1 量子群

1.1 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示

令 $\mathfrak{sl}_2 = \{\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right) : a + d = 0\}$. 记

$$h = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, \qquad e = \begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & \end{pmatrix}, \qquad f = \begin{pmatrix} & 0 \\ 1 & \end{pmatrix}.$$

所以 $\mathfrak{sl}_2 = \mathbb{C} \cdot f \oplus \mathbb{C} \cdot h \oplus \mathbb{C} \cdot e$.

$[\downarrow, \rightarrow]$	f	h	e
f	0	$2f$	$-h$
h	$-2f$	0	$2e$
e	h	$-2e$	0

记 $V = \mathbb{C}^2$ 是 $\mathfrak{sl}_2$ 的自然表示. 记 $\mathbf{v}_1 = \left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 0 \end{smallmatrix}\right), \mathbf{v}_2 = \left(\begin{smallmatrix} 0 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$ 是自然基

$\downarrow \cdot \rightarrow$	$\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_1$
f	0	$\mathbf{v}_2$
h	$-\mathbf{v}_2$	$\mathbf{v}_1$
e	$\mathbf{v}_1$	0

$$\begin{tikzcd} \mathbf{v}_2 \arrow[loop left, "-1"] \arrow[r, bend left, "e"] & \mathbf{v}_1 \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[loop right, "1"] \end{tikzcd}$$

对每个 $n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}$, 我们都可以定义一个 $\mathfrak{sl}_2$ 的不可约表示, 形式地, 对称代数的 $n-1$ 次部分 $S^{n-1}V$.

$$\begin{tikzcd} \mathbf{v}_2^{n-1} \arrow[loop above, "1-n"] \arrow[r, bend left, "e"] & \mathbf{v}_2^{n-2}\mathbf{v}_1 \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[loop above, "3-n"] \arrow[r, bend left, "e"] & \cdots \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[r, bend left, "e"] & \mathbf{v}_1^{n-2}\mathbf{v}_2 \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[loop above, "n-3"] \arrow[r, bend left, "e"] & \mathbf{v}_1^{n-1} \arrow[l, bend left, "f"] \arrow[loop above, "n-1"] \end{tikzcd}$$

且 $\{S^{n-1}V : n \in \mathbb{Z}_{\geq 1}\}$ 给出 $\mathfrak{sl}_2$ 的所有有限维不可约表示. 例如 S^0V 是平凡表示, $S^1V = V$. 特别地, $\mathfrak{sl}_2$ 的有限维不可约表示的同构只由维数决定.

对于一个 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示 V, 记 $V_n = \{x \in V : hx = nx\}$. 记特征

$$\chi(V) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \dim V_n \cdot e^{nx}.$$

那么

$$\begin{cases} \chi(V \oplus W) = \chi(V) + \chi(W), \\ \chi(V \otimes W) = \chi(V)\chi(W). \end{cases}$$

(回忆 h 在张量上的作用是 $h \otimes 1 + 1 \otimes h$). 根据上面的分解

$$\chi(S^{n-1}V) = e^{(1-n)x} + \cdots + e^{(n-1)x} = \frac{e^{nx} - e^{-nx}}{e^x - e^{-x}}.$$

我们可以稍微将记号其拓展到 $\mathfrak{gl}_2$ 上. 记 $\mathfrak{h} = \{\left(\begin{smallmatrix} x_1 & \\ & x_2 \end{smallmatrix}\right)\}$ 为对角矩阵代数, 以及 $x_1, x_2 \in \mathfrak{h}^*$,

$$\begin{cases} x_1 : \quad \begin{pmatrix} x_1 & \\ & x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 \\ x_2 : \quad \begin{pmatrix} x_1 & \\ & x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_2 \end{cases}$$

对于 $\mathfrak{gl}_2$ 的表示 V 以及 $\alpha \in \mathfrak{h}^*$ 记

$$V_\alpha = \{x \in V : \forall h \in \mathfrak{h}, h \cdot x = \alpha(h) \cdot x\}.$$

特征

$$\chi(V) = \sum_{\alpha \in \mathfrak{h}^*} \dim V_\alpha \cdot e^\alpha.$$

作为 $\mathfrak{gl}_2$ 的表示遗忘为 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示, 相应的特征 $e^{x_1} \mapsto e^x$, $e^{x_2} \mapsto e^{-x}$. 这是因为 $x_1\left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & -1 \end{smallmatrix}\right) = 1$, $x_2\left(\begin{smallmatrix} 1 & \\ & -1 \end{smallmatrix}\right) = -1$.

例如上面的 $S^{n-1}V$ 不仅是 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示, 也是 $\mathfrak{gl}_2$ 的表示, 其特征是

$$\chi(S^{n-1}V) = \frac{e^{nx_1} - e^{nx_2}}{e^{x_1} - e^{x_2}}$$

除此之外, $\mathfrak{gl}_2$ 独有的表示是**行列式表示** $\det$

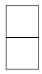
$$\mathbb{C} \xrightarrow{g} \mathbb{C} \qquad x \mapsto (\operatorname{tr} g) \cdot x.$$

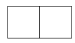
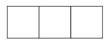
对应的特征是

$$\chi(\det) = e^{x_1 + x_2} = e^{x_1} \cdot e^{x_2}.$$

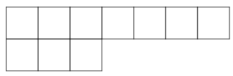
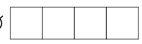
$\det$ 作为 $\mathfrak{sl}_2$ 的表示是平凡的.

