在我们考虑 $X^i = \bigcup_{2\ell(w) \le i} BwB/B$. 这给出 $\mathcal{F}\ell(n)$ 的一个胞腔结构. 但是因为我们**没有奇数维的胞腔**, 所以胞腔复形将形如

$$0 \to C_0 \to 0 \to C_2 \to 0 \to C_4 \to \cdots;$$

$$\cdots \to C_4 \to 0 \to C_2 \to 0 \to C_0 \to 0.$$

所以 $H^i(\mathcal{F}\ell(n)) = C^i$, $H_i(\mathcal{F}\ell(n)) = C_i$.

回忆 C_{2i}(和 C^{2i}) 是维数为 $2i$ 的胞腔生成的自由 Abel 群. 我们用 $[BwB/B]$ 记对应的基. 注意: $\dim[BwB/B] = 2\ell(w)$.

于是我们得到了

$$H^*(G/B) = \text{以 } \{[BwB/B]\}_{w \in \mathfrak{S}_n} \text{ 为基的自由 Abel 群}$$

$$H_*(G/B) = \text{以 } \{[BwB/B]\}_{w \in \mathfrak{S}_n} \text{ 为基的自由 Abel 群}$$

注意 1　*我们需要一则事实, $\mathcal{F}\ell(n)$ 是紧致的 (完备的). 这是因为紧 Lie 群 $U_n \subseteq \mathrm{GL}_n$ 到 $\mathcal{F}\ell(n)$ 是满射 (线性代数).*

注意 2　*我们还需要一则事实, 每一个 BwB/B 的闭包都是一些 BuB/B 的并. 这是因为 B 作用, 所以轨道的闭包还是轨道的并.*

实际上 $BuB/B \subseteq \overline{BwB/B}$ 当且仅当在 **Bruhat order** *下 $u \le w$.*

注意 3　*实际上 Schubert 胞腔也给出 CW 复形意义上的胞腔. 这可以用 Morse 理论的类比 Białynicki–Birula 定理得到, 请看 [CG] 第二章某一节.*

习题 1. 验证 $G/B \to \mathcal{F}\ell(n)$ 是双射. ［提示：利用基的延拓定理证明满射，再证明正文中提到的 $\operatorname{span} x = \operatorname{span} y$ 的等价条件.］

习题 2. 验证 $U_w \to BwB/B$ 是双射. ［提示：首先证明 U_w 在 $G \to G/B$ 下的像落在 BwB/B 内；对于每个 $x \in G$，证明 xB/B 一定等于某个 yB/B 对某个 $y \in U_w$，这需要从最后一行开始打洞；最后证明这是单射，这需要从最后一行开始比起.］

习题 3. 证明 $\dim G/B = 2\max_{w \in \mathfrak{S}_w} \ell(w)$. 利用 G/B 光滑的事实说明只有唯一的元素取到最大值.

习题 4. 记 $[n]=\frac{\mathbf{q}^n-1}{\mathbf{q}-1}$, $[n]!=[n]\cdot[n-1]\cdot\cdots\cdot[1]$. 经典的计数表明 $[n]!$ 是有限域 $\mathbb{F}_\mathbf{q}$ 上 n 维线性空间中旗的数量. 证明这还是 $H^*(G/B)$ 的 *Hilbert* 多项式

$$[n]!=\sum_k \operatorname{rank} H^{2k}(G/B)\mathbf{q}^k.$$

[提示： 在有限域上也有 Schubert 胞腔，这时 $BwB/B\cong\mathbb{F}_\mathbf{q}^{\ell(w)}$，这贡献 $\mathbf{q}^{\ell(w)}$ 这么多元素，而在 $\mathbb{C}$ 上的情况，这时 $BwB/B\cong\mathbb{C}^{\ell(w)}$ 在 Hilbert 多项式中贡献 $\mathbf{q}^{\ell(w)}$.]

习题 5. 考虑**复射影空间** $\mathbb{C}P^n$ 为 $n+1$ 维空间所有的 1 维子空间. 将 $\mathbb{C}P^n$ 写成一些 $\mathbb{C}^{2i}$ 的并, 并且证明 $H^{2k+1}(\mathbb{C}P^n)=0$, 且

	0	2	$\cdots$	$2n$	$2n+1$	$\cdots$
$H^*(\mathbb{C}P^n)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\cdots$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$

[提示：对非零向量 $(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$，记 $[x_0:\cdots:x_n]$ 为对应的 1 维子空间． 换言之 $[x_0:\cdots:x_n]=[y_0:\cdots:y_n]$ 当且仅当 $(x_0,\dots,x_n)=\lambda(y_0,\dots,y_n)$ 对某个 $\lambda\in\mathbb{C}^\times$． 对 $i=0,\dots,n$，记 $A^i=\{[\cdots 0:1:\underbrace{\mathbb{C}:\cdots:\mathbb{C}}_i]\}$．]

1.2 推出与拉回

令 $X\xrightarrow{f}Y$ 是一个连续映射, 那么诱导了**拉回 (pull back)**

$$H^*(X)\xleftarrow{f^*}H^*(Y).$$

$\boxed{注意 1}$ 这是一个齐次映射.

$$\alpha\in H^n(Y)\quad\Longrightarrow\quad f^*(\alpha)\in H^n(X).$$

$\boxed{注意 2}$ 这是一个代数同态.

$$f^*(\alpha\smile\beta)=f^*(\alpha)\smile f^*(\beta).$$

令 X 是紧致光滑定向流形. 那么有**Poincaré 对偶**

$$H^*(X)\xrightarrow{\sim}H_\bullet(X)\qquad *+\bullet=\dim X.$$

$\boxed{注意 1}$ 这个最经典的, 也最容易理解的是组合的解释, 见 *[姜]*. 现代通行的做法是用 *cap* 积 $\frown$ 给出具体的映射. 更进一步还可以用层的语言改写 *(*与对偶层对偶*)*.

