几何拓扑自驾游

熊锐

2021 年 4 月 11 日

Contents

1 上同调速成

本节介绍如何理解和使用奇异 (singular) 上同调 (cohomology) 群.

对于拓扑空间 X, 上同调群 $H^*(X)$ 是 ____.

就像即使并不懂电脑的运行原理, 但是却可以使用电脑. 但是, **每多理解一点原理, 能做的事儿就多一点**.

本节大部分内容成立都是需要条件的, 通常会在提及之后的评注中给出.

实际上, 代数拓扑的使用原则是

$$\boxed{\text{绝不使用定义直接计算}}.$$

我们永远是发展足够多的理论, 再用刻画让计算成功.

代数拓扑在组合中的相当于提供另一种计数工具. 其有行之有效原因在于, 相当一部分计算其实可以约化成计算集合. 如果我们相信不同计数方法计算数目给出相同结果, 那我们也应该相信不同拓扑方法计算同调群会给出相同结果.

1.1 胞腔

我们在本小节需要下同调 $H_*(X)$ 和相对下同调 $H_*(X,Y)$, 其中 $Y \subseteq X$ 是一个子集.

记 n 维球面 (sphere) 和 n 维圆盘 (disk) 为

$$S^n = \{(x_1,\dots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2 = 1\};$$

$$D^n = \{(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2+\cdots+x_n^2 \le 1\}.$$

注意 $S^{n-1} \subseteq D^n$ (上标是维数).

需要知道的基本事实是

	0	1	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$
$H_*(S^n)$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$
$H_*(D^{n+1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$H_*(D^{n+1},S^n)$	0	0	$\cdots$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$

最后一行来自于长正合序列. 可以这样记:

D^{n+1} 相对 $S^n = D^{n+1}/S^n$ 相对于缩点 $= S^{n+1}$ 相对于一个点.

这里 D^{n+1}/S^n 表示把 D^{n+1} 上的 S^n 粘成一点 (缩点).

上同调其实是一样的

	0	1	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$
$H^*(S^n)$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$
$H^*(D^{n+1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$H^*(D^{n+1}, S^n)$	0	0	$\cdots$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$

我们说一个拓扑空间 X 是 **CW 复形 (CW complex)**, 如果 X 是由圆盘 D^n 按照维数顺序粘结而成.

准确一点: X^0 是一些离散的点; X^1 是往 X^0 上粘 $D^1 =$ 区间$[0,1]$, 使得 $0, 1$ 粘到 X^0 上; X^2 是往 X^1 上粘 D^2, 使得 D^2 的边界 S^1 粘到 X^1 上; 以此类推.

这样依次得到的 X^n 叫作 X 的**骨架 (skeleton)**, 每个黏上去的 D^n 叫作一个 n 维胞腔.

注意 1 *D^n 的边界 S^{n-1} 必须落在低一维的 "骨架" X^{n-1} 上. (不能不粘)*

注意 2 *D^n 的内部到 X 是单射. (不能粘)*

注意 3 *严格来说, CW 的复形的拓扑是弱拓扑, 即使得每个胞腔的粘结映射连续的最弱拓扑. (C=cellular, W=weak) 其实 CW 复形的拓扑有很多点集拓扑的良好性质, 请见 [Bredon].*

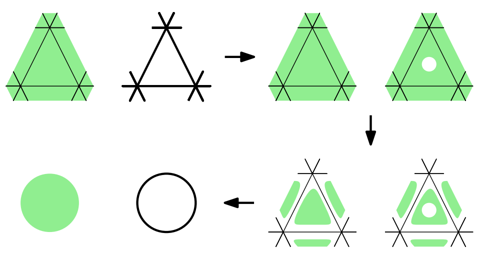
如果 X 有 CW 复形的结构, 记 X^n 是 n 维的骨架. 那么 $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \cdots$. 我们可以考虑相对同调 $H_*(X^i, X^{i-1})$ 和相对上同调 $H^*(X^i, X^{i-1})$.

有下面这个重要事实

$$\boxed{H^*(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \text{以所有 n-维胞腔为基生成的自由 Abel 群.} & * = n \\ 0 & * \neq n. \end{cases}}$$

这里 $X^{-1} = \varnothing$. 下同调结果是一样的. 请对比 $H_*(D^n, S^{n-1})$. 这是**切除定理 (excision)** 的一个应用.

证明如下



(图中全是三角形, 但是 CW 复形不一定要求是三角形)

例如 S^n 是一个 CW 复形. 因为我们可以把 D^n 的边界 S^{n-1} 整个粘到一个点上得到 S^n. 最简单的胞腔取法是

维数	0	1	$\cdots$	$n-1$	n
胞腔数量	1	0	$\cdots$	0	1
骨架	点	点	$\cdots$	点	S^n
$H_n(X^n, X^{n-1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$

例如 D^n 本身也是一个 CW 复形. 最简单的胞腔取法是

维数	0	1	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
胞腔数量	1	0	$\cdots$	1	1	1
骨架	点	点	$\cdots$	点	S^{n-1}	D^n
$H_n(X^n, X^{n-1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

下面假设 X 是 CW 复形, 记 $C_n = H_n(X^n, X^{n-1})$. 那么存在一条复形

$$\cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

使得其同调群同构于 $H_*(X)$. 记 $C^n = H^n(X^n, X^{n-1})$. 那么存在一条复形

$$0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^n \longrightarrow \cdots$$

使得其上同调群同构于 $H^*(X)$. 这被称为**胞腔 (cellular) 同调**.

这个定理本质上只是同调代数的追图, 见 [姜].

注意 1 *在一些 "正则" 的情况, 这个复形之间的微分 ∂ 是可以 "看出来" 的. 例如, 当 X 是多面体的情况, n 维抱歉就是一个 n 维面, 那么*

$$\partial(\text{某个 } n \text{ 维面}) = \sum \text{这个面的 } n-1 \text{ 维边}.$$

这里的 "和" 需要根据预先指定的定向决定正负.

注意 2 *有一些书喜爱使用* **单纯复形 (simplicial complex)**, *此时要任何一个单纯形 (三角形) 每条边都不黏在一起不相交, 因此往往简单的图形需要多次重分才能做到. 但是这样的好处是可以计算乘法结构.*

注意 3 *在 [Hatcher] 中, 他还定义了 Δ 复形, 这时全部都是单纯形 (三角形), 但是允许一个单纯形内部的边相交. 但是实际上三角形, 四边形, 五边形, 甚至二边形都是可以的.*

如果对于紧致的 Hausdorff 空间 X(例如流形), 如果有一个**分层 (stratification)**

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X$$

使得每个 X_k 都是闭的, 且 $X_k \setminus X_{k-1} \cong \mathbb{R}^{a_k}$ 对某个 a_k. 我们称这个分层给出一个胞腔结构. 我们也称 $X_k \setminus X_{k-1}$ 是一个 a_k 维胞腔.

记 $X^k = \bigcup_{\dim X_i \le k}$, 那么同样也有

$$\boxed{H^*(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \text{以所有 n-维胞腔为基生成的自由 Abel 群.} & * = n \\ 0 & * \neq n. \end{cases}}$$

所以一切照旧.

对于线性空间 $V = \mathbb{C}^n$, 一个**旗 (flag)** 是一串子线性空间

$$V^0 \subseteq V^1 \subseteq \cdots \subseteq V^n$$

使得 $\dim V^i = i$. 此时为了区别也叫**完全 (complete) 旗**. 考虑 $\mathcal{F}\ell(n)$ 为 n 维复向量的所有旗 (flag) 组成的集合, 这可以被赋予流形和代数簇的结构. 我们称 $\mathcal{F}\ell(n)$ 为**旗流形 (flag manifold)** 或**旗簇 (flag variety)**.

记 $G = \mathrm{GL}_n$, B 是全体上三角矩阵. 将每一个 $x \in \mathrm{GL}_n$ 视作 n 个线性无关的列向量 $(x_1, \ldots, x_n)$, 我们得到一个其**张成的旗** $\operatorname{span} x$

$$0 \subseteq \operatorname{span}(x_1) \subseteq \operatorname{span}(x_1, x_2) \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_n).$$

这定义了一个 (连续) 映射 $\operatorname{span} : \mathrm{GL}_n \to \mathcal{F}\ell(n)$.

通过线性代数, 不难发现 span 是满射, 且

$$\operatorname{span} x = \operatorname{span} y \iff x = yb \text{对某个 } b \in B.$$

换言之, $G/B \to \mathcal{F}\ell(n)$ 是双射 (同胚).

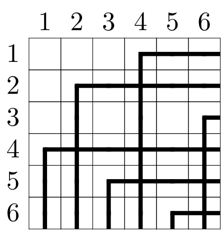
对于置换 $w \in \mathfrak{S}_n$, 记 w 是对应的置换矩阵, 即使得 $w(e_i) = e_{w(i)}$, 其中 e_i 是标准基. 也就是在 $i = 1, \ldots, n$ 位置 $(w(i), i)$ 上是 1, 其他位置是 0 的矩阵.

利用 Gauss 消元法, 可以得到 **Bruhat 分解**

$$G = \bigcup_{w \in \mathfrak{S}_n} BwB \qquad \text{(无交并).}$$

其实就是打洞. 实际上这是 G 的双陪集分解. 等价地, 这说明 B 在 G/B 上作用的轨道与对称群元素一一对应. 其中 BwB/B 被称为 **Schubert 胞腔**.

按下图表定义 U_w



$\begin{pmatrix} 1\,2\,3\,4\,5\,6 \\ 4\,2\,3\,1\,6\,3 \end{pmatrix}$

$$U_w = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 0 & \mathbb{C} & 0 & \mathbb{C} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

那么利用打洞的技巧 (见 [Fulton]), 可以得到

$$\text{自然映射} : U_w \to BwB/B$$

是双射 (同胚).

用 ℓ 表示逆序数. 于是 $BwB/B \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$, 换句话说拓扑维数是 $2\ell(w)$. 因为 U_w 中 "$\mathbb{C}$" 的数目是 Rothe 图中 $\boxplus$ 的的数目.

现在我们考虑 $X^i = \bigcup_{2\ell(w) \le i} BwB/B$. 这给出 $\mathcal{F}\ell(n)$ 的一个胞腔结构. 但是因为我们**没有奇数维的胞腔**, 所以胞腔复形将形如

$$0 \to C_0 \to 0 \to C_2 \to 0 \to C_4 \to \cdots ;$$

$$\cdots \to C_4 \to 0 \to C_2 \to 0 \to C_0 \to 0.$$

所以 $H^i(\mathcal{F}\ell(n)) = C^i$, $H_i(\mathcal{F}\ell(n)) = C_i$.

回忆 C_{2i}(和 C^{2i}) 是维数为 $2i$ 的胞腔生成的自由 Abel 群. 我们用 $[BwB/B]$ 记对应的基. 注意: $\dim[BwB/B] = 2\ell(w)$.

于是我们得到了

$$H^*(G/B) = \text{以 } \{[BwB/B]\}_{w \in \mathfrak{S}_n} \text{ 为基的自由 Abel 群}$$

$$H_*(G/B) = \text{以 } \{[BwB/B]\}_{w \in \mathfrak{S}_n} \text{ 为基的自由 Abel 群}$$

注意 1 *我们需要一则事实, $\mathcal{F}\ell(n)$ 是紧致的 (完备的). 这是因为紧 Lie 群 $U_n \subseteq \mathrm{GL}_n$ 到 $\mathcal{F}\ell(n)$ 是满射 (线性代数).*

注意 2 *我们还需要一则事实, 每一个 BwB/B 的闭包都是一些 BuB/B 的并. 这是因为 B 作用, 所以轨道的闭包还是轨道的并.*

实际上 $BuB/B \subseteq \overline{BwB/B}$ 当且仅当在 **Bruhat order** *下 $u \le w$.*

注意 3 *实际上 Schubert 胞腔也给出 CW 复形意义上的胞腔. 这可以用 Morse 理论的类比 Białynicki–-Birula 定理得到, 请看 [CG] 第二章某一节.*

习题 1. 验证 $G/B \to \mathcal{F}\ell(n)$ 是双射. ［提示：利用基的延拓定理证明满射，再证明正文中提到的 $\operatorname{span} x = \operatorname{span} y$ 的等价条件．］

习题 2. 验证 $U_w \to BwB/B$ 是双射. ［提示：首先证明 U_w 在 $G \to G/B$ 下的像落在 BwB/B 内；对于每个 $x \in G$，证明 xB/B 一定等于某个 yB/B 对某个 $y \in U_w$，这需要从最后一行开始打洞；最后证明这是单射，这需要从最后一行开始比起．］

习题 3. 证明 $\dim G/B = 2\max_{w \in \mathfrak{S}_w} \ell(w)$. 利用 G/B 光滑的事实说明只有唯一的元素取到最大值.

习题 4. 记 $[n]=\frac{\mathbf{q}^n-1}{\mathbf{q}-1}$, $[n]!=[n]\cdot[n-1]\cdot\cdots\cdot[1]$. 经典的计数表明 $[n]!$ 是有限域 $\mathbb{F}_{\mathbf{q}}$ 上 n 维线性空间中旗的数量. 证明这还是 $H^*(G/B)$ 的 *Poincaré* 多项式

$$[n]!=\sum_k \operatorname{rank} H^{2k}(G/B)\mathbf{q}^k.$$

[提示: 在有限域上也有 Schubert 胞腔, 这时 $BwB/B\cong\mathbb{F}_{\mathbf{q}}^{\ell(w)}$, 这贡献 $\mathbf{q}^{\ell(w)}$ 这么多元素, 而在 $\mathbb{C}$ 上的情况, 这时 $BwB/B\cong\mathbb{C}^{\ell(w)}$ 在 Poincaré 多项式中贡献 $\mathbf{q}^{\ell(w)}$.]

习题 5. 考虑**复射影空间** $\mathbb{C}P^n$ 为 $n+1$ 维空间所有的 1 维子空间. 将 $\mathbb{C}P^n$ 写成一些 $\mathbb{C}^{2i}$ 的并, 并且证明 $H^{2k+1}(\mathbb{C}P^n)=0$, 且

	0	2	$\cdots$	$2n$	$2n+1$	$\cdots$
$H^*(\mathbb{C}P^n)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\cdots$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$

[提示: 对非零向量 $(x_0,\ldots,x_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$, 记 $[x_0:\cdots:x_n]$ 为对应的 1 维子空间. 换言之 $[x_0:\cdots:x_n]=[y_0:\cdots:y_n]$ 当且仅当 $(x_0,\ldots,x_n)=\lambda(y_0,\ldots,y_n)$ 对某个 $\lambda\in\mathbb{C}^\times$. 对 $i=0,\ldots,n$, 记 $A^i=\{[\cdots 0:1:\underbrace{\mathbb{C}:\cdots:\mathbb{C}}_{i}]\}$.]

1.2 推出与拉回

令 $X\xrightarrow{f}Y$ 是一个连续映射, 那么诱导了**拉回 (pull back)**

$$H^*(X)\xleftarrow{f^*}H^*(Y).$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 这是一个齐次映射.

$$\alpha\in H^n(Y)\quad\Longrightarrow\quad f^*(\alpha)\in H^n(X).$$

$\boxed{\text{注意 2}}$ 这是一个代数同态.

$$f^*(\alpha\smile\beta)=f^*(\alpha)\smile f^*(\beta).$$

令 X 是紧致光滑定向流形. 那么有**Poincaré 对偶**

$$H^*(X)\xrightarrow{\sim}H_\bullet(X)\qquad *+\bullet=\dim X.$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 这个最经典的, 也最容易理解的是组合的解释, 见 *[姜]*. 现代通行的做法是用 *cap* 积 $\frown$ 给出具体的映射. 更进一步还可以用层的语言改写 *(*与对偶层对偶*)*.

$\boxed{\text{注意 2}}$ 这个同构需要选定一个定向, 所以区分“可定向 *(orientable)*”和“定向 *(oriented)*”.

假设 X 和 Y 都是紧致光滑定向流形. 令 $X\xrightarrow{f}Y$ 是一个连续映射, 那么可以定义**推出 (push forward)**

$$H^*(X)\xrightarrow{f_*}H^\dagger(Y),$$

其中 $\dim X-*=\dim Y-\dagger$, 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) & \longrightarrow & H^\dagger(Y)\\ {\scriptstyle 对偶}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle 对偶}\\ H_\bullet(X) & \longrightarrow & H_\bullet(Y)\end{array}$$

即, 先对偶到下同调, 推出, 再对偶回上同调.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 这不是一个齐次映射.

但是如果我们对 $\alpha\in H^*(X)$, 记 $\operatorname{codim}\alpha=\dim X-*$, 那么 f_* 保持 codim.

$\boxed{\text{注意 2}}$ 这不是一个代数同态. 但是对于 $\alpha\in H^*(X),\beta\in H^*(Y)$, 有 **projective formula**

$$f_*(\alpha\smile f^*(\beta))=f_*(\alpha)\smile\beta.$$

这是一个“模同态”, 因为通过 f^*, $H^*(X)$ 是 $H^*(Y)$-代数, 从而是 $H^*(Y)$-模.

$\boxed{\text{注意 3}}$ 其实我们不需要 X 和 Y 都紧致, 只需要 f 是**逆紧的 (proper)** 即可定义; 实际上最需要的是当 f 是一个纤维丛, 且纤维是紧致光滑定向流形.

$\boxed{\text{注意 4}}$ 对于一个"拉回方阵":

即 $\square = \{(y,z) \in Y \times Z : f(y) = g(z)\}$. 从 $H^*(Y)$ 到 $H^*(Z)$ 的两个映射

$$g^* \circ f_* = F_* \circ G^*$$

$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

令 X 是一个紧致流形, 设 $[X]$ 使得

$$\text{单位元 } 1 \in H^0(X) \overset{\text{对偶}}{\longleftrightarrow} [X] \in H_n(X)$$

我们称 $[X]$ 是 X 的**基本类 (fundamental class)**.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 如果给 X 一个三角剖分, 即把 X 分割成一些单纯形, 那么 $H_n(X)$ 是这些单纯形的和 (事先选好定向) 的类. 换句话说,

$$\boxed{[X] = \text{"同调意义下"的 } X \text{ 本身.}}$$

令 Y 是一个紧致流形, X 是一个嵌入**闭**子流形. 令 $i : X \to Y$ 是包含映射. 定义 X 在 Y 中的**fundamental class** (滥用记号)

$$[X] = i_*(1) \in H^*(Y),$$

特别地, $1 = [Y]$.

请注意!

$$\boxed{\deg[X] = \operatorname{codim} X = \dim Y - \dim X \text{ 是 } X \text{ 的余维数.}}$$

另外, $[X] \overset{\text{有可能}}{=\!=} 0$.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 请看

$$\begin{array}{ccccc} 1 \in & H^0(X) & \longrightarrow & H^{\operatorname{codim} X}(Y) & \ni [X] \\ & \text{对偶} \big\downarrow & & \big\downarrow \text{对偶} & \\ [X] \in & H_{\dim X}(X) & \longrightarrow & H_{\dim X}(Y) & \ni (\cdots) \end{array}$$

所以

$$\boxed{[X] = \text{"}Y \text{ 的同调意义下"的 } X \text{ 本身.}}$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 对于代数簇, 即使子簇 X 不是光滑的, 我们也可以在 $H^*(Y)$ 中定义**代数闭链 (algebraic cycles)** $[X]$. 但是至少需要是闭的. 使用的方法是 *Borel–Moore* 同调, 请见 *[Fulton]*.

$\boxed{\text{注意 2}}$ 直接把代数闭链拿出来商掉"代数"同伦, 这就是**周环 (Chow ring)** 的定义. 只有 X 是光滑的时候, X 的周"环"才是环.

$\boxed{\text{注意 3}}$ 一般来说上同调不一定总是由代数闭链生成的, 这个是被 *well-studied*, 更广的配边理论也对此有研究.

—**下面我们用 fundamental classes 重新理解上同调**—

以下内容不尽严格. 严格地, 要加何种条件应该看 [Fulton], 周环的版本应该看 [3264]. 但是拿来用基本是没问题的, 而且实际上用式性类等工具能很大程度上避免这类问题.

---

1. **Cup 积**

假设 $\dim A = a, \dim B = b$. 那么 $A \cap B$ 的期待维数是 $n - [(n-a) + (n-b)]$. 此时

$$[A] \smile [B] = \begin{cases} [A \cap B] & A \text{ 和 } B \text{ 直交} \\ 0 & \text{比期待维数小} \\ \text{不知道} & \text{比期待维数大} \end{cases}$$

在 A 和 B **直交 (transversal)** 时, 一定取到期待维数.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 所谓直交是说局部上上看是线性空间的交, 也就是说没有 $\asymp$.

$\boxed{\text{注意 2}}$ 微分几何中需要计算定向, 但是如果是代数簇, 定向是复结构一定选定的, 所以没有问题.

---

2. **拉回** $(f : X \to Y)$

对于 $B \subseteq Y$, $\dim B = b$, 那么 $f^{-1}(B)$ 的期待维数是 $x - (y - b)$.

$$f^*[B] = \begin{cases} [f^{-1}(B)] & f^{-1}(B) \text{ 横截} \\ 0 & \text{比期待维数小} \\ \text{不知道} & \text{比期待维数大} \end{cases}$$

在 $f^{-1}(B)$ **横截 (transversal)** 时, 一定取到期待维数.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 所谓横截是说局部上上看是线性映射, 例如对应的 *Jacobi* 矩阵秩取到期待的秩.

