

# 几何拓扑自驾游

熊锐

2021 年 1 月 16 日

## Contents

1	上同调速成	1
1.1	胞腔	1
1.2	推出与拉回	4
1.3	抛物子群	7
1.4	双旗流形	9
2	纤维丛	11
2.1	纤维丛	11
2.2	更多计算	13
2.3	切空间的计算	13
3	向量丛	14
4	K 理论速成	15
5	等变拓扑速成	15
5.1	等变上同调	16
5.2	等变 K 理论	16
6	收纳箱	16
6.1	Connected K-theory	16
6.2	相交上同调	16
6.3	量子上同调	16
6.4	反常层	16
6.5	旗流形的推广	16
6.6	Hilbert 概形 (Hilbert Schemes)	16
6.7	箭图簇 (Quiver Varieties)	16
7	环面簇 (Toric Varieties)	16
7.1	基本定义	16
7.2	几何性质	17
7.3	线丛	19
7.4	动量图 (Moment Graphs)	19
7.5	热带几何?	19
7.6	扭结	19
7.7	Buildings?	19
7.8	Cluster 代数	19
7.9	Hall 代数	19

## 1 上同调速成

1 本节介绍如何理解和使用奇异 (singular) 上同调 (co-homology) 群.

对于拓扑空间  $X$ , 上同调群  $H^*(X)$  是 \_\_\_\_.

就像即使并不懂电脑的运行原理, 但是却可以使用电脑. 但是, 每多理解一点原理, 能做的事儿就多一点.

本节大部分内容成立都是需要条件的, 通常会在提及之后的评注中给出.

实际上, 代数拓扑的使用原则是

绝不使用定义直接计算.

15 我们永远是发展足够多的理论, 再用刻画让计算成功.

代数拓扑在组合中的相当于提供另一种计数工具. 其有行之有效原因在于, 相当一部分计算其实可以约化成计算集合. 如果我们相信不同计数方法计算数目给出相同结果, 那我们也应该相信不同拓扑方法计算同调群会给出相同结果.

### 1.1 胞腔

我们在本小节需要下同调  $H_*(X)$  和相对下同调  $H_*(X, Y)$ , 其中  $Y \subseteq X$  是一个子集.

记  $n$  维球面 (sphere) 和  $n$  维圆盘 (disk) 为

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\};$$

$$D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}.$$

注意  $S^{n-1} \subseteq D^n$  (上标是维数).

需要知道的基本事实是

	0	1	...	$n-1$	$n$	$n+1$	...
$H_*(S^n)$	$\mathbb{Z}$	0	...	0	$\mathbb{Z}$	0	...
$H_*(D^{n+1})$	$\mathbb{Z}$	0	...	0	0	0	...
$H_*(D^{n+1}, S^n)$	0	0	...	0	0	$\mathbb{Z}$	...

最后一行来自于长正合序列. 可以这样记:

$D^{n+1}$  相对  $S^n = D^{n+1}/S^n$  相对于缩点  $= S^{n+1}$  相对于一个点.

这里  $D^{n+1}/S^n$  表示把  $D^{n+1}$  上的  $S^n$  粘成一点 (缩点).

上同调其实是一样的

	0	1	...	$n-1$	$n$	$n+1$	...
$H^*(S^n)$	$\mathbb{Z}$	0	...	0	$\mathbb{Z}$	0	...
$H^*(D^{n+1})$	$\mathbb{Z}$	0	...	0	0	0	...
$H^*(D^{n+1}, S^n)$	0	0	...	0	0	$\mathbb{Z}$	...

我们说一个拓扑空间  $X$  是 **CW 复形 (CW complex)**, 如果  $X$  是由圆盘  $D^n$  按照维数顺序粘结而成.

准确一点:  $X^0$  是一些离散的点;  $X^1$  是往  $X^0$  上粘  $D^1 = \text{区间}[0, 1]$ , 使得  $0, 1$  粘到  $X^0$  上;  $X^2$  是往  $X^1$  上粘  $D^2$ , 使得  $D^2$  的边界  $S^1$  粘到  $X^1$  上; 以此类推.

这样依次得到的  $X^n$  叫作  $X$  的 **骨架 (skeleton)**, 每个黏上去的  $D^n$  叫作一个  $n$  维胞腔.

**注意 1**  $D^n$  的边界  $S^{n-1}$  必须落在低一维的 “骨架”  $X^{n-1}$  上. (不能不粘)

**注意 2**  $D^n$  的内部到  $X$  是单射. (不能粘)

**注意 3** 严格来说,  $CW$  的复形的拓扑是弱拓扑, 即使得每个胞腔的粘结映射连续的最弱拓扑. ( $C=cellular$ ,  $W=weak$ ) 其实  $CW$  复形的拓扑有很多点集拓扑的良好性质, 请见 [Bredon].

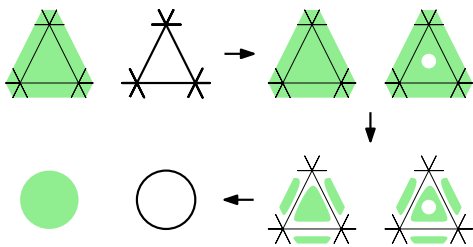
如果  $X$  有  $CW$  复形的结构, 记  $X^n$  是  $n$  维的骨架. 那么  $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \dots$ . 我们可以考虑相对同调  $H_*(X^i, X^{i-1})$  和相对上同调  $H^*(X^i, X^{i-1})$ .

有下面这个重要事实

$$H^*(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \text{以所有 } n\text{-维胞腔} \\ \text{为基生成的自由 Abel 群.} & * = n \\ 0 & * \neq n. \end{cases}$$

这里  $X^{-1} = \emptyset$ . 下同调结果是一样的. 请对比  $H_*(D^n, S^{n-1})$ . 这是 **切除定理 (excision)** 的一个应用.

证明如下



(图中全是三角形, 但是  $CW$  复形不一定要是三角形)

例如  $S^n$  是一个  $CW$  复形. 因为我们可以把  $D^n$  的边界  $S^{n-1}$  整个粘到一个点上得到  $S^n$ . 最简单的胞腔取法是

维数	0	1	...	$n-1$	$n$
胞腔数量	1	0	...	0	1
骨架	点	点	...	点	$S^n$
$H_n(X^n, X^{n-1})$	$\mathbb{Z}$	0	...	0	$\mathbb{Z}$

例如  $D^n$  本身也是一个  $CW$  复形. 最简单的胞腔取法是

维数	0	1	...	$n-2$	$n-1$	$n$
胞腔数量	1	0	...	1	1	1
骨架	点	点	...	点	$S^{n-1}$	$D^n$
$H_n(X^n, X^{n-1})$	$\mathbb{Z}$	0	...	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

下面假设  $X$  是  $CW$  复形, 记  $C_n = H_n(X^n, X^{n-1})$ . 那么存在一条复形

$$\dots \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

使得其同调群同构于  $H_*(X)$ . 记  $C^n = H^n(X^n, X^{n-1})$ . 那么存在一条复形

$$0 \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots \rightarrow C^n \rightarrow \dots$$

使得其上同调群同构于  $H^*(X)$ . 这被称为 **胞腔 (cellular) 同调**.

这个定理本质上只是同调代数的追图, 见 [姜].

**注意 1** 在一些 “正则” 的情况, 这个复形之间的微分  $\partial$  是可以 “看出来” 的. 例如, 当  $X$  是多面体的情况,  $n$  维胞腔就是一个  $n$  维面, 那么

$$\partial(\text{某个 } n \text{ 维面}) = \sum \text{这个面的 } n-1 \text{ 维边}.$$

这里的 “和” 需要根据预先指定的定向决定正负.

**注意 2** 有一些书喜爱使用 **单纯复形 (simplicial complex)**, 此时要任何一个单纯形 (三角形) 每条边都不黏在一起不相交, 因此往往简单的图形需要多次重分才能做到. 但是这样的好处是可以计算乘法结构.

**注意 3** 在 [Hatcher] 中, 他还定义了  $\Delta$  复形, 这时全部都是单纯形 (三角形), 但是允许一个单纯形内部的边相交. 但是实际上三角形, 四边形, 五边形, 甚至二边形都是可以的.

如果对于紧致的 Hausdorff 空间  $X$  (例如流形), 如果有一个 **分层 (stratification)**

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X$$

使得每个  $X_k$  都是闭的, 且  $X_k \setminus X_{k-1} \cong \mathbb{R}^{a_k}$  对某个  $a_k$ . 我们称这个分层给出一个胞腔结构. 我们也称  $X_k \setminus X_{k-1}$  是一个  $a_k$  维胞腔.