$\boxed{注意 2}$ 这个同构需要选定一个定向, 所以区分 "可定向 *(orientable)*" 和 "定向 *(oriented)*".

假设 X 和 Y 都是紧致光滑定向流形. 令 $X\xrightarrow{f}Y$ 是一个连续映射, 那么可以定义**推出 (push forward)**

$$H^*(X)\xrightarrow{f_*}H^\dagger(Y),$$

其中 $\dim X-*=\dim Y-\dagger$, 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) & \longrightarrow & H^\dagger(Y)\\ \text{对偶}\downarrow & & \downarrow\text{对偶}\\ H_\bullet(X) & \longrightarrow & H_\bullet(Y)\end{array}$$

即, 先对偶到下同调, 推出, 再对偶回上同调.

$\boxed{注意 1}$ 这是不是一个齐次映射.

但是如果我们对 $\alpha\in H^*(X)$, 记 $\operatorname{codim}\alpha=\dim X-*$, 那么 f_* 保持 codim.

$\boxed{注意 2}$ 这是不是一个代数同态. 但是对于 $\alpha\in H^*(X),\beta\in H^*(Y)$, 有 **projective formula**

$$f_*(\alpha\smile f^*(\beta))=f_*(\alpha)\smile\beta.$$

这是一个 "模同态", 因为通过 f^*, $H^*(X)$ 是 $H^*(Y)$-代数, 从而是 $H^*(Y)$-模.

$\boxed{注意 3}$ 其实我们不需要 X 和 Y 都紧致, 只需要 f 是**逆紧的 (proper)** 即可定义; 实际上最需要的是当 f 是一个纤维丛, 且纤维是紧致光滑定向流形.

$\boxed{\text{注意 4}}$ 对于一个"拉回方阵":

即 $\square = \{(y,z) \in Y \times Z : f(y) = g(z)\}$. 从 $H^*(Y)$ 到 $H^*(Z)$ 的两个映射

$$g^* \circ f_* = F_* \circ G^*$$

$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

令 X 是一个紧致流形, 设 $[X]$ 使得

$$\text{单位元 } 1 \in H^0(X) \overset{\text{对偶}}{\longleftrightarrow} [X] \in H_n(X)$$

我们称 $[X]$ 是 X 的 **基本类 (fundamental class)** .

$\boxed{\text{注意 1}}$ *如果给 X 一个三角剖分, 即把 X 分割成一些单纯形, 那么 $H_n(X)$ 是这些单纯形的和 (事先选好定向) 的类. 换句话说,*

$$\boxed{[X] = \text{"同调意义下"的 } X \text{ 本身.}}$$

令 Y 是一个紧致流形, X 是一个嵌入**闭**子流形. 令 $i: X \to Y$ 是包含映射. 定义 X 在 Y 中的 **fundamental class** (滥用记号)

$$[X] = i_*(1) \in H^*(Y),$$

请注意!

$$\boxed{\deg[X] = \operatorname{codim} X = \dim Y - \dim X \text{ 是 } X \text{ 的余维数.}}$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 请看

$$\begin{array}{ccccc} 1 \in & H^0(X) & \longrightarrow & H^{\operatorname{codim} X}(Y) & \ni [X] \\ & \text{对偶}\big\downarrow & & \big\downarrow\text{对偶} & \\ [X] \in & H_{\dim X}(X) & \longrightarrow & H_{\dim X}(Y) & \ni (\cdots) \end{array}$$

所以

$$\boxed{[X] = \text{"}Y \text{ 的同调意义下"的 } X \text{ 本身.}}$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ *对于代数簇, 即使子簇 X 不是光滑的, 我们也可以在 $H^*(Y)$ 中定义* **代数闭链 (algebraic cycles)** *$[X]$. 但是至少需要是闭的. 使用的方法是 Borel–Moore 同调, 请见 [Fulton].*

$\boxed{\text{注意 2}}$ *直接把代数闭链拿出来商掉"代数"同伦, 这就是* **周环 (Chow ring)** *的定义. 只有 X 是光滑的时候, X 的周"环"才是环.*

$\boxed{\text{注意 3}}$ *一般来说上同调不一定总是由代数闭链生成的, 这个是被 well-studied, 更广的配边理论也对此有研究.*

—下面我们用 fundamental classes 重新理解上同调 —

以下内容不尽严格. 严格地, 要加何种条件应该看 [Fulton], 周环的版本应该看 [3264]. 但是拿来用基本是没问题的, 而且实际上用式性类等工具能很大程度上避免这类问题.