我们可以用分拆 $a \geq b$ 来记最高权 $ax_1 + bx_2$ 的表示, 所以

$\det =$ , 平凡表示$\mathbb{C} = \varnothing$

$V =$ , $S^2V =$ , $S^3V =$ 

如果遗忘到 $\mathfrak{sl}_2$ 上, 那么 $x_1 + x_2 = 0$, 即 $ax_1 + bx_2 = (a-1)x_1 + (b-1)x_2$

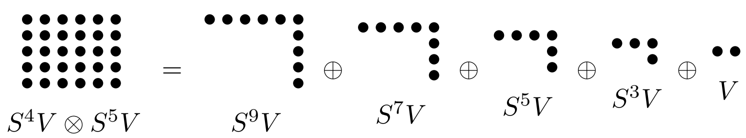
 $=$ $\varnothing\ \varnothing\ \varnothing$ 
$\varnothing\ \varnothing\ \varnothing$

下面我们来讨论重数公式, 即计算 $\mathfrak{sl}_2$ 的两个不可约分解的张量如何分解. 如果我们只关心分解的重数这个并不困难, 只需要计算特征公式. 例如 S^4V 和 S^5V,

$S^4(V)$ \ $S^5(V)$	-5	-3	-1	1	3	5
-4	-9	-7	-5	-3	-1	1
-2	-7	-5	-3	-1	1	3
0	-5	-3	-1	1	3	5
2	-3	-1	1	3	5	7
4	-1	1	3	5	7	9

这些 "权" 是如何组合成一些不可约分解的直和的呢?

只需要沿着右上那条边扒开, 即



这被称为**Clebsch–Gordan 公式**. 这是最简单版本的 Littlewood–Richardson 系数的计算.

1.2 $\mathfrak{sl}_n$ 的表示

回忆 $\mathfrak{sl}_n$ 中, Cartan 子代数

$$\mathfrak{h}=\{\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n):x_1+\dots+x_n=0\}$$

将 $x_1,\dots,x_n\in\mathfrak{h}^*$ 视作坐标. 单根取作 $\{\alpha_i=x_i-x_{i+1}:i=1,\dots,n-1\}$. 那么 $\mathfrak{sl}_2$-triple 对应

$$\begin{aligned}
h_i &= \mathrm{diag}\left(\dots 0,\overset{i\ i+1}{\begin{pmatrix}1&\\&-1\end{pmatrix}},0\dots\right)\\
e_i &= \mathrm{diag}\left(\dots 0,\overset{i\ i+1}{\begin{pmatrix}0&1\\&0\end{pmatrix}},0\dots\right)=E_{i,i+1}\\
f_i &= \mathrm{diag}\left(\dots 0,\overset{i\ i+1}{\begin{pmatrix}&0\\1&\end{pmatrix}},0\dots\right)=E_{i+1,i}
\end{aligned}$$

回忆其的自然表示 $V=\mathbb{C}^n$. 记 $\mathbf{v}_1,\dots,\mathbf{v}_n$ 为自然基. 那么

$$\mathbb{C}\mathbf{v}_i=V_{x_i}=\{v\in V:\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n)v=x_iv\}.$$

其作用由下表给出

	$\cdots$	$\mathbf{v}_{i-1}$	$\mathbf{v}_i$	$\mathbf{v}_{i+1}$	$\mathbf{v}_{i+2}$	$\cdots$
e_i	$\cdots$	0	0	$\mathbf{v}_i$	0	$\cdots$
f_i	$\cdots$	0	$\mathbf{v}_{i+1}$	0	0	$\cdots$

考虑 $V^{\otimes N}$, 此时

$$\mathfrak{gl}_n\underset{\text{左作用}}{\curvearrowright}V^{\otimes N}\underset{\text{左作用}}{\curvearrowleft}\mathfrak{S}_N$$

对于 N 的一个分拆 $\lambda=\lambda_1\geq\lambda_2\geq\cdots$, 并填入 1 到 N.

取 Young symmetriser $b_\lambda=c_\lambda r_\lambda$, 其中 c_λ 是列交错和, r_λ 是行和. 记

$$V_\lambda=V^{\otimes N}b_\lambda$$

把 $x_1\otimes\cdots\otimes x_N$ 按照填入的数按顺序记入 Young 表, 并且将 $\mathbf{v}_i$ 在 Young 图中改写为 i.

$$\begin{aligned}
r_\lambda &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\{1,2,3,4\}}\times\mathfrak{S}_{\{5,6,7\}}\times\mathfrak{S}_{\{8\}}}\sigma\\
c_\lambda &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\{1,5,8\}}\times\mathfrak{S}_{\{2,6\}}\times\mathfrak{S}_{\{3,7\}}\times\mathfrak{S}_{\{4\}}}(-1)^\sigma\sigma.
\end{aligned}
\qquad
\begin{array}{llll}1&2&3&4\\5&6&7\\8\end{array}$$

$$x_1\otimes\cdots\otimes x_8=\begin{array}{l}x_1\otimes x_2\otimes x_3\otimes x_4\\ \otimes\quad\ \otimes\quad\ \otimes\\ x_5\otimes x_6\otimes x_7\\ \otimes\\ x_8\end{array}$$

$$\begin{array}{l}\mathbf{v}_4\otimes\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_4\otimes\mathbf{v}_1\\ \otimes\quad\ \otimes\quad\ \otimes\\ \mathbf{v}_3\otimes\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_1\\ \otimes\\ \mathbf{v}_1\end{array}=\begin{array}{llll}4&2&4&1\\3&2&1\\1\end{array}$$

令 M 是一个 Young 表对应的单项式. 注意到:

- 当列中有重复元素时, $M\cdot b_\lambda=0$.