(这不严格)

所以

$$\boxed{\begin{gathered} f^*(\alpha \smile \beta) \\ = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta) \end{gathered}} = \boxed{\begin{gathered} \text{同调版本的} \\ f^{-1}(A \cap B) \\ = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{gathered}}$$

---

3. **推出** $(f : X \to Y)$

对于 $A \subseteq X$, $\dim A = a$, 那么 $f(A)$ 的期待维数是 a.

$$f_*[A] = \begin{cases} d \cdot [f(A)] & \text{取到期待维数} \\ 0 & \text{比期待维数小} \end{cases}$$

这里 d 是映射度, 即 $f(A)$ 中几乎所有点的原像都是 d 个 A 中的点.

(这也不严格)

所以

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{projective formula}\\ f_*(\alpha\smile f^*(\beta))\\ =f_*(\alpha)\smile\beta\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{同调版本的}\\ f(A\cap f^{-1}(B))\\ =f(A)\cap B\end{array}}$$

对于 $i=1,\ldots,n-1$. 考虑

$$P_i=\begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix}$$

这比上三角矩阵群 B 在 $(i+1,i)$ 位置多一个自由度.

齐次流形 G/B 和 $\mathcal{F}\ell(n)$ 同胚. 那么 G/P 呢?

$$\begin{aligned} G/B &\cong\{V^0\subseteq\cdots\subseteq V^{i-1}\subseteq V^i\subseteq V^{i+1}\subseteq\cdots\subseteq V^n\}\\ G/P &\cong\{V^0\subseteq\cdots\subseteq V^{i-1}\qquad\quad\subseteq V^{i+1}\subseteq\cdots\subseteq V^n\}\end{aligned}$$

且自然映射

$$G/B\longrightarrow G/P$$

就是 "把 complete flags 中维数为 i 的子空间去掉".

考虑

$$\begin{aligned} P_i/B &= \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix}\Bigg/\begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}\Big/\begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix}=\mathcal{F}\ell(2)=\mathbb{C}P^1\end{aligned}$$

最后 $\mathcal{F}\ell(2)=\mathbb{C}P^1$ 是因为 $\mathbb{C}^2$ 中的旗实际上由维数为 1 的子空间决定.

另外注意到 $\mathbb{C}P^1=\mathbb{C}\cup\{\infty\}\cong S^2$ 是 Riemann 球.

$*$	0	1	2	3	4	$\cdots$
$H^*(P_i/B)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\cdots$

让我们考虑自然映射 $G/B\xrightarrow{\pi}G/P_i$. 我们定义 **Demazure operator** 为

$$\partial_i:\quad H^*(G/B)\underset{\pi_*}{\xrightarrow{\text{推出}}}H^{*-2}(G/P)\underset{\pi^*}{\xrightarrow{\text{拉回}}}H^{*-2}(G/B).$$

这里的 $2=\dim G/B-\dim G/P=\dim P/B$.

用旗的语言,

$$\boxed{\text{推出 }\pi_*}=\boxed{\begin{array}{c}\text{同调地}\\ \text{“把维数 } i \text{ 的子空间 } V^i \text{ 去掉”}\end{array}}$$

$$\boxed{\text{拉回 }\pi^*}=\boxed{\begin{array}{c}\text{同调地}\\ \text{“把 } V^{i-1}\subseteq V^{i+1} \text{ 之间全部}\\ i \text{ 维子空间加上”}\end{array}}$$

令 $B^-=w_0Bw_0$ 为下三角矩阵群, 其中 w_0 是最长元 $\binom{1\cdots n}{n\cdots 1}\in\mathfrak{S}_n$. 那么我们记 Σ_w 为

$$[BwB/B]\text{作为上同调胞腔}=[\overline{B^-wB/B}]\text{作为基本类}.$$

这个等号实际上是通过计算下同调的相交证明的, 请见 [Fulton]. 于是

$$H^*(G/B)=\text{以 }\{\Sigma_w\}_{w\in\mathfrak{S}_n}\text{ 为基的自由 Abel 群}$$

令 $s_i=(i,i+1)\in\mathfrak{S}_n$ 是 i 和 $i+1$ 的对换. 注意到 $P_i=B\cup Bs_iB$.

下面我们可以计算 Demazure operator 在 Σ_w 上的作用. 根据定义

$$\begin{aligned}\partial_i(\Sigma_w) &= \pi^*(\pi_*(\Sigma_w))=\pi^*(\pi_*([\overline{B^-wB/B}]))\\ &=\delta_{\text{维数正确}}\cdot[\pi^{-1}(\pi(\overline{B^-wB/B})]\\ &=\delta_{\text{维数正确}}\cdot[\pi^{-1}(\overline{B^-wP/P})]\\ &=\delta_{\text{维数正确}}\cdot[\overline{B^-wB/B}\cup\overline{B^-ws_iB/B}]\\ &=\begin{cases}[\overline{B^-ws_iB/B}], & \ell(ws_i)=\ell(w)-1,\\ 0, & \ell(ws_i)=\ell(w)+1.\end{cases}\\ &=\begin{cases}\Sigma_{ws_i}, & \ell(ws_i)=\ell(w)-1,\\ 0, & \ell(ws_i)=\ell(w)+1.\end{cases}\end{aligned}$$

这里实际上用到了 **Tits system**.

Tits system 是说

$$BwB\cdot Bs_iB=\begin{cases}Bws_iB, & \ell(ws_i)=\ell(w)+1;\\ Bws_iB\cup BwB, & \ell(ws_i)=\ell(w)-1.\end{cases}$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 实际上我们已经可以证明在任何系数下 *Demazure operator* 满足幂零**辫子关系 (braid relation)**. 但是之后我们会建立多项式版本的联系, 那时将可以直接证明.

习题 1. 哪条集合论的事实的上同调版本是 $g^*\circ f_*=F_*\circ G^*$? [提示: $F(G^{-1}(A))=g^{-1}(f(A))$.]

习题 2. 根据 *Poincaré* 对偶,

$$H^*(\mathbb{C}P^n)\otimes H^{2n-*}(\mathbb{C}P^n)\xrightarrow{\smile}H^{2n}(\mathbb{C}P^n)\cong\mathbb{Z}$$

构成完美配对. 取 H 是 $\mathbb{C}P^n$ 中任意一个超平面, 记 $x=[H]\in H^*(\mathbb{C}P^n)$. 证明 $H^*(\mathbb{C}P^n)$ 作为环同构于 $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$, 其中 $\deg x=2$. [提示: 显然 H 的 (实) 余维数是 2. 注意到不同超平面给出相同的基本类, 所以我们直接计算相交知道 $x^n=1\cdot[\text{点}]\neq 0$. 要说明 $H^*(\mathbb{C}P^n)$ 是由 x 生成的, 我们将 H 视为 $\mathbb{C}P^{n-1}$, 用 i^* 结合完美配对的事实归纳证明.]

习题 3. 对于一般的 d 次超平面 $D \subseteq \mathbb{C}P^n$, 证明 $[D] = dx$, 其中 x 是超平面类. [提示: 注意到因为 $H^2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}x$, 所以一定有一个整数 d' 使得 $[D] = d'x$. 注意到 D 与一条一般位置的直线交 d 个点, 而直线又可以写成 $n-1$ 个超平面的交, $d'x \cdot x^{n-1} = [D] \smile [H]^{n-1} = [D \cap H_1 \cap \cdots] = d \cdot [\text{点}] = dx^n$, 所以 $d = d'$.]

习题 4. 请说明

$$\Sigma_w = [\overline{w_0 B w_0 w B/B}] = [\overline{B w_0 w B/B}]$$

[提示: 因为可以在 GL_n 中找到一条从 1 通往 w_0 的道路, 从而构造一个同伦.]

习题 5. 在 *[Fulton]* 中, 为了计算 *Demazure operators*, 他用了拉回方阵 $\begin{array}{ccc} \square & \to & G/B \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/B & \to & G/P \end{array}$, 证明这时 $\square$ 和下面的集合是双射.

$$\square = \left\{ \cdots \subseteq V^{i-1} \begin{array}{c} \rotatebox{45}{$\subseteq$}\ V_1^i\ \rotatebox{-45}{$\subseteq$} \\ \rotatebox{-45}{$\subseteq$}\ V_2^i\ \rotatebox{45}{$\subseteq$} \end{array} V^{i+1} \subseteq \cdots \right\}.$$

1.3 抛物子群

对于 GL_n, 对于 $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$, 我们记**抛物 (parabolic) 子群**

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_{\lambda_1} & * & \cdots & * \\ & \mathrm{GL}_{\lambda_2} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathrm{GL}_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

我们考虑 G/P.

实际上 (集合论意义上可以直接验证)

$$G/P_\lambda = \left\{ 0 \subseteq V^{\lambda_1} \subseteq V^{\lambda_1+\lambda_2} \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{C}^n \right\}$$

且如果 P_1 分的块都是 P_2 的子块, 那么

$$G/P_1 \to G/P_2$$

就是 "把多余维数的子空间去掉".

让我们用分成 k 组的 n 个标上 1 到 n 的 $\bullet$ 来记 λ_i

$$(\lambda_1 \text{ 个 } \bullet)\,(\lambda_2 \text{ 个 } \bullet) \cdots (\lambda_k \text{ 个 } \bullet)$$

如果 $\lambda_i = 1$, 则省略括号.

那么 $\lambda_1 + \ldots + \lambda_j$ 是第 j 组最后一个 $\bullet$ 的编号.

第一个例子

$$\underset{1}{\bullet} \cdots \underset{i-1}{\bullet} (\underset{i}{\bullet} \quad \underset{i+1}{\bullet}) \underset{i+2}{\bullet} \cdots \underset{n}{\bullet}$$

对应上一节的

$$P_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix}$$

第二个例子

$$(\underset{1}{\bullet} \cdots \underset{k}{\bullet})(\underset{k+1}{\bullet} \cdots \underset{n}{\bullet})$$

对应 **Grassmaniann 流形/簇**

$$G/P_\lambda = \mathcal{G}r(k,n) = \{0 \subseteq V^k \subseteq \mathbb{C}^n\}.$$

令

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k}$$

是 "组内置换" 构成的群.

注意到

$$P = \bigcup_{u \in \mathfrak{S}_\lambda} BuB.$$

(严格说还是用了 Tits system).

对于 $\sigma\in\mathfrak{S}_\lambda$, 我们有

$$BwσP/P = BwP/P.$$

所以

$$G=\bigcup_{w\in\mathfrak{S}_w/\mathfrak{S}_\lambda} BwP \qquad (\text{无交并}).$$

称 $\{BwP/P : w\in\mathfrak{S}_w/\mathfrak{S}_\lambda\}$ 为 G/P_λ 上的**Schubert 胞腔**.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *一般没有* $\dim BwP/P = 2\ell(w)$.

但是, 如果 w 是陪集 $w\mathfrak{S}_\lambda$ 中长度最小者, 则

$$\text{自然映射}: BwB/B \longrightarrow BwP/P$$

是双射 (同胚). 记

$$\mathfrak{S}^\lambda=\{\text{每个陪集 } \mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_\lambda \text{ 选出的唯一的长度最小者}\}$$

那么 $\{BwP_\lambda/P_\lambda : w\in\mathfrak{S}^\lambda\}$ 给出 G/P_λ 的胞腔结构.

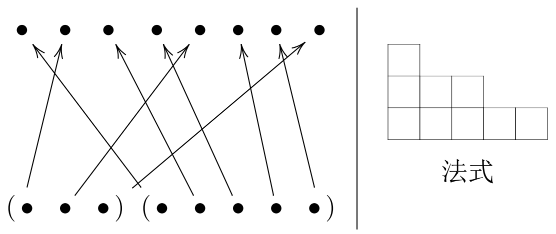
$\boxed{\text{注意 1}}$ *这是因为作用 P 等于作用 $\bigcup_{u\in\mathfrak{S}_\lambda} BuB$, 而 $BwB\cdot BuB = BwuB$ 如果 $\ell(wu)=\ell(w)+\ell(u)$(Tits system). 换句话说如果 P 内 B 以外的元素作用在 BwB 上一定无法回到 BwB.*

我们证明对于 Grassmaniann 的情况

$$(\underset{1}{\bullet}\cdots\underset{k}{\bullet})(\underset{k+1}{\bullet}\cdots\underset{n}{\bullet})$$

$\mathfrak{S}^\lambda$ 和 $k\times(n-k)$ 的 Young 图 (保持 ℓ) 一一对应.

请看



我们曾经提到 $\mathcal{F}\ell(n)$ 是紧致的, 是因为 $\mathcal{F}\ell(n)$ 是酉群 U_n 的商.

具体来说, 记 $K=U_n$, T_K 是 U_n 中的对角矩阵. 那么

$$U_n/T_K \xrightarrow{\sim} G/B \cong \mathcal{F}\ell(n)$$

是同胚. 这实际上是如下一则线性代数的转述

任何旗都 admits 一个酉正交基.

但是 U_n/T_K 上面没有显然的代数簇结构 (酉群不是代数群!), 所以**无法刻画 Schubert 胞腔**. 但是当我们不用胞腔的时候, 复结构 (代数簇结构) 反而显得累赘.

注意 $\mathfrak{S}_n$ 通过共轭, 作用在如下群上

$$U_n,\quad U_n \text{ 中的对角矩阵群} = T_K,$$

$$\mathrm{GL}_n,\quad \mathrm{GL}_n \text{ 中的对角矩阵群}.$$

但是唯独不作用在上三角矩阵群 B 上.

前两者诱导了 $\mathfrak{S}_n$ 在

$$U_n/T_K \xrightarrow{\sim} G/B \cong \mathcal{F}\ell(n)$$

上的作用.

但是 GL_n/B 上面没有显然的 $\mathfrak{S}_n$ 作用.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *注意到 $\mathfrak{S}_n$ 通过共轭诱导的 $H^*(K)$ 和 $H^*(T_K)$ 上的作用都平凡. 因为我们可以找到 $w\in\mathfrak{S}_n$ 的道路构造同伦. 但是在 $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$ 上却不平凡. 原因是此时作用是 $xT_K\mapsto wxw^{-1}T_K$, 乘在内侧. 另外, 我们几乎不如何知道 $\mathfrak{S}_n$ 在胞腔上如何作用 (等价于 $\mathfrak{S}_n$ 在 Schubert 多项式的作用).*

上面的事实也有紧致版本. 记

$$U_\lambda=\begin{pmatrix} U_{\lambda_1} & & & \\ & U_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_{\lambda_k}\end{pmatrix}$$

那么

$$G/P_\lambda = U_n/U_\lambda.$$

但是同样 Schubert 胞腔也无法刻画.

习题 1. 证明 $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_\lambda$ 每个陪集中都有唯一的一个长度最小者, 他们是那些组内单调递增的置换.

习题 2. 请验证 $G/P_\lambda = U_n/U_\lambda$. ［提示：因为我们已经给出过 G/P_λ 对应的旗的刻画，所以可以直接验证；另一方面，还可以说明 $U_\lambda = U_n\cap P_\lambda$. ］

习题 3 (极大紧子群). 证明 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 中任何一个紧致子群都共轭到 U_n 的子群. ［提示：需要用到一则事实，紧致子群有 Haar 测度 μ. 任意取一个酉内积，将这个酉内积对这个子群作用取平均，如此得到一个新的酉内积，而这个子群作用保持. 再利用事实 ---$\mathbb{C}^n$ 上的所有酉内积都相同. ］

习题 4. 证明 GL_n/U_n 是一个欧式空间. ［提示：回忆正交化算法给出的所谓 QR 分解；对酉群也是类似的，任何一个矩阵 x 都可以写成一个酉矩阵和一个上三角矩阵的乘积，如果我们要求上三角矩阵的对角线上排列着 1，那么这个分解是唯一的. 所以 GL_n/U_n 和对角线全为 1 的上三角矩阵同胚. ］

1.4 双旗流形

Bruhat 分解

$$G = \bigcup_{w \in \mathfrak{S}_n} BwB \qquad (\text{无交并})$$

有一个几何解释. 即

$$\boxed{\text{任何两个 Flags 都 admit 一组公共基.}}$$

而上面的解释可以用线性代数延拓定理解决.

对于一系列线性空间 V 的子空间 $\{V_i\}$, 称基 B 是他们的基如果 $V_i \cap B$ 是 V_i 的基.

回忆映射

$$G/B \longrightarrow \mathcal{F}\ell(n)$$

假设 xB 对应到旗

$$V^\bullet = \{V^i = \operatorname{span}(x_1, \dots, x_i)\}.$$

那么 $V^\bullet$ 的基的所有选择就是 xB 的列向量 (忽略列向量的顺序).

因此

$$\boxed{\text{任何两个 Flag 都 admit 一组公共基.}}$$

$$\Updownarrow$$

$$\text{任意} x, y \in G, \text{存在} w \in \mathfrak{S}_n, x' \in xB, y' \in yB, \text{使得} x'w = y'$$

这等价到 Bruhat 分解.

回忆

$$\begin{array}{ccc}
G & \underset{\text{对角}}{\curvearrowright} & G/B \times G/B \\
 & & \Big\downarrow \quad (xB, yB) \mapsto x \times x^{-1}yB \\
G & \underset{\text{左乘}}{\curvearrowright} & G \times_B G/B \\
 & & \text{比较} \\
B & \underset{\text{左乘}}{\curvearrowright} & G/B
\end{array}$$

因此

$$\begin{aligned}
\text{对角 } G\text{-轨道}(G/B \times G/B) &= \text{左乘 } G\text{-轨道}(G \times_B G/B) \\
&= \mathsf{pt} \times_G G \times_B G/B \\
&= \mathsf{pt} \times_B G/B \\
&= B\text{-轨道}(G/B).
\end{aligned}$$

于是我们发现

$$B\text{-轨道}(G/B) \longleftrightarrow \text{对角 } G\text{-轨道}(G/B \times G/B)$$

其中 BwB/B 对应于 $G/B \times G/B$ 中的

$$\{(xB, yB) : x^{-1}y \in BwB\}.$$

此时我们称 xB 和 yB 对应的 flags 具有**相对位置** w (和标准记号 up to left and right).

对于两个 flags $F_1^\bullet, F_2^\bullet$ 具有相对位置 w. 根据条件, 我们可以找到一个矩阵 y, 使得

$$\operatorname{span} yw^{-1} = U^\bullet, \qquad \operatorname{span} y = V^\bullet$$

即 $y = (y_1, \dots, y_n)$

$$F_1^i = \operatorname{span}(y_{w(1)}, \dots, y_{w(i)}), \qquad F_2^i = \operatorname{span}(y_1, \dots, y_i).$$

考虑

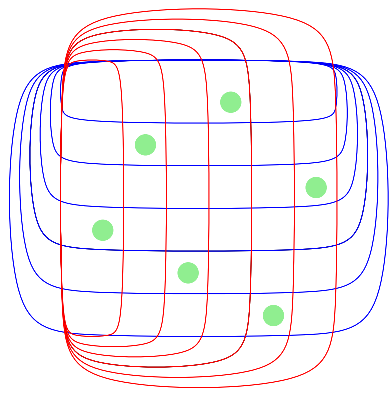
$$\begin{aligned}
&\dim \frac{F_1^{i-1} + F_2^j \cap F_1^i}{F_1^{i-1} + F_2^{j-1} \cap F_1^i} \\
&= \dim \frac{\operatorname{span}\left\{(y_w(1), \dots, y_{w(i-1)}) \cup (y_1, \dots, y_j) \cap (y_{w(1)}, \dots, y_{w(i)})\right\}}{\operatorname{span}\left\{(y_1, \dots, y_{w(i-1)}) \cup (y_1, \dots, y_{j-1}) \cap (y_{w(1)}, \dots, y_{w(i)})\right\}} \\
&= \#\big(\{w(1), \dots, w(i-1)\} \cup \{1, \dots, j\} \cap \{w(1), \dots, w(i)\}\big) \\
&\quad -\#\big(\{w(1), \dots, w(i-1)\} \cup \{1, \dots, j\} \cap \{w(1), \dots, w(i)\}\big) \\
&= \begin{cases} 1 & w(i) = j \\ 0 & \text{其他} \end{cases}
\end{aligned}$$

所以这个恰好来自置换矩阵.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *这给出一个相对位置的内蕴刻画. 这样 $\mathcal{F}\ell(n)$ 上的 Schubert 胞腔也可以内蕴刻画. 对于 $\mathcal{F}\ell(n)$, 选定一个旗 $V_1^\bullet$, 所有和这个 $V_1^\bullet$ 相对位置为 w 的旗 $V_2^\bullet$ 恰好对应 Schubert 胞腔 BwB/B.*

$$V_1^1 \subset V_1^2 \subset \cdots$$

$$V_2^1 \cap V_2^2 \cap \vdots$$



回忆 Zassenhaus' Butterfly Lemma

$$\begin{array}{ccc}
\dfrac{F_1^{i-1} + F_2^j \quad \cap F_1^i}{F_1^{i-1} + F_2^{j-1} \cap F_1^i} & \cong & \dfrac{F_2^{j-1} + F_1^i \quad \cap F_2^j}{F_2^{j-1} + F_1^{i-1} \cap F_2^j} \\
\| & & \| \\
\dfrac{F_1^i \cap F_2^j}{(F_1^{i-1} \cap F_2^j) + (F_1^i \cap F_2^{j-1})} & \cong & \dfrac{(F_1^i + F_2^{j-1}) \cap (F_1^{i-1} + F_2^j)}{F_1^{i-1} + F_2^{j-1}}
\end{array}.$$

所以

$$\dim(F_1^i \cap F_2^j) = \#\{\bullet \le i : w(\bullet) \le j\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\dim(F_1^i + F_2^j) = i + j - \#\{\bullet \le i : w(\bullet) \le j\}$$

习题 1. 注意我这个蝴蝶定理比 *Serge Lang* 等书上多断言了一个同构, 请证明之.