---

1. Cup 积

假设 $\dim A = a, \dim B = b$. 那么 $A \cap B$ 的期待维数是 $n - [(n-a)-(n-b)]$. 此时

$$[A] \smile [B] = \begin{cases} [A \cap B] & \text{取到期待维数} \\ 0 & \text{比期待维数小} \\ \text{不知道} & \text{比期待维数大} \end{cases}$$

例如如果 A 和 B **直交 (transversal)** , 那么一定取到期待维数;

$\boxed{\text{注意 1}}$ *微分几何中需要计算定向, 但是如果是代数簇, 定向是复结构一定选定的, 所以没有问题.*

---

2. 拉回 $(f: X \to Y)$

对于 $B \subseteq Y$, $\dim B = b$, 那么 $f^{-1}(B)$ 的期待维数是 $x - (y - b)$.

$$f^*[B] = \begin{cases} [f^{-1}(B)] & \text{取到期待维数} \\ 0 & \text{比期待维数小} \\ \text{不知道} & \text{比期待维数大} \end{cases}$$

(这不严格)

所以

$$\boxed{\begin{array}{c} f^*(\alpha \smile \beta) \\ = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta) \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{同调版本的} \\ f^{-1}(A \cap B) \\ = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{array}}$$

---

3. 推出 $(f: X \to Y)$

对于 $A \subseteq X$, $\dim A = a$, 那么 $f(A)$ 的期待维数是 a.

$$f_*[A] = \begin{cases} d \cdot [f(A)] & \text{取到期待维数} \\ 0 & \text{比期待维数小} \end{cases}$$

这里 d 是映射度, 即 $f(A)$ 中几乎所有点的原像都是 d 个 A 中的点.

(这也不严格)

所以

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{projective formula} \\ f_*(\alpha \smile f^*(\beta)) \\ = f_*(\alpha) \smile \beta \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{同调版本的} \\ f(A \cap f^{-1}(B)) \\ = f(A) \cap B \end{array}}$$

对于 $i=1,\dots,n-1$. 考虑

$$P_i=\begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix}$$

这比上三角矩阵群 B 在 $(i,i+1)$ 位置多一个自由度.

齐次流形 G/B 和 $\mathcal{F}\ell(n)$ 同胚. 那么 G/P 呢?

$$\begin{aligned} G/B &\cong \{V^0\subseteq\cdots\subseteq V^{i-1}\subseteq V^i\subseteq V^{i+1}\subseteq\cdots\subseteq V^n\} \\ G/P &\cong \{V^0\subseteq\cdots\subseteq V^{i-1}\qquad\quad\subseteq V^{i+1}\subseteq\cdots\subseteq V^n\} \end{aligned}$$

且自然映射

$$G/B\longrightarrow G/P$$

就是“把 complete flags 中维数为 i 的子空间去掉”.

考虑

$$\begin{aligned} P_i/B &= \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix} \Bigg/ \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}\Big/\begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix}=\mathcal{F}\ell(2)=\mathbb{C}P^1 \end{aligned}$$

最后 $\mathcal{F}\ell(2)=\mathbb{C}P^1$ 是因为 $\mathbb{C}^2$ 中的旗实际上由维数为 1 的子空间决定.

另外注意到 $\mathbb{C}P^1=\mathbb{C}\cup\{\infty\}\cong S^2$ 是 Riemann 球.

$*$	0	1	2	3	4	$\cdots$
$H^*(P_i/B)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\cdots$

让我们考虑自然映射 $G/B\xrightarrow{\pi}G/P_i$. 我们定义 **Demazure operator** 为

$$\partial_i:\quad H^*(G/B)\xrightarrow[\pi_*]{\text{推出}}H^{*-2}(G/P)\xrightarrow[\pi^*]{\text{拉回}}H^{*-2}(G/B).$$

这里的 $2=\dim G/B-\dim G/P=\dim P/B$.

用旗的语言,

$\boxed{\text{推出 } \pi_*}$ = 同调地 “把维数 i 的子空间 V^i 去掉”

$\boxed{\text{拉回 } \pi_*}$ = 同调地 “把 $V^{i-1}\subseteq V^{i+1}$ 之间全部 i 维子空间加上”

令 $B^-=w_0Bw_0$ 为下三角矩阵群, 其中 w_0 是最长元 $\left(\begin{smallmatrix}1 & \cdots & n\\ n & \cdots & 1\end{smallmatrix}\right)\in\mathfrak{S}_n$. 那么我们记 Σ_w 为

$$[BwB/B]\text{作为上同调胞腔}=[\overline{B^-wB/B}]\text{作为基本类}.$$

这个等号实际上是通过计算下同调的相交证明的, 请见 [Fulton]. 于是

$$H^*(G/B)=\text{以 }\{\Sigma_w\}_{w\in\mathfrak{S}_n}\text{ 为基的自由 Abel 群}$$

令 $s_i=(i,i+1)\in\mathfrak{S}_n$ 是 i 和 $i+1$ 的对换. 注意到 $P_i=B\cup Bs_iB$.