[因为列是交错和]

- (非零时) 其权为 $\phi_1x_1+\dots+\phi_nx_n$, 其中 ϕ_i 是 Young 表中 i 的使用次数.

回忆 x 在张量积上的作用是逐项作用再相加.

记 M_0 是第 i 行全部填 i 的 Young 表对应的单项式. 注意到:

- 第 i 行全部填 i 时, 记为 M_0, 那么 $M_0\cdot b_\lambda\neq 0$.

考虑 M 在 $M\cdot b_\lambda$ 前的系数.

- 任何一个 M, 都可以作用数次 $\{E_{ij}\}$ 进入 $\mathbb{C}M_0$. 且如果列元素不同, 那么可以作用数次 $\{E_{ij}\}$ 进入 $\mathbb{C}^\times M_0$.

看下面的例子.

$$\begin{array}{llll}1&2&3&2\\2&3&4\\4\end{array}$$

$$\xrightarrow{e_1=E_{12}}\begin{array}{llll}1&(1)&3&2\\2&3&4\\4\end{array}+\begin{array}{llll}1&2&3&(1)\\2&3&4\\4\end{array}+\begin{array}{llll}1&2&3&2\\(1)&3&4\\4\end{array}(=0)$$

$$\xrightarrow{e_1=E_{12}}\begin{array}{llll}1&1&3&(1)\\2&3&4\\4\end{array}+0+\begin{array}{llll}1&(1)&3&1\\2&3&4\\4\end{array}+0=2\begin{array}{llll}1&1&3&1\\2&3&4\\4\end{array}$$

$$\xrightarrow{E_{13}=[e_1,e_3]}2\begin{array}{llll}1&1&(1)&1\\2&3&4\\4\end{array}+2\begin{array}{llll}1&1&3&1\\2&(1)&4\\4\end{array}(=0)$$

$$\xrightarrow{e_2}2\begin{array}{llll}1&1&1&1\\2&(2)&4\\4\end{array}\xrightarrow{E_{42}=[e_4,[e_3,e_2]]}2\begin{array}{llll}1&1&1&1\\2&2&(2)\\4\end{array}+0$$

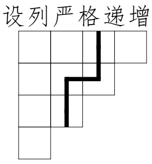
$$\xrightarrow{e_3=E_{43}}2\begin{array}{llll}1&1&1&1\\2&2&2\\(3)\end{array}$$

之后的步骤如下

- 从上面两点说明 V_λ 中含有一个 $\mathfrak{sl}_n$ 的一个最高权为 $\lambda_1x_1+\ldots+\lambda_nx$ 的不可约表示.
- 证明列严格递增且行单调递增 (半标准 Young 表) 的 Young 表构成一组基.
- 此时再利用 Weyl 特征公式 (即 Schur 函数) 说明这个表示必定是整个 V_λ.

上述过程还可以用 Schur–Weyl 对偶来说明.

习题 1. 证明列严格递增且行单调递增 (半标准 Young 表) 的 Young 表构成一组基. [提示: 首先他们线性无关, 说明每个半标准 Young 图都被一串 $E_{i<j}$ 提到 M_0, 且作用在比其小 (某个序下)Young 图上得 0. 再说明张成整个表示, 我们说明任何一个 Young 表对应的单项式都可以. 首先可以假设列严格递增; 找最先 (某个序下) 出现的的行递减. 考虑



中 ``标出位置'' 的对称群 $G \subseteq \mathfrak{S}_N$. 记 $g$ 是他们的交错和. 这是任何列内的置换 $\sigma$ 都一定存在一个两个 ``标出位置'' 位置出现在同一行. 因此行内变换含有一个 $\sigma^{-1}G\sigma$ 的对换, 因此 $M \cdot g \cdot b_\lambda = 0$. 展开 Mg 归纳.]

习题 2 (Howe 对偶). 考虑

$$\mathrm{GL}_n \underset{\text{左乘}}{\curvearrowright} \mathbb{M}_{n,k} \underset{\text{右乘}}{\curvearrowleft} \mathrm{GL}_k .$$

记 $\mathbb{M}_{n,k}$ 多项式函数为 R, 作为 GL_n 和 GL_k 的表示, R 应该如何分解? [提示: 这个表示的特征是 $\prod_{i,j}\frac{1}{1-x_iy_j}$, 根据 Cauchy 恒等式, 其分解是 $\bigoplus V_\lambda \otimes V_\lambda$.]

$\boxed{\text{注意 1}}$ 类似地, *Littlewood* 恒等式和余 *Cauchy* 恒等式也可以有类似的表示版本, 即"范畴化".

参考文献

- Goodman and Wallach. Symmetry, Representations,and Invariants.

1.3 Kashiwara 晶体基

上一节我们虽然说明

任何一个 M, 都可以作用数次 $\{E_{ij}\}$ 进入 $\mathbb{C}M_0$.

但是我们没法确定前面的系数.