记  $X^k = \bigcup_{\dim X_i \leq k}$ , 那么同样也有

$$H^*(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \text{以所有 } n\text{-维胞腔} \\ \text{为基生成的自由 Abel 群.} & * = n \\ 0 & * \neq n. \end{cases}$$

所以一切照旧.

对于线性空间  $V = \mathbb{C}^n$ , 一个 **旗 (flag)** 是一串子线性空间

$$V^0 \subseteq V^1 \subseteq \dots \subseteq V^n$$

使得  $\dim V^i = i$ . 此时为了区别也叫 **完全 (complete) 旗**. 考虑  $\mathcal{Fl}(n)$  为  $n$  维复向量的所有旗 (flag) 组成的集合, 这可以被赋予流形和代数簇的结构. 我们称  $\mathcal{Fl}(n)$  为 **旗流形 (flag manifold)** 或 **旗簇 (flag variety)**.

记  $G = \mathrm{GL}_n$ ,  $B$  是全体上三角矩阵. 将每一个  $x \in \mathrm{GL}_n$  视作  $n$  个线性无关的列向量  $(x_1, \dots, x_n)$ , 我们得到一个其 **张成的旗**  $\mathrm{span} x$

$$0 \subseteq \mathrm{span}(x_1) \subseteq \mathrm{span}(x_1, x_2) \subseteq \dots \subseteq \mathrm{span}(x_1, \dots, x_n).$$

这定义了一个 (连续) 映射  $\mathrm{span} : \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathcal{Fl}(n)$ .

通过线性代数, 不难发现  $\mathrm{span}$  是满射, 且

$$\mathrm{span} x = \mathrm{span} y \iff x = yb \text{ 对某个 } b \in B.$$

换言之,  $G/B \rightarrow \mathcal{Fl}(n)$  是双射 (同胚).

对于置换  $w \in \mathfrak{S}_n$ , 记  $w$  是对应的置换矩阵, 即使得  $w(e_i) = e_{w(i)}$ , 其中  $e_i$  是标准基. 也就是在  $i = 1, \dots, n$  位置  $(i, w(i))$  上是 1, 其他位置是 0 的矩阵.

利用 Gauss 消元法, 可以得到 **Bruhat 分解**

$$G = \bigcup_{w \in \mathfrak{S}_n} BwB \quad (\text{无交并}).$$

其实就是打洞. 实际上这是  $G$  的双陪集分解. 等价地, 这说明  $B$  在  $G/B$  上作用的轨道与对称群元素一一对应. 其中  $BwB/B$  被称为 **Schubert 胞腔**.

按下图表定义  $U_w$

(1 2 3 4 5 6)  
(4 2 6 1 3 5)

$$U_w = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 0 & \mathbb{C} & 0 & \mathbb{C} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

那么利用打洞的技巧 (见 [Fulton]), 可以得到

$$\text{自然映射} : U_w \rightarrow BwB/B$$

是双射 (同胚).

用  $\ell$  表示逆序数. 于是  $BwB/B \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$ , 换句话说拓扑维数是  $2\ell(w)$ . 因为  $U_w$  中 “ $\mathbb{C}$ ” 的数目是 Rothe 图中  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  的数目.

现在我们考虑  $X^i = \bigcup_{2\ell(w) \leq i} BwB/B$ . 这给出  $\mathcal{Fl}(n)$  的一个胞腔结构. 但是因为我们没有奇数维的胞腔, 所以胞腔复形将形如

$$0 \rightarrow C_0 \rightarrow 0 \rightarrow C_2 \rightarrow 0 \rightarrow C_4 \rightarrow \dots;$$

$$\dots \rightarrow C_4 \rightarrow 0 \rightarrow C_2 \rightarrow 0 \rightarrow C_0 \rightarrow 0.$$

所以  $H^i(\mathcal{Fl}(n)) = C^i$ ,  $H_i(\mathcal{Fl}(n)) = C_i$ .

回忆  $C_{2i}$  (和  $C^{2i}$ ) 是维数为  $2i$  的胞腔生成的自由 Abel 群. 我们用  $[BwB/B]$  记对应的基. 注意:  $\dim[BwB/B] = 2\ell(w)$ .

于是我们得到了

$H^*(G/B) =$  以  $\{[BwB/B]\}_{w \in \mathfrak{S}_n}$  为基的自由 Abel 群

$H_*(G/B) =$  以  $\{[BwB/B]\}_{w \in \mathfrak{S}_n}$  为基的自由 Abel 群

**注意 1** 我们需要一则事实,  $\mathcal{Fl}(n)$  是紧致的 (完备的). 这是因为紧 Lie 群  $U_n \subseteq \mathrm{GL}_n$  到  $\mathcal{Fl}(n)$  是满射 (线性代数).

**注意 2** 我们还需要一则事实, 每一个  $BwB/B$  的闭包都是一些  $BuB/B$  的并. 这是因为  $B$  作用, 所以轨道的闭包还是轨道的并.

实际上  $BuB/B \subseteq \overline{BwB/B}$  当且仅当在 **Bruhat order** 下  $u \leq w$ .

**注意 3** 实际上 **Schubert** 胞腔也给出  $CW$  复形意义上的胞腔. 这可以用 **Morse** 理论的类比 **Bialynicki-Birula** 定理得到, 请看 [CG] 第二章某一节.

**习题 1.** 验证  $G/B \rightarrow \mathcal{Fl}(n)$  是双射. [提示: 利用基的延拓定理证明满射, 再证明正文中提到的  $\mathrm{span} x = \mathrm{span} y$  的等价条件.]

**习题 2.** 验证  $U_w \rightarrow BwB/B$  是双射. [提示: 首先证明  $U_w$  在  $G \rightarrow G/B$  下的像落在  $BwB/B$  内; 对于每个  $x \in G$ , 证明  $xB/B$  一定等于某个  $yB/B$  对某个  $y \in U_w$ , 这要从最后一行开始打洞; 最后证明这是单射, 这要从最后一行开始比起.]

**习题 3.** 证明  $\dim G/B = 2 \max_{w \in \mathfrak{S}_n} \ell(w)$ . 利用  $G/B$  光滑的事实说明只有唯一的元素取到最大值.

习题 4. 记  $[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ,  $[n]! = [n] \cdot [n-1] \cdots [1]$ . 经典的计数表明  $[n]!$  是有限域  $\mathbb{F}_q$  上  $n$  维线性空间中旗的数量. 证明这还是  $H^*(G/B)$  的 Hilbert 多项式

$$[n]! = \sum_k \text{rank } H^{2k}(G/B) q^k.$$

[提示: 在有限域上也有 Schubert 胞腔, 这时  $BwB/B \cong \mathbb{F}_q^{\ell(w)}$ , 这贡献  $q^{\ell(w)}$  这么多元素, 而在  $\mathbb{C}$  上的情况, 这时  $BwB/B \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$  在 Hilbert 多项式中贡献  $q^{\ell(w)}$ .]

习题 5. 考虑复射影空间  $\mathbb{C}P^n$  为  $n+1$  维空间所有的 1 维子空间. 将  $\mathbb{C}P^n$  写成一些  $\mathbb{C}^{2i}$  的并, 并且证明  $H^{2k+1}(\mathbb{C}P^n) = 0$ , 且

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 2 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \\ \hline H^*(\mathbb{C}P^n) & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \cdots & \mathbb{Z} & 0 & \cdots \end{array}$$

[提示: 对非零向量  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ , 记  $[x_0 : \cdots : x_n]$  为对应的 1 维子空间. 换言之  $[x_0 : \cdots : x_n] = [y_0 : \cdots : y_n]$  当且仅当  $(x_0, \dots, x_n) = \lambda(y_0, \dots, y_n)$  对某个  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ . 对  $i = 0, \dots, n$ , 记  $A^i = \{[\cdots 0 : 1 : \underbrace{\mathbb{C} : \cdots : \mathbb{C}}_i]\}$ .]

## 1.2 推出与拉回

令  $X \xrightarrow{f} Y$  是一个连续映射, 那么诱导了拉回 (pull back)

$$H^*(X) \xleftarrow{f^*} H^*(Y).$$

注意 1 这是一个齐次映射.

$$\alpha \in H^n(Y) \implies f^*(\alpha) \in H^n(X).$$

注意 2 这是一个代数同态.

$$f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta).$$

令  $X$  是紧致光滑定向流形. 那么有 Poincaré 对偶

$$H^*(X) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(X) \quad * + \bullet = \dim X.$$

注意 1 这个最经典的, 也最容易理解的是组合的解释, 见 [姜]. 现代通行的做法是用 cap 积  $\frown$  给出具体的映射. 更进一步还可以用层的语言改写 (与对偶层对偶).

注意 2 这个同构需要选定一个定向, 所以区分 “可定向 (orientable)” 和 “定向 (oriented)”.