下面我们可以计算 Demazure operator 在 Σ_w 上的作用. 根据定义

$$\begin{aligned} \partial_i(\Sigma_w) &= \pi^*(\pi_*(\Sigma_w))=\pi^*(\pi_*([\overline{B^-wB/B}])) \\ &= \delta_{\text{维数正确}}\cdot[\pi^{-1}(\pi(\overline{B^-wB/B})] \\ &= \delta_{\text{维数正确}}\cdot[\pi^{-1}(\overline{B^-wP/P})] \\ &= \delta_{\text{维数正确}}\cdot[\overline{B^-wB/B}\cup\overline{B^-ws_iB/B}] \\ &= \begin{cases} [\overline{B^-ws_iB/B}], & \ell(ws_i)=\ell(w)-1, \\ 0, & \ell(ws_i)=\ell(w)+1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \Sigma_{ws_i}, & \ell(ws_i)=\ell(w)-1, \\ 0, & \ell(ws_i)=\ell(w)+1. \end{cases} \end{aligned}$$

这里实际上用到了 **Tits system**.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 实际上我们已经可以证明在任何系数下 *Demazure operator* 满足幂零**辫子关系 (braid relation)**. 但是之后我们会建立多项式版本的联系, 那时将可以直接证明.

习题 1. 哪条集合论的事实的上同调版本是 $g^*\circ f_*=F_*\circ G^*$? ［提示： $F(G^{-1}(A))=g^{-1}(f(A))$. ］

习题 2. 根据 *Poincaré* 对偶,

$$H^*(\mathbb{C}P^n)\otimes H^{2n-*}(\mathbb{C}P^n)\xrightarrow{\smile}H^{2n}(\mathbb{C}P^n)\cong\mathbb{Z}$$

构成完美配对. 取 H 是 $\mathbb{C}P^n$ 中任意一个超平面, 记 $x=[H]\in H^*(\mathbb{C}P^n)$. 证明 $H^*(\mathbb{C}P^n)$ 作为环同构于 $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$, 其中 $\deg x=2$. ［提示： 显然 H 的（实）余维数是 2. 注意到不同超平面给出相同的基本类，所以我们直接计算相交知道 $x^n=1\cdot[\text{点}]\neq 0$. 要说明 $H^*(\mathbb{C}P^n)$ 是由 x 生成的，我们将 H 视为 $\mathbb{C}P^{n-1}$，用 i^* 结合完美配对的事实归纳证明. ］

习题 3. 对于一般的 d 次超平面 $D\subseteq\mathbb{C}P^n$, 证明 $[D]=dx$, 其中 x 是超平面类. ［提示： 注意到因为 $H^2(\mathbb{C}P^n)=\mathbb{Z}x$，所以一定有一个整数 d' 使得 $[D]=d'x$. 注意到 D 与一条一般位置的直线交 d 个点，而直线又可以写成 $n-1$ 个超平面的交，$d'x\cdot x^{n-1}=[D]\smile[H]^{n-1}=[D\cap H_1\cap\cdots]=d\cdot[\text{点}]=dx^n$，所以 $d=d'$. ］

习题 4. 请说明

$$\Sigma_w=[\overline{w_0Bw_0wB/B}]=[\overline{Bw_0wB/B}]$$

［提示： 因为可以在 GL_n 中找到一条从 1 通往 w_0 的道路，从而构造一个同伦. ］

习题 5. 在 *[Fulton]* 中, 为了计算 *Demazure operators*, 他用了拉回方阵 $\begin{array}{ccc}\square & \to & G/B\\ \downarrow & & \downarrow\\ G/B & \to & G/P\end{array}$, 证明这时 $\square$ 和下面的集合是双射.

$$\square=\left\{\cdots\subseteq V^{i-1}\begin{array}{c} \subsetneq\ V_1^i\ \subsetneq \\ \subsetneq\ V_2^i\ \subsetneq \end{array}V^{i+1}\subseteq\cdots\right\}.$$

1.3 Lie 群的一些补充

对于 GL_n, 对于 $\lambda_1+\ldots+\lambda_k$, 我们记 **抛物 (parabolic) 子群**

$$P_\lambda=\begin{pmatrix}\mathrm{GL}_{\lambda_1} & * & \cdots & * \\ & \mathrm{GL}_{\lambda_2} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathrm{GL}_{\lambda_k}\end{pmatrix}$$

我们考虑 G/P.

实际上 (集合论意义上可以直接验证)

$$G/P_\lambda=\left\{0\subseteq V^{\lambda_1}\subseteq V^{\lambda_1+\lambda_2}\subseteq\cdots\subseteq\mathbb{C}^n\right\}$$

且如果 P_1 分的块都是 P_2 的子块, 那么

$$G/P_1\to G/P_2$$

就是 “把多余维数的子空间去掉”.

让我们用分成 k 组的 n 个标上 1 到 n 的 $\bullet$ 来记 λ_i

$$(\lambda_1\text{ 个 }\bullet)\,(\lambda_2\text{ 个 }\bullet)\cdots(\lambda_k\text{ 个 }\bullet)$$

如果 $\lambda_i=1$, 则省略括号.

那么 $\lambda_1+\ldots+\lambda_j$ 是第 j 组最后一个 $\bullet$ 的编号.