习题 2. 对于三个子空间, 举例说明我们不能找到公共基. [提示: 例如 $\begin{array}{c} 0 \subseteq \langle e_1 \rangle \subseteq \mathbb{C}^2, \\ 0 \subseteq \langle e_2 \rangle \subseteq \mathbb{C}^2 \\ 0 \subseteq \langle e_1 + e_2 \rangle \subseteq \mathbb{C}^2 \end{array}$.]

习题 3. 证明对于任意两条线性子空间的链, 一定可以找到他们的一组基. [提示: 线性代数中学的 $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$ 的证明过程.]

习题 4. 对于线性空间 V 中的三个线性子空间 V_1, V_2, V_3, 证明一定存在这样一组基 B, 使得 V_i 由 $(B+B) \cap V_i$ 张成. 其中 $B+B$ 为可以写成两个基之和的向量. [提示: 我非常确定这是对的, 但是我证明用了表示论. 我还没有想到简单证明. 原因如下, 每个子空间的指定给出 D_4 的一个 `quiver` 表示, 而其表示已经分类, 一定是以下 12 种可能性的直和

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny] \Bbbk \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \\ & \Bbbk & 0 \arrow[l, phantom, "\supseteq"] \\ 0 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \end{tikzcd}$$
$\alpha_1 + \alpha_2$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny] 0 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \\ & \Bbbk & 0 \arrow[l, phantom, "\supseteq"] \\ \Bbbk \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \end{tikzcd}$$
$\alpha_2 + \alpha_3$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny] 0 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \\ & \Bbbk & \Bbbk \arrow[l, phantom, "\supseteq"] \\ 0 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \end{tikzcd}$$
$\alpha_2 + \alpha_4$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny] 0 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \\ & \Bbbk & \Bbbk \arrow[l, phantom, "\supseteq"] \\ \Bbbk \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \end{tikzcd}$$
$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny] \Bbbk \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \\ & \Bbbk & \Bbbk \arrow[l, phantom, "\supseteq"] \\ 0 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \end{tikzcd}$$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny] \Bbbk \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \\ & \Bbbk & 0 \arrow[l, phantom, "\supseteq"] \\ \Bbbk \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \end{tikzcd}$$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny] 0 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \\ & \Bbbk & 0 \arrow[l, phantom, "\supseteq"] \\ 0 \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \end{tikzcd}$$
α_2

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny] \Bbbk \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \\ & \Bbbk & \Bbbk \arrow[l, phantom, "\supseteq"] \\ \Bbbk \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \end{tikzcd}$$
$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny] \Bbbk \oplus 0 \arrow[dr, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \\ & \Bbbk^2 & \text{对角线} \arrow[l, phantom, "\supseteq"] \\ 0 \oplus \Bbbk \arrow[ur, phantom, sloped, "\subseteq"] & & \end{tikzcd}$$
$\alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$

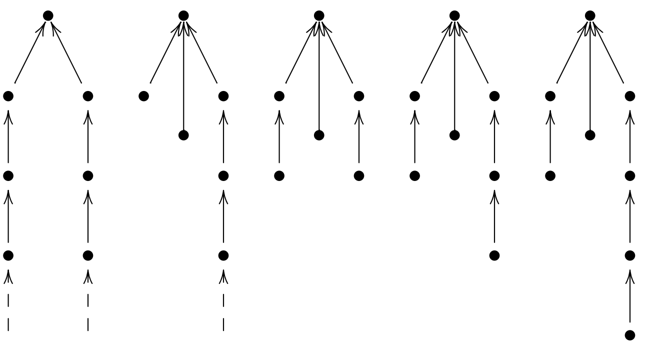
$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny] \Bbbk \arrow[dr] & & \\ & 0 & 0 \arrow[l] \\ 0 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$
α_1

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny] 0 \arrow[dr] & & \\ & 0 & 0 \arrow[l] \\ \Bbbk \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$
α_3

$$\begin{tikzcd}[row sep=tiny, column sep=tiny] 0 \arrow[dr] & & \\ & 0 & \Bbbk \arrow[l] \\ 0 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$
α_4

前面九种对应单射 (包含), 满足条件.]

$\boxed{\text{注意 1}}$ 实际上能有类似结论的情况很少. 他们分别是



A_n D_n E_6 E_7 E_8

每个箭头 $\to$ 代表一个包含 $\subseteq$. 注意 A 型是上上题, D_4 的情况是上题.

参考文献

- Hatcher. Algebraic Topology.
- Bredon. Geometry and Topology. GTM139.
- 姜伯驹. 代数拓扑.
- Fulton. Young Tableaux.
- Chriss, Ginzburg. Representation Theory and Complex Geometry.
- Eisenbud, Harris. 3264 and all that.

关于 Lie 群有不少书, 推荐

- Bump. Lie Group. GTM 225. 里面也有很多相关的组合.
- Knapp. Lie groups beyond an introduction.
- Humphreys. Linear Algebraic Groups. GTM21. 请看 29. Tits system.
- Springer. Linear Algebraic Groups. 请看 8.5, Bruhat order 的几何解释.

~~ ★★ **菜谱** ★★ ~~

—如何计算上同调?

1. 计算群结构.
   找胞腔结构, 计算他们的维数.
   胞腔复形, 计算上同调.
   没有奇数 $\Longrightarrow$ 复形平凡
2. 计算相交配对
   取两个维数相补的基本类
   移动到直交位置
   计算相交点的数目
3. 计算推出拉回
   计算像和原像
   比维数
4. 计算环结构
   取两个基本类, 求第三个基本类前系数
   通过完美配对, 变成计算三个基本类相交
   移动到直交位置, 计算相交点的数目

$\boxed{\text{本节的上同调}} \approx \boxed{\text{集合论}} + \boxed{\text{算开闭}} + \boxed{\text{算维数}}$.

2 纤维丛速成

上节我们提到关于计算环结构的方法只是理论上的，但是实际并不能广泛地用于计算.

4. 计算环结构
取两个基本类, 求第三个基本类前系数
通过完美配对, 变成计算三个基本类相交
移动到直交位置, 计算相交点的数目

2.1 纤维丛

为了真的能够计算, 并更好地理解上同调, 我们需要理解纤维丛.

对于连续映射 $E \xrightarrow{\pi} B$, 对于 $b \in B$, 称 $\pi^{-1}(b) \subseteq E$ 是 b 处的 **纤维 (fibre)**, 也记作 E_b.

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & B \\ \cup\!\mid & & \Psi \\ E_b & \underset{\text{原像}}{\longleftarrow} & b \end{array}$$

B 和 F 是拓扑空间,

$$\begin{tikzcd} & E = B \times F \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ B & & F \end{tikzcd}$$

那么投射 $E \xrightarrow{\pi_1} B$ 每一点的纤维 (= 原像) 都是一个 F 的拷贝. 此时 $E \to B$ 被称为以 F 为纤维的 **平凡丛**.

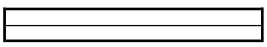
令 $E \xrightarrow{\pi} B$ 是一个连续映射, 我们说这是一个以 F 为纤维的 **纤维丛 (fibre bundle)**, 如果局部上是平凡丛.

任意一个点 $b \in B$, 都存在邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U) \to U$ 同构于平凡丛.

$$\begin{array}{ccccc} U \times F & \cong & \pi^{-1}(U) & \subseteq & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & = & U & \subseteq & B \end{array}$$

其中 B 叫 **底空间** (base space), E 叫 **全空间 (total space)**.

例子: Möbius 带, 将下列纸带



卷成 Möbius 带时, 中间的轴线会粘成一个圆圈 S^1. 而垂直方向则是一个区间 I. 所以 Möbius 带 $\to S^1$ 是以 I 为纤维的纤维丛.

$$\boxed{\text{不是所有纤维丛都平凡}}$$

例子: 任何一个流形 M, 在点 $x \in M$ 有切空间 T_xM. 定义切丛

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$$

为所有点处切空间的形式并. 实际上可以找到 TM 的流形结构使得

$$TM \to M \qquad \text{来自 } T_xM \text{ 的切向量} \mapsto x$$

是一个纤维丛.

注意 1 请注意

$$\boxed{\text{不是所有切丛都平凡}}$$

例如著名的毛球 (hairy ball) 定理. 点 x 处切空间 T_xM 可以看出这一点处的无穷小移动组成的向量空间. 这可以用线素 (毛) 画出.

对于纤维丛 $\pi = \begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ B \end{smallmatrix}$, 我们称 $s : \begin{smallmatrix} E \\ \uparrow \\ B \end{smallmatrix}$ 是一个 **截面 (section)** 如果 $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$.

换句话说, $\forall x \in B, s(x) \in E_x$,

$$\boxed{\text{截面}} = \boxed{\text{每条纤维上选一个点}}.$$

$$\boxed{\text{连续截面}} = \boxed{\text{每条纤维上连续地选一个点}}.$$

对于平凡丛 $E = B \times F$, 截面就是一个函数 $B \to F$.

而纤维丛局部上是平凡丛, 所以截面局部上是函数.

一般而言对于纤维丛, 截面并没有一个典范地选择 (有时甚至不存在, 例如 Möbius 带的边界), 即: 我们不能认为 $B \subseteq E$.

因为我们总遇到大量的纤维丛, 如何计算他们的上同调呢? 对于平凡丛, $E = B \times F$, 可以用 **万有系数定理**, 例如在 $H^*(B)$ 或 $H^*(F)$ 其中一个自由的时候,

$$H^*(E) = H^*(B) \otimes H^*(F) \qquad (\text{作为环}).$$

一般地我们也希望这个成立. 但是一般不能作为环同构, 也不典范.

取纤维丛 $\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ B \end{smallmatrix}$, 任意选择一个点 b, 纤维为 F. 由如下两个映射

$$\begin{array}{ccc} F \subseteq E & & E \to B \\ \Downarrow & \text{诱导了} & \Downarrow \\ H^*(F) \xleftarrow{\text{限制}} H^*(E) & & H^*(E) \xleftarrow[\pi^*]{} H^*(B) \end{array}$$

我们称 $\begin{smallmatrix}E\\ \downarrow\\ B\end{smallmatrix}$ 是**形式的 (formal)** (非广泛术语) 如果满足下面的条件.

存在 $H^*(F)$ 在 $H^*(E)$ 的提升 A

$$\left[\begin{array}{l}\text{即子群 } A \subseteq H^*(E) \text{ 使得下面复合是同构}\\[1em] \qquad\qquad H^*(F) \xleftarrow{\text{限制}} H^*(E) \xleftarrow{\supseteq} A \\[1em] \text{假设 } \tilde{\alpha} \in A \text{ 对应到 } \alpha \in H^*(F)\end{array}\right]$$

使得

$$H^*(B) \otimes H^*(F) \longrightarrow H^*(E) \qquad \beta \otimes \alpha \mapsto \pi^*(\beta) \smile \tilde{\alpha},$$

是群同构.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 此时

$$\begin{array}{ccccc} H^*(F) & \xleftarrow{\text{限制}} & H^*(E) & & \\ \| & & \uparrow & & \\ H^*(F) & \longleftarrow & H^*(B) \otimes H^*(F) & & \\ \alpha & \leftarrow\!\shortmid & 1 \otimes \alpha & & \\ 0 & \leftarrow\!\shortmid & \beta \otimes \alpha & & \deg \beta \geq 1 \end{array}$$

$\boxed{\text{注意 2}}$ 此时

$$\begin{array}{ccc} H^*(E) & \xleftarrow[\pi^*]{} & H^*(B) \\ \uparrow & & \| \\ H^*(B) \otimes H^*(F) & \longleftarrow & H^*(B) \\ \beta \otimes 1 & \leftarrow\!\shortmid & \beta \end{array}$$

有两个非平凡情况能得到 formality.

1. **Leray–Hirsch 定理** 如果 $H^*(F)$ 是自由模 (wrt 系数), 且存在一个 $H^*(E)$ 上的一些元素 $\{\alpha_i\}$ 使得 $\{\alpha_i\}$ 限制在**每一点**处的纤维 $H^*(E_x)$ 都构成一组基.

2. **Serre–Leray 谱序列退化情况** 如果 $H^*(B)$ 和 $H^*(F)$ 都只有偶数次的自由模 (wrt 系数).

前者请看 [Hatcher], 内含大量应用, 包括一个计算 $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$ 的命题 (但是没有算出环结构, 所以我们不采用). 后者也推荐 [Hatcher].

假设纤维丛 $\begin{smallmatrix}E\\ \downarrow\\ B\end{smallmatrix}$ 是 formal 的. 假设纤维 F 是紧致可定向的光滑流形, 我们能刻画推出 $H^*(E) \xrightarrow{\text{推出}} H^{*-\dim F}(B)$ 吗?

记 $d = \dim F$. 那么

$$\begin{aligned} H^n(E) \quad &\cong \bigoplus_{p+q=n} H^p(F) \otimes H^q(B) \\ &= H^d(F) \otimes H^{n-d}(B) \quad \oplus (\text{剩下的}) \\ &= \mathbb{Z} \cdot [\text{点}] \otimes H^{n-d}(B) \oplus \cdots \end{aligned}$$

实际上推出正是取 [点] 前的系数.

等价地, 如果点的基本类

$$[\text{点}] \in H^d(F) \quad \text{提升到} \quad \omega \in H^d(E).$$

那么上述复合等于

$$\text{推出} = \text{取 } \omega \text{ 前系数}.$$

想要证明并不困难. 假设 $\alpha \in H^*(F)$ 提升为 $\tilde{\alpha} \in H^*(E)$. 那么根据 projective formula,

$$\pi_*(\pi^*(\beta) \smile \tilde{\alpha}) = \beta \smile \pi_* \tilde{\alpha}.$$

而 π_* 降低 d 次, 所以 $\deg \alpha < d$ 时, $\pi_*(\pi^*(\beta) \smile \tilde{\alpha}) = 0$.

当 $\deg \alpha = d$ 时, $\pi_* \alpha \in H^0(E) \cong \mathbb{Z}$ 是一个数. 我们可以用下面的拉回方阵计算 $\begin{smallmatrix}F & \to & \text{点}\\ \downarrow & & \downarrow\\ E & \to & B\end{smallmatrix}$,

$$\begin{tikzcd} {[\text{点}]} \arrow[rrrr, bend left, mapsto] & \in & H^d(F) \arrow[r, "\text{推出}"] & H^0(\text{点}) & \ni & 1 \\ \omega \arrow[u, mapsto] \arrow[rrrr, bend right, mapsto] & \in & H^d(E) \arrow[u, "\text{拉回}"] \arrow[r, "\text{推出}"'] & H^0(B) \arrow[u, equal, "\text{拉回}"] & \ni & \pi_* \omega \arrow[u, mapsto] \end{tikzcd}$$

请看我们上节提到的

$$G/B \xrightarrow{\pi} G/P_i.$$

这是一个以 $P_i/B \cong \mathbb{C}P^1$ 为纤维的向量丛. 一切都只有偶数维的同调, 所以我们可以放心地得到

$$H^*(G/B) = H^*(G/P_i) \otimes H^*(\mathbb{C}P^1).$$

等价地, 存在一个 $\omega_i \in H^2(G/B)$, 使得

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathbb{C}P^1) = H^2(P/B) & \longleftarrow & H^2(G/B) \\ \uplus & & \uplus \\ {[\text{点}]} & \leftarrow\!\shortmid & \omega_i \end{array}$$

以及, 任何一个 $H^*(G/B)$ 的元素都可以唯一地写成

$$\omega_i \smile \pi^* \alpha + \pi^* \beta, \qquad \alpha, \beta \in H^*(G/P_i).$$

回忆 Demazure operator 是拉回和推出的复合, 所以对于 $f = \omega_i \smile \pi^* \alpha + \pi^* \beta \in H^*(G/B)$,

$$\partial_i f = \pi^* \pi_* (\omega_i \smile \pi^* \alpha + \pi^* \beta) = \pi^*(\alpha).$$

另一方面我们可以证明 $H^*(G/P_i) \xrightarrow{\pi^*} H^*(G/B)$ 的像在 s_i 下不变.

$$\begin{array}{ccc} U_n/T & \xrightarrow{s_i} & U_n/T \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ U_n/\begin{pmatrix} * & & \\ & * & * \\ & * & * \\ & & & * \end{pmatrix} & \xrightarrow[s_i]{} & U_n/\begin{pmatrix} * & & \\ & * & * \\ & * & * \\ & & & * \end{pmatrix} \end{array}$$

但是下方的 s_i 作用是平凡的.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *我们会在后面看到 ω_i 可以取作 (某种意义下的)x_i, 于是 $s_i(\pi^*\alpha\cdot x_i+\pi^*\beta)=\pi^*\alpha\cdot x_{i+1}+\pi^*\beta$. 那么此时 Demazure operator 就可以写成*

$$\partial_i(\pi^*\alpha\cdot x_i+\pi^*\beta)=\pi^*\alpha=\frac{(\pi^*\alpha\cdot x_i+\pi^*\beta)-s_i(\pi^*\alpha\cdot x_i+\pi^*\beta)}{x_i-x_{i+1}}.$$

习题 1. *考虑紧致的版本 U_n 为酉群, T_K 为其对角矩阵. 注意到 $U_n/V=\mathcal{G}r(k,n)$, 其中 $V=\begin{pmatrix}U_k & \\ & U_{n-k}\end{pmatrix}$. 由此说明*

$$H^*(\mathcal{F}\ell(n))=H^*(\mathcal{F}\ell(k))\otimes H^*(\mathcal{F}\ell(n-k))\otimes H^*(\mathcal{G}r(k,n-k)).$$

[提示: 利用 $U_n/T_K\to U_n/V$. 需要证明 $V/T_K=\mathcal{F}\ell(k)\times\mathcal{F}\ell(n-k)$.]

习题 2. *回忆我们之前定义的 $[n]=\frac{\mathbf{q}^n-1}{\mathbf{q}-1}$, $[n]!=[n]\cdots[1]$. 我们可以定义 q-**二项式系数** $\begin{bmatrix}n\\k\end{bmatrix}=\frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$. 证明这是 $\mathbb{F}_\mathbf{q}$ 中 n 维空间 k 维子空间的数目.* [提示: 我们之前将 $[n]!$ 解释成 Poincaré 多项式. 注意到张量的 Poincaré 多项式是 Poincaré 多项式相乘. 所以根据上题我们得到 $H^*(\mathcal{G}r(k,n))$ 的 Poincaré 多项式. 而 $\mathcal{G}r(k,n)$ 也有胞腔结构, 所以前面某道旗流形的问题是一样的.]

2.2 一些无穷空间

记 $G=\mathrm{GL}_n$, 记 $T=\begin{pmatrix}* & & \\ & \ddots & \\ & & *\end{pmatrix}$ 为全体 GL_n 的对角矩阵, $B=\begin{pmatrix}* & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & *\end{pmatrix}$ 为全体 GL_n 的上三角矩阵. 那么

$$H^*(G/B)\cong H^*(G/T).$$

这是因为 $\begin{matrix}G/T\\ \downarrow\\ G/B\end{matrix}$ 是以 B/T 为纤维的纤维丛, 而

$$B/T\cong\begin{pmatrix}1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1\end{pmatrix}\cong\mathbb{C}^{n(n-1)/2}\text{可缩}.$$

注意, 虽然二者同调群一样, 但是 G/T 不是紧致的.

我们也可以赋予 G/T 一个几何意义, 为全体线性无关的一维子空间构成的集合

$$\widetilde{\mathcal{F}\ell}(n)=\left\{(\ell_1,\ldots,\ell_n)\in\mathbb{C}P^{n-1}:{}^{\dim\ell_i=1}_{\ell_1,\ldots,\ell_n\ \text{线性无关}}\right\}.$$

且 $G/T\to G/B$ 的映射是 $(\ell_i)\mapsto F$, 其中

$$\boxed{F\text{ 的第 }i\text{ 个子空间}}=\boxed{\text{前 }i\text{ 个 }\ell_*\text{ 张成的 }i\text{ 维子空间}}.$$

我们已经介绍了几套语言之间的互相转化

$$G/B\longleftrightarrow\{\text{所有旗}\}\longleftrightarrow U_n/T.$$

我们下面还要在一些无穷空间上用, 对应法则也是完全一样的.