以后见之明, 量子群告诉我们

$$\begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&2&4\\\hline 2&3&4\\\cline{1-3} 3\\\cline{1-1}\end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&(1)&2&4\\\hline 2&3&4\\\cline{1-3} 3\\\cline{1-1}\end{array} + q \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1&2&(1)&4\\\hline 2&3&4\\\cline{1-3} 3\\\cline{1-1}\end{array}$$

即 $2=(1+q)|_{q=1}$. 换句话说 Lie 代数作为 $q=1$ 的特殊情况, 把 Young 图上某种 "分次" 结构隐藏掉了. Kashiwara 的想法是取 $q=0$.

记 $\mathbb{I}=\{1,\ldots,n-1\}$, 权格 $\Lambda=\mathbb{Z}x_1\oplus\cdots\oplus\mathbb{Z}x_n/(x_1+\ldots+x_n)$, fundamental weight $\omega_i=x_1+\ldots+x_i$.

我们定义 **Kashiwara 晶体基** 是 $\mathcal{B}$ 伴着下列映射

$$\begin{array}{ll} \text{作用} & e_i, f_i : \mathcal{B} \to \mathcal{B}\cup\{0\} \\ \text{尺度} & \epsilon_i, \varphi_i : \mathcal{B} \to \mathbb{Z}\cup\{0\} \\ \text{权} & \mathtt{wt} : \mathcal{B} \to \Lambda \end{array}$$

我们要求

$$e_i(x)=y \iff f_i(y)=x.$$

且此时 $\begin{cases}\epsilon_i(y)=\epsilon_i(x)-1 \\ \varphi_i(y)=\varphi_i(x)+1 \\ \mathtt{wt}(y)=\mathtt{wt}(x)+\alpha_i.\end{cases}$. 还要求

$$\varphi_i(x)-\epsilon_i(x)=\langle h_i, \mathtt{wt}(x)\rangle .$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 这里的 e_i, f_i 是 *Kashiwara operator* 和 *Lie* 代数中的 e_i 和 f_i 不一样, 虽然有联系, 但是这里仅仅不妨理解为一个记号.

$\boxed{\text{注意 2}}$ 实际上不如说 *Kashiwara* 晶体基是定义了一个带了一些结构的图 (**晶体图**). 为了画出这个图, 我们可以只标记 f_i, 且可以略去 $f_i(x)=0$ 的那些. 下图中出现的情况, 都有

$$\begin{aligned}\epsilon_i(x) &= \max\{k : e_i^k x \neq 0\} \\ \varphi_i(x) &= \max\{k : f_i^k x \neq 0\}\end{aligned}$$

例如, 仿照 $\mathfrak{sl}_n$ 的表示, 定义一个 Young 表的权是 $\ell_1x_1+\cdots+\ell_nx_n$, 其中 ℓ_i 是 i 使用的次数.

下面是一些例子

$\mathbb{I}=\{1\}$ $$\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline\end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline\end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline\end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline\end{array}$$

$\mathbb{I}=\{1,2,3\}$ $$\boxed{1} \xrightarrow{1} \boxed{2} \xrightarrow{2} \boxed{3} \xrightarrow{3} \boxed{4}$$

$$\begin{tikzcd}
\begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&1\\\hline\end{array} \arrow[r, "1"] & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&2\\\hline\end{array} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "2"] & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&2\\\hline\end{array} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "2"] & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&2\\\hline\end{array} \arrow[d, "2"] \\
& \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&1&3\\\hline\end{array} \arrow[r, "1"] & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&2&3\\\hline\end{array} \arrow[r, "1"] \arrow[d, "2"] & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&2&3\\\hline\end{array} \arrow[d, "2"] \\
& & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 1&3&3\\\hline\end{array} \arrow[r, "1"] & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 2&3&3\\\hline\end{array} \arrow[d, "2"] \\
& & & \begin{array}{|c|c|c|}\hline 3&3&3\\\hline\end{array}
\end{tikzcd}$$

$\mathbb{I}=\{1,2\}$

$\mathbb{I}=\{1,2,3\}$

$$\begin{tikzcd}
& & \begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 3\\\hline\end{array} \arrow[dr, "3"] & & \\
\begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 2\\\hline\end{array} \arrow[r, "2"] & \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 3\\\hline\end{array} \arrow[ur, "1"] \arrow[dr, "3"'] & & \begin{array}{|c|}\hline 2\\\hline 4\\\hline\end{array} \arrow[r, "2"] & \begin{array}{|c|}\hline 3\\\hline 4\\\hline\end{array} \\
& & \begin{array}{|c|}\hline 1\\\hline 4\\\hline\end{array} \arrow[ur, "1"'] & &
\end{tikzcd}$$

Kashiwara 晶体基的一个优点是在张量积下非常好. 对于两个晶体基 $\mathcal{B}_1$ 和 $\mathcal{B}_2$. 那么可以定义二者的张量积 $\mathtt{wt}(x\otimes y)=\mathtt{wt}(x)+\mathtt{wt}(y)$ 以及

$$f_i(x\otimes y)=\begin{cases} f_i(x)\otimes y & \varphi_i(y)\le\epsilon_i(x) \\ x\otimes f_i(y) & \varphi_i(y)>\epsilon_i(x)\end{cases}$$

$$e_i(x\otimes y)=\begin{cases} e_i(x)\otimes y & \varphi_i(y)<\epsilon_i(x)\\ x\otimes e_i(y) & \varphi_i(y)\geq\epsilon_i(x)\end{cases}$$

$$\varphi_i(x\otimes y)=\max\{\varphi_i(x),\varphi_j(y)+\langle h_i,\mathtt{wt}(x)\rangle\}$$

$$\epsilon_i(x\otimes y)=\max\{\epsilon_i(x),\epsilon_j(y)-\langle h_i,\mathtt{wt}(x)\rangle\}$$