第一个例子

$$\underset{1}{\bullet}\cdots\underset{i-1}{\bullet}\,(\underset{i}{\bullet}\quad\underset{i+1}{\bullet})\,\underset{i+2}{\bullet}\cdots\underset{n}{\bullet}$$

对应上一节的

$$P_i=\begin{pmatrix}*&\cdots&*&*&\cdots&*\\&\ddots&\vdots&\vdots&\ddots&\vdots\\&&*&*&\cdots&*\\&&*&*&\cdots&*\\&&&&\ddots&\vdots\\&&&&&*\end{pmatrix}$$

第二个例子

$$(\underset{1}{\bullet}\cdots\underset{k}{\bullet})\,(\underset{k+1}{\bullet}\cdots\underset{n}{\bullet})$$

对应 **Grassmaniann 流形/簇**

$$G/P_\lambda=\mathcal{G}r(k,n)=\{0\subseteq V^k\subseteq\mathbb{C}^n\}.$$

令

$$\mathfrak{S}_\lambda=\mathfrak{S}_{\lambda_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{\lambda_k}$$

是 “组内置换” 构成的群.

注意到

$$P=\bigcup_{u\in\mathfrak{S}_\lambda}BuB.$$

(严格说还是用了 Tits system).

对于 $\sigma\in\mathfrak{S}_\lambda$, 我们有

$$Bw\sigma P/P=BwP/P.$$

所以

$$G=\bigcup_{w\in\mathfrak{S}_w/\mathfrak{S}_\lambda}BwP\qquad(\text{无交并}).$$

称 $\{BwP/P:w\in\mathfrak{S}_w/\mathfrak{S}_\lambda\}$ 为 G/P_λ 上的 **Schubert 胞腔**.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *一般没有 $\dim BwP/P=2\ell(w)$.*

但是, 如果 w 是陪集 $w\mathfrak{S}_\lambda$ 中长度最小者, 则

$$\text{自然映射}:BwB/B\longrightarrow BwP/P$$

是双射 (同胚). 记

$$\mathfrak{S}^\lambda=\{\text{每个陪集 }\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_\lambda\text{ 选出的唯一的长度最小者}\}$$

那么 $\{BwP_\lambda/P_\lambda:w\in\mathfrak{S}^\lambda\}$ 给出 G/P_λ 的胞腔结构.

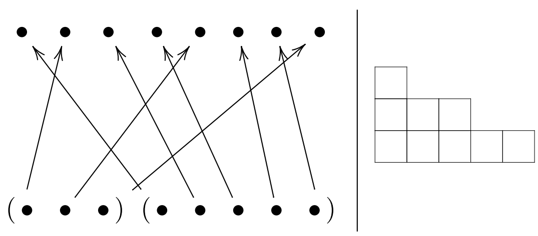
$\boxed{\text{注意 1}}$ *这是因为作用 P 等于作用 $\bigcup_{u\in\mathfrak{S}_\lambda}BuB$, 而 $BwB\cdot BuB=BwuB$ 如果 $\ell(wu)=\ell(w)+\ell(u)$(Tits system). 换句话说如果 P 内 B 以外的元素作用在 BwB 上一定无法回到 BwB.*

我们证明对于 Grassmaniann 的情况

$$(\underset{1}{\bullet}\cdots\underset{k}{\bullet})\,(\underset{k+1}{\bullet}\cdots\underset{n}{\bullet})$$

$\mathfrak{S}^\lambda$ 和 $k\times(n-k)$ 的 Young 图 (保持 ℓ) 一一对应.

请看



我们曾经提到 $\mathcal{F}\ell(n)$ 是紧致的, 是因为 $\mathcal{F}\ell(n)$ 是酉群 U_n 的商.

具体来说, 记 $K=U_n$, T_K 是 U_n 中的对角矩阵. 那么

$$U_n/T_K\xrightarrow{\sim}G/B\cong\mathcal{F}\ell(n)$$

是同胚. 这实际上是如下一则线性代数的转述

任何旗都 admits 一个酉正交基.

但是 U_n/T_K 上面没有显然的代数簇结构 (酉群不是代数群!), 所以**无法刻画 Schubert 胞腔**. 但是当我们不用胞腔的时候, 复结构 (代数簇结构) 反而显得累赘.

注意 $\mathfrak{S}_n$ 通过共轭, 作用在如下群上

$$U_n, \quad U_n \text{ 中的对角矩阵群} = T_K,$$

$$\mathrm{GL}_n, \quad \mathrm{GL}_n \text{ 中的对角矩阵群}.$$

但是唯独不作用在上三角矩阵群 B 上.

前两者诱导了 $\mathfrak{S}_n$ 在

$$U_n/T_K \xrightarrow{\sim} G/B \cong \mathcal{F}\ell(n)$$

上的作用.

但是 GL_n/B 上面没有显然的 $\mathfrak{S}_n$ 作用.

注意 1 注意到 $\mathfrak{S}_n$ 通过共轭诱导的 $H^*(K)$ 和 $H^*(T_K)$ 上的作用都平凡. 因为我们可以找到 $w \in \mathfrak{S}_n$ 的道路构造同伦. 但是在 $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$ 上却不平凡. 原因是此时作用是 $xT_K \mapsto wxw^{-1}T_K$, 乘在内侧. 另外, 我们几乎不如何知道 $\mathfrak{S}_n$ 在胞腔上如何作用 (等价于 $\mathfrak{S}_n$ 在 *Schubert* 多项式的作用).