假设  $X$  和  $Y$  都是紧致光滑定向流形. 令  $X \xrightarrow{f} Y$  是一个连续映射, 那么可以定义推出 (push forward)

$$H^*(X) \xrightarrow{f_*} H^\dagger(Y),$$

其中  $\dim X - * = \dim Y - \dagger$ , 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) & \longrightarrow & H^\dagger(Y) \\ \text{对偶} \downarrow & & \downarrow \text{对偶} \\ H_\bullet(X) & \longrightarrow & H_\bullet(Y) \end{array}$$

即, 先对偶到下同调, 推出, 再对偶回上同调.

注意 1 这不是一个齐次映射.

但是如果我们对  $\alpha \in H^*(X)$ , 记  $\text{codim } \alpha = \dim X - *$ , 那么  $f_*$  保持  $\text{codim}$ .

注意 2 这不是一个代数同态. 但是对于  $\alpha \in H^*(X), \beta \in H^*(Y)$ , 有 projective formula

$$f_*(\alpha \smile f^*(\beta)) = f_*(\alpha) \smile \beta.$$

这是一个 “模同态”, 因为通过  $f^*$ ,  $H^*(X)$  是  $H^*(Y)$ -代数, 从而是  $H^*(Y)$ -模.

注意 3 其实我们不需要  $X$  和  $Y$  都紧致, 只需要  $f$  是逆紧的 (proper) 即可定义; 实际上最需要的是当  $f$  是一个纤维丛, 且纤维是紧致光滑定向流形.

**注意 4** 对于一个“拉回方阵”

即  $\square = \{(y, z) \in Y \times Z : f(y) = g(z)\}$ .  
从  $H^*(Y)$  到  $H^*(Z)$  的两个映射

$$g^* \circ f_* = F_* \circ G^*$$

$$\begin{array}{ccc} \square & \xrightarrow{G} & Y \\ F \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

令  $X$  是一个紧致流形, 设  $[X]$  使得

$$\text{单位元 } 1 \in H^0(X) \xrightarrow{\text{对偶}} [X] \in H_n(X)$$

我们称  $[X]$  是  $X$  的**基本类 (fundamental class)**.

**注意 1** 如果给  $X$  一个三角剖分, 即把  $X$  分割成一些单纯形, 那么  $H_n(X)$  是这些单纯形的和 (事先选好定向) 的类. 换句话说,

$$[X] = \text{“同调意义下”的 } X \text{ 本身.}$$

令  $Y$  是一个紧致流形,  $X$  是一个嵌入**闭**子流形. 令  $i : X \rightarrow Y$  是包含映射. 定义  $X$  在  $Y$  中的**fundamental class** (滥用记号)

$$[X] = i_*(1) \in H^*(Y),$$

特别地,  $1 = [Y]$ .

请注意!

$$\deg[X] = \text{codim } X = \dim Y - \dim X \text{ 是 } X \text{ 的余维数.}$$

另外,  $[X] \stackrel{\text{有可能}}{=} 0$ .

**注意 1** 请看

$$1 \in H^0(X) \longrightarrow H^{\text{codim } X}(Y) \ni [X]$$

$$\text{对偶} \downarrow \qquad \qquad \qquad \downarrow \text{对偶}$$

$$[X] \in H_{\dim X}(X) \longrightarrow H_{\dim X}(Y) \ni (\dots)$$

所以

$$[X] = \text{“} Y \text{ 的同调意义下”的 } X \text{ 本身.}$$

**注意 1** 对于代数簇, 即使子簇  $X$  不是光滑的, 我们也可以在  $H^*(Y)$  中定义代数闭链 (algebraic cycles)  $[X]$ . 但是至少需要是闭的. 使用的方法是 Borel-Moore 同调, 请见 [Fulton].

**注意 2** 直接把代数闭链拿出来商掉“代数”同伦, 这就是周环 (Chow ring) 的定义. 只有  $X$  是光滑的时候,  $X$  的周“环”才是环.

**注意 3** 一般来说上同调不一定总是由代数闭链生成的, 这个是被 well-studied, 更广的配边理论也对此有研究.

— 下面我们用 fundamental classes 重新理解上同调 —

以下内容不尽严格. 严格地, 要加何种条件应该看 [Fulton], 周环的版本应该看 [3264]. 但是拿来用基本是没问题的, 而且实际上用式性类等工具能很大程度上避免这类问题.

## 1. Cup 积

假设  $\dim A = a, \dim B = b$ . 那么  $A \cap B$  的期待维数是  $n - [(n - a) + (n - b)]$ . 此时

$$[A] \smile [B] = \begin{cases} [A \cap B] & A \text{ 和 } B \text{ 直交} \\ 0 & \text{比期待维数小} \\ \text{不知道} & \text{比期待维数大} \end{cases}$$

在  $A$  和  $B$  直交 (transversal) 时, 一定取到期待维数.

**注意 1** 所谓直交是说局部上上看是线性空间的交, 也就是说没有  $\times$ .

**注意 2** 微分几何中需要计算定向, 但是如果是代数簇, 定向是复结构一定选定的, 所以没有问题.

## 2. 拉回

$$(f : X \rightarrow Y)$$

对于  $B \subseteq Y, \dim B = b$ , 那么  $f^{-1}(B)$  的期待维数是  $x - (y - b)$ .

$$f^*[B] = \begin{cases} [f^{-1}(B)] & f^{-1}(B) \text{ 横截} \\ 0 & \text{比期待维数小} \\ \text{不知道} & \text{比期待维数大} \end{cases}$$

在  $f^{-1}(B)$  横截 (transversal) 时, 一定取到期待维数.

**注意 1** 所谓横截是说局部上上看是线性映射, 例如对应的 Jacobi 矩阵秩取到期待的秩.

(这不严格)

所以

$$\begin{aligned} f^*(\alpha \smile \beta) &= f^*(\alpha) \smile f^*(\beta) \\ &= \text{同调版本的 } f^{-1}(A \cap B) \\ &= f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{aligned}$$

## 3. 推出

$$(f : X \rightarrow Y)$$

对于  $A \subseteq X, \dim A = a$ , 那么  $f(A)$  的期待维数是  $a$ .

$$f_*[A] = \begin{cases} d \cdot [f(A)] & \text{取到期待维数} \\ 0 & \text{比期待维数小} \end{cases}$$

这里  $d$  是映射度, 即  $f(A)$  中几乎所有点的原像都是  $d$  个  $A$  中的点.

(这也不严格)

所以

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{projective formula} \\ \hline f_*(\alpha \smile f^*(\beta)) \\ = f_*(\alpha) \smile \beta \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{同调版本的} \\ \hline f(A \cap f^{-1}(B)) \\ = f(A) \cap B \\ \hline \end{array}$$

对于  $i = 1, \dots, n-1$ . 考虑

$$P_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \cdots & * \\ & \ddots & & & \\ & & * & \cdots & * \\ & & & \ddots & \\ & & & & * \end{pmatrix}$$

这比上三角矩阵群  $B$  在  $(i+1, i)$  位置多一个自由度.

齐次流形  $G/B$  和  $\mathcal{F}\ell(n)$  同胚. 那么  $G/P$  呢?

$$\begin{aligned} G/B &\cong \{V^0 \subseteq \dots \subseteq V^{i-1} \subseteq V^i \subseteq V^{i+1} \subseteq \dots \subseteq V^n\} \\ G/P &\cong \{V^0 \subseteq \dots \subseteq V^{i-1} \subseteq V^{i+1} \subseteq \dots \subseteq V^n\} \end{aligned}$$

且自然映射

$$G/B \longrightarrow G/P$$

就是“把 complete flags 中维数为  $i$  的子空间去掉”.

考虑

$$\begin{aligned} P_i/B &= \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \cdots & * \\ & \ddots & & & \\ & & * & \cdots & * \\ & & & \ddots & \\ & & & & * \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \cdots & * \\ & \ddots & & & \\ & & * & \cdots & * \\ & & & \ddots & \\ & & & & * \end{pmatrix} \\ &= (**)/(**) = \mathcal{F}\ell(2) = \mathbb{C}P^1 \end{aligned}$$

最后  $\mathcal{F}\ell(2) = \mathbb{C}P^1$  是因为  $\mathbb{C}^2$  中的旗实际上由维数为 1 的子空间决定.

另外注意到  $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$  是 Riemann 球.

$*$	$0$	$1$	$2$	$3$	$4$	$\dots$
$H^*(P_i/B)$	$\mathbb{Z}$	$0$	$\mathbb{Z}$	$0$	$0$	$\dots$

让我们考虑自然映射  $G/B \xrightarrow{\pi} G/P_i$ . 我们定义 **Demazure operator** 为

$$\partial_i: H^*(G/B) \xrightarrow[\pi_*]{\text{推出}} H^{*-2}(G/P) \xrightarrow[\pi^*]{\text{拉回}} H^{*-2}(G/B).$$

这里的  $2 = \dim G/B - \dim G/P = \dim P/B$ .