这样定义是有动机的, 这是经典的 Clebsch–Gordan 公式

$x\otimes y$	y	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$		$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}$		$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}$		$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$
x	$\epsilon(x)$ \ $\varphi(y)$	3	$\longrightarrow$	2	$\longrightarrow$	1	$\longrightarrow$	0
$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$	0	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\otimes\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$	$\longrightarrow$	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\otimes\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}$	$\longrightarrow$	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\otimes\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}$	$\longrightarrow$	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\otimes\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$
$\downarrow$								$\downarrow$
$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}$	1	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\otimes\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$	$\longrightarrow$	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\otimes\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}$	$\longrightarrow$	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\otimes\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}$		$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\otimes\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$
$\downarrow$						$\downarrow$		$\downarrow$
$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}$	2	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\otimes\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$	$\longrightarrow$	$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\otimes\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}$		$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\otimes\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}$		$\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\otimes\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$
$\downarrow$				$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$	3	$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\otimes\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$		$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\otimes\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}$		$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\otimes\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}$		$\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\otimes\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$
$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$		$\downarrow$
$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$	4	$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\otimes\boxed{1}\boxed{1}\boxed{1}$		$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\otimes\boxed{1}\boxed{1}\boxed{2}$		$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\otimes\boxed{1}\boxed{2}\boxed{2}$		$\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}\otimes\boxed{2}\boxed{2}\boxed{2}$

例如

$x\otimes y$	y	$\boxed{1}$	$\xrightarrow{1}$	$\boxed{2}$	$\xrightarrow{2}$	$\boxed{3}$	$\xrightarrow{3}$	$\boxed{4}$
x	$\epsilon(x)$ \ $\varphi(y)$	100		010		001		000
$\boxed{1}$	0 0 0	$\boxed{1}\otimes\boxed{1}$	$\xrightarrow{1}$	$\boxed{1}\otimes\boxed{2}$	$\xrightarrow{2}$	$\boxed{1}\otimes\boxed{3}$	$\xrightarrow{3}$	$\boxed{1}\otimes\boxed{4}$
$1\downarrow$				$\downarrow 1$		$\downarrow 1$		$\downarrow 1$
$\boxed{2}$	1 0 0	$\boxed{2}\otimes\boxed{1}$		$\boxed{2}\otimes\boxed{2}$	$\xrightarrow{2}$	$\boxed{2}\otimes\boxed{3}$	$\xrightarrow{3}$	$\boxed{2}\otimes\boxed{4}$
$2\downarrow$		$\downarrow 2$				$\downarrow 2$		$\downarrow 2$
$\boxed{3}$	0 1 0	$\boxed{3}\otimes\boxed{1}$	$\xrightarrow{1}$	$\boxed{3}\otimes\boxed{2}$		$\boxed{3}\otimes\boxed{3}$	$\xrightarrow{3}$	$\boxed{3}\otimes\boxed{4}$
$3\downarrow$		$\downarrow 3$		$\downarrow 3$				$\downarrow 3$
$\boxed{4}$	0 0 1	$\boxed{4}\otimes\boxed{1}$	$\xrightarrow{1}$	$\boxed{4}\otimes\boxed{2}$	$\xrightarrow{2}$	$\boxed{4}\otimes\boxed{3}$		$\boxed{4}\otimes\boxed{4}$

由此出发能够得到经典的 Littlewood–Richardson rule. 具体来说, 考虑自然表示 $V_\square$,

$$\boxed{1}\xrightarrow{1}\cdots\xrightarrow{n-1}\boxed{n}.$$

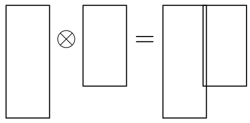
对每一个 fundamental weight $\omega_i=x_1+\cdots+x_N$ 对应的基本表示 V_i 可以嵌入 $V_\square^{\otimes N}$. 对应连通分支的晶体图是 $\boxed{i_1}\otimes\cdots\otimes\boxed{i_N}$ 使得 $i_1<\cdots<i_N$. 我们将其记为 $\begin{array}{c}\boxed{i_1}\\ \vdots\\ \boxed{i_N}\end{array}$. 一般地, 假如把任何一个权 λ 写成 ω_i 的和按照 $\omega_1>\omega_2>\cdots>\omega_{n-1}$ 降序

$$\lambda=\omega_{n-1}+\cdots+\omega_{n-2}+\cdots$$

可以把对应的表示嵌入到对应

$$V_{n-1}\otimes V_{n-1}\otimes\cdots\otimes V_{n-2}\otimes\cdots$$

中. 此时记为



对应的 Crystal graph 的连通分支恰好对应半标准 Young 表.

参考文献

- Bump, Schilling. Crystal Bases: Representations And Combinatorics
- Nakashima. Crystal base and a generalization of the Littlewood-Richardson rule for the classical Lie algebras.