定义 **无穷旗流形**

$$\mathcal{F}\ell(\infty)=\left\{V^0\subseteq V^1\subseteq\cdots:\begin{matrix}\text{每个 }V_i\text{ 是 }\mathbb{C}^\infty\text{ 的 }i\text{ 维}\\ \text{线性子空间; 当 }n\text{ 充分}\\ \text{大时, }V^n\cong\mathbb{C}^n.\end{matrix}\right\}$$

定义 **长度为 k 的旗流形**

$$\mathcal{F}\ell(k,\infty)=\left\{V^1\subseteq\cdots V^k:\begin{matrix}\text{每个 }V_i\text{ 是 }\mathbb{C}^\infty\text{ 的 }i\text{ 维}\\ \text{线性子空间.}\end{matrix}\right\}$$

为了方便, 也记

$$\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)=\left\{(\ell_i)_{i=1}^k:\begin{matrix}\text{每个 }\ell_i\text{ 是 }\mathbb{C}^\infty\text{ 的 1 维}\\ \text{线性子空间; 全体 }\{\ell_i\}\\ \text{线性无关;}\end{matrix}\right\}$$

定义 **无穷 Grassmannian**

$$\mathcal{G}r(k,\infty)=\left\{V\subseteq\mathbb{C}^\infty:\begin{matrix}V\text{ 是 }\mathbb{C}^\infty\text{ 的 }k\text{ 维线性}\\ \text{子空间.}\end{matrix}\right\}$$

作为特例, **无穷维射影空间**

$$\mathbb{C}P^\infty=\mathcal{G}r(1,\infty)=\left\{V\subseteq\mathbb{C}^\infty:\begin{matrix}V\text{ 是 }\mathbb{C}^\infty\text{ 的 1 维线性}\\ \text{子空间.}\end{matrix}\right\}$$

定义

$$\mathbb{C}^\infty = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}e_i = \{(x_i)_{i=1}^\infty : \text{几乎所有 } i \text{ 都有 } x_i = 0\}$$

$$\mathrm{GL}_\infty = \left\{ (x_{ij})_{1\le i,j} : \begin{array}{r} \text{可逆, 且在 } n \gg 0 \text{ 时, 除了左} \\ \text{上角 } n\times n \text{ 方块以外, 和单位} \\ \text{阵相同.} \end{array} \right\}$$

那么

$$\mathcal{F}\ell(\infty) = \mathrm{GL}_\infty / B_\infty .$$

$$\mathcal{F}\ell(k,\infty) = \mathrm{GL}_\infty / \begin{pmatrix} B_k & * \\ & \mathrm{GL}_\infty \end{pmatrix}.$$

$$\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty) = \mathrm{GL}_\infty / \begin{pmatrix} T_k & * \\ & \mathrm{GL}_\infty \end{pmatrix}.$$

$$\mathcal{G}r(k,\infty) = \mathrm{GL}_\infty / \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_k & * \\ & \mathrm{GL}_\infty \end{pmatrix}.$$

$$\mathbb{C}P^\infty = (\mathbb{C}^\infty \setminus 0) \Big/ \mathbb{C}^\times .$$

注意, 他们都不是流形, 也不紧致. 不过好在胞腔结构总是良好, 所以

$$\boxed{H^*(\text{以上}) \text{ 都是自由 Abel 群, 且只有偶数维上同调}}$$

具体请看下表

$H^*(\mathcal{F}\ell(\infty)) = \bigoplus \mathbb{Z}[\Sigma_w]$	$w \in \mathfrak{S}_\infty$.
$H^*(\mathcal{F}\ell(k,\infty)) = \bigoplus \mathbb{Z}[\Sigma_w]$	$w \in \mathfrak{S}_\infty/\mathfrak{S}_{k+\infty}$ $= \{k$ 个不同的数$\}$.
$\mathcal{G}r(k,\infty) = \bigoplus \mathbb{Z}[\Sigma_w]$	$w \in \mathfrak{S}_\infty/\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_\infty$ $= \{k$ 个严格递增的数$\}$.
$\mathbb{C}P^\infty = \bigoplus \mathbb{Z}[\mathbb{C}P^n]$	$n \in \mathbb{Z}_{\ge 0}$

习题 1. *计算 $H^*(\mathcal{F}\ell(k,\infty))$ 的 Poincaré 多项式.* [提示：我们可以直接根据下一小节上同调环得到其 Poincaré 多项式是 $\frac{1}{(1-\mathbf{q})^k}$. 我们也可以先算有限的情况再取极限，计算 $\mathfrak{S}_{n+k}/\mathfrak{S}_n$

$$\prod_{i=1}^{n+k} \frac{\mathbf{q}^i-1}{\mathbf{q}-1} \Big/ \prod_{i=1}^{n} \frac{\mathbf{q}^i-1}{\mathbf{q}-1} = \prod_{i=n+1}^{n+k} \frac{\mathbf{q}^i-1}{\mathbf{q}-1} = \prod_{i=1}^{k} \frac{\mathbf{q}^{i+n}-1}{\mathbf{q}-1}$$

取幂级数意义下的极限 $\mathbf{q}^n \to 0$，所以最终结果是 $\frac{1}{(1-\mathbf{q})^k}$.]

2.3 计算

计算 I

考虑

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty) = \left\{ (\ell_i)_{i=1}^k : \begin{array}{l} \text{每个 } \ell_i \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 1 维} \\ \text{线性子空间; 全体 } \{\ell_i\} \\ \text{线性无关;} \end{array} \right\} & & \ni (\ell_i)_{i=1}^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{C}P^\infty = \left\{ V \subseteq \mathbb{C}^\infty : \begin{array}{l} V \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 1 维线性} \\ \text{子空间.} \end{array} \right\} & & \ni \ell_i \end{array}$$

其在 ℓ_i 处的纤维是

$$\left\{ (\ell_i)_{i=1}^{k-1} : \begin{array}{l} \text{每个 } \ell_i \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty/\ell_i \text{ 的} \\ \text{1 维线性子空间; 全体} \\ \{\ell_i\} \text{ 线性无关;} \end{array} \right\} \cong \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k-1,\infty).$$

此时纤维和底空间都只有偶数维的上同调, 所以

$$\begin{aligned} & H^*(\mathcal{F}\ell(k,\infty)) = H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)) \\ = {} & H^*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k-1,\infty)) \\ = {} & H^*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes H^*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k-2,\infty)) \\ = {} & H^*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes \overset{k}{\cdots} \otimes H^*(\mathbb{C}P^\infty) \end{aligned}$$

注意 1　*虽然我们已经知道*

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}[t]$$

且乘法是多项式乘法. 但是目前为止从上面的计算我们不能对 $H^*(\mathcal{F}\ell(k,\infty))$ 的环结构说些什么.

但是上面的 f_i 不止一个,

$$\begin{tikzcd} & & \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty) \arrow[dll, "f_1"'] \arrow[dl, "f_2 \cdots"] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\ \mathbb{C}P^\infty & \mathbb{C}P^\infty & & \mathbb{C}P^\infty & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)) & & \\ H^*(\mathbb{C}P^\infty) \arrow[urr, "f_1^*"] & H^*(\mathbb{C}P^\infty) \arrow[ur, "f_2^* \cdots"'] & & H^*(\mathbb{C}P^\infty) \arrow[ul] & H^*(\mathbb{C}P^\infty) \arrow[ull] \end{tikzcd}$$

由此可以得到一个

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes \overset{k}{\cdots} \otimes H^*(\mathbb{C}P^\infty) \longrightarrow H^*(\mathcal{F}\ell(k,\infty))$$

生成元恰好打到我们上面计算同构中的生成元 (根据归纳法), 因此这是一个**环**同构.

记 x_i 是 $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$ 的 (典范) 生成元在

$$f_i^*: H^*(\mathbb{C}P^\infty) \to H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty))$$

下的像. 于是我们证明了环同构

$$H^*(\mathcal{F}\ell(k,\infty)) = \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_k].$$

上面的过程有一个有限版本.

考虑 “取第一个子空间”

$$\mathcal{F}\ell(n) \longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$$

是一个以 $\mathcal{F}\ell(n-1)$ 为纤维的纤维丛, 所以

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{F}\ell(n)) &= H^*(\mathbb{C}P^{n-1}) \otimes H*(\mathcal{F}\ell(n-1)) \\ &= H^*(\mathbb{C}P^{n-1}) \otimes H^*(\mathbb{C}P^{n-2}) \otimes H*(\mathcal{F}\ell(n-2)) \\ &= H^*(\mathbb{C}P^{n-1}) \otimes \cdots \otimes H^*(\mathbb{C}P^1) \end{aligned}$$

我们已经知道

$$H^*(\mathbb{C}P^k) = \mathbb{Z}[t]/(t^{k+1}) = \bigoplus_{i=0}^{k} \mathbb{Z}\cdot t^i.$$

所以

$$H^*(\mathcal{F}\ell(n)) = \bigoplus_{\lambda\le\rho} \mathbb{Z}\cdot x^\lambda$$

其中 $\rho=(n-1,n-2,\dots)$, $\lambda\le\rho$ 表示对每个 $i=1,\dots,n$ 都有 $\lambda_i\le n-i$, $x^\lambda = x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}$.

但是我们不知道这是否是环同构 (实际上不是环同态).

回忆 formality, 上面同构同出现的 x_i 实际上依赖于选取. 考虑自然的嵌入

$$\mathcal{F}\ell(n) \longrightarrow \mathcal{F}\ell(n,\infty)$$

通过归纳我们会发现我们可以选择 $x_i \in H^*(\mathcal{F}\ell(n))$ 使得

$$\begin{array}{ccc} H^*(\mathcal{F}\ell(n,\infty)) & \longrightarrow & H^*(\mathcal{F}\ell(n)) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n] & \longrightarrow & \bigoplus_{\lambda\le\rho}\mathbb{Z}\cdot x^\lambda. \end{array}$$

将 x_i 映成 x_i.

计算 II

考虑

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty) = \left\{ (\ell_i)_{i=1}^k : \begin{array}{l}\text{每个 } \ell_i \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 1 维}\\ \text{线性子空间; 全体 } \{\ell_i\} \\ \text{线性无关;}\end{array} \right\} & \ni & (\ell_i)_{i=1}^k \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}r(k,\infty) = \left\{ V\subseteq \mathbb{C}^\infty : \begin{array}{l} V \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 } k \text{ 维线性} \\ \text{子空间.}\end{array} \right\} & \ni & \operatorname{span}(\ell_i)_{i=1}^k \end{array}$$

且这个映射的纤维是 $\mathrm{GL}_k/T_k = \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k)$.

注意到, $\widetilde{\mathcal{F}\ell}$ 上有一个显然的 $\mathfrak{S}_k$ 作用, 即置换这些一维子空间的指标. 因为这反映在上同调上恰好对应 $\mathbb{Z}[x_1,\dots,x_k]$ 上的置换作用. 而不论怎么换,

$$\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty) \longrightarrow \mathcal{G}r(k,\infty)$$

的像不变.

所以综上所述诱导的映射

$$H^*(\mathcal{G}r(k,\infty)) \longrightarrow H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty))$$

factor through

$$H^*(\mathcal{G}r(k,\infty)) \longrightarrow H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty))^{\mathfrak{S}_k} = \text{对称多项式环}.$$

这实际上是一个同构.

注意到在任何下属下, 上面的映射都是单射因为

$$[\Sigma_w] \mapsto 0 \text{ 除非 } w \text{ 是陪集中长度最小者}.$$

满射是因为在任何系数下 (有理数 $\mathbb{Q}$ 或有限域 $\mathbb{F}_p$), 两边恰好有相同的 Poincaré 多项式.

此时因为 $\mathcal{G}r(k,\infty)$ 只有偶数维上同调, 所以

$$H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)) = H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k)) \otimes H^*(\mathcal{G}r(k,\infty)).$$

不过这个同构只是作为 $H^*(\mathcal{G}r(k,\infty))$ 模.

但是我们已经可以观察到

> 映射 $H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)) \to H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k))$ 是满射, 且 kernel 是 $H^{\ge 1}(\mathcal{G}r(k,\infty))$ 生成的理想.

于是一石二鸟,

$$H^*(\mathcal{G}r(k,\infty)) = \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_k]^{\mathfrak{S}_k} = \text{对称多项式环}.$$

$$H^*(\mathcal{F}\ell(k)) = \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_k]/\langle \text{常数项为 0 的对称多项式} \rangle.$$

前者被称为 **invariant algebra**, 后者被称为 **coinvariant algebra**.

我们现在其实已经可以说明 Demazure operator 的表达式

$$\partial_i f = \frac{f(x)-f(s_i x)}{x_i - x_{i+1}}.$$

仔细追一下上面的过程会发现 ω_i 可以直接取作

$$x_i \in H^*(G/B) = \mathbb{Z}[x_1,\dots,x_n]/\langle \text{常数项为 0 的对称多项式} \rangle$$

而 α,β 关于 s_i 的作用对称, 所以对于 $\phi = \omega_i \smile \pi^*\alpha + \pi^*\beta$

$$\partial_i\phi = \pi^*\alpha = \frac{\phi - s_i\phi}{x_i - x_{i-1}}.$$

注意 1 之后有了式性类作为工具这个可以看得更清楚.

习题 1. 计算对称多项式的 *Poincaré* 多项式. 计算 *Grassmannian* 的 *Poincaré* 多项式.

习题 2. 证明作为 $\mathfrak{S}_n$ 的表示, $H^*(\mathcal{F}\ell(n);\mathbb{C})$ 同构于群环.

[提示：我们断言同构

$$H^*(\mathcal{F}\ell(n,\infty)) = H^*(\mathcal{F}\ell(n)) \otimes H^*(\mathcal{G}r(n,\infty)),$$

是表示的同构. 所以 $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$ 的 `graded` 特征是

$$\chi(g) = \frac{1}{\det(1-\mathbf{q}\pi(g))} \Big/ \frac{1}{(1-\mathbf{q})(1-\mathbf{q}^2)\cdots(1-\mathbf{q}^n)}$$

其中 $\pi:\mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n$ 是自然表示. 注意只有在 $\pi(g)=\mathrm{id}$，带入 $\mathbf{q}=1$ 才不是 0，这恰好是群环的特征.]

习题 3. 找一个下列命题的代数证明.

$$\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]/\langle\text{常数项为 0 的对称多项式}\rangle$$

是自由 *Abel* 群, 且以那些支配序下小于 $x_1^{n-1}\cdots x_{n-1}$ 的单项式

$$\{x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n} : (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \underset{\text{每项}}{\leq} (n-1,n-2,\cdots,1,0)\}$$

作为一组基. [提示：反正我没找到过，$\otimes\mathbb{Q}$ 的版本反而见的很多.]

习题 4. 计算

$$\mathcal{F}\ell(k,n) = \left\{ V^1 \subseteq \cdots V^k : \begin{array}{l}\text{每个 } V_i \text{ 是 } \mathbb{C}^n \text{ 的 } i \text{ 维}\\ \text{线性子空间.}\end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}\ell(k,n) = \mathrm{GL}_n \Big/ \begin{pmatrix} B_k & * \\ & \mathrm{GL}_{n-k} \end{pmatrix}.$$

的上同调群. [提示：考虑 $\widetilde{\mathcal{F}\ell}(n,\infty) \to \widetilde{\mathcal{F}\ell}(n-k,\infty)$ 将 (ℓ_i) 后 $n-k$ 个选出. 另一方面也可以考虑纤维丛 $\mathcal{F}\ell(k,n) \to \mathbb{C}P^{n-1}$，这以 $\mathcal{F}\ell(k-1,n-1)$ 为纤维.]

习题 5. 考虑

$$B = \left\{ (V,V') : \begin{array}{l} V \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 } k \text{ 维线性}\\ \text{子空间. } V' \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的}\\ n-k \text{ 维线性子空间.}\\ V\cap V' = 0. \end{array} \right\}$$

说明

$$H^*(B) = H^*(\mathcal{G}r(k,\infty)) \otimes H^*(\mathcal{G}r(n-k,\infty)).$$

$$H^*(\mathcal{G}r(k,n)) = \frac{\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_{n-k}}}{\langle\text{常数项为 0 的对称多项式}\rangle}.$$

并且说明自然的嵌入 $\mathcal{G}r(k,n)\to\mathcal{G}r(k,\infty)$ 诱导了满射. [提示：第一条考虑 $B\to\mathcal{G}r(k,\infty)$ 和 $B\to\mathcal{G}r(n-k,\infty)$. 第二条考虑 $B\to\mathcal{G}r(n,\infty)$ 为二者张成的空间. 因为这是胞腔映射，所以是满射. 组合地，$\mathcal{G}r(k,n)\to\mathcal{G}r(k,\infty)$ 将 $x_1,\ldots,x_k$ 映为 $x_1,\ldots,x_k$. 这可以用一些组合恒等式证明. 即任何 $x_{k+1},\ldots,x_n$ 的对称多项式可以整理成 $x_1,\ldots,x_k$ 的对称多项式.]

$\boxed{\text{注意 1}}$ 更一般, 对于分拆 $\lambda_1+\ldots+\lambda_r=n$,

$$H^*(G/P_\lambda) = \frac{\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_\lambda}}{\langle\text{常数项为 0 的对称多项式}\rangle}.$$

Schubert 多项式

$$\boxed{\text{不论怎么算 } \mathcal{F}\ell(n) \text{ 的上同调, 结果都是一样的}}$$

(这是一句废话吗？)

我们用两种方式

$$\boxed{\text{胞腔}} \qquad \boxed{\text{纤维}}$$

计算了 $\mathcal{F}\ell(n)$ 的上同调. 那么任何一个 Schubert 胞腔 $[BwB/B]$ 一定对应一个 $\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]/(\cdots)$ 中的元素.

根据我们之前的计算, 可以选择唯一的一个多项式 $\mathfrak{S}_w(x)$ 使得每个单项式都小于 $x_1^{n-1}\cdots x_{n-1}$. 这被称为 Schubert 多项式.

Demazure operator 用胞腔去写

$$\partial_i[\bar\Sigma_w] = \begin{cases} [\bar\Sigma_{ws_i}] & \ell(ws_i)=\ell(w)-1 \\ 0 & \ell(ws_i)=\ell(w)+1 \end{cases}$$

在纤维去写

$$\partial_i f = \frac{f(x)-f(s_ix)}{x_i-x_{i+1}}.$$

所以计算出 w_0 对应的多项式这就得到了 Schubert 多项式 $\mathfrak{S}_w(x)$ 的递推公式.

另一方面, 对于最长元 w_0,

$$\partial_{w_0} f = \frac{\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}(-1)^{\ell(w)} wf}{\prod_{i<j}(x_i-x_j)}.$$

不难证明

$$\partial_{w_0}(x_1^{n-1}\cdots x_{n-1}) = 1.$$

但是 $H^*(G/B)$ 最高次只有一维, 所以 $x_1^{n-1}\cdots x_{n-1} = [\Sigma_{w_0}]$.

巧合地是, $x_1^{n-1}\cdots x_{n-1}$ 是 $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$ 的一个 stable choice. 记 w_0^n 是 $\mathfrak{S}_n$ 中的最长元. 那么 Bw_0^nB/B 作为 $\mathcal{F}\ell(n+1)$ 的胞腔经过计算还是 $x_1^{n-1}\cdots x_{n-1}$. 即,

$$\partial_{w_0^n w_0^{n+1}} x_1^n\cdots x_n = x_1^{n-1}\cdots x_{n-1}.$$

这一事实的无穷版本是, 胞腔 BwB/B 在 $H^*(\mathcal{F}\ell(\infty))$ 中也表作 $\mathfrak{S}_w(x)$. 这是一个 $H^*(\mathcal{F}\ell(\infty))$ 是无穷元的多项式的证明.

2.4 Grassmannian 流形

对于 Grassmannian 流形, 还有一些其他的构造方法, Schubert 胞腔也有其他的刻画方式.

$$\mathcal{G}r(k,n) = \left\{ V \subseteq \mathbb{C}^\infty : \begin{array}{l} V \text{ 是 } \mathbb{C}^n \text{ 的 } k \text{ 维线性子} \\ \text{空间.} \end{array} \right\}$$

我们已经知道

$$\mathrm{GL}_n \big/ \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_k & * \\ & \mathrm{GL}_{n-k} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}r(k,n)$$

即, 将 $x \in G$ 的前 k 个向量张成一个 k 维子空间.

$$U_n \big/ \begin{pmatrix} U_k & \\ & U_{n-k} \end{pmatrix} \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}r(k,n)$$

即, 将 $x \in U_n$ 的前 k 个向量张成一个 k 维子空间.

一则基本变形如下.

考虑 $n \times k$ 阶矩阵 $\mathbb{M}_{n\times k}$, 考虑其中满秩的那些 $\mathbb{M}^\circ_{n\times k}$, 那么

$$\mathbb{M}^\circ_{n\times k} / \mathrm{GL}_k \xrightarrow{\sim} \mathcal{G}r(k,n)$$

即, 将 $x \in \mathbb{M}_{n\times k}$ 的前 k 个向量张成一个 k 维子空间.

对于 $V \in \mathcal{G}r(k,n)$, 选取 V 的一组基 $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{C}^n$, 考虑

$$\mathbf{v} = v_1 \wedge \cdots \wedge v_k \in \Lambda^k \mathbb{C}^n.$$

不同基的选取会导致上面的选择差一个常数. 所以我们良定义了

$$\mathcal{G}r(k,n) \longrightarrow \mathbb{P}(\Lambda^k \mathbb{C}^n).$$

被称为 **Plücker 嵌入**.

注意

$$V = \{x \in \mathbb{C}^n : x \wedge \mathbf{v} = 0\}.$$

所以 Plücker 嵌入是单射.

令 $\binom{[n]}{k}$ 为 $\{1, \ldots, n\}$ 中的 k 元子集. 取 $A \in \binom{[n]}{k}$, 记

$$\mathbf{e}_A = \mathbf{e}_{a_1} \wedge \cdots \wedge \mathbf{e}_{a_k} \qquad A = \{a_1 < a_2 < \cdots < a_k\}$$

其中 $\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_n$ 是 $\mathbb{C}^n$ 的标准基.

那么 $\Lambda^k \mathbb{C}^n$ 以 $\{\mathbf{e}_A : A \in \binom{[n]}{k}\}$ 为基.