用旗的语言,

推出 $\pi_*$	=	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> 同调地 “把维数 <math>i</math> 的子空间 <math>V^i</math> 去掉” </div>
拉回 $\pi^*$	=	<div style="border: 1px solid black; padding: 5px; text-align: center;"> 同调地 “把 <math>V^{i-1} \subseteq V^{i+1}</math> 之间全部 <math>i</math> 维子空间加上” </div>

令  $B^- = w_0 B w_0$  为下三角矩阵群, 其中  $w_0$  是最长元  $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ & & & & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ . 那么我们记  $\Sigma_w$  为

$$[BwB/B] \text{ 作为上同调胞腔} = [\overline{B^-wB/B}] \text{ 作为基本类.}$$

这个等号实际上是通过计算下同调的相交证明的, 请见 [Fulton]. 于是

$$H^*(G/B) = \text{以 } \{\Sigma_w\}_{w \in \mathfrak{S}_n} \text{ 为基的自由 Abel 群}$$

令  $s_i = (i, i+1) \in \mathfrak{S}_n$  是  $i$  和  $i+1$  的对换. 注意到  $P_i = B \cup Bs_i B$ .

下面我们可以计算 Demazure operator 在  $\Sigma_w$  上的作用. 根据定义

$$\begin{aligned} \partial_i(\Sigma_w) &= \pi^*(\pi_*(\Sigma_w)) = \pi^*(\pi_*([\overline{B^-wB/B}])) \\ &= \delta_{\text{维数正确}} \cdot [\pi^{-1}(\pi(\overline{B^-wB/B}))] \\ &= \delta_{\text{维数正确}} \cdot [\pi^{-1}(\overline{B^-wP/P})] \\ &= \delta_{\text{维数正确}} \cdot [\overline{B^-wB/B} \cup \overline{B^-ws_i B/B}] \\ &= \begin{cases} [\overline{B^-ws_i B/B}], & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1, \\ 0, & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \Sigma_{ws_i}, & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1, \\ 0, & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

这里实际上用到了 **Tits system**.

Tits system 是说

$$BwB \cdot Bs_i B = \begin{cases} Bws_i B, & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1; \\ Bws_i B \cup BwB, & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1. \end{cases}$$

**注意 1** 实际上我们已经可以证明在任何系数下 Demazure operator 满足**幂零辫子关系 (braid relation)**. 但是之后我们会建立多项式版本的联系, 那时将可以直接证明.

**习题 1.** 哪条集合论的事实的上同调版本是  $g^* \circ f_* = F_* \circ G^*$ ? [提示:  $F(G^{-1}(A)) = g^{-1}(f(A))$ .]

**习题 2.** 根据 Poincaré 对偶,

$$H^*(\mathbb{C}P^n) \otimes H^{2n-*}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\sim} H^{2n}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$$

构成完美配对. 取  $H$  是  $\mathbb{C}P^n$  中任意一个超平面, 记  $x = [H] \in H^*(\mathbb{C}P^n)$ . 证明  $H^*(\mathbb{C}P^n)$  作为环同构于  $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ , 其中  $\deg x = 2$ . [提示: 显然  $H$  的 (实) 余维数是 2. 注意到不同超平面给出相同的基本类, 所以我们直接计算相交知道  $x^n = 1 \cdot [\text{点}] \neq 0$ . 要说明  $H^*(\mathbb{C}P^n)$  是由  $x$  生成的, 我们将  $H$  视为  $\mathbb{C}P^{n-1}$ , 用  $i^*$  结合完美配对的事实归纳证明.]

**习题 3.** 对于一般的  $d$  次超平面  $D \subseteq \mathbb{C}P^n$ , 证明  $[D] = dx$ , 其中  $x$  是超平面类. [提示: 注意到因为  $H^2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}x$ , 所以一定有一个整数  $d'$  使得  $[D] = d'x$ . 注意到  $D$  与一条一般位置的直线交  $d$  个点, 而直线又可以写成  $n-1$  个超平面的交,  $d'x \cdot x^{n-1} = [D] \smile [H]^{n-1} = [D \cap H_1 \cap \dots] = d \cdot [\text{点}] = dx^n$ , 所以  $d = d'$ . ]

**习题 4.** 请说明

$$\Sigma_w = [\overline{w_0 B w_0 w B / B}] = [\overline{B w_0 w B / B}]$$

[提示: 因为可以在  $GL_n$  中找到一条从 1 通往  $w_0$  的道路, 从而构造一个同伦. ]

**习题 5.** 在 [Fulton] 中, 为了计算 Demazure operators, 他用了拉回方阵  $\begin{array}{ccc} \square & \rightarrow & G/B \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/B & \rightarrow & G/P \end{array}$ , 证明这时  $\square$  和下面的集合是双射.

$$\square = \left\{ \dots \subseteq V^{i-1} \begin{array}{c} \subsetneq V_1^i \\ \supsetneq V_2^i \end{array} \subsetneq V^{i+1} \subseteq \dots \right\}.$$

### 1.3 抛物子群

对于  $GL_n$ , 对于  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ , 我们记 **抛物 (parabolic) 子群**

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} GL_{\lambda_1} & * & \cdots & * \\ & GL_{\lambda_2} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & GL_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

我们考虑  $G/P$ .

实际上 (集合论意义上可以直接验证)

$$G/P_\lambda = \left\{ 0 \subseteq V^{\lambda_1} \subseteq V^{\lambda_1 + \lambda_2} \subseteq \dots \subseteq \mathbb{C}^n \right\}$$

且如果  $P_1$  分的块都是  $P_2$  的子块, 那么

$$G/P_1 \rightarrow G/P_2$$

就是“把多余维数的子空间去掉”.

让我们用分成  $k$  组的  $n$  个标上 1 到  $n$  的  $\bullet$  来记  $\lambda_i$

$$(\lambda_1 \text{ 个 } \bullet)(\lambda_2 \text{ 个 } \bullet) \cdots (\lambda_k \text{ 个 } \bullet)$$

如果  $\lambda_i = 1$ , 则省略括号.

那么  $\lambda_1 + \dots + \lambda_j$  是第  $j$  组最后一个  $\bullet$  的编号.

第一个例子

$$\bullet \cdots \bullet_{i-1} (\bullet_i \bullet_{i+1} \bullet_{i+2} \cdots \bullet_n)$$

对应上一节的

$$P_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & \cdots & * \\ & & * & \cdots & * \\ & & & \ddots & * \end{pmatrix}$$

第二个例子

$$(\bullet \cdots \bullet_k) (\bullet_{k+1} \cdots \bullet_n)$$

对应 Grassmannian 流形/簇

$$G/P_\lambda = Gr(k, n) = \{0 \subseteq V^k \subseteq \mathbb{C}^n\}.$$

令

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k}$$

是“组内置换”构成的群.

注意到

$$P = \bigcup_{u \in \mathfrak{S}_\lambda} BuB.$$

(严格说还是用了 Tits system).

对于  $\sigma \in \mathfrak{S}_\lambda$ , 我们有

$$Bw\sigma P/P = BwP/P.$$

所以

$$G = \bigcup_{w \in \mathfrak{S}_w/\mathfrak{S}_\lambda} BwP \quad (\text{无交并}).$$

称  $\{BwP/P : w \in \mathfrak{S}_w/\mathfrak{S}_\lambda\}$  为  $G/P_\lambda$  上的 **Schubert 胞腔**.

**注意 1** 一般没有  $\dim BwP/P = 2\ell(w)$ .

但是, 如果  $w$  是陪集  $w\mathfrak{S}_\lambda$  中长度最小者, 则

$$\text{自然映射} : BwB/B \longrightarrow BwP/P$$

是双射 (同胚). 记

$$\mathfrak{S}^\lambda = \{\text{每个陪集 } \mathfrak{S}_w/\mathfrak{S}_\lambda \text{ 选出的唯一的长度最小者}\}$$

那么  $\{BwP_\lambda/P_\lambda : w \in \mathfrak{S}^\lambda\}$  给出  $G/P_\lambda$  的胞腔结构.