上面的事实也有紧致版本. 记

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} U_{\lambda_1} & & & \\ & U_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

那么

$$G/P_\lambda = U_n/U_\lambda.$$

但是同样 Schubert 胞腔也无法刻画.

习题 1. 证明 $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_\lambda$ 每个陪集中都有唯一的一个长度最小者, 他们是那些组内单调递增的置换.

习题 2. 请验证 $G/P_\lambda = U_n/U_\lambda$. ［提示：因为我们已经给出过 G/P_λ 对应的旗的刻画，所以可以直接验证；另一方面，还可以说明 $U_\lambda = U_n \cap P_\lambda$．］

习题 3. 证明 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 中任何一个紧致子群都共轭到 U_n 的子群. ［提示：需要用到一则事实，紧致子群有 Haar 测度 μ．任意取一个酉内积，将这个酉内积对这个子群作用取平均，如此得到一个新的酉内积，而这个子群作用保持．再利用事实 ---$\mathbb{C}^n$ 上的所有酉内积都相同．］

习题 4. 证明 GL_n/U_n 是一个欧式空间. ［提示：回忆正交化算法给出的所谓 QR 分解；对酉群也是类似的，任何一个矩阵 x 都可以写成一个酉矩阵和一个上三角矩阵的乘积，如果我们要求上三角矩阵的对角线上排列着 1，那么这个分解是唯一的．所以 GL_n/U_n 和对角线全为 1 的上三角矩阵同胚．］

参考文献

- Hatcher. Algebraic Topology.
- Bredon. Geometry and Topology. GTM139.
- 姜伯驹. 代数拓扑.
- Fulton. Young Tableaux.
- Chriss, Ginzburg. Representation Theory and Complex Geometry.
- Eisenbud, Harris. 3264 and all that.

关于 Lie 群有不少书, 推荐

- Bump. Lie Group. GTM 225. 里面也有很多相关的组合.
- Knapp. Lie groups beyond an introduction.
- Humphrey. Linear Algebraic Groups. GTM21. 请看 29. Tits system.
- Springer. Linear Algebraic Groups. 请看 8.5, Bruhat order 的几何解释.

~~ ★★ **菜谱** ★★ ~~

—如何计算上同调?

1. 计算群结构.
   找胞腔结构, 计算他们的维数.
   胞腔复形, 计算上同调.
   没有奇数 $\Longrightarrow$ 复形平凡
2. 计算相交配对
   取两个维数相补的基本类
   移动到直交位置
   计算相交点的数目
3. 计算推出拉回
   计算像和原像
   比维数
4. 计算环结构
   取两个基本类, 求第三个基本类前系数
   通过完美配对, 变成计算三个基本类相交
   移动到直交位置, 计算相交点的数目

$\boxed{\text{本节的上同调}} \approx \boxed{\text{集合论}} + \boxed{\text{算开闭}} + \boxed{\text{算维数}}.$

2 纤维丛与式性类

上节我们提到关于计算环结构的方法只是理论上的，但是实际并不能广泛地用于计算.

> 4. 计算环结构
>
> 取两个基本类, 求第三个基本类前系数
>
> 通过完美配对, 变成计算三个基本类相交
>
> 移动到直交位置, 计算相交点的数目

2.1 纤维丛

为了真的能够计算, 并更好地理解上同调, 我们需要理解纤维丛.

对于连续映射 $E \xrightarrow{\pi} B$, 对于 $b \in B$, 称 $\pi^{-1}(b) \subseteq E$ 是 b 处的**纤维 (fibre)**, 也记作 E_b.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & B \\ \cup\mid & & \Psi \\ E_b & \underset{\text{原像}}{\longleftarrow} & b \end{array}$$

B 和 F 是拓扑空间,

$$\begin{tikzcd} & E = B \times F \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ B & & F \end{tikzcd}$$

那么投射 $E \xrightarrow{\pi_2} B$ 每一点的纤维 (= 原像) 都是一个 F 的拷贝. 此时 $E \to B$ 被称为以 F 为纤维的**平凡丛**.

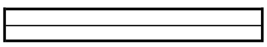
令 $E \xrightarrow{\pi} B$ 是一个连续映射, 我们说这是一个以 F 为纤维的**纤维丛 (fibre bundle)**, 如果局部上是平凡丛.

任意一个点 $b \in B$, 都存在邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U) \to U$ 同构于平凡丛.

$$\begin{array}{ccccccc} U \times F & \cong & \pi^{-1}(U) & \subseteq & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & = & U & \subseteq & B \end{array}$$

其中 B 叫**底空间** (base space), E 叫**全空间 (total space)**.

例子: Möbius 带, 将下列纸带



卷成 Möbius 带时, 中间的轴线会粘成一个圆圈 S^1. 而垂直方向则是一个区间 I. 所以 Möbius 带 $\to S^1$ 是以 I 为纤维的纤维丛.