对于 $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{C}^n$, 假设

$$v_j = \sum_i x_{ij} \mathbf{e}_i = \begin{pmatrix} x_{1j} \\ x_{2j} \\ \vdots \\ x_{nj} \end{pmatrix}$$

那么

$$v_1 \wedge \cdots \wedge v_k = \sum ??_A \cdot \mathbf{e}_A$$

其中

$$??_A = \det(x_{ij})_{i \in A, 1 \le j \le k}.$$

因此我们也可以纯代数地描述 Plücker 嵌入. 对于 $A \in \binom{[n]}{k}$,

$$\Delta_A : \mathbb{M}_{n\times k} \longrightarrow \mathbb{C} \qquad \Delta_A(x) = \det(x_{ij})_{i\in A, 1\le j \le k}.$$

那么

$$\mathcal{G}r(k,n) = \mathbb{M}^\circ_{n\times k} / \mathrm{GL}_k \longrightarrow \mathbb{C}P^{\binom{n}{k}-1}$$

是

$$x \longmapsto (\Delta_A)_{A \in \binom{[n]}{k}} \text{在 } \mathbb{C}P^{\binom{n}{k}-1} \text{ 中的像.}$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 实际上 *Plücker* 嵌入的像可以由 **Plücker 关系**给出, 实际上 $\mathcal{G}r(k,n)$ 是 $\mathbb{C}P^{\binom{n}{k}-1}$ 中的一些二次函数族的公共零点.

下面我们来刻画 Schubert 胞腔, 用上面三种语言.

考虑

$$\Lambda = \left\{ w \in \mathfrak{S}_n : \begin{array}{l} w \text{ 在 } \{1,\ldots,k\} \text{ 和 } \{k+ \\ 1,\ldots,n\} \text{ 分别单调递增} \end{array} \right\}$$

那么 $\mathcal{G}r(k,n) = G/P$ 的 Schubert 胞腔是

$$\{BwP/P : w \in \Lambda\}.$$

记

$$\mathbb{Y}_{k\times(n-k)} = \{k \times (n-k) \text{ 内的 Young 图}\}.$$

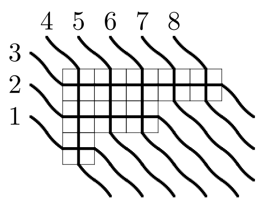
对于 $w \in \Lambda$, 对应的 Young 图

$$\lambda : \lambda_{k+1-i} = \{j > k : w(j) < w(i)\}$$

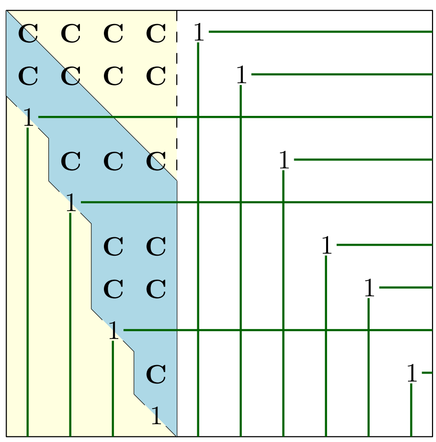
反之, 对于 Young 图 $\lambda = \lambda_1 \ge \cdots \ge \lambda_k$, 对应的置换

$$w : w(i) = \lambda_{k-i+1} + i \qquad i = 1, \ldots, k$$

请看下图



对应的置换矩阵



对于 $\lambda \in \mathbb{Y}$, 记矩阵

$$U_\lambda = \left\{ (x_{ij}) : \begin{array}{c} \text{对所有 } j = 1, \ldots, k, \text{ 位置} \\ (\lambda_{k+j-1} + j, j) \text{ 为 } 1, \text{ 这个位} \\ \text{置右方和下方都是 } 0. \end{array} \right\} \subseteq \mathbb{M}^\circ_{n\times k}.$$

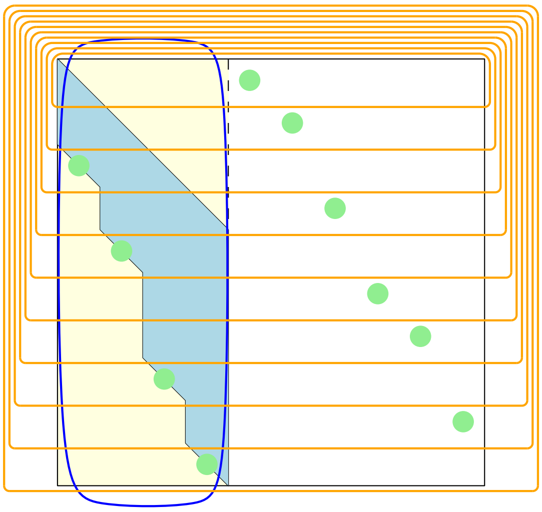
那么 $\mathcal{G}r(k,n) = \mathbb{M}_{n\times k}/\operatorname{GL}_k$ 的 Schubert 胞腔是

$$\{U_\lambda \text{的像} : \lambda \in \mathbb{Y}_{k\times(n-k)}\}.$$

记标准旗

$$F_0 = (F_0^i) : \qquad F_0^i = \operatorname{span}(\mathbf{e}_1, \ldots, \mathbf{e}_i).$$

如果 $V \in \mathcal{G}r(k,n)$ 在对应的 $\lambda \in \mathbb{Y}$ 的 Schubert 胞腔里



那么对任意 i,

$$\dim(F_0^{\lambda_{k-i+1}+i} \cap V) = i.$$

记 Σ_λ 为满足上述条件的所有 V.

所以 $\mathcal{G}r(k,n)$ 的 Schubert 胞腔是

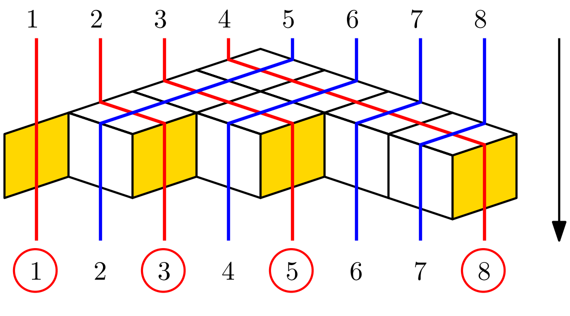
$$\{\Sigma_\lambda : \lambda \in \mathbb{Y}_{k\times(n-k)}\}.$$

对每个 Young 图 λ 都对应一个 $\binom{[n]}{k}$ 的元素即

$$\{\lambda_1 + k, \cdots, \lambda_k + 1\}.$$

如果置换是 w, 对应

$$\{w(1), \ldots, w(k)\}.$$



对于 $A, B \in \binom{[n]}{k}$, 定义

$$A \underset{\text{字典序}}{\leq} B, \qquad \text{“从最小元开始比起 } B \text{ 更大”.}$$

可以定义

$$\Sigma_A = \{V : \Delta_A(V) \neq 0, \forall B > A, \Delta_B(V) = 0\}$$

所以 $\mathcal{G}r(k,n)$ 的 Schubert 胞腔是

$$\{\Sigma_A : A \in \tbinom{[n]}{k}\}.$$

下面可以总结如下

$\mathcal{G}r(k,n)$	Schubert 胞腔
子空间	$\{\Sigma_\lambda : \lambda \in \mathbb{Y}_{k\times(n-k)}\}$
G/P	$\{BwP/P : w \in \Lambda\}$
$\mathbb{M}^\circ_{n\times k}/\operatorname{GL}_k$	$\{U_\lambda \text{的像} : \lambda \in \mathbb{Y}_{k\times(n-k)}\}$
Plücker 嵌入	$\{\Sigma_A : A \in \binom{[n]}{k}\}$

在 $\mathcal{G}r(k,\infty)$ 上也有类似的刻画.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 同样, 如果用基本类的语言, 我们应该改用 Bw_0wP/P, 上面的刻画得对应 *Young* 图在 $k\times(n-k)$ 中的补.

习题 1. 验证两个 *Young* 图 λ_1, λ_2 对应的置换 σ_1, σ_2,

$$\sigma_1 \underset{\textit{Bruhat 序}}{\leq} \sigma_2 \iff \lambda_1 \underset{\textit{Young 图}}{\subseteq} \lambda_2.$$

从而 Σ_λ 的闭包是

$$\{V : \dim(F_0^{\lambda_{k-i+1}+i} \cap V) \leq i\}.$$

习题 2. 对于 *Young* 图 λ, 对应的置换是 σ, 证明 $w_0\sigma$ 在 $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_k \times \mathfrak{S}_{n-k}$ 最小长度的陪集代表元对应的 *Young* 图恰好是 λ 在 $k\times(n-k)$ 中的补.

习题 3. 对于 *Young* 图 λ, 假设对应置换 σ, 证明 $\mathfrak{S}_\sigma(x)$ 是 λ 对应的 *Schur* 多项式.

参考文献

- Hatcher. Algebraic Topology.
- Hatcher. Spectral Sequences.
- 時枝正. Topology in Four Days [翻译: 拓扑四日谈].
- Hiller. Geometry of Coxeter Groups.

3 向量丛速成

本节关于向量丛的内容非常重要, 有助于进一步理解上同调. 在此之前, 理解上同调的方法是将其理解成 “基本类”. 现在我们可以理解为向量丛的 “示性类”. 这两个概念某种意义上是对偶的.

3.1 向量丛的定义

令 $E\xrightarrow{\pi}B$ 是一个连续映射, 我们说这是一个以 F 为纤维的 **纤维丛 (fibre bundle)** , 如果局部上是平凡丛.

任意一个点 $b\in B$, 都存在邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U)\to U$ 同构于平凡丛.

$$\begin{tikzcd} U\times F \arrow[r, phantom, "\cong"] \arrow[d] & \pi^{-1}(U) \arrow[r, phantom, "\subseteq"] \arrow[d] & E \arrow[d] \\ U \arrow[r, phantom, "="] & U \arrow[r, phantom, "\subseteq"] & B \end{tikzcd}$$

其中 B 叫 **底空间** (base space), E 叫 **全空间 (total space)** .

我们可以修改成下面的坐标卡的定义. 令 $E\xrightarrow{\pi}B$ 是一个连续映射, 我们说这是一个以 F 为纤维的 **纤维丛 (fibre bundle)** . 如果存在 “坐标卡”$\{(U,\varphi_U)\}$ 使得

$$\bigcup U = B \qquad 对每个\ U \quad \begin{tikzcd} \pi^{-1}(U) \arrow[r, "\varphi_U", "\sim"'] \arrow[d] & F\times U \arrow[d] \\ U \arrow[r, phantom, "="] & U \end{tikzcd}$$

此时有一个问题, 在 $U\cap V$ 上, φ_U 和 φ_V 可能不同, 因此会相差一个

$$g_{UV}\in \mathrm{Aut}\begin{pmatrix} {\scriptstyle (U\cap V)\times F} \\ \downarrow \\ {\scriptstyle U\cap V}\end{pmatrix}.$$

请看下图

$$\begin{tikzcd}[column sep=small]
F\times U \arrow[dd] & & E|_U \arrow[ll, "\sim", "\varphi"'] \arrow[dd] & & E|_V \arrow[rr, "\sim", "\psi"'] \arrow[dd] & & F\times V \arrow[dd] \\
& F\times U\cap V \arrow[ul] \arrow[dd] \arrow[rrrr, bend right] & & E|_{U\cap V} \arrow[ll, "\sim"'] \arrow[rr, "\sim"] \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[dd] & & F\times U\cap V \arrow[ur] \arrow[dd] & \\
U \arrow[rr, equal] & & U & & V \arrow[rr, equal] & & V \\
& U\cap V \arrow[ul] \arrow[rr, equal] \arrow[rrrr, bend right, equal] & & U\cap V \arrow[ul] \arrow[ur] \arrow[rr, equal] & & U\cap V \arrow[ur] &
\end{tikzcd}$$

当然还要满足 $g_{UV}\circ g_{VU}=\mathrm{id}$, $g_{UV}g_{VW}=g_{UW}$ 这些相容条件.

注意,

$$\mathrm{Aut}\begin{pmatrix} {\scriptstyle U\times F} \\ \downarrow \\ {\scriptstyle U}\end{pmatrix}=\mathrm{Map}(U,\mathrm{Aut}(F))$$

因为 $\begin{smallmatrix} U\times F \\ \downarrow \\ U\end{smallmatrix}$ 的自同构指的是每点指定一个该点纤维的自同构.

现在假设 F 是线性空间, 我们把上面的 $\mathrm{Aut}(F)$ 改为 $\mathrm{GL}(F)$. 这就是 **向量丛** 的定义.

粗略地说, 向量丛就是每点的纤维是线性空间, (rather than underlying 拓扑空间). 因为一个线性空间作为拓扑空间有很多线性结构, 向量丛是说我们指定了其中的一个线性结构.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 首先, 对于任何拓扑空间 X, 线性空间 F. 平凡丛 $F\times X$ 是一个向量丛. 每点的线性结构和 F 相同.

$\boxed{\text{注意 2}}$ *Möbius* 带也是一个向量丛, 其 *zero section* 是中轴线. 因为在粘的时候 “翻转”$x\mapsto -x$ 是一个线性映射.

$\boxed{\text{注意 3}}$ 对于流形 M, 切丛

$$\bigcup_{x\in M} T_xM\longrightarrow M$$

是一个向量丛. 每点的线性结构就是切空间的线性结构.

之后, 给出向量丛通常都有自明的线性结构, 我们就不再声明.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 我们可按照线性空间对向量丛进行操作. 例如对于向量丛 ξ, 我们可以把每一点的纤维换成其对偶空间, 这称为 ξ 的对偶, 类似地可以定义对称积, 外积. 对于向量丛 ξ 和 τ, 我们可以定义 $\xi\otimes\tau$, $\mathrm{Hom}(\xi,\tau)$, 以此类推.

对于纤维丛 $\pi=\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ B\end{smallmatrix}$, 我们称 $s:\begin{smallmatrix} E \\ \uparrow \\ B\end{smallmatrix}$ 是一个 **截面 (section)** 如果 $\pi\circ s=\mathrm{id}_B$.

换句话说, $\forall x\in B, s(x)\in E_x$,

$$\boxed{截面}=\boxed{每条纤维上选一个点}.$$

$$\boxed{连续截面}=\boxed{每条纤维上连续地选一个点}.$$

对于平凡丛 $E=B\times F$, 截面就是一个函数 $B\to F$. 而纤维丛局部上是平凡丛, 所以截面局部上是函数.

我们曾经说过对于纤维丛, 不是所有纤维都有截面 (例如 Möbius 带的边界). 但是向量丛 $\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ B\end{smallmatrix}$ 一定有, 即每点选则零向量,

$$B\longrightarrow E \qquad x\longmapsto \textbf{the } 0\in E_x$$

这被叫作 “零截面 (zero section)”. 通过零截面我们还可以认为 $B\subseteq E$.

我们可以把零点的概念推广到向量丛的截面. 对于向量丛 $\xi : \underset{B}{\overset{E}{\downarrow}}$, 一个截面 $s : B \to E$, 定义其零点是

$$Z(s) = \{x \in B : s(x) = \textbf{the } 0 \in E_x\}.$$

等价地,

$$\{s(x) : x \in B\} \cap \text{零截面},$$

是 s 的图像和零截面的交.

这提示我们在上面两个集合横截时, 定义

$$[Z(s)] \in H^*(B).$$

是零点的基本类 (按照正负重数).

事实证明我们总可以选 s 让他们横截, 且和 s 的选取无关. 所以定义了 **Euler 类**

$$e(\xi) \in H^*(B).$$

换句话说, 一个一般的 section 的零点的基本类是向量丛 ξ 的一个不变量 (这就是 Hopf-Poincaré 论断).

$\boxed{\text{注意 1}}$ *因为 E 不是紧致的, 要作相交理论需要有一些手段, 例如考虑 Thom 空间. 但是这终归是可以定义的.*

$\boxed{\text{注意 2}}$ *如果 E 不可定向, 只能 $\bmod 2$ 了, 横截相交必须在 mod2 后才成立.*

<u>例 A.</u> 考虑 S^1 上的平凡丛, 即一个圆柱面. 任何一个 section(即一个周期函数), 的 $+$ 零点和 $-$ 零点一定相抵消.

<u>例 B.</u> 考虑 Möbius 带, 不论怎么 “移动”section, 那个零点总是无法消除.

<u>例 C.</u> 对于紧致光滑流形 M 的切丛 τ, 此时

$$e(\tau) \in H^{\dim M}(M) \cong \mathbb{Z}$$

经典的 Hopf-Poincaré 定理说明这正是 M 的 Euler 式性数 (这是 Euler 类名称的由来).

下面我们考虑复向量丛 (即纤维是 $\mathbb{C}$ 线性空间). 对于向量丛 ξ, 定义

$$\operatorname{rank} \xi = \dim(\text{任何一点的纤维}).$$

那么, 一个 X 上向量丛 E 的 Euler 类的次数

$$e(\xi) \in H^{2 \cdot \operatorname{rank} \xi}(X).$$

如果向量丛的秩 (即, 纤维的维数) 是 1, 则称为**线丛**.

线丛比较好理解.

对于一维线性空间 ℓ, $\ell \otimes \ell^* \to \mathbb{C}$ 是同构.	对于秩一的线丛 ξ $\xi \otimes \xi^* \cong$ (平凡丛). 是同构.

对于函数 f, g, $\{fg$ 的零点$\}=$ $\{f$ 的零点$\} \cup \{g$ 的零点$\}$.	对于 s, t 是线丛 τ 和 ξ 的 section, $\{s \otimes t$ 的零点$\}=$ $\{s$ 的零点$\} \cup \{t$ 的零点$\}$.

所以对于线丛 τ 和 ξ,

$$e(\tau \otimes \xi) = e(\tau) + e(\xi), \qquad e(\tau^*) = -e(\tau).$$

于是这定义了一个同态

$$\Big((\text{所有 } X \text{ 上的线丛}) \Big/ \text{同构}, \otimes \Big) \longrightarrow (H^2(X), +)$$

实际上这是同构!

$\boxed{\text{注意 1}}$ *对于高维一般没有 $e(\tau \otimes \xi) = e(\tau) + e(\xi)$. 这是因为 $s \otimes t$ 不是一个一般位置的 section(看维数就知道了).*

考虑 n 维射影空间 $\mathbb{C}P^n$. 我们用射影坐标

$$[x_0 : x_1 : \cdots : x_n] \in \mathbb{C}P^n$$

表示.

一个齐次 d 次多项式 f 定义了一个 d 次超曲面 $\{f = 0\}$. 显然这个超曲面是 f 的零点, 但是

$$\boxed{f \text{ 并不是 } \mathbb{C}P^n \text{ 上的函数.}}$$

$\boxed{\text{问题}}$: f 是哪个向量丛的截面?

回忆 $\mathbb{C}P^n$ 是 $\mathbb{C}^{n+1}$ 中所有的一维子空间. 我们考虑

$$E = \{(x, \ell) \in \mathbb{C}^{n+1} \times \mathbb{C}P^n : x \in \ell\}$$

那么 $\underset{\mathbb{C}P^n}{\overset{E}{\downarrow}}$ 是一个向量丛, 这被称为 **tautological 丛**或**万有 (universal) 丛**.

$$\boxed{\text{在点 } \ell \in \mathbb{C}P^n \text{ 处的纤维正是 } \ell \text{ 自身.}}$$

tautological adj. 重复的；同义反复的

注意对于线性空间 V,

$$S^dV^* = \{\varphi : \varphi \text{ 是 } V \text{ 上的 } d \text{ 次多项式函数}\}$$

记 τ 是上面定义的重言层, 那么

$$S^d\tau^* = \begin{array}{c}\{(\varphi,\ell) : \varphi \text{ 是 } \ell \text{ 上的 } d \text{ 次多项式函数}\} \\ \downarrow \\ \mathbb{C}P^n\end{array}.$$

回到最开始的问题, 对于 d 次齐次多项式 f, 实际上定义了一个 $S^d\tau^*$ 的 section

$$\ell \mapsto f \text{ 在 } \ell \text{ 上的限制}.$$

所以 $S^d\tau^*$ 的 Euler 类是

$$[d \text{ 次超曲面}] = d[\text{超平面}] \in H^2(\mathbb{C}P^n).$$

习题 1. 证明对于一维空间 ℓ, 对称积等于张量积, $S^d\ell \cong \ell^{\otimes d}$. 于是 $S^d\tau = \tau^{\otimes d}$.

习题 2. 利用事实 $H^2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}$ 分类了线丛, 找出他们的同构类. [提示: 他们是 $\mathcal{O}(d) : d \in \mathbb{Z}$, $\mathcal{O}(-d) = S^d\tau = \tau^{\otimes d}$, $\mathcal{O}(d) = S^d\tau^* = (\tau^*)^{\otimes d}$.]

习题 3. 对于 $\mathbb{C}P^1$, 其切空间是线丛, 这对应哪一个 $\mathcal{O}(d)$? [提示: 我们知道 div(切丛) 恰是 Euler 示性数 2, 所以 $d = 2$.]

习题 4. 对于任何向量丛 ξ, η, 证明

$$e(\xi \oplus \eta) = e(\xi) \smile e(\eta).$$

[提示: 对于函数 f, g,

$$\{(f,g) \text{ 的零点}\} = \{f \text{ 的零点}\} \cap \{g \text{ 的零点}\}$$

对于 s, t 是线丛 ξ 和 η 的 section,

$$\{(s,t) \text{ 的零点}\} = \{s \text{ 的零点}\} \cap \{t \text{ 的零点}\}$$

所以线丛 ξ, η, $e(\xi \oplus \eta) = e(\xi) \smile e(\eta)$.]

3.2 Chern 类

我们从上面一节看到基本类的计算问题可以转化成纤维丛的 Euler 类的计算. 我们目前尚不知道如何计算任意向量从张量的 Euler 类.