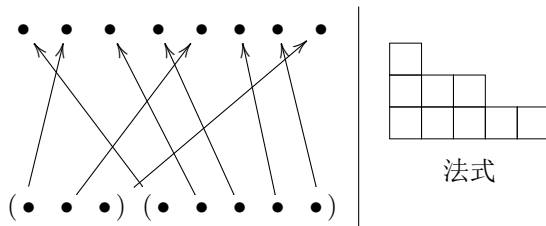
**注意 1** 这是因为作用  $P$  等于作用  $\bigcup_{u \in \mathfrak{S}_\lambda} BuB$ , 而  $BwB \cdot BuB = BwuB$  如果  $\ell(wu) = \ell(w) + \ell(u)$  (Tits system). 换句话说如果  $P$  内  $B$  以外的元素作用在  $BwB$  上一定无法回到  $BwB$ .

我们证明对于 Grassmannian 的情况

$$(\bullet \cdots \bullet)_1^k (\bullet \cdots \bullet)_{k+1}^n$$

$\mathfrak{S}^\lambda$  和  $k \times (n-k)$  的 Young 图 (保持  $\ell$ ) 一一对应.

请看



我们曾经提到  $\mathcal{F}\ell(n)$  是紧致的, 是因为  $\mathcal{F}\ell(n)$  是酉群  $U_n$  的商.

具体来说, 记  $K = U_n$ ,  $T_K$  是  $U_n$  中的对角矩阵. 那么

$$U_n/T_K \xrightarrow{\sim} G/B \cong \mathcal{F}\ell(n)$$

是同胚. 这实际上是如下一则线性代数的转述

任何旗都 admits 一个酉正交基.

但是  $U_n/T_K$  上面没有显然的代数簇结构 (酉群不是代数群!), 所以无法刻画 **Schubert 胞腔**. 但是当我们不用胞腔的时候, 复结构 (代数簇结构) 反而显得累赘.

注意  $\mathfrak{S}_n$  通过共轭, 作用在如下群上

$$U_n, \quad U_n \text{ 中的对角矩阵群} = T_K,$$

$$\text{GL}_n, \quad \text{GL}_n \text{ 中的对角矩阵群}.$$

但是唯独不作用在上三角矩阵群  $B$  上.

前两者诱导了  $\mathfrak{S}_n$  在

$$U_n/T_K \xrightarrow{\sim} G/B \cong \mathcal{F}\ell(n)$$

上的作用.

但是  $\text{GL}_n/B$  上面没有显然的  $\mathfrak{S}_n$  作用.

**注意 1** 注意到  $\mathfrak{S}_n$  通过共轭诱导的  $H^*(K)$  和  $H^*(T_K)$  上的作用都平凡. 因为我们可以找到  $w \in \mathfrak{S}_n$  的道路构造同伦. 但是在  $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$  上却不平凡. 原因是此时作用是  $xT_K \mapsto wxw^{-1}T_K$ , 乘在内侧. 另外, 我们几乎不如何知道  $\mathfrak{S}_n$  在胞腔上如何作用 (等价于  $\mathfrak{S}_n$  在 **Schubert** 多项式的作用).

上面的事实也有紧致版本. 记

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} U_{\lambda_1} & & & \\ & U_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

那么

$$G/P_\lambda = U_n/U_\lambda.$$

但是同样 **Schubert 胞腔** 也无法刻画.

**习题 1.** 证明  $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_\lambda$  每个陪集中都有一个唯一的长度最小者, 他们是那些组内单调递增的置换.

**习题 2.** 请验证  $G/P_\lambda = U_n/U_\lambda$ . [提示: 因为我们已经给出过  $G/P_\lambda$  对应的旗的刻画, 所以可以直接验证; 另一方面, 还可以说明  $U_\lambda = U_n \cap P_\lambda$ .]

**习题 3 (极大紧子群).** 证明  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  中任何一个紧致子群都共轭到  $U_n$  的子群. [提示: 需要用到一则事实, 紧致子群有 **Haar** 测度  $\mu$ . 任意取一个酉内积, 将这个酉内积对这个子群作用取平均, 如此得到一个新的酉内积, 而这个子群作用保持. 再利用事实  $\mathbb{C}^n$  上的所有酉内积都相同.]

**习题 4.** 证明  $\text{GL}_n/U_n$  是一个欧式空间. [提示: 回忆正交化算法给出的所谓 **QR** 分解; 对酉群也是类似的, 任何一个矩阵  $x$  都可以写成一个酉矩阵和一个上三角矩阵的乘积, 如果我们要求上三角矩阵的对角线上排列着 1, 那么这个分解是唯一的. 所以  $\text{GL}_n/U_n$  和对角线全为 1 的上三角矩阵同胚.]



## 1.4 双旗流形

Bruhat 分解

$$G = \bigcup_{w \in \mathfrak{S}_n} BwB \quad (\text{无交并})$$

有一个几何解释. 即

任何两个 Flag 都 admit 一组公共基.

而上面的解释可以用线性代数延拓定理解决.

对于一系列线性空间  $V$  的子空间  $\{V_i\}$ , 称基  $B$  是他们的基如果  $V_i \cap B$  是  $V_i$  的基.

回忆映射

$$G/B \longrightarrow \mathcal{F}\ell(n)$$

假设  $xB$  对应到旗

$$V^\bullet = \{V^i = \text{span}(x_1, \dots, x_i)\}.$$

那么  $V^\bullet$  的基的所有选择就是  $xB$  的列向量 (忽略列向量的顺序).

因此

任何两个 Flag 都 admit 一组公共基.

$\Downarrow$

任意  $x, y \in G$ , 存在  $w \in \mathfrak{S}_n$ ,  $x' \in xB, y' \in yB$ , 使得  $x'w = y'$

这等价到 Bruhat 分解.

回忆

$$\begin{array}{ccc} G & \xrightarrow{\text{对角}} & G/B \times G/B \\ & \downarrow & (xB, yB) \mapsto x \times x^{-1}yB \\ G & \xrightarrow{\text{左乘}} & G \times_B G/B \\ & & \text{比较} \\ B & \xrightarrow{\text{左乘}} & G/B \end{array}$$

因此

$$\begin{aligned} \text{对角 } G\text{-轨道}(G/B \times G/B) &= \text{左乘 } G\text{-轨道}(G \times_B G/B) \\ &= \text{pt} \times_G G \times_B G/B \\ &= \text{pt} \times_B G/B \\ &= B\text{-轨道}(G/B). \end{aligned}$$

于是我们发现

$$B\text{-轨道}(G/B) \longleftrightarrow \text{对角 } G\text{-轨道}(G/B \times G/B)$$

其中  $BwB/B$  对应于  $G/B \times G/B$  中的

$$\{(xB, yB) : x^{-1}y \in BwB\}.$$

此时我们称  $xB$  和  $yB$  对应的 flags 具有相对位置  $w$  (和标准记号 up to left and right).

对于两个 flags  $F_1^\bullet, F_2^\bullet$  具有相对位置  $w$ . 根据条件, 我们可以找到一个矩阵  $y$ , 使得

$$\text{span } yw^{-1} = U^\bullet, \quad \text{span } y = V^\bullet$$

即  $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$F_1^i = \text{span}(y_{w(1)}, \dots, y_{w(i)}), \quad F_2^i = \text{span}(y_1, \dots, y_i).$$

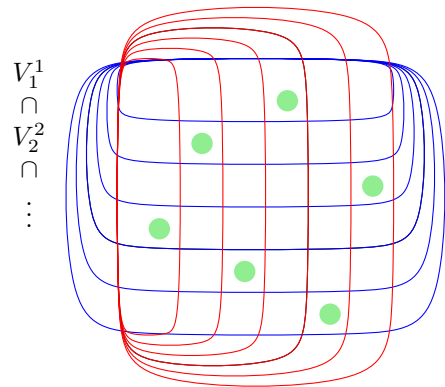
考虑

$$\begin{aligned} & \dim \frac{F_1^{i-1} + F_2^j \cap F_1^i}{F_1^{i-1} + F_2^{j-1} \cap F_1^i} \\ &= \dim \frac{\text{span}\{(y_{w(1)}, \dots, y_{w(i-1)}) \cup (y_1, \dots, y_j) \cap (y_{w(1)}, \dots, y_{w(i)})\}}{\text{span}\{(y_1, \dots, y_{w(i-1)}) \cup (y_1, \dots, y_{j-1}) \cap (y_{w(1)}, \dots, y_{w(i)})\}} \\ &= \#(\{1, \dots, w(i-1)\} \cup \{1, \dots, j\} \cap \{1, \dots, w(i)\}) \\ &\quad - \#(\{1, \dots, w(i-1)\} \cup \{1, \dots, j\} \cap \{1, \dots, w(i)\}) \\ &= \begin{cases} 1 & w(i) = j \\ 0 & \text{其他} \end{cases} \end{aligned}$$

所以这个恰好来自置换矩阵.