2 范畴化

2.1 Temperley–Lieb 代数

下面我们关注一些映射. 我们用 $\mathfrak{sl}_2$ 的自然表示 $V=\mathbb{C}^2$. 我们定义

$$\begin{array}{c} V\otimes V \\ \epsilon\big\downarrow \\ \mathbb{C} \end{array} \quad \text{诱导自反对称形} \begin{cases} B(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_1)=B(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_2)=0, \\ B(\mathbf{v}_1,\mathbf{v}_2)=1, \\ B(\mathbf{v}_2,\mathbf{v}_1)=-1 \end{cases}$$

这满足

$$\forall g\in\mathfrak{sl}_2,\quad B(gx,y)+B(x,gy)=0.$$

说明 ϵ 是一个 $\mathfrak{sl}_2$ 表示之间的同态.

我们定义

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{C} & & 1 \\ \eta\big\downarrow & & \updownarrow \\ V\otimes V & & \mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_1 \end{array}$$

这满足

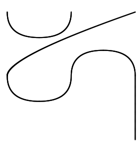
$$\forall g\in\mathfrak{sl}_2,\quad g\cdot\eta(1)=0.$$

说明 η 是一个 $\mathfrak{sl}_2$ 表示之间的同态.

紧接着, 我们记

$$\eta\overset{V\otimes V}{\underset{\mathbb{C}}{\uparrow}}=\smile,\qquad \epsilon\overset{\mathbb{C}}{\underset{V\otimes V}{\uparrow}}=\frown,\qquad \mathrm{id}\overset{V}{\underset{V}{\uparrow}}=\big|.$$

例如

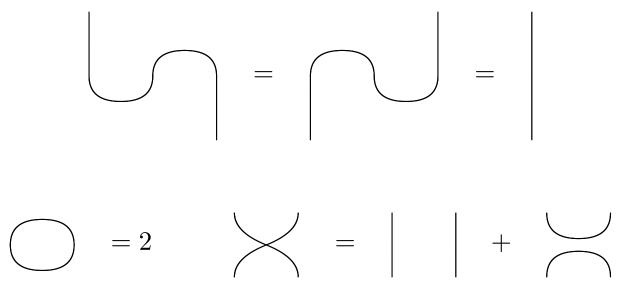


$$\begin{array}{c} V\otimes V\otimes V \\ \uparrow \\ = \quad V\otimes V\otimes V \\ \uparrow \\ V \end{array}$$

使得

$$\begin{aligned} x &\mapsto (\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_1)\otimes x \\ &\mapsto (\mathbf{v}_1\otimes\mathbf{v}_2-\mathbf{v}_2\otimes\mathbf{v}_1)\otimes(\mathbf{v}_1B(\mathbf{v}_2,x)-\mathbf{v}_2B(\mathbf{v}_1,x)) \end{aligned}$$

这些图有如下运算律



注意到, 通过上面的配合 B,

$$V\cong V^*\qquad (\text{作为 } \mathrm{SL}_2 \text{ 的表示})$$

而注意到

$$\mathrm{Hom}(V^{\otimes k},V^{\otimes h})=(V^*)^{\otimes k}\otimes V^{\otimes h}\cong V^{\otimes(k+h)}.$$

所以

$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SL}_2}(V^{\otimes k},V^{\otimes h})=(V^{\otimes(k+h)})^{\mathrm{SL}_2}$$

所以问题变成找 $V^{\otimes n}$ 上面的 SL_2-线性不变量, 即

$$\{f:V^{\otimes n}\to\mathbb{C}:\forall g\in\mathrm{SL}_2, f(gx_1,\dots,gx_n)=f(x_1,\dots,x_n)\}.$$

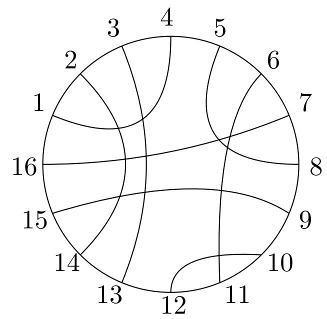
这只有在 $n=2k$ 是偶数时才非 0, 因为 $\begin{pmatrix}-1 & \\ & -1\end{pmatrix}\in\mathrm{SL}_2$.

此时等于计算

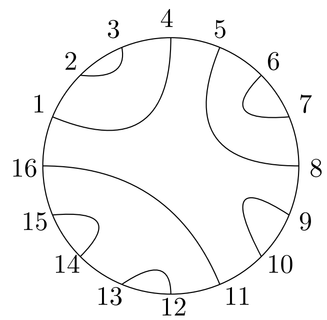
$$\{f:V^{\otimes k}\to V^{\otimes k}:\forall g\in\mathrm{SL}_2, f(gx)=gf(x)\}=\mathrm{End}_{\mathrm{SL}_2}(V^{\otimes k}).$$

根据 Schur–Weyl 对偶, 这是由 $\mathfrak{S}_k$ 在 $\mathrm{End}(V^{\otimes k})$ 中的像生成的.

所以 $V^{\otimes n}$ 上面的 SL_2-线性不变量实际上由形如下图的置换生成



但是交叉可以解开, 泡泡可以消去, 所以只需要由形如下图的不交弦图生成



另一方面, $V^{\otimes n}$ 的 SL_2-线性不变量是

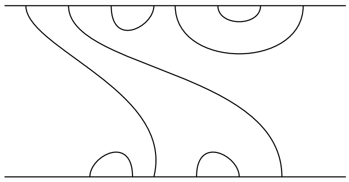
$$\mathrm{Hom}_{\mathrm{SL}_2}(V^{\otimes n},\mathbb{C})=(V^{\otimes n})^{\mathrm{SL}_2}=(V^{\otimes n})^{\mathfrak{sl}_2}$$

其维数等于 $(n=2k)$

$$\chi(V^{\otimes n})(x-x^{-1})\text{的 } x^1 \text{ 系数}=\binom{2k}{k}-\binom{2k}{k-1}$$

这也是不交弦图的数目, 因此这样的不交弦图构成一组基.