$\boxed{\text{不是所有纤维丛都平凡}}$

例子: 任何一个流形 M, 在点 $x \in M$ 有切空间 T_xM. 定义切丛

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$$

为所有点处切空间的形式并. 实际上可以找到 TM 的流形结构使得

$$TM \to M \qquad \text{来自 } T_xM \text{ 的切向量} \mapsto x$$

是一个纤维丛.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 请注意

$\boxed{\text{不是所有切丛都平凡}}$

例如著名的毛球 *(hairy ball)* 定理. 点 x 处切空间 T_xM 可以看出这一点处的无穷小移动组成的向量空间. 这可以用线素 *(毛)* 画出.

对于纤维丛 $\pi = \begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ B \end{smallmatrix}$, 我们称 $s : \begin{smallmatrix} E \\ \uparrow \\ B \end{smallmatrix}$ 是一个**截面 (section)** 如果 $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$.

换句话说, $\forall x \in B, s(x) \in E_x$,

$$\boxed{\text{截面}} = \boxed{\text{每条纤维上选一个点}}.$$

$$\boxed{\text{连续截面}} = \boxed{\text{每条纤维上连续地选一个点}}.$$

对于平凡丛 $E = B \times F$, 截面就是一个函数 $B \to F$.

而纤维丛局部上是平凡丛, 所以截面局部上是函数.

一般而言对于纤维丛, 截面并没有一个典范地选择 (有时甚至不存在, 例如 Möbius 带的边界), 即: 我们不能认为 $B \subseteq E$.

因为我们总遇到大量的纤维丛, 如何计算他们的上同调呢? 对于平凡丛, $E = B \times F$, 可以用**万有系数定理**, 例如在 $H^*(B)$ 或 $H^*(F)$ 其中一个自由的时候,

$$H^*(E) = H^*(B) \otimes H^*(F) \qquad (\text{作为环}).$$

一般地我们也希望这个成立. 但是一般不能作为环同构, 也不典范.

取纤维丛 $\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ B \end{smallmatrix}$, 任意选择一个点 b, 纤维为 F. 由如下两个映射

$$\begin{array}{ccc} F \subseteq E & & E \to B \\ \Downarrow & \text{诱导了} & \downarrow \\ H^*(F) \xleftarrow{\text{限制}} H^*(E) & & H^*(E) \underset{\pi^*}{\longleftarrow} H^*(B) \end{array}$$

我们称 $\begin{smallmatrix}E\\\downarrow\\B\end{smallmatrix}$ 是**形式的 (formal)** (非广泛术语) 如果满足下面的条件.

存在 $H^*(F)$ 在 $H^*(E)$ 的提升 A

$$\left[\begin{array}{l}\text{即子群 } A\subseteq H^*(E) \text{ 使得下面复合是同构}\\[1em] \qquad\qquad H^*(F)\xleftarrow{\text{限制}} H^*(E) \xleftarrow{\supseteq} A \\[1em] \text{假设 } \tilde\alpha\in A \text{ 对应到 } \alpha\in H^*(F)\end{array}\right]$$

使得

$$H^*(B)\otimes H^*(F)\longrightarrow H^*(E)\qquad \beta\otimes\alpha\mapsto \pi^*(\beta)\smile\tilde\alpha,$$

是群同构.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 此时

$$\begin{array}{ccccc} H^*(F) & \xleftarrow{\text{限制}} & H^*(E) & & \\ \| & & \uparrow & & \\ H^*(F) & \longleftarrow & H^*(B)\otimes H^*(F) & & \\ \alpha & \leftarrow\!\shortmid & 1\otimes\alpha & & \\ 0 & \leftarrow\!\shortmid & \beta\otimes\alpha & & \deg\beta\geq 1 \end{array}$$

$\boxed{\text{注意 2}}$ 此时

$$\begin{array}{ccc} H^*(E) & \underset{\pi^*}{\longleftarrow} & H^*(B) \\ \uparrow & & \| \\ H^*(B)\otimes H^*(F) & \longleftarrow & H^*(B) \\ \beta\otimes 1 & \leftarrow\!\shortmid & \beta \end{array}$$

有两个非平凡情况能得到 formality.

1. **Leray–Hirsch 定理** 如果 $H^*(F)$ 是自由模 (wrt 系数), 且存在一个 $H^*(E)$ 上的一些元素 $\{\alpha_i\}$ 使得 $\{\alpha_i\}$ 限制在**每一点**处的纤维 $H^*(E_x)$ 都构成一组基.

2. **Serre–Leray 谱序列退化情况** 如果 $H^*(B)$ 和 $H^*(F)$ 都只有偶数维的自由模 (wrt 系数).

前者请看 [Hatcher], 内含大量应用, 包括一个计算 $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$ 的命题 (但是没有算出环结构, 所以我们不采用). 后者也推荐 [Hatcher].

请看我们上节提到的

$$G/B\xrightarrow{\pi} G/P_i.$$

这是一个以 $P_i/B\cong\mathbb{C}P^1$ 为纤维的向量丛. 一切都只有偶数维的同调, 所以我们可以放心地得到

$$H^*(G/B)=H^*(G/P_i)\otimes H^*(\mathbb{C}P^1).$$

回忆 $H^*(\mathbb{C}P^1)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\cdot[\text{点}]$. [注意: $\mathbb{C}P^1$ 的超平面就是点.]