**注意 1** 这给出一个相对位置的内蕴刻画. 这样  $\mathcal{F}\ell(n)$  上的 Schubert 胞腔也可以内蕴刻画. 对于  $\mathcal{F}\ell(n)$ , 选定一个旗  $V_1^\bullet$ , 所有和这个  $V_1^\bullet$  相对位置为  $w$  的旗  $V_2^\bullet$  恰好对应 Schubert 胞腔  $BwB/B$ .

$$V_2^1 \subset V_2^2 \subset \dots$$



回忆 Zassenhaus' Butterfly Lemma

$$\begin{aligned} \frac{F_1^{i-1} + F_2^j \cap F_1^i}{F_1^{i-1} + F_2^{j-1} \cap F_1^i} &\cong \frac{F_2^{j-1} + F_1^i \cap F_2^j}{F_2^{j-1} + F_1^{i-1} \cap F_2^j} \\ &\parallel \\ \frac{F_1^i \cap F_2^j}{(F_1^{i-1} \cap F_2^j) + (F_1^i \cap F_2^{j-1})} &\cong \frac{(F_1^i + F_2^{j-1}) \cap (F_1^{i-1} + F_2^j)}{F_1^{i-1} + F_2^{j-1}} \end{aligned}$$

所以

$$\dim(F_1^i \cap F_2^j) = \#\{\bullet \leq i : w(\bullet) \leq j\}$$

$\Downarrow$

$$\dim(F_1^i + F_2^j) = i + j - \#\{\bullet \leq i : w(\bullet) \leq j\}$$

习题 1. 注意我这个蝴蝶定理比 *Serge Lang* 等书上多断言了一个同构, 请证明之.

习题 2. 对于三个子空间, 举例说明我们不能找到公共

$$0 \subseteq \langle e_1 \rangle \subseteq \mathbb{C}^2,$$

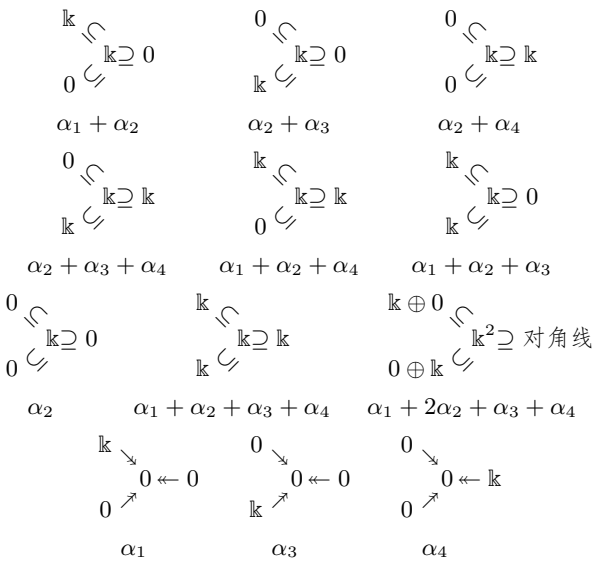
基. [提示: 例如  $0 \subseteq \langle e_2 \rangle \subseteq \mathbb{C}^2$ . ]

$$0 \subseteq \langle e_1 + e_2 \rangle \subseteq \mathbb{C}^2$$

习题 3. 证明对于任意两条线性子空间的链, 一定可以找到他们的一组基. [提示: 线性代数中学的  $\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$  的证明过程. ]

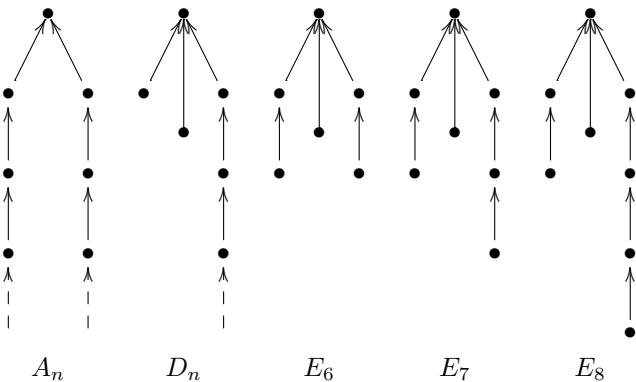
习题 4. 对于线性空间  $V$  中的三个线性子空间  $V_1, V_2, V_3$ , 证明一定存在这样一组基  $B$ , 使得  $V_i$  由  $(B + B) \cap V_i$  张成. 其中  $B + B$  为可以写成两个基之和的向量. [提示:

我非常确定这是对的, 但是我证明用了表示论. 我还没有想到简单证明. 原因如下, 每个子空间的指定给出  $D_4$  的一个 quiver 表示, 而其表示已经分类, 一定是以下 12 种可能性的直和



前面九种对应单射 (包含), 满足条件. ]

**注意 1** 实际上能有类似结论的情况很少. 他们分别是



每个箭头  $\rightarrow$  代表一个包含  $\subseteq$ . 注意  $A$  型是上上题,  $D_4$  的情况是上题.

## 参考文献

- Hatcher. Algebraic Topology.
- Bredon. Geometry and Topology. GTM139.

• 姜伯驹. 代数拓扑.

• Fulton. Young Tableaux.

• Chriss, Ginzburg. Representation Theory and Complex Geometry.

• Eisenbud, Harris. 3264 and all that.

关于 Lie 群有不少书, 推荐

• Bump. Lie Group. GTM 225. 里面也有很多相关的组合.

• Knapp. Lie groups beyond an introduction.

• Humphreys. Linear Algebraic Groups. GTM21. 请看 29. Tits system.

• Springer. Linear Algebraic Groups. 请看 8.5, Bruhat order 的几何解释.

## ★★ 菜谱 ★★

—如何计算上同调?

1. 计算群结构.

找胞腔结构, 计算他们的维数.

胞腔复形, 计算上同调.

没有奇数  $\implies$  复形平凡

2. 计算相交配对

取两个维数互补的基本类

移动到直交位置

计算相交点的数目

3. 计算推出拉回

计算像和原像

比维数

4. 计算环结构

取两个基本类, 求第三个基本类前系数

通过完美配对, 变成计算三个基本类相交

移动到直交位置, 计算相交点的数目

$$\boxed{\text{本节的上同调}} \approx \boxed{\text{集合论}} + \boxed{\text{算开闭}} + \boxed{\text{算维数}}.$$

## 2 纤维丛

上节我们提到关于计算环结构的方法只是理论上的, 但是实际并不能广泛地用于计算.

### 4. 计算环结构

取两个基本类, 求第三个基本类前系数  
通过完美配对, 变成计算三个基本类相交  
移动到直交位置, 计算相交点的数目

## 2.1 纤维丛

为了真的能够计算, 并更好地理解上同调, 我们需要理解纤维丛.

对于连续映射  $E \xrightarrow{\pi} B$ , 对于  $b \in B$ , 称  $\pi^{-1}(b) \subseteq E$  是  $b$  处的 **纤维 (fibre)**, 也记作  $E_b$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & B \\ \cup & & \cup \\ E_b & \xleftarrow{\text{原像}} & b \end{array}$$

$B$  和  $F$  是拓扑空间,

$$\begin{array}{ccc} E = B \times F & & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ B & & F \end{array}$$

那么映射  $E \xrightarrow{\pi_2} B$  每一点的纤维 (= 原像) 都是一个  $F$  的拷贝. 此时  $E \rightarrow B$  被称为以  $F$  为纤维的 **平凡丛**.

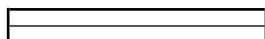
令  $E \xrightarrow{\pi} B$  是一个连续映射, 我们说这是一个以  $F$  为纤维的 **纤维丛 (fibre bundle)**, 如果局部上是平凡丛.

任意一个点  $b \in B$ , 都存在邻域  $U$  使得  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$  同构于平凡丛.

$$\begin{array}{ccccc} U \times F & \cong & \pi^{-1}(U) & \subseteq & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & = & U & \subseteq & B \end{array}$$

其中  $B$  叫 **底空间 (base space)**,  $E$  叫 **全空间 (total space)**.

例子: Möbius 带, 将下列纸带



卷成 Möbius 带时, 中间的轴线会粘成一个圆圈  $S^1$ . 而垂直方向则是一个区间  $I$ . 所以 Möbius 带  $\rightarrow S^1$  是以  $I$  为纤维的纤维丛.

不是所有纤维丛都平凡

例子: 任何一个流形  $M$ , 在点  $x \in M$  有切空间  $T_x M$ . 定义切丛

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

为所有点处切空间的形式并. 实际上可以找到  $TM$  的流形结构使得

$$TM \rightarrow M \quad \text{来自 } T_x M \text{ 的切向量 } \mapsto x$$

是一个纤维丛.

**注意 1** 请注意

不是所有切丛都平凡

例如著名的毛球 (hairy ball) 定理. 点  $x$  处切空间  $T_x M$  可以看出这一点处的无穷小移动组成的向量空间. 这可以用线素 (毛) 画出.