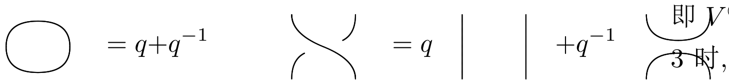
特别地, $V^{\otimes k}$ 到 $V^{\otimes h}$ 的 $\mathfrak{sl}_2$ 同态也以形如下图的不交弦图



构成一组基. 他们关于图的拼接构成一个范畴, 称为**Temperley–Lieb 范畴**.

$\boxed{\text{注意 1}}$ $\mathrm{End}_{\mathrm{SL}_2}(V^{\otimes n})$ 被称为**Temperley–Lieb 代数**. 注意 $V^{\otimes n}$ 含有一个到 $S^n(V)$ 的投射, 这个由 *Jones–Wenzl Projectors* 给出.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *如果改成量子群, 那么*



会得到扭结理论中的 Kauffman bracket(可以用来定义 Jone 多项式).

习题 1. 证明不交弦图的数目也是 $\binom{2k}{k}-\binom{2k}{k-1}$.

习题 2. 证明作为 GL_2 的表示, V 和 V^* 不同构, 且 $V^{\otimes n}$ 在 $n \geq 1$ 时没有 GL_2 不变量. [提示: 计算特征, $\chi(V)=e^{x_1}+e^{x_2}$, $\chi(V^*)=e^{-x_1}+e^{-x_2}$. $\chi(V^{\otimes n})=(e^{x_1}+e^{x_2})^n$ 没有常数项.]

经典不变量理论

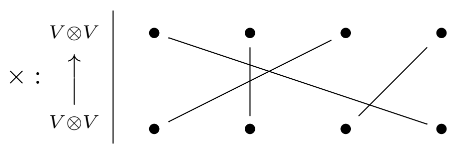
对于复线性空间 V, 记一般线性群 $\mathrm{GL}(V)$, 考虑

$$I_{\mathrm{GL}(V)}(k,h)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{GL}(V)}(V^{\otimes k},V^{\otimes h})$$

即 $V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes h}$ 的 $\mathrm{GL}(V)$ 不变量. 结论是

$$I_{\mathrm{GL}(V)}(k,h)=\begin{cases}0 & k\neq h\\ \mathrm{im}[\mathbb{C}[\mathfrak{S}_k]\to\mathrm{End}(V^{\otimes k})] & k=h.\end{cases}$$

即 $I(k,k)$ 由 $\mathfrak{S}_k$ 在 $V^{\otimes k}$ 上的置换生成. 画在图上是由



生成的.

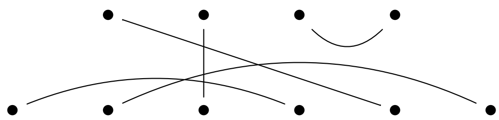
对于内积线性空间 V, 记正交群 $\mathrm{O}(V)$, 记

$$I_{\mathrm{O}(V)}(k,h)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{O}(V)}(V^{\otimes k},V^{\otimes h})$$

即 $V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes h}$ 的 $\mathrm{O}(V)$ 不变量. 此时作为 $\mathrm{O}(V)$ 模 $V\cong V^*$, 所以 $I(k,h)=I(k+1,h-1)$, 而

$$I_{\mathrm{SL}(V)}(k,h)=\begin{cases}0 & k\neq h \bmod 2\\ \text{Brauer 代数的像} & k\equiv h \bmod 2\end{cases}$$

即 $I(k,h)$ 由 $\times, \smile, \frown$ 生成的.



请看 **Brauer 代数/范畴**.

对于辛空间 V, $\mathrm{Sp}(V)$ 亦然.

对于复线性空间 V, 记特殊线性群 $\mathrm{SL}(V)$, 记

$$I_{\mathrm{SL}(V)}(k,h)=\mathrm{Hom}_{\mathrm{SL}(V)}(V^{\otimes k},V^{\otimes h})$$

即 $V^{\otimes k} \longrightarrow V^{\otimes h}$ 的 $\mathrm{SL}(V)$ 不变量. 一般来说, 当 $\dim V \geq 3$ 时, 没有作为 $\mathrm{SL}(V)$ 模的同构 $V\cong V^*$. 但是我们有行列式 $V^{\otimes n}\to\mathbb{C}$ 和其对偶 $\mathbb{C}\to V^{\otimes n}$. 结论是 $I(k,h)$ 由 $\times$ 和行列式及其对偶生成的 (这个我不太确定).

对于 $\mathrm{SO}(V)$, 不变量比 $\mathrm{O}(V)$ 多了一个行列式及其对偶 (这我确定是对的).

参考文献

- Fulton and Harris. Representation theory.
- Goodman and Wallach. Symmetry, Representations, and Invariants.

2.2 $\mathfrak{sl}_n$-网

注意到 Temperley–Lieb 代数是对 $\mathfrak{sl}_2$ 的 Schur–Weyl 对偶的精细化, 我们要问这是否能推广到 $\mathfrak{sl}_n$ 的版本?

历史上是先有 $\mathfrak{sl}_3$. 考虑自然表示 V, 此时

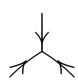
$$V=\square, \qquad V^*=\begin{array}{|c|}\hline \\ \hline \\ \hline\end{array}\cong\Lambda^2V.$$

我们记

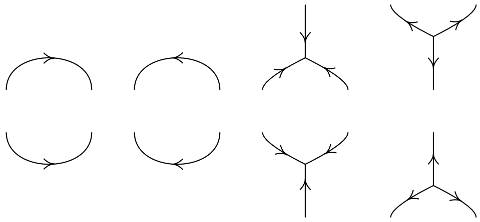
$$\uparrow=V, \qquad \downarrow=V^*.$$

那么有下面的映射

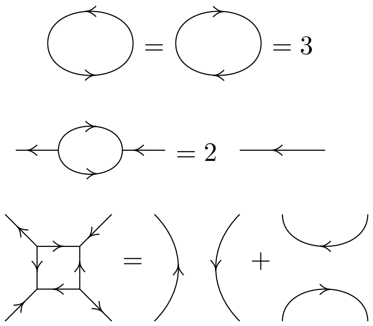
配合  : $\begin{array}{cc}\mathbb{C} & f(x)\\ \uparrow & \mapsto\\ V\otimes V^* & x\otimes f\end{array}$

外积  : $\begin{array}{cc}V^* & x\wedge y\\ \uparrow & \mapsto\\ V\otimes V^* & x\otimes y\end{array}$

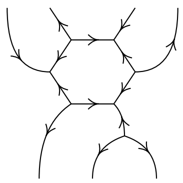
以此类推可以定义



他们满足关系



例如



结论是二者之间的所有 $\mathfrak{sl}_3$ 同态恰好是

$$\bigoplus \mathbb{Z}\cdot[\text{不交的蜘网图}] \Big/ \text{上述三则关系}$$

一般地, $\mathfrak{sl}_n$ 的自然表示 V, 我们记

$$\Lambda^k V = \underset{k}{|} \qquad \Lambda^k V^* = \underset{-k}{|} \qquad \mathbb{C} = \underset{0}{|}$$

张量则顺次排列, 并且我们约定 $\uparrow$ 为正, 记例如

$$\underset{2}{\uparrow}\underset{3}{\downarrow}\underset{1}{\uparrow}\underset{1}{\uparrow} = \Lambda^2 V\otimes\Lambda^3 V^*\otimes V\otimes V.$$

注意到作为 $\mathfrak{sl}_n$ 的表示

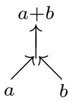
$$\underset{k}{\uparrow} = \underset{-k}{\downarrow} = \Lambda^k V \cong \Lambda^{n-k}V^* = \underset{n-k}{\downarrow}$$

特别地,

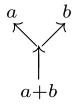
$$\underset{n}{\uparrow} = \underset{-n}{\downarrow} = \Lambda^n V = \text{平凡表示}.$$

但是同构有一个符号的选择 $(-1)^{k(N-k)}$ 的差别.

记

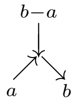


$$: \quad \begin{array}{c}\Lambda^{a+b}V\\ \uparrow\\ \Lambda^aV\otimes\Lambda^bV\end{array} \qquad \begin{array}{c}x_S\wedge x_T\\ \uparrow\\ x_S\otimes y_T\end{array}$$

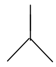
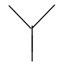


$$: \quad \begin{array}{c}\Lambda^aV\otimes\Lambda^bV\\ \uparrow\\ \Lambda^{a+b}V\end{array} \quad \text{诱导自} \quad \begin{array}{c}\Lambda^{a+b}V^*\\ \uparrow\\ \Lambda^aV^*\otimes\Lambda^bV^*\end{array} \qquad \begin{array}{c}y_S\wedge y_T\\ \uparrow\\ y_S\otimes y_T\end{array}$$

还可以定义



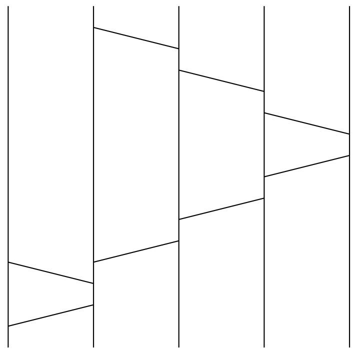
$$: \quad \begin{array}{c}\Lambda^{b-a}V^*\\ \uparrow\\ \Lambda^aV\otimes\Lambda^bV^*\end{array} \qquad \begin{array}{c}\iota_{x_S}y_T\\ \uparrow\\ x_S\otimes y_T\end{array} \quad (\text{内乘})$$

以此类推, 最终会得到任意方向的  和 .

结论是二者之间的所有 $\mathfrak{sl}_n$ 同态恰好是

$$\bigoplus \mathbb{Z}\cdot[\text{不交的蜘网图}] \Big/ \text{一堆关系}$$

$\boxed{\text{注意 } 1}$ 实际上这还会反过来给出 *Beilinson, Lusztig* 和 *MacPherson* 的量子群 $\dot{U}_q(\mathfrak{sl}_n)$.



参考文献

- Cautis, Kamnitzer, Morrison. Webs and quantum skew Howe duality
- Tubbenhauer. $\mathfrak{gl}_n$-webs, categorification and Khovanov-Rozansky homologies
- Mackaay. The $\mathfrak{sl}_n$-web algebras and dual canonical bases