为了解决这个问题, 我们需要提更一般的问题. 对于 X 上秩为 r 的复向量丛 ξ, 考虑

$$\mathrm{Hom}(\mathbb{1}^{\oplus r}, \xi) = \mathrm{Hom}(\mathbb{1}, \xi)^{\oplus r} = \xi^{\oplus r}$$

其中 $\mathbb{1}$ 是平凡丛. 这局部上是一个 $r \times r$ 矩阵. 对于一个 sections, 我们可以考虑 d **降秩区域 (degeneracy locus)**

$$\{\operatorname{rank} s \le r - d\} = \{x \in X : s(x) \text{的秩} \le r - d\}.$$

对于矩阵 X, 可以定义

$$\chi(X) = \det(I + X \cdot t) = 1 + \operatorname{tr} X \cdot t + \cdots + \det X \cdot t^n.$$

注意到 $\operatorname{rank} X = \deg \chi(X)$. 所以 $\operatorname{rank} X \le r - d$ 可以由 d 个方程定义, 所以对于一般位置的 section s, 我们可以定义 **Chern 类**

$$c_{2d}(\xi) = [\{\operatorname{rank} s \le r - d\}] \in H^{2d}(X).$$

这同样可以证明这只和 ξ 有关. 记全 Chern 类

$$c(\xi) = 1 + c_2(\xi) + \cdots \in H^*(X).$$

例如当 ξ 是线丛时, 降秩区域 (degeneracy locus) 即零点. 即

$$c(\xi) = 1 + e(\xi). \tag{1}$$

对于向量丛 ξ, η, 此时 $\mathrm{Hom}(\mathbb{1}^{\oplus r}, \xi \oplus \eta)$ 可以取成分块矩阵, 因此.

$$c(\xi \oplus \eta) = c(\xi) \cdot c(\eta). \tag{2}$$

即

$$\left\{\operatorname{rank}\begin{pmatrix} A & \\ & B\end{pmatrix} \le r\right\} = \bigcup_{p+q=r} \{\operatorname{rank} A \le p\} \cap \{\operatorname{rank} B \le q\}.$$

对于连续映射 $X \xrightarrow{f} Y$, 如果 Y 上有向量丛 $\xi : \begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ Y \end{smallmatrix}$. 考虑拉回

$$\begin{array}{ccc} E_f & \to & E \\ \downarrow & & \downarrow \\ X & \to & Y \end{array} \qquad E_f = \{(x,v) \in X \times E : f(x) = \xi(v)\}.$$

于是 $f^*\xi : \begin{smallmatrix} E_f \\ \downarrow \\ X \end{smallmatrix}$ 是 X 上的向量丛. 即 $f^*\xi$ 在 x 处的纤维是 ξ 在 $f(x)$ 处的纤维的拷贝.

于是任何一个 ξ 的 section $Y \to E$ 都自动给出 $f^*\xi$ 的 section, 即复合 f. 形式地, $x \mapsto (x, s(f(x))) \in E_f$.

于是我们有

$$c(f^*\xi) = f^*c(\xi) \tag{2}$$

第二个 f^* 是上同调的拉回. 这是因为上同调的拉回的几何意义是原像, 所以

$$f^{-1}\{y : \operatorname{rank} A(y) \le r\} = \{y : \operatorname{rank} A(f(x)) \le r\}.$$

$\boxed{\text{注意 } 1}$ 实际上上面三条性质 (1), (2), (3) 唯一决定了 *Chern* 类.

假设向量丛 $\xi = \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_r$, 分解成线丛的直和. 那么

$$c(\xi) = (1 + e(\xi_1)) \cdots (1 + e(\xi_r)).$$

所以

$$c_r(\xi) = e(\xi_1) \cdots e(\xi_r) \in H^{2r}(X)$$

恰好是 ξ 的 Euler 类. 这一般也正确, 因为有下面的**分裂原理 (splitting principle)**

> 如果一个关于 Chern 类的恒等式对分裂成线丛的向量丛对那么对所有向量丛都对.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *注意到上面的定义只对光滑紧致流形定义了 Chern 类, 有没有办法对任意好的拓扑空间定义呢? 实际上 Chern 类是万有的, 即任意一个向量丛 η, 都有在同伦意义下* **典范地** *写成 $f^*(\xi)$, 其中 ξ 是 $\mathcal{G}r$ 上面一个固定的向量丛. 所以只需要指定 ξ 的 Chern 类, 其拉回就可以定义成 η 的 Chern 类.*

实际上,

$$\boxed{\frac{\mathrm{Map}(X, \mathcal{G}r(r,\infty))}{\text{同伦}} = \frac{\text{X 上所有秩 } r \text{ 的向量丛}}{\text{同构}}}$$

下面我们来描述这个映射.

对于 X 上的向量丛 ξ, 如果 X 不太差 (例如, Hausdorff, 第二可数), 那么总可以嵌入无穷维的平凡丛

$$\begin{array}{cccc} & E(\xi) & \hookrightarrow & \mathbb{C}^\infty \times X \\ \xi: & \downarrow & & \downarrow \\ & X & = & X \end{array}$$

局部上可以嵌入有限维, 再找一个可数覆盖 + 单位分拆直和起来即可证明这一嵌入定理. 于是 ξ 在任何一点 $x \in X$ 处的纤维是 $\mathbb{C}^\infty$ 的一个 r 维子空间. 那么定义 $X \to \mathcal{G}r(r,\infty)$ 映 $x \in X$ 为这个子空间.

回忆 $\mathcal{G}r(r,\infty)$ 是 $\mathbb{C}P^\infty$ 的所有 r 维子空间. 所以也有 **重言丛**

$$\begin{array}{cc} & \{(x,V) \in \mathbb{C}^\infty \times \mathcal{G}r(r,\infty) : x \in V\} \\ \tau: & \downarrow \\ & \mathcal{G}r(r,\infty) \end{array}$$

对于一个连续映射 $X \to \mathcal{G}r(r,\infty)$, 定义对应的 X 上的向量丛是重言丛的拉回.

最后验证二者在同伦/同构意义下互逆则是点集拓扑.

所以我们只需要对 $\mathcal{G}r(r,\infty)$ 上的重言层 τ 定义 Chern 类即可. 我们计算过

$$H^*(\mathcal{G}r(r,\infty)) = \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_r]^{\mathfrak{S}_n}.$$

我们定义其 Chern 类是

$$c(\tau) = (1 - x_1)\cdots(1 - x_r) = 1 - e_1(x) + \cdots \pm e_r(x).$$

其中 e_i 是初等对称多项式. 当然需要仔细绕一圈才能说明这个和原本的定义相容.

习题 1. 对于向量丛 ξ, 如果有子丛 η, 可以定义商丛 ξ/η, 证明

$$c(\xi) = c(\eta) \cdot c(\xi/\eta).$$

注意这是 (2) 的推广. [提示: 其中只是把对角变成了上三角

$$\left\{\mathrm{rank}\begin{pmatrix} A & C \\ & B \end{pmatrix} \le r\right\} = \bigcup_{p+q=r} \{\mathrm{rank}\, A \le p\} \cap \{\mathrm{rank}\, B \le q\}.$$

还有一个办法是选一个酉内积, 此时自动分裂.]

3.3 Chern 类的计算

■ **计算 I**

对于 $\mathbb{C}P^\infty$, 我们计算过

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}[t].$$

其上的重言层 τ,

$$c(\tau) = 1 - t.$$

这样才符合 (1).

$\boxed{\text{注意 1}}$ 记 $T = \mathbb{C}^\times$, 记 $ET = \mathbb{C}^\infty \setminus 0$, $BT = \mathbb{C}P^\infty = ET/T$.

$$\underline{\mathbb{C}} = \begin{array}{c} ET \underset{T}{\times} \mathbb{C} \\ \downarrow \\ BT \end{array} \qquad ET \underset{T}{\times} \mathbb{C} = \frac{\{(x,z) \in ET \times \mathbb{C}\}}{(xt, z) = (x, tz) \quad \forall t \in \mathbb{C}^\times}.$$

这是一个向量丛, 且和重言丛同构

$$\begin{array}{ccc} ET \underset{T}{\times} \mathbb{C} & \xrightarrow[\sim]{(v,z) \mapsto (vz, v\mathbb{C})} & \{(x,\ell) : x \in \ell\} \\ \downarrow & & \downarrow \\ ET/T & = & \mathbb{C}P^\infty \end{array}$$

■ **计算 II**

回顾

$$\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty) = \left\{ (\ell_i)_{i=1}^k : \begin{array}{l} \text{每个 } \ell_i \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 1 维} \\ \text{线性子空间; 全体 } \{\ell_i\} \\ \text{线性无关;} \end{array} \right\}$$

我们可以定义第 i 个重言丛 τ_i, 在 $(\ell_i)_{i=1}^k$ 处的纤维是 ℓ_i. 显然

$$\tau_i = f_i^*\tau$$

其中 $f_i : \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)\to\mathbb{C}P^\infty$ 映 $(\ell_i)_{i=1}^k$ 到 ℓ_i. 那么

$$c(\tau_i) = f^*(1-t) = 1 - x_i.$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 记 T_n 是 GL_n 的对角矩阵. 考虑

$$x_i : T\to\mathbb{C}^\times \qquad \mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n)\mapsto x_i.$$

这定义了一个表示 $\mathbb{C}x_i$. 这可以延拓成一个 $T = \begin{pmatrix} T_n & * \\ & \mathrm{GL}_\infty \end{pmatrix}$ 的表示, 即令 $\begin{pmatrix} 1 & * \\ & \mathrm{GL}_\infty \end{pmatrix}$ 作用平凡. 这定义了

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_\infty \underset{T}{\times} \mathbb{C}x_i \arrow[d, "\underline{\mathbb{C}x_i}"'] \\ \mathrm{GL}_\infty/T \cong \widetilde{\mathcal{F}\ell}(n,\infty) \end{tikzcd}$$

不难追图得到 $\underline{\mathbb{C}x_i}\cong\tau_i$.

■ 计算 III

回顾

$$\mathcal{F}\ell(k,\infty) = \left\{ V^0\subseteq\cdots\subseteq V^k : \begin{array}{l}\text{每个 } \dim V^i \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的} \\ i \text{ 维线性子空间.}\end{array} \right\}$$

上面有重言层 ϕ_i, 在 (V^i) 处的纤维是 V^i. 那么

$$p^*\phi_i^* = \tau_1\oplus\cdots\oplus\tau_i$$

其中 $p : \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)\to\mathcal{F}\ell(k,\infty)$. 因为 $p^*\phi^*$ 在 $(\ell_i)_{i=1}^k$ 处的纤维是 $V\cong\ell_1\oplus\cdots\oplus\ell_i$. 所以

$$c(\phi_i) = (1-x_1)\cdots(1-x_i).$$

$$c(\phi_i/\phi_{i-1}) = 1-x_i.$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 记 $T = \begin{pmatrix} B_n & * \\ & \mathrm{GL}_\infty \end{pmatrix}$. 此时 ϕ_i/ϕ_{i-1} 和下面的丛同构

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_\infty \underset{B}{\times} \mathbb{C}x_i \arrow[d, "\underline{\mathbb{C}x_i}"'] \\ \mathrm{GL}_\infty/B \cong \mathcal{F}\ell(n,\infty) \end{tikzcd}$$

因为 x_i 也可以延拓到 B 上, 即要求 $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1 \end{pmatrix}$ 作用平凡.

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_\infty \underset{B}{\times} \mathbb{C}x_i \arrow[r, "(X,z)\mapsto(X_iz,\mathrm{span}(X))", "\sim"'] \arrow[d] & E(\phi_i/\phi_{i-1}) \arrow[d] \\ \mathrm{GL}_\infty/B \arrow[r] & \mathcal{F}\ell(n,\infty) \end{tikzcd}$$

且显然有如下的拉回

$$\begin{tikzcd} \mathrm{GL}_\infty \underset{T}{\times} \mathbb{C}x_i \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{GL}_\infty \underset{B}{\times} \mathbb{C}x_i \arrow[d] \\ \mathrm{GL}_\infty/T \arrow[r] & \mathrm{GL}_\infty/B \cong \mathcal{F}\ell(n,\infty) \end{tikzcd}$$

■ 计算 IV

回顾

$$\mathcal{F}\ell(n) = \left\{ V^0\subseteq\cdots\subseteq V^n : \begin{array}{l}\text{每个 } \dim V^i \text{ 是 } \mathbb{C}^n \text{ 的 } i \\ \text{维线性子空间.}\end{array} \right\}$$

而 $\mathcal{F}\ell(n)$ 上面有重言层 ϕ_i, 在 (V^i) 处的纤维是 V^i. 我们对 $\mathcal{F}\ell(n)$ 上同调的计算是用 $\mathcal{F}\ell(n,\infty)$ 拉回. 所以

$$c(\phi_i) = (1-x_1)\cdots(1-x_i).$$

$$c(\phi_i/\phi_{i-1}) = 1-x_i.$$

特别地, 此时 ϕ_n 是平凡丛, 所以这进一步解释了为何 x_i 的对称多项式为何在 $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$ 中消失.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 令 $G = \mathrm{GL}_n$, $B = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix}$, 那么

$$\begin{tikzcd} G \underset{B}{\times} \mathbb{C}x_i \arrow[r, "(X,z)\mapsto(X_iz,\mathrm{span}(X))", "\sim"'] \arrow[d] & E(\phi_i/\phi_{i-1}) \arrow[d] \\ G/B \arrow[r] & \mathcal{F}\ell(n) \end{tikzcd}$$

综上, 我们计算过的上同调中出现的 x_i 都可以用 Chern 类写. 曾经 $x_i\in H^*(G/B)$ 是

$$t\in\mathbb{Z}[t]\cong H^*(\mathbb{C}P^\infty)\to H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(n,\infty))\to H^*(G/T)\xleftarrow{\sim} H^*(G/B)\ni x$$

下 t 的像. 现在 x_i 是

$$x_i = -c_2\begin{pmatrix} G\underset{B}{\times}\mathbb{C}x_i \\ \downarrow \\ G/B \end{pmatrix}$$

用向量丛理解就方便多了.

■ 计算 V

如果 $c(\xi) = 1 + c_2 + \cdots$, $c(\eta) = 1 + d_2 + \cdots$, 如何计算

$$c(\xi^*) \qquad c(\xi\otimes\eta)$$

假设 $\xi\cong\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_r$, 假设 $x_i = c_2(\xi_i)$, 即

$$(1+x_1)\cdots(1+x_r) = 1 + c_2 + \ldots.$$

类似地

$$(1+y_1)\cdots(1+y_s) = 1 + d_2 + \ldots.$$

那么

$$\xi^* \cong \xi_1^* \oplus \cdots \xi_r^*$$

$$\xi \otimes \eta \cong \bigoplus_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le s}} \xi_i \otimes \eta_j$$

所以

$$c(\xi^*) = (1-x_1)\cdots(1-x_n) = 1 - c_2 + c_4 - \cdots$$

$$c(\xi\otimes\eta) = \prod_{\substack{1\le i\le r\\ 1\le j\le s}} (1+x_i+y_j)$$

注意到根据对称函数理论 $c(\xi\otimes\eta)$ 是 $c_2,\ldots$ 以及 $d_2,\cdots$ 的函数.

■ 计算 VI

如果 $c(\xi) = 1 + c_2 + \cdots$, 如何计算

$$c(\Lambda^d\xi) \qquad c(S^d\xi)$$

我们可以假设 $\xi \cong \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_r$, 假设

$$(1+x_1)\cdots(1+x_r) = 1 + c_2 + \ldots$$

那么注意到

$$\Lambda^d\xi = \Lambda^d(\xi_1\oplus\cdots\xi_r) = \bigoplus_{i_1<\ldots<i_d} \xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_d}.$$

$$S^d\xi = S^d(\xi_1\oplus\cdots\xi_r) = \bigoplus_{i_1\le\ldots\le i_d} \xi_{i_1}\otimes\cdots\otimes\xi_{i_d}.$$

这里用了线性代数

$$\Lambda^d(U\oplus V) = \bigoplus_{a+b=d} \Lambda^a U \otimes \Lambda^b V.$$

$$S^d(U\oplus V) = \bigoplus_{a+b=d} S^a U \otimes S^b V.$$

(上述同构是自然的, 或者说作为 $\mathrm{GL}(U)\times\mathrm{GL}(V)$-表示同构.) 因此

$$c(\Lambda^d\xi) = \bigoplus_{i_1<\ldots<i_d} (1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_d})$$

$$c(S^d\xi) = \bigoplus_{i_1\le\ldots\le i_d} (1 + x_{i_1} + \cdots + x_{i_d})$$

对称函数的定理告诉我们, 这是关于 $c_2,\ldots$ 的函数.

习题 1. 对于有限 *Grassmannian* $\mathcal{G}r(k,n)$ 的重言层 τ, 即 $V\in\mathcal{G}r(k,n)$ 处的纤维是 V 自身. 证明

$$c(\tau) = (1-x_1)\cdots(1-x_k).$$

[提示: 因为 $\tau = f^*\phi_k$, 其中 $f:\mathcal{F}\ell(n)\to\mathcal{G}r(k,n)$, 这是 x_i 的由来.]

习题 2. 一条 $\mathbb{C}P^3$ 中的三次超曲面上有多少条直线? [提示: 27 条. 我们需要考虑 $\mathbb{C}P^3$ 的所有直线, 即 $\mathbb{C}^4$ 的所有二维子空间 $\mathcal{G}r(2,4)$. 令 τ 是重言层. 一个三次齐次函数定义了 $S^3\tau^*$ 的一个 section, 我们要计算 $S^3\tau^*$ 的 Euler 类. 因为 $c(\tau) = (1-x_1)(1-x_2)$, 所以 $c(S^3\tau^*) = (1+3x_1)(1+2x_1+x_2)(1+x_1+2x_2)(1+3x_2)$, 故 Euler 类是 $3x_1(2x_1+x_2)(x_1+2x_2)(3x_2)$. 我们需要计算这个对应多少多少 $[点]\in H^4(\mathcal{G}r(2,4))$. 而好在我们知道 $H^4(\mathcal{G}r(2,4))$ 对应 $(2,2)$ 的 Schur 多项式 $\frac{\det\begin{pmatrix}x_1^3 & x_2^3\\ x_1^2 & x_2^2\end{pmatrix}}{x_1-x_2}$, 所以最终答案是 $(3x_1(2x_1+x_2)(x_1+2x_2)(3x_2))(x_1-x_2) = 18x_1^4x_2 + 27x_1^3x_2^2 - 27x_1^2x_2^3 - 18x_1x_2^4$ 里 $x_1^3x_2^2$ 的系数.]

习题 3. 对于右 G 集 X, 假设 X 被 G 作用自由 *(*即每一点轨道都是 G 的拷贝*)* 以及 G 的表示 V, 那么

$$\underline{V}:\ \begin{array}{c} X\underset{G}{\times}V \\ \big\downarrow \\ X/G \end{array} \qquad X\underset{G}{\times}V = \frac{\{(x,v)\in x\times V\}}{(xg,v)=(x,gv)\quad \forall g\in G}.$$

是向量丛. 对于两个表示 V,W, 证明

$$\underline{V^*}\cong\underline{V}^* \qquad \underline{V}\otimes\underline{W} = \underline{V\otimes W}.$$

[提示: 实际上构造是把每一条同胚于 G 的轨道换成 V. 当然具体构造映射是点集拓扑.]

习题 4. 对于环面 T*(*即同构于 $(\mathbb{C}^\times)^n$*)*, 记特征 $X(T)$ 为所有 $T\to\mathbb{C}^\times$ 的代数群同态. 注意到 $X(\mathbb{C}^\times)\cong\mathbb{Z}$, 生成元是 $\mathrm{id}: C^\times\to\mathbb{C}^\times$.

对于 $\chi,\varphi\in X(T)$, 记

$$\chi+\varphi\in X(T) \qquad (\chi+\varphi)(t) = \chi(t)\varphi(t).$$

记 V_χ, V_φ 为对应的表示, 那么

$$V_\chi\otimes V_\varphi = V_{\chi+\varphi}.$$

习题 5. 用 *Chern* 类说明 x_i 可以作为的提升

$$H^2(G/B)\to H^2(P_i/B)\ni[点]$$

并且说明 $x_1+\cdots+x_i$ 也可. [提示: 下列是拉回方阵

$$\begin{array}{ccccc} \mathrm{GL}_2\times_{\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ & *\end{smallmatrix}\right)}\mathbb{C}x_1 & \to & P\times_B\mathbb{C}x_i & \longrightarrow & G\times_B\mathbb{C}x_i \\ \big\downarrow & & \big\downarrow & & \big\downarrow \\ \mathrm{GL}_2/\left(\begin{smallmatrix}* & *\\ & *\end{smallmatrix}\right) & \to & P_i/B & \to & G/B \end{array}$$

考虑

$$\mathbb{C}x_1\otimes\cdots\otimes\mathbb{C}x_i = \mathbb{C}x_1\cdots x_i.$$

限制到 P/B 上, 只需要 GL_2 位置上的情况, 所以实际上只和 $\mathrm{diag}(1,\ldots,x_i,x_{i+1},\cdots,1)$ 有关.]

习题 6. 证明*:* 对于 B 的表示 V_1,V_2, 如果作为 T 的表示是同构的, $G\times_B V_1$ 和 $G\times_B V_2$ 具有相同的 *Chern* 类.

[提示: 注意到 $\begin{array}{ccc} G\times_T V_i & \to & G\times_B V_i \\ \big\downarrow & & \big\downarrow \\ G/T & \to & G/B \end{array}$ 是拉回方阵.]