对于纤维丛  $\pi = \downarrow \begin{smallmatrix} E \\ B \end{smallmatrix}$ , 我们称  $s: \uparrow \begin{smallmatrix} E \\ B \end{smallmatrix}$  是一个 **截面 (section)** 如果  $\pi \circ s = \text{id}_B$ .

换句话说,  $\forall x \in B, s(x) \in E_x$ ,

**截面** = 每条纤维上选一个点.

**连续截面** = 每条纤维上连续地选一个点.

对于平凡丛  $E = B \times F$ , 截面就是一个函数  $B \rightarrow F$ .

而纤维丛局部上是平凡丛, 所以截面局部上是函数.

一般而言对于纤维丛, 截面并没有一个典范地选择 (有时甚至不存在, 例如 Möbius 带的边界), 即: 我们不能认为  $B \subseteq E$ .

因为我们总遇到大量的纤维丛, 如何计算他们的上同调呢? 对于平凡丛,  $E = B \times F$ , 可以用 **万有系数定理**, 例如在  $H^*(B)$  或  $H^*(F)$  其中一个自由的时候,

$$H^*(E) = H^*(B) \otimes H^*(F) \quad (\text{作为环}).$$

一般地我们也希望这个成立. 但是一般不能作为环同构, 也不典范.

取纤维丛  $\downarrow \begin{smallmatrix} E \\ B \end{smallmatrix}$ , 任意选择一个点  $b$ , 纤维为  $F$ . 由如下两个映射

$$\begin{array}{ccc} F \subseteq E & & E \rightarrow B \\ \downarrow & \text{诱导了} & \downarrow \\ H^*(F) \xleftarrow{\text{限制}} H^*(E) & & H^*(E) \xleftarrow{\pi^*} H^*(B) \end{array}$$

我们称  $\downarrow_B^E$  是 **形式的 (formal)** (非广泛术语) 如果满足下面的条件.

存在  $H^*(F)$  在  $H^*(E)$  的提升  $A$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{即子群 } A \subseteq H^*(E) \text{ 使得下面复合是同构} \\ H^*(F) \xleftarrow{\text{限制}} H^*(E) \xleftarrow{\supseteq} A \\ \text{假设 } \tilde{\alpha} \in A \text{ 对应到 } \alpha \in H^*(F) \end{array} \right]$$

使得

$$H^*(B) \otimes H^*(F) \longrightarrow H^*(E) \quad \beta \otimes \alpha \mapsto \pi^*(\beta) \smile \tilde{\alpha},$$

是群同构.

**注意 1** 此时

$$\begin{array}{ccc} H^*(F) & \xleftarrow{\text{限制}} & H^*(E) \\ \parallel & & \uparrow \\ H^*(F) & \longleftarrow & H^*(B) \otimes H^*(F) \\ \alpha & \longleftarrow & 1 \otimes \alpha \\ 0 & \longleftarrow & \beta \otimes \alpha \quad \deg \beta \geq 1 \end{array}$$

**注意 2** 此时

$$\begin{array}{ccc} H^*(E) & \xleftarrow{\pi^*} & H^*(B) \\ \uparrow & & \parallel \\ H^*(B) \otimes H^*(F) & \longleftarrow & H^*(B) \\ \beta \otimes 1 & \longleftarrow & \beta \end{array}$$

有两个非平凡情况能得到 formality.

1. **Leray–Hirsch 定理** 如果  $H^*(F)$  是自由模 (wrt 系数), 且存在一个  $H^*(E)$  上的一些元素  $\{\alpha_i\}$  使得  $\{\alpha_i\}$  限制在每一点处的纤维  $H^*(E_x)$  都构成一组基.

2. **Serre–Leray 谱序列退化情况** 如果  $H^*(B)$  和  $H^*(F)$  都只有偶数维的自由模 (wrt 系数).

前者请看 [Hatcher], 内含大量应用, 包括一个计算  $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$  的命题 (但是没有算出环结构, 所以我们不采用). 后者也推荐 [Hatcher].

请看我们上节提到的

$$G/B \xrightarrow{\pi} G/P_i.$$

这是一个以  $P_i/B \cong \mathbb{C}P^1$  为纤维的向量丛. 一切都只有偶数维的同调, 所以我们可以放心地得到

$$H^*(G/B) = H^*(G/P_i) \otimes H^*(\mathbb{C}P^1).$$

回忆  $H^*(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdot [\text{点}]$ . [注意:  $\mathbb{C}P^1$  的超平面就是点.]

等价地, 存在一个  $\omega_i \in H^2(G/B)$ , 使得

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathbb{C}P^1) = H^2(P/B) & \longleftarrow & H^2(G/B) \\ \cup & & \cup \\ [\text{点}] & \longleftarrow & \omega_i \end{array}$$

以及, 任何一个  $H^*(G/B)$  的元素都可以唯一地写成

$$\omega_i \smile \pi^* \alpha + \pi^* \beta, \quad \alpha, \beta \in H^*(G/P_i).$$

回忆 Demazure operator 是拉回和推出的复合, 所以对于  $f = \omega_i \smile \pi^* \alpha + \pi^* \beta \in H^*(G/B)$ ,

$$\begin{aligned} \partial_i f &= \partial_i(\omega_i \smile \pi^* \alpha + 1 \smile \pi^* \beta) && \text{定义} \\ &= \partial_i(\omega_i \smile \pi^* \alpha) + \partial_i(1 \smile \pi^* \beta) && \text{定义} \\ &= \pi^*(\pi_*(\omega_i \smile \pi^*(\alpha))) + \pi^*(1 \smile \pi_*(\pi^* \beta)) && \text{定义} \\ &= \pi^*(\pi_* \omega_i \smile \alpha) + \pi^*(\pi_* 1 \smile \beta) && \\ &\quad \because \text{projective formula} \\ &= \pi^*(\pi_* \omega_i) \smile \pi^* \alpha + \pi^*(\pi_* 1) \smile \pi^* \beta \\ &\quad \because \text{cup 积是代数同态} \\ &= \pi^* \alpha && \text{请看下一段} \end{aligned}$$

注意到  $\pi^*(\pi_* 1) \in H^{-2}(G/B) = 0$ .

注意到  $\pi^* \pi_* \omega_i \in H^0(G/B) \cong \mathbb{Z}$  是一个数, 所以可以用下面的拉回方阵计算  $\downarrow_{G/B \rightarrow G/P}^{P/B \rightarrow \text{点}}$ ,

$$\begin{array}{ccccc} [\text{点}] & \in H^2(P/B) & \xrightarrow{\text{推出}} & H^0(\text{点}) & \ni 1 \\ \uparrow & \uparrow \text{拉回} & & \parallel \text{拉回} & \uparrow \\ \omega_i & \in H^2(G/B) & \xrightarrow{\text{推出}} & H^0(G/P) & \ni \pi_* \omega_i \end{array}$$

所以  $\pi^* \pi_* \omega_i = \pi^* 1 = 1$ .

回忆上一节对紧致群的补充. 此时

$$G/B = U_n / \begin{pmatrix} * & \cdots & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}, \quad G/P_i = U_n / \begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix}.$$

此时  $\mathfrak{S}_n$  良定义作用在  $G/B = U_n/T$  上 (我们这里只用右作用),

$$U_n/T \ni xT \xrightarrow{\sigma} x\sigma^{-1}T \in U_n/T.$$

这是良定义的是因为  $\sigma T \sigma^{-1} = T$ .

此时

$$\mathfrak{S}_{\{1, \dots, i-1\}} \times \mathfrak{S}_{\{i, i+1\}} \times \mathfrak{S}_{\{i+1, \dots, n\}}$$

还良定义地作用在  $G/P_i = U_n / \begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix}$  上, 和上面相同的公式.

但是  $s_i$  作用是平凡的, 因为  $s_i \in \begin{pmatrix} * & * & * \\ & * & * \\ & & * \end{pmatrix}$ . 所以

$$H^*(G/B) \xleftarrow{\pi^*} H^*(G/P)$$

的像是关于  $s_i$  对称的.

特别地, Demazure operator 的在  $s_i$  作用下不变.

**习题 1.** 考虑紧致的版本  $U_n$  为酉群,  $T_K$  为其对角矩阵. 注意到  $U_n/V = Gr(k, n)$ , 其中  $V = \begin{pmatrix} U_k \\ U_{n-k} \end{pmatrix}$ . 由此说明

$$H^*(\mathcal{F}\ell(n)) = H^*(\mathcal{F}\ell(k)) \otimes H^*(\mathcal{F}\ell(n-k)) \otimes H^*(Gr(k, n-k)).$$

[提示: 利用  $U_n/T_K \rightarrow U_n/V$ . 需要证明  $V/T_K = \mathcal{F}\ell(k) \times \mathcal{F}\ell(n-k)$ .]