等价地, 存在一个 $\omega_i\in H^2(G/B)$, 使得

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathbb{C}P^1)=H^2(P/B) & \longleftarrow & H^2(G/B) \\ \cup & & \cup \\ [\text{点}] & \leftarrow\!\shortmid & \omega_i \end{array}$$

以及, 任何一个 $H^*(G/B)$ 的元素都可以唯一地写成

$$\omega_i\smile\pi^*\alpha+\pi^*\beta,\qquad \alpha,\beta\in H^*(G/P_i).$$

回忆 Demazure operator 是拉回和推出的复合, 所以对于 $f=\omega_i\smile\pi^*\alpha+\pi^*\beta\in H^*(G/B)$,

$$\begin{aligned} \partial_i f &= \partial_i(\omega_i\smile\pi^*\alpha+1\smile\pi^*\beta) && \text{定义}\\ &= \partial_i(\omega_i\smile\pi^*\alpha)+\partial_i(1\smile\pi^*\beta) && \text{定义}\\ &= \pi^*\big(\pi_*(\omega_i\smile\pi^*(\alpha))\big)+\pi^*\big(1\smile\pi_*(\pi^*\beta)\big) && \text{定义}\\ &= \pi^*\big(\pi_*\omega_i\smile\alpha\big)+\pi^*\big(\pi_*1\smile\beta\big)\big) \\ & && \because \text{projective formula}\\ &= \pi^*(\pi_*\omega_i)\smile\pi^*\alpha+\pi^*(\pi_*1)\smile\pi^*\beta \\ & && \because \text{cup 积是代数同态}\\ &= \pi^*\alpha && \text{请看下一段} \end{aligned}$$

注意到 $\pi^*(\pi_*1)\in H^{-2}(G/B)=0$.

注意到 $\pi^*\pi_*\omega_i\in H^0(G/B)\cong\mathbb{Z}$ 是一个数, 所以可以用下面的拉回方阵计算 $\begin{smallmatrix}P/B & \to & \text{点}\\ \downarrow & & \downarrow\\ G/B & \to & G/P\end{smallmatrix}$,

$$\begin{tikzcd} {[\text{点}]} \arrow[rrr, mapsto, bend left] & \in H^2(P/B) \arrow[r, "\text{推出}"] & H^0(\text{点}) & \ni 1 \\ \omega_i \arrow[u, mapsto] \arrow[rrr, mapsto, bend right] & \in H^2(G/B) \arrow[u, "\text{拉回}"] \arrow[r, "\text{推出}"'] & H^0(G/P) \arrow[u, equal, "\text{拉回}"] & \ni \pi_*\omega_i \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

所以 $\pi^*\pi_*\omega_i=\pi^*1=1$.

所以现在我们重新理解

$$\boxed{\text{Demazure Operator}}=\boxed{\text{取 }\omega_i\text{ 前系数}}.$$

下一节我们要用多项式理解同调群, 此时我们会证明多项式上的 Demazure operator 正对应着取 ω_i 前系数.

习题 1. *考虑紧致的版本 U_n 为酉群, T_K 为其对角矩阵. 注意到 $U_n/V=\mathcal{G}r(k,n)$, 其中 $V=\begin{pmatrix}U_k & \\ & U_{n-k}\end{pmatrix}$. 由此说明*

$$H^*(\mathcal{F}\ell(n))=H^*(\mathcal{F}\ell(k))\otimes H^*(\mathcal{F}\ell(n-k))\otimes H^*(\mathcal{G}r(k,n-k)).$$

[提示: 利用 $U_n/T_K\to U_n/V$. 需要证明 $V/T_K=\mathcal{F}\ell(k)\times\mathcal{F}\ell(n-k)$.]

习题 2. *回忆我们之前定义的 $[n]=\frac{\mathbf{q}^n-1}{\mathbf{q}-1}$, $[n]!=[n]\cdots[1]$. 我们可以定义 q-**二项式系数** $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$. 证*

明这是 $\mathbb{F}_q$ 中 n 维空间 k 维子空间的数目. [提示: 我们之前将 $[n]!$ 解释成 `Hilbert` 多项式. 注意到张量的 `Hilbert` 多项式是 `Hilbert` 多项式相乘. 所以根据上题我们得到 $H^*(\mathcal{G}r(k,n))$ 的 `Hilbert` 多项式. 而 $\mathcal{G}r(k,n)$ 也有胞腔结构, 所以前面某道旗流形的问题是一样的.]

2.2 更多计算

2.3 向量丛

参考文献

- Hatcher. Algebraic Topology.
- Hatcher. Spectral Sequences.

3 K 理论速成

4 等变拓扑速成

4.1 等变上同调

4.2 等变 K 理论

5 拓扑收纳箱

5.1 Connected K-theory

5.2 相交上同调

5.3 量子上同调

5.4 反常层

6 几何收纳箱

6.1 旗流形的推广

6.2 Hilbert 概形 (Hilbert Schemes)

6.3 动量图 (Moment Graphs)

6.4 箭图簇 (Quiver Varieties)

6.5 环面簇 (Toric Varieties)

7 代数收纳箱

7.1 扭结

7.2 量子群

7.3 Buildings

7.4 Cluster 代数

7.5 Hall 代数