3.4 切空间的计算

对于 Lie 群 G, 子群 H, 对应的 Lie 代数 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$, 考虑同构的向量丛,

$$\begin{tikzcd} G \times_H (\mathfrak{g}/\mathfrak{h}) \arrow[r, "{(x,v)\mapsto \mathrm{ad}_x v}"] \arrow[d] & \bigcup_{x\in G/H} \mathfrak{g}/\operatorname{ad}_x \mathfrak{h} \arrow[d] \\ G/H \arrow[r, equal] & G/H \end{tikzcd}$$

对于左边, 注意因为 H 通过共轭 ad 作用在 $\mathfrak{g}$ 和 $\mathfrak{h}$ 上, 所以也作用在 $\mathfrak{g}/\mathfrak{h}$ 上. 对于右边, 注意到 $xH = yH$ 时, $\operatorname{ad}_x \mathfrak{h} = \operatorname{ad}_y \mathfrak{h}$.

上述向量丛就是 G/H 切空间.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *要严格说明, 请看下图. 利用***右***平移,*

$$\begin{tikzcd} G\times\mathfrak{g} \arrow[r, "\sim"] \arrow[d] & TG \arrow[d] \\ G \arrow[r, equal] & G \end{tikzcd}$$

得到 G 上诱导的 TG 作用可以重新写成

$$G \underset{(\text{左乘}\times\text{共轭})}{\overset{\curvearrowright}{}} G\times\mathfrak{g} \underset{(\text{右乘}\times\text{平凡})}{\overset{\curvearrowleft}{}} G$$

而在 x 处的 H 轨道等于把 H 这个子群从单位元处移过来, 所以 (切片定理)

$$xH \text{ 在 } G/H \text{ 的切空间} = \frac{x \text{ 在 } G \text{ 上的切空间}}{x \text{ 在 } H \text{ 轨道上的切空间}} = \mathfrak{g}/\operatorname{ad}_x \mathfrak{h}.$$

下面假设 $G = \mathrm{GL}_n$, $B = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix}$. 那么 $\mathfrak{g} = \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$, $\mathfrak{b} =$ 上三角代数$\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix}$.

那么我们只需要看 $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ 作为 T 的表示如何分解 (请看上小节习题), 显然

$$\mathfrak{g} \cong \bigoplus E_{ij}\cdots\mathbb{C} \cong \bigoplus \mathbb{C}(x_i - x_j)$$

$$\mathfrak{b} \cong \bigoplus_{i\le j} E_{ij}\cdots\mathbb{C} \cong \bigoplus_{i\le j} \mathbb{C}(x_i - x_j)$$

所以

$$\mathfrak{g}/\mathfrak{b} \cong \bigoplus_{i>j} \mathbb{C}(x_i - x_j)$$

$$c(T(G/B)) = \prod_{i>j}(1-(x_i-x_j)) = \prod_{i<j}(1+(x_i-x_j)).$$

特别地, Euler 类是 $\prod_{i<j}(x_i - x_j)$. 在 $H^*(G/B)$ 中,

$$\prod_{i<j}(x_i - x_j) = n!\cdot[\overline{Bw_0B/B}].$$

这可以通过作用 Demazure operator ∂_{w_0} 看出.

考虑同构的向量丛,

$$\begin{tikzcd} G \times_H \mathfrak{n} \arrow[r, "{(x,v)\mapsto \mathrm{ad}_x v}"] \arrow[d] & \bigcup_{x\in G/H} \operatorname{ad}_x \mathfrak{n} \arrow[d] \\ G/B \arrow[r, equal] & G/B \end{tikzcd}$$

上述向量丛就是 G/H 余切空间.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *我们考虑 $\mathfrak{g}$ 上的二次型*

$$\mathfrak{gl}_n \times \mathfrak{gl}_n : (A,B) \mapsto \operatorname{tr}(AB).$$

(注意: 这不是 Killing form)

不难验证这是完美配对, 且

$$\langle \operatorname{ad}_x A, B\rangle = \langle A, \operatorname{ad}_{x^{-1}} B\rangle$$

$$\text{上三角代数}\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix}^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}\text{严格上三角代数}$$

考虑 $\mathfrak{b}$ 在 $\mathfrak{g}$ 中所有的共轭类

$$\mathcal{B} = \{x\mathfrak{b}x^{-1} \subseteq G : x \in G\}.$$

考虑

$$G/B \to \mathcal{B} \qquad x \mapsto x\mathfrak{b}x^{-1}$$

根据线性代数这是同构, 且

$$\begin{tikzcd} G \overset{\curvearrowright}{_{\text{左乘}}} G/B \arrow[d] & xB \arrow[d, mapsto] \\ G \overset{\curvearrowright}{_{\text{共轭}}} \mathcal{B} & x\mathfrak{b}x^{-1} \end{tikzcd}$$

我们考虑 B 的共轭类也有类似的结果.

所以 G/B 有很多解释.

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[dl, mapsto] & & x \arrow[dr, mapsto] & \\ & & G/B \arrow[dl] \arrow[d] & & \\ \operatorname{span}(x) & \mathcal{F}\ell(n) \arrow[r] & \mathcal{B} & & x\mathfrak{b}x^{-1} \end{tikzcd}$$

$$(V^i) \longmapsto \{x\in\mathfrak{g} : xV^i = V^i\}$$

在一个 flag$\{V^i\}\in\mathcal{F}\ell(n)$ 处的余切空间是

$$\{x\in\mathfrak{g} : x \text{ 幂零}, xV^i = V^i\}.$$

在一个 $\mathfrak{b}'\in\mathcal{B}$ 处的切空间是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}'$. 余切空间是

$$\{x\in\mathfrak{b}' : x \text{ 幂零}\}.$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ *上面的操作对 G/P 也由类似的故事.*

下面假设 $G=\mathrm{GL}_n$, $P=\begin{pmatrix}\mathrm{GL}_r & * \\ & \mathcal{G}r_{n-r}\end{pmatrix}$. 那么 $\mathfrak{p}=\begin{pmatrix}* & * \\ & *\end{pmatrix}$. 于是有下列的拉回

$$\begin{array}{ccc} G\times_B V_i & \to & G\times_P V_i \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/B & \to & G/P \end{array}$$

而拉回 $H^*(G/P)\to H^*(G/B)$ 是单射, 所以我们还是变成计算 $\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$ 作为 T 的表示如何分解. 所以

$$c(T(G/P))=\prod_{i=1}^{r}\prod_{j=1}^{n-r}(1+x_i-x_j).$$

在 $H^*(G/P)$ 中可以整理成 $x_1,\ldots,x_r$ 的函数 (因为任何常数项为 0 的对称函数 $=0$).

我们考虑**重言商丛** ρ, 在 $V\in\mathcal{G}r(k,n)$ 处是 $\mathbb{C}^n/V$. 那么 $\rho=\mathbb{1}^n/\tau$, 故

$$\begin{aligned} c(\rho) &= \tfrac{1}{c(\tau)}=\tfrac{1}{(1-x_1)\cdots(1-x_k)} \\ &= (1+x_1+x_1^2+\cdots)\cdots(1+x_k+x_k^2+\cdots) \end{aligned}$$

(这是不是应该叫 ω-involution?)

实际上 $\mathcal{G}r(k,n)$ 的切丛同构于

$$\mathrm{Hom}(\tau,\rho).$$

考虑

$$\bigcup_{x\in G/P}\mathrm{ad}_x\,\mathfrak{g}/\mathfrak{p}\longrightarrow \mathrm{Hom}(\tau,\rho).$$

将 $x\in G/P$ 处

$$A \bmod \mathrm{ad}_x\mathfrak{p}\in \mathrm{ad}_x\,\mathfrak{g}/\mathfrak{p}$$

映射到

$$V\to\mathbb{C}^n\xrightarrow{A}\mathbb{C}^n\to\mathbb{C}^n/V\in\mathrm{Hom}(\tau,\rho)_V$$

其中 $V\in\mathcal{G}r(k,n)$ 对应 $x\in G/P$. 注意到如果 $A\in\mathrm{ad}_x\mathfrak{p}$, 那么 $A(V)\subseteq V$, 故良定义, 从而不难发现是同构.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *这有一个直观的解释, 在 $V\in\mathcal{G}r(k,n)$ 处每一个切方向都是 V 的一个无穷小移动, 所以*

$$V\text{ 处的切空间}=V\text{ 出发向外的线性映射}=\mathrm{Hom}(V,\mathbb{C}^n/V).$$

本节的附录内有这件事的一个进一步解释.

特别地, 对于射影空间, $\mathbb{C}P^n$,

$$\begin{cases} c(\tau)=1-x \\ c(\rho)=\frac{1}{1-x}=1+x+\cdots+x^n \end{cases}$$

所以

$$c(\tau^*)=1+x$$

假设

$$c(\rho)=1+x+\cdots+x^n=(1+\zeta_1)\cdots(1+\zeta_n)$$

即 $(z+\zeta_1)\cdots(z+\zeta_n)=\frac{z^{n+1}-x^{n+1}}{z-x}$.

$$\begin{aligned} c(\mathrm{Hom}(\tau,\rho)) &= c(\tau^*\otimes\rho) \\ &= (1+\zeta_1+x)\cdots(1+\zeta_n+x) \\ &= (1+x)^{n+1}-x^{n+1} \end{aligned}$$

所以 Euler 类是 $(n+1)\cdot x^n$.

习题 1. 验证

$$\{g\in G: g\mathfrak{b}g^{-1}=\mathfrak{b}\}\overset{\text{线性代数}}{=\!=}B.$$

习题 2. 验证 $\mathcal{F}\ell(n)\to\mathcal{B}$ 的映射是

$$(V^i)\longmapsto\{x\in\mathfrak{g}:xV^i=V^i\}.$$

[提示: 因为这在 V^i 是标准的时候是正确的, 其余可以此类推平移.]

习题 3 (Springer 理论). 考虑矩阵

$$x=\begin{pmatrix}0&1&\\&0&\\&&0\end{pmatrix}.$$

记

$$\mathcal{F}\ell_x=\{V^i\in\mathcal{F}\ell(n):xV^i=V^i\}.$$

求 $\dim\mathcal{F}\ell_x$, 以及 $\mathcal{F}\ell_x$ 有多少不可约分支? [提示: 其实, 这是 x 的不变子空间组成的旗. 只要分两种情况, V^2 是特征子空间时, 有 $\dim\mathbb{C}P^1$ 多种选择. 当 V^2 不是特征子空间时, V_2 必须选为 $x^{-1}(V^1)$. 而 V^1 的选择也有 $\dim\mathbb{C}P^1\setminus\infty$ 多种选择, 维数是 2, 不可约分支数目是 2. 这分别对应 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&3\\\hline 2&\\\cline{1-1}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1&2\\\hline 3&\\\cline{1-1}\end{array}$.]

$\boxed{\text{注意 1}}$ *这个可以推广到任意的幂零矩阵上. 注意 Jordan 标准型告诉我们幂零矩阵也由 Young 图标定. 对应的连通分支的数目恰好是 hook length.*

附录：计算切空间的“作弊方法”

对于 $\mathbb{C}$-代数簇 X, 那么 Zariski 零点定理

$$\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Scheme}}(\operatorname{Spec}\mathbb{C}, X) = X.$$

拓扑地, $\operatorname{Spec}\mathbb{C} =$ 点.

令 $\Lambda = \mathbb{C}[\epsilon] = \mathbb{C}[\epsilon]/\epsilon^2$ 是 **algebra of dual numbers**. 令代数映射 $\Lambda \to \mathbb{C}$ 诱导了 $\operatorname{Spec}\mathbb{C} \to \operatorname{Spec}\Lambda$. 那么对于 $\mathbb{C}$-代数簇 X 切丛等于

$$\begin{array}{c} \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Scheme}}(\operatorname{Spec}\Lambda, X) \quad =: X(\Lambda) \\ \downarrow \\ \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}\text{-Scheme}}(\operatorname{Spec}\mathbb{C}, X) \end{array}$$

拓扑地, $\operatorname{Spec}\Lambda$ 也是一个点, 但是蕴含着附近的一阶信息.

反方向 $\mathbb{C} \to \Lambda$, 诱导的则是 zero section.

这些是 “切空间是曲线等价类” 的代数几何类比.

$\boxed{\text{例 1}}$ 我们计算 GL_n 的 Lie 代数, 根据上面的讨论, 这是

$$\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[t]) \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}) \qquad X(\epsilon) \mapsto X(0)$$

在 1 处的纤维. 注意到

$$X(0) = 1 \iff X(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1+\epsilon x_{11} & \cdots & \epsilon x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon x_{n1} & \cdots & 1+\epsilon x_{nn} \end{pmatrix}.$$

所以

$$\mathfrak{gl}_n = \mathbb{M}_{n\times n}.$$

且

$$\mathfrak{gl}_n \to \mathrm{GL}_n(\mathbb{C}[t]) \qquad A \mapsto \exp \epsilon A = 1 + \epsilon A.$$

$\boxed{\text{例 2}}$ 我们计算 SL_n 的 Lie 代数, 根据上面的讨论, 这是

$$\mathrm{SL}_n(\mathbb{C}[t]) \to \mathrm{SL}_n(\mathbb{C}) \qquad X(\epsilon) \mapsto X(0)$$

在 1 处的纤维. 注意到

$$X(0) = 1 \iff X(\epsilon) = \begin{pmatrix} 1+\epsilon x_{11} & \cdots & \epsilon x_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \epsilon x_{n1} & \cdots & 1+\epsilon x_{nn} \end{pmatrix}.$$

我们还需要

$$\det X(\epsilon) = 1 + \epsilon(x_{11} + \cdots + x_{nn}) = 1$$

所以 $\mathfrak{sl}_n$ 是那些 $\mathfrak{gl}_n$ 中迹为 0 的那些.

以上两个例子都可以改写成指数映射.

注意到对任何仿射代数群

$$G(\Lambda) = G(\mathbb{C}) \times \mathfrak{g}$$

通过 $g(1+\epsilon X) \mapsto (g, X)$, 此时

$$\begin{cases} (g, X)(1, Y) = (g, X+Y). \\ (gh, X)(h, 0) = (g, \mathrm{ad}_h^{-1} X). \end{cases}$$

$\boxed{\text{例 3}}$ 我们计算 Flag manifold 的切丛.

$$G(\mathbb{C}[\epsilon])/B(\mathbb{C}[\epsilon]) \to G/B.$$

故

$$\frac{G(\Lambda)}{B(\Lambda)} = \frac{G \times \mathfrak{g}}{B \times \mathfrak{b}} = \frac{G \times \mathfrak{g}/\mathfrak{b}}{B} = G \times_B \mathfrak{g}/\mathfrak{b}.$$

另一方面, 不难计算 $g \cdot B/B$ 处的纤维是

$$\frac{gB + \epsilon\mathfrak{g}}{B + \epsilon\mathfrak{b}} \cong \frac{1+\epsilon\mathfrak{g}}{g(1+\epsilon\mathfrak{b})g^{-1}} \cong \frac{\mathfrak{gl}_n}{\mathrm{ad}_g \mathfrak{b}}$$

诱导自 $g + \epsilon A g \hookleftarrow 1 + \epsilon A \hookleftarrow A$.

$\boxed{\text{例 4}}$ 我们计算 Grassmannian 的切空间. 此时

$$\mathcal{G}r(k,n)(\Lambda) = \{\Lambda^{\oplus n} \text{ 中的所有分裂的秩 } k \text{ 的自由 } \Lambda \text{ 模}\}$$

对于 $V \in \mathcal{G}r(k,n)$. 如果 $\hat{V} \in \mathcal{G}r(k,n)(\Lambda)$ 使得 $\hat{V}_{\epsilon=0} = V$, 我们可以认为 $V \subseteq \mathbb{C}^n \subseteq \Lambda^n$, 可以证明

$$\hat{V} = \{v + \epsilon f(v) : v \in V\} \oplus \epsilon V$$

对某个 $f \in \mathrm{Hom}(V, \mathbb{C})$. 所以这样的 $\hat{V}$ 和 $\mathrm{Hom}(V, \mathbb{C}/V)$ 一一对应.

$\boxed{\text{例 5}}$ 我们计算 Hilbert of n-points over $\mathbb{C}^2$ 的切空间. 记

$$X = \mathrm{Hil}^n \mathbb{C}^2 = \{\mathfrak{a} \le_{\text{理想}} \mathbb{C}[x,y] : \dim \mathbb{C}[x,y]/\mathfrak{a} = n\}.$$

此时

$$X(\Lambda) = \{\mathfrak{A} \le_{\text{理想}} \Lambda[x,y] : \Lambda[x,y]/\mathfrak{A} \cong \Lambda^n\}.$$

对于理想 $\mathfrak{a}$. 如果理想 $\mathfrak{A}$ 使得 $\mathfrak{A}|_{\epsilon=0} = \mathfrak{a}$. 那么同样也有

$$\mathfrak{A} = \{a + \epsilon f(a) : a \in \mathfrak{a}\} \oplus \epsilon\mathfrak{a}$$

对某个 $f \in \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[x,y]}(\mathfrak{a}, \mathbb{C}[x,y])$. 所以这样的 $\mathfrak{A}$ 和 $\mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[x,y]}(\mathfrak{a}, \mathbb{C}[x,y]/\mathfrak{a})$ 一一对应.

$\boxed{\text{例 6}}$ 我们计算 Flag manidolds 的切空间. 此时

$$\mathcal{F}\ell(n)(\Lambda) = \{\text{分裂模的旗}\}.$$

对于 (V^i), 那么任何 $(\widehat{V^i})$ 使得 $(\widehat{V^i})_{t=0} = (V^i)$ 都形如

$$\Big(\{v + \epsilon f(v) : v \in V^i\} \oplus \epsilon V^i\Big)$$

对某个 $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$. 所以这点的切空间和

$$\mathrm{End}(\mathbb{C}^n) \Big/ \{A \in \mathrm{End}(\mathbb{C}^n) : \text{每个 } V^i \text{ 都 } A \text{ 不变}\}$$

一一对应. 这和 $\mathfrak{g}/\,\mathrm{ad}_x\,\mathfrak{b}$ 没有差别.

$\boxed{\text{例 7}}$ 对于线性空间 $V = \mathbb{C}^n$, 那么

$$T_x V = \{v + \epsilon u : u \in \mathbb{C}^n\} \cong \mathbb{C}^n.$$

令 $G = \mathrm{GL}_n$, 考虑 $G \times V \to V$, 那么诱导的 $T_1 G \times T_v X \to T_v X$, 写作

$$(1 + \epsilon X)(v + \epsilon u) = v + \epsilon(Xv + u).$$

即 $X \cdot u = Xv + u$.

$\boxed{\text{例 8}}$ 对于 $v \in \mathbb{C}^n$, 我们计算 v 的 GL_n 轨道的切空间. 此时

$$\begin{array}{ccc} G(\Lambda)\cdot v & \to & G \cdot v \\ \downarrow & & \downarrow \\ \Lambda^n & \to & \mathbb{C}^n \end{array}$$

所以

$$\begin{array}{cccc} T_x(Gv) = & \{(g + \epsilon X)v : gv = v, X \in \mathfrak{g}\} & \cong \mathfrak{g}/\{X : Xv = 0\} \\ \downarrow & \downarrow & \\ T_x X = & \{v + \epsilon u : u \in \mathbb{C}^n\} & \end{array}$$

因此法空间

$$T_x X / T_x(Gv) = \mathbb{C}^n / \mathfrak{g} \cdot v.$$

习题 4. 对于非退化二次型 $B(\cdot,\cdot) : V \otimes V \to \mathbb{C}$, 记

$$\mathrm{O}(V) = \{g \in \mathrm{GL}(V) : {}^{\forall u,v \in V,}_{B(gu,gv)=B(u,v)}\}$$

证明其 *Lie* 代数是

$$\mathfrak{o}(V) = \{X \in \mathrm{End}(V) : {}^{\forall u,v \in V,}_{B(Xu,v)+B(u,Xv)=0}\}.$$

[提示: 因为 $X \in \mathfrak{o}(V)$ 当且仅当 $B((1+\epsilon X)u, (1+\epsilon X)v) = B(u,v)$. 而 $B((1+\epsilon X)u, (1+\epsilon X)v) = B(u,v) + \epsilon(B(Xu,v) + B(u,Xv))$.]

参考文献

- Fulton. Young Tableaux.

  最后有关于 Chern 类的介绍.

- Eisenbud, Harris. 3264 and all that.

  实际上, 这三节看下来, 这本书大概可以看懂一半以上.

- Benson. Cohomology and Representation theory volume II.

  这本书含有写得很清楚的代数拓扑常识, 还有式性类, K-理论的介绍.

- Shintaro Kuroki. Introduction to Torus Equivariant Cohomology

4 K 理论速成

前面谈论了很多上同调, 下面我们要讨论 K 理论.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *向量丛这个范畴不够好 —没有 kernel 和 cokernel. 所以向量丛范畴不是 Abel 范畴. kernel 和 cokernel 只有在常秩的时候才可以定义. 例如在 $\mathbb{C}P^n$ 上, 如果有一个一次齐次多项式 f*

$$\textit{tautological} \longrightarrow \text{平凡丛}$$

在 $\ell \in \mathbb{C}P^n$ 处, $\ell \to \mathbb{1}$ 定义作 $x \mapsto f(x)$. 此时这个映射在 $\{\ell \in \mathbb{P}^n : f(\ell) = 0\}$ 处为 0, 其他点则是同构.

在代数几何中, 我们考虑代数向量丛 (即定义中出现的所有空间都是代数簇, 映射都是多项式映射). 我们要考虑包含他们 kernel 和 cokernel 的最小 Abel 范畴. 即凝聚层范畴.

4.1 K 理论

对于**光滑**代数簇, K 群

$$K(X) = \frac{\bigoplus_{\xi\text{是 } X \text{ 上的代数向量丛}} \mathbb{Z} \cdot [\xi]}{\left\langle \begin{array}{c} [\xi] = [\xi_1] + [\xi_2] : \\ \text{有短正合列} 0 \to \xi_1 \to \xi \to \xi_2 \to 0 \end{array} \right\rangle}$$

等于 Grothendieck 群

$$G(X) = \frac{\bigoplus_{\mathcal{E}\text{是 } X \text{ 上的凝聚层}} \mathbb{Z} \cdot [\mathcal{E}]}{\left\langle \begin{array}{c} [\mathcal{E}] = [\mathcal{E}_1] + [\mathcal{E}_2] : \\ \text{有短正合列} 0 \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E} \to \mathcal{E}_2 \to 0 \end{array} \right\rangle}$$

这两个用作定义时会交替使用.

具体来说, 任何一个凝聚层 $\mathcal{F}$ 都有一个有限长度向量丛预解 (Hilbert's syzygy 定理)

$$\cdots \to \mathcal{E}_1 \to \mathcal{E}_0 \to 0$$

那么这定义了一个 $\sum (-1)^i [\mathcal{E}_i] \in K(X)$. 然后验证这是两定义的, 且和 $K(X) \to G(X)$ 互逆.

注意到 $K(\text{点}) = \mathbb{Z}$, 因为此时不论凝聚层还是向量丛都都和线性空间无异. 那么

$$K(\text{点}) \longrightarrow \mathbb{Z} \qquad [V] \mapsto \dim V$$

给出了同构.

同样名为 Hilbert's syzygy 定理说明 K 理论有代数同伦不变性,

$$K(X \times \mathbb{C}) \cong K(X).$$

注意 $K(X)$ 上有显然的乘法, 即

$$[\xi] \otimes [\eta] = [\xi \otimes \eta],$$

这个乘法以平凡丛 $\mathbb{1}$ 为单位元.

对于代数映射 $X \to Y$, 向量丛的拉回定义了

$$K(X) \longleftarrow K(Y).$$

因此 K 理论此时被理解为上同调理论.

但是定义推出就非常困难了. 作为层有推出, 但是向量丛的推出不是向量丛, 因为

$$R_1 \to R_2 \qquad P \text{ 作为 } R_2 \text{ 投射} \not\Rightarrow P \text{ 作为 } R_1 \text{ 投射}.$$

但是对于 proper 的映射 $X \to Y$, 确实可以定义

$$f : K(X) \longrightarrow K(Y).$$

而且还满足我们之前上同调里面出现的几则性质.

---

0. 函子性 $f_* g_* = (fg)_*$.
1. **projective formula**, 对 $\alpha \in K(X), \beta \in K(Y)$,

$$f_*(\alpha \otimes f^*(\beta)) = f_*(\alpha) \otimes \beta.$$

2. 拉回推出方阵

即 $\square = \{(y, z) \in Y \times Z : f(y) = g(z)\}$. 从 $K(Y)$ 到 $K(Z)$ 的两个映射

$$g^* \circ f_* = F_* \circ G^*$$

$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

$\boxed{\text{情形 1}}$ 如果 $X \to$ 点, 那么

$$K(X) \longrightarrow K(Y)$$

将向量丛 $\mathcal{E}$ 映到

$$\sum (-1)^i [H^i(X)] \in K(\text{点}).$$

其中 $H^i(X)$ 是是凝聚层的上同调.

$\boxed{\text{情形 2}}$ 如果 $X \to Y$ 是纤维丛, 那么

$$K(X) \longrightarrow K(Y)$$

将向量丛 $\mathcal{E}$ 映到 $\sum (-1)^i [R^i f_* \mathcal{E}] \in K(Y)$, 其中 $R^i f_* \mathcal{E}$ 是向量丛, 每点 $y \in Y$ 的纤维是

$$H^i\Big(\mathcal{E}\big|_{\{x \in X : f(x) = y\}}\Big).$$

粗略地说, 即推出就是顺着纤维取推出.

$\boxed{\text{情形 3}}$ 如果 $X \to Y$ 的光滑闭子簇, 那么

$$K(X) \longrightarrow K(Y)$$

将向量丛 $\mathcal{E}$ 映到凝聚层 $[\mathcal{E}] \in G(Y) \cong K(Y)$, 即

$$\mathcal{E}(U) = \mathcal{E}(X \cap U).$$

根据之前的讨论, 可以找到一个这个层的向量丛预解.

特别地, 对于平凡丛 $\mathcal{O}_X$, 我们记 $[\mathcal{O}_X] \in K(Y)$, 这是上同调中 **基本类** 的类比.

下面我们要看基本类在乘法, 推出和拉回下的变化.

1. 张量积

对于 A, B,

$$[\mathcal{O}_A] \otimes [\mathcal{O}_B] = \begin{cases} [\mathcal{O}_{A\cap B}], & \text{如果 } A \text{ 和 } B \text{ 直交} \\ \text{不知道} & \text{不直交} \end{cases}$$

注意, 比期待维数小不一定直交.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 这是因为如果 $\mathfrak{a}$ 定义了 A, $\mathfrak{b}$ 定义了 B, 那么 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b}$ 定义了 $A \cap B$. 而

$$R/\mathfrak{a} \otimes R/\mathfrak{b} \cong R/(\mathfrak{a}+\mathfrak{b})$$

直交确保 $\mathfrak{a}+\mathfrak{b} = \sqrt{\mathfrak{a}+\mathfrak{b}}$.

---

2. 拉回 $(f : X \to Y)$

对于 $B \subseteq Y$,

$$f^*[\mathcal{O}_B] = \begin{cases} [\mathcal{O}_{f^{-1}(B)}], & \text{横截} \\ \text{不知道}, & \text{不横截} \end{cases}$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 这是因为如果 $\mathfrak{b}$ 定义了 B, 那么 $\mathfrak{b}$ 在 X 对应环的生成理想定义了 $f^{-1}(B)$. 横截确保是根理想.

---

3. 推出 $(f : X \to Y)$

对于 $A \subseteq X$,

$$f^*[\mathcal{O}_A] = \begin{cases} [\mathcal{O}_{f(A)}], & \text{如果 } A \to f(A) \text{ 是同构} \\ \text{不知道}, & \text{否则} \end{cases}$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 这是因为如果推出的函子性.

$\boxed{\text{注意 2}}$ 粗略地说, K 理论和上同调在基本类上的不同之处在于 K 理论会保留低维数.

实际上 K 理论也有胞腔分解, 但是证明必须用到高阶 K 理论, 这里按下不表. 结论是,

$$K(G/B) = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{Z} \cdot [\mathcal{O}_w].$$

其中 $[\mathcal{O}_w] = [\mathcal{O}_{\overline{B^- wB/B}}]$, 回忆 $B^- = w_0 B w_0$ 是全体下三角矩阵.

回忆 + 对比

$$H^*(G/B) = \bigoplus_{w \in \mathfrak{S}_n} \mathbb{Z} \cdot [\overline{B^- wB/B}].$$

再度回忆

$$P = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix}$$

$$G/B \longrightarrow G/P_i$$

我们定义 isobaric Demazure operator.

$$\pi_i : K(G/B) \xrightarrow{\text{推出}} K(G/P) \xrightarrow{\text{拉回}} K(G/B)$$

那么, 和上同调的计算一样, 唯一的差别是我们不忽略低维数的, 即

$$\begin{aligned} \pi_i([\mathcal{O}_w]) &= \pi^* \pi_* [\mathcal{O}_{\overline{B^- wB/B}}] \\ &= \pi^* [\mathcal{O}_{\overline{B^- wP/P}}] \qquad (*) \\ &= [\mathcal{O}_{\overline{B^- ws_iB/B} \cup \overline{B^- wB/B}}] \\ &= \begin{cases} [\mathcal{O}_{\overline{B^- ws_iB/B}}] & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1 \\ [\mathcal{O}_{\overline{B^- wB/B}}] & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1 \end{cases} \\ &= \begin{cases} [\mathcal{O}_{ws_i}] & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1 \\ [\mathcal{O}_w] & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1 \end{cases} \end{aligned}$$

上面的 $(*)$ 的正确性不容易, 这也是 Demazure 文章的主要 gap. 实际上, 得到第一行的 $\ell(ws_i) = \ell(w) - 1$ 是严格的, 第二行也可以说来自于 Demazure operator 的表达式.

习题 1. 对于闭集 A, B, 如果 $\mathfrak{a} = \{f : f(A) = 0\}$, $\mathfrak{b} = \{f : f(B) = 0\}$, 那么 $\{x \in X : \forall f \in \mathfrak{a}+\mathfrak{b},\ f(x) = 0\} = A \cap B$.

习题 2. 如果有凝聚层的复形

$$\cdots \to \mathcal{F}^{i-1} \to \mathcal{F}^i \to \mathcal{F}^{i+1} \to \cdots (\text{有限长度})$$

证明, 在 $G(X)$ 中:

$$\sum (-1)^i [\mathcal{F}^i] = \sum (-1)^i [h^i(\mathcal{F}^i)]$$

其中 $h^i = \frac{\ker}{\mathrm{im}}$. ［提示: 因为有 $0 \to \ker \to \mathcal{F} \to \mathrm{im} \to 0$ 和 $0 \to \mathrm{im} \to \ker \to h \to 0$. ］

4.2 Chern 特征

Chern 性类对直和性质很好,

$$c(\xi\oplus\eta)=c(\xi)c(\eta)$$

但是对张量表现不好, 为此我们定义 Chern 特征.

对于向量丛 ξ, 假设 $\xi=\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_n$ 是线丛的直和

$$c(\xi)=1+c_1(\xi)+\cdots=(1+x_1)\cdots(1+x_n)$$

其中 $c_i\in H^{2i}(\quad)$ 是 Chern 类. 定义 **Chern 特征**

$$\begin{aligned}\mathrm{ch}(\xi)&=e^{x_1}+\cdots+e^{x_n}\\&=\sum\nolimits_{k\geq 0}\frac{x_1^k+\cdots+x_n^k}{n!}\\&=1+c_1(\xi)+\frac{c_1(\xi)^2-2c_2(\xi)}{2}+\cdots\\&\in H^*(X;\mathbb{Q}).\end{aligned}$$

这些是 Chern 类的多项式 (正是幂和写成初等对称多项式表达式). 所以即使不分裂成线丛也可以定义.

那么分裂原理告诉我们

$$\begin{cases}\mathrm{ch}(\xi\oplus\eta)=\mathrm{ch}(\xi)+\mathrm{ch}(\eta)\\ \mathrm{ch}(\xi\otimes\eta)=\mathrm{ch}(\xi)\,\mathrm{ch}(\eta)\end{cases}$$

于是这定义了一个代数同态

$$\mathrm{ch}:K(X)\to H^*(X;\mathbb{Q}).$$

且保持拉回

$$\begin{array}{ccc}X & \longrightarrow & Y\\ K(X) & \longleftarrow & K(Y)\\ {\scriptstyle\mathrm{ch}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle\mathrm{ch}}\\ H^*(X;\mathbb{Q}) & \longleftarrow & H^*(Y;\mathbb{Q})\end{array}$$

$\boxed{\text{注意: Chern 特征不保持推出!!!}}$

如果是拓扑 K 理论, 当 X 是有限 CW 复形时

$$\mathrm{ch}:K(X)\otimes\mathbb{Q}\longrightarrow H^*(X;\mathbb{Q})$$

是同构.

而 Grothendieck 证明了代数版本, 当 X 光滑射影 (即可以嵌入射影空间) 的时候

$$\mathrm{ch}:K(X)\otimes\mathbb{Q}\longrightarrow \mathrm{CH}(X)\otimes\mathbb{Q}$$

是同构.

为了讨论方便, 下面计算的都是 $\mathbb{Q}$ 系数的 K 理论 $K_{\mathbb{Q}}$.

对于纤维丛 $\xi\overset{E}{\underset{B}{\downarrow}}$, 我们也可以对 K 理论谈 formal. 既然是同构, 且和拉回交换, 那么

ξ 关于 $\mathbb{Q}$-系数上同调 formal

$\iff$ ξ 关于 $\mathbb{Q}$-系数拓扑 K-理论 formal

ξ 关于 $\mathbb{Q}$-系数 Chow 环 formal

$\iff$ ξ 关于 $\mathbb{Q}$-系数代数 K-理论 formal

在上同调情况中, 我们直接刻画了 formal 时的推出, 但是在 K 理论中, 即使 formal, 还是不容易描述.

下面我们计算 $\mathbb{C}P^n$ 的 K 群 $K(\mathbb{C}P^n)\otimes\mathbb{Q}$. 回忆 $H^*(\mathbb{C}P^n;\mathbb{Q})\cong\mathbb{Q}[x]/x^{n+1}$, 其中 $x=[\text{超平面}]$. 考虑重言丛 τ, 其 Chern 类是 $1-x$, 因此 Chern 特征是 $e^{-x}=1-x+x^2-\cdots$. 因此我们得到

$$K_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}P^n)=\mathbb{Q}[e^x]/(e^x-1)^{n+1}$$

其中 $e^x=[\mathcal{O}(1)]$ 即 τ 的对偶.

我们尤其关心 $\mathbb{C}P^1$ 的情况 (因为这是 P_i/B 的情况). 此时 $K_{\mathbb{Q}}(\mathbb{C}P^1)=\mathbb{Q}\oplus\mathbb{Q}e^x$. 例如

$$\begin{aligned}&[\mathcal{O}(2)]=e^{2x}=2e^x-1 &&\mod (e^x-1)^2\\&[\mathcal{O}(3)]=e^x(2e^x-1)=3e^x-2 &&\mod (e^x-1)^2\\&\cdots\\&[\mathcal{O}(n)]=ne^x-(n-1) &&\mod (e^x-1)^2\end{aligned}$$

我们要用到下列事实

$$\begin{cases}H^0(\mathcal{O}(0))=\Gamma(\mathcal{O}(0))=\text{常函数}\mathbb{C}.\\ H^0(\mathcal{O}(1))=\Gamma(\mathcal{O}(1))=\text{一次多项式}\mathbb{C}x_1\oplus\mathbb{C}x_2.\end{cases}$$

其中 $\{[x_1:x_2]\}=\mathbb{C}P^1$ 是射影坐标.

注意 1 一般地, 用 Čech 上同调可计算

$\mathbb{C}P^n$	H^0	H^1	$\cdots$	H^{n-1}	H^n	H^{n+1}	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	0	$\cdots$
$\mathcal{O}(-n-3)$	0	0	$\cdots$	0	R_2^*	0	$\cdots$
$\mathcal{O}(-n-2)$	0	0	$\cdots$	0	R_1^*	0	$\cdots$
$\mathcal{O}(-n-1)$	0	0	$\cdots$	0	R_0^*	0	$\cdots$
$\mathcal{O}(-n)$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\cdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{O}(-1)$	0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$\mathcal{O}(0)$	R_0	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$\mathcal{O}(1)$	R_1	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$\mathcal{O}(2)$	R_2	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$\mathcal{O}(3)$	R_3	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

其中 R_i 是 $R=\mathbb{C}[x_0,\dots,x_n]$ 的 i 次部分, 即 i 次齐次多形式.

特别地, 对于 $\mathbb{C}P^1$,

	$\dim H^0$	$\dim H^1$	$\dim H^0-\dim H^1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$\mathcal{O}(-3)$	0	2	-2
$\mathcal{O}(-2)$	0	1	-1
$\mathcal{O}(-1)$	0	0	0
$\mathcal{O}(0)$	1	0	1
$\mathcal{O}(1)$	2	0	2
$\mathcal{O}(2)$	3	0	3
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

回忆在 G/B 上的向量从 $\underline{\mathbb{C}}x_i=\underset{G/B}{\overset{G\times_B\mathbb{C}x_i}{\downarrow}}$, 其 Chern 类是 $1-x_i\in H^*(G/B)$, 故

$$\mathrm{ch}(\underline{\mathbb{C}}x_i)=\mathrm{ch}\left(\underset{G/B}{\overset{G\times_B\mathbb{C}x_i}{\downarrow}}\right)=e^{-x_i}.$$

更一般地, 对于 B 的表示 V,

$$\mathrm{ch}(\underline{V})=\mathrm{ch}\left(\underset{G/B}{\overset{G\times_B V}{\downarrow}}\right)=-\,\mathrm{ch}(V)=\mathrm{ch}(V^*),$$

右边是表示的特征, 即 $\mathrm{diag}(x_1,\dots,x_n)\in B$ 在 V 上作用的迹.

下面考虑 $G/B\xrightarrow{\pi}G/P_i$, 根据 formal 条件,

$$K_{\mathbb{Q}}(G/B)\cong K_{\mathbb{Q}}(P_i/B)\otimes K_{\mathbb{Q}}(G/P).$$

换句话说任何一个 $K_{\mathbb{Q}}(G/B)$ 的元素都可以写成

$$e^{x_i}\otimes p^*(\alpha)+p^*(\beta)$$

的形式.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 因为根据我们之前的讨论,

$$\begin{array}{ccccccc}
\{(x,\ell):x\in\ell\} & \cong & \mathrm{GL}_2\underset{\left\{\begin{pmatrix}x_1&*\\&x_2\end{pmatrix}\right\}}{\times}\mathbb{C}x_1 & \cong & P\underset{B}{\times}\mathbb{C}x_i & \to & G\underset{B}{\times}\mathbb{C}x_i\\
\downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow\\
\mathbb{C}P^1 & \cong & \mathrm{GL}_2/\left\{\begin{pmatrix}x_1&*\\&x_2\end{pmatrix}\right\} & \cong & P_i/B & \to & G/B
\end{array}$$

最后一个方块是拉回.

根据推出的定义, 即纤维上取上同调, 和 $\mathbb{C}P^1$ 的计算, 我们可以证明

$$\begin{cases}\pi_i(1)=1\\ \pi_i(e^{x_i})=e^{x_i}+e^{x_{i+1}}\end{cases}$$

因为

$$\begin{aligned}\pi_*(\pi^*\beta\otimes\alpha)&=\beta\otimes\pi_*\alpha\\ &\Rightarrow\pi^*\pi_*(\pi^*\beta\otimes\alpha)=\pi^*\beta\otimes\pi^*\pi_*\alpha\end{aligned}$$

所以对于 $f=e^{x_i}\otimes\pi^*\alpha+\pi^*\beta\in K_{\mathbb{Q}}(G/B)$,

$$\pi_i f=(e^{x_i}+e^{x_{i+1}})\otimes\pi^*\alpha+\pi^*\beta.$$

所以

$$\pi_i f=\frac{e^{x_i}f-s_i(e^{x_i}f)}{e^{x_i}-e^{x_{i+1}}}.$$

另一种写法是

$$\pi_i f=\frac{f-e^{-x_i+x_{i+1}}s_i f}{1-e^{-x_i+x_{i+1}}}.$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 要看出 $\pi_i(e^{x_i})=e^{x_i}+e^{x_{i+1}}$ 有些费劲. 在 xB 处, 我们定义

$$\underline{\mathbb{C}}x_1^*\oplus\underline{\mathbb{C}}x_2^*\longrightarrow\xi$$

其中向量从 ξ 在 $xB\in G/B$ 处的纤维是 xP/B 在 $\underline{C}x_1^*$ 的 *section*.

对于 (x,z_1,z_2) 表示 $G\times_B(\mathbb{C}x_1\oplus\mathbb{C}x_2)$ 中的元素, 我们定义 xP/B 上 $\underline{\mathbb{C}}x_1^*$ 的 *section*

$$xpB\longmapsto(xp,z_1a+z_2c)\in G\times_B\underline{\mathbb{C}}x_1^*.$$

其中 $p=\begin{pmatrix}*&\cdots&*&*&\cdots&*\\&\ddots&\vdots&\vdots&&\vdots\\&&a&b&\cdots&*\\&&c&d&\cdots&*\\&&&&\ddots&\vdots\\&&&&&*\end{pmatrix}\in P$. 这是良定义的.

不过之后我们有一个更统一的方法去计算向量从类.

习题 1. 对于超平面 $H\subseteq\mathbb{C}P^n$, 利用本节最开始提到的

$$0\to\mathcal{O}(-1)\to\mathcal{O}\to\mathcal{O}_H\to0$$

计算 $\mathrm{ch}([\mathcal{O}_H])$. 并计算一个点 p 对应的 $\mathrm{ch}([\mathcal{O}_p])$. [提示: 此时 $\mathrm{ch}(\mathcal{O}_H)=\mathrm{ch}(\mathcal{O})-\mathrm{ch}(\mathcal{O}(-1))=1-e^{-x}$. 因为横截, 此时结果是 $(1-e^{-x})^n$.]

Grothendieck 多项式

类似 Schubert 多项式, 为了定义 Grothendieck 多项式的几何含义, 我们已经有了递推公式, 只差计算初始值了. 即现在我们唯一没有证明的是对于单点 $p = B^- w_0 B/B = 1 \cdot B/B$, $[\mathcal{O}_p] = [\mathcal{O}_{w_0}]$ 对应到哪个多项式.

在 K-理论中有一个**旋瓶盖 (dévissage)** 理论. 即我们可以在 $K(X)$ 上定义一个

$$F^i K(X) = \{[\mathcal{F}] : F \text{ 是凝聚层, 支集 } \dim \leq i\