**习题 2.** 回忆我们之前定义的  $[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ,  $[n]! = [n] \cdots [1]$ . 我们可以定义  $q$ -二项式系数  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$ . 证明这是  $\mathbb{F}_q$  中  $n$  维空间  $k$  维子空间的数目. [提示: 我们之前将  $[n]!$  解释成 Hilbert 多项式. 注意到张量的 Hilbert 多项式是 Hilbert 多项式相乘. 所以根据上题我们得到  $H^*(Gr(k, n))$  的 Hilbert 多项式. 而  $Gr(k, n)$  也有胞腔结构, 所以前面某道旗流形的问题是一样的.]

## 2.2 更多计算

## 2.3 切空间的计算

令  $G = GL_n$ ,  $H$  为一个子群, 记  $\mathfrak{g} = \mathfrak{gl}_n$ ,  $\mathfrak{h}$  为  $H$  的 Lie 代数. 记  $\text{ad}_x : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  为共轭  $A \mapsto xAx^{-1}$ .

对于  $xH \in G/H$ , 考虑商空间  $\mathfrak{g}/\text{ad}_x \mathfrak{h}$ . 注意到  $xH = yH$  时,  $\mathfrak{g}/\text{ad}_x \mathfrak{h} = \mathfrak{g}/\text{ad}_y \mathfrak{h}$ .

考虑映射

$$\bigcup_{x \in G/H} \mathfrak{g}/\text{ad}_x \mathfrak{h} \longrightarrow G/H$$

这定义了一个  $G/H$  向量丛. 实际上这就是  $G/H$  的切丛.

对于  $g \in G$ , 定义

$$\text{ad}_g : \mathfrak{g}/\text{ad}_x \mathfrak{h} \xrightarrow{\text{ad}_g} \mathfrak{g}/\text{ad}_{gx} \mathfrak{h}.$$

这复原了  $G$  在  $G/H$  上的左乘作用.

**注意 1** 要严格说明, 请看下图. 利用右平移,

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{\sim} & TG \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xlongequal{\quad} & G \end{array}$$

得到  $G$  上诱导的  $TG$  作用可以重新写成

$$G \underset{(\text{左乘} \times \text{共轭})}{\curvearrowright} G \times \mathfrak{g} \underset{(\text{右乘} \times \text{平凡})}{\curvearrowright} G$$

而在  $x$  处的  $H$  轨道等于把  $H$  这个子群从单位元处移过来, 所以 (切片定理)

$$xH \text{ 在 } G/H \text{ 的切空间} = \frac{x \text{ 在 } G \text{ 上的切空间}}{x \text{ 在 } H \text{ 轨道上的切空间}} = \mathfrak{g}/\text{ad}_x \mathfrak{h}.$$

因为商比较难把握, 所以我们考虑其对偶, 即余切丛  $T^*(G/B)$ . 为了计算  $(\mathfrak{g}/\text{ad}_x \mathfrak{b})^*$ , 我们考虑  $\mathfrak{g}$  上的二次型

$$\mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_n : (A, B) \mapsto \text{tr}(AB).$$

(注意: 这不是 Killing form)

不难验证这是完美配对, 且

$$\text{上三角代数} \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}^\perp = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ & \ddots & \\ & & 0 \end{pmatrix} \text{ 严格上三角代数}$$

$$\langle \text{ad}_x A, B \rangle = \langle A, \text{ad}_{x^{-1}} B \rangle$$

令  $\mathfrak{n}$  为严格上三角代数. 因此

$$(\mathfrak{g}/\text{ad}_x \mathfrak{b})^* = \text{ad}_x \mathfrak{n}.$$

对应的  $g \in G$  左平移作用 (注意到余切丛左乘诱导的方向  $g : T_{gx}^* \rightarrow T_x^*$ )

$$\text{ad}_{gx} \mathfrak{n} \xrightarrow{\text{ad}_g^{-1}} \text{ad}_x \mathfrak{n}.$$

**注意 1** 令  $B$  是上三角矩阵群,  $\mathfrak{b}$  为上三角 Lie 代数. 那么

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}/\text{ad}_x \mathfrak{b} &= \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix} / x \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix} x^{-1} \\ &= x \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix} x^{-1} \end{aligned}$$

算是算出来了, 但是我们没法从里面看出  $g \in G$  的作用.

考虑  $B$  在  $G$  中所有的共轭类

$$\mathcal{B} = \{x\mathfrak{b}x^{-1} \subseteq G : x \in G\}.$$

考虑

$$G \rightarrow \mathcal{B} \quad x \mapsto x\mathfrak{b}x^{-1}$$

不难发现  $x\mathfrak{b}x^{-1} = y\mathfrak{b}y^{-1}$  当且仅当

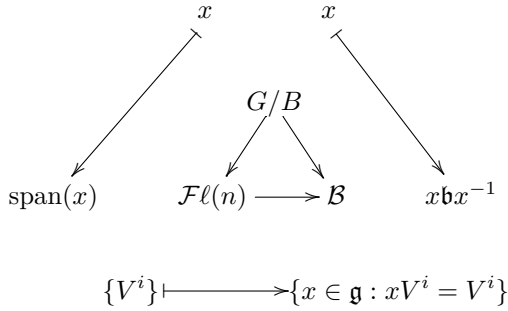
$$y^{-1}x \in \{g \in G : g\mathfrak{b}g^{-1} = \mathfrak{b}\} \stackrel{\text{线性代数}}{=} B$$

所以有同构

$$\begin{array}{ccc} G \underset{\text{左乘}}{\curvearrowright} G/B & & xB \\ \downarrow & & \downarrow \\ G \underset{\text{共轭}}{\curvearrowright} \mathcal{B} & & x\mathfrak{b}x^{-1} \end{array}$$

我们考虑  $B$  的共轭类也有类似的结果.

所以  $G/B$  有很多解释.



在一个  $\text{flag}\{V^i\} \in \text{Fl}(n)$  处的余切空间是

$$\{x \in \mathfrak{g} : x \text{ 幂零}, x V^i = V^i\}.$$

在一个  $\mathfrak{b}' \in \mathcal{B}$  处的切空间是  $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}'$ . 余切空间是

$$\{x \in \mathfrak{b}' : x \text{ 幂零}\}.$$

习题 1. 验证

$$\{g \in G : g b g^{-1} = \mathfrak{b}\} \stackrel{\text{线性代数}}{\cong} B.$$

习题 2. 验证  $\text{Fl}(n) \rightarrow \mathcal{B}$  的映射是

$$\{V^i\} \longmapsto \{x \in \mathfrak{g} : x V^i = V^i\}.$$

习题 3 (Springer 理论). 考虑矩阵

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & \\ & 0 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 0 \end{pmatrix}.$$

记

$$\text{Fl}_x = \{V^i \in \text{Fl}(n) : x V^i = V^i\}.$$

求  $\dim \text{Fl}_x$ , 以及  $\text{Fl}_x$  有多少不可约分支? [提示: 其实, 这是  $x$  的不变子空间组成的旗. 只要分两种情况,  $V^2$  是特征子空间时, 有  $\dim \mathbb{C}P^1$  多种选择. 当  $V^2$  不是特征子空间时,  $V_2$  必须选为  $x^{-1}(V^1)$ . 而  $V^1$  的选择也有  $\dim \mathbb{C}P^1 \setminus \infty$  多种选择, 维数是 2, 不可约分支数目是 2. 这分别对应

$$\begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \hline \end{array} \text{ 和 } \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}. ]$$

**注意 1** 这个可以推广到任意的幂零矩阵上. 注意 *Jordan* 标准型告诉我们幂零矩阵也由 *Young* 图标定. 对应的连通分支的数目恰好是 *hook length*.

### 参考文献

- Hatcher. Algebraic Topology.
- Hatcher. Spectral Sequences.
- 時枝正. Topology in Four Days [翻译: 拓扑四日谈].

## 4 K 理论速成

## 5 等变拓扑速成

- 5.1 等变上同调
- 5.2 等变 K 理论

## 6 收纳箱

- 6.1 Connected K-theory
- 6.2 相交上同调
- 6.3 量子上同调
- 6.4 反常层
- 6.5 旗流形的推广
- 6.6 Hilbert 概形 (Hilbert Schemes)
- 6.7 箭图簇 (Quiver Varieties)
- 6.8 动量图 (Moment Graphs)
- 6.9 热带几何?
- 6.10 扭结
- 6.11 Buildings?
- 6.12 Cluster 代数
- 6.13 Hall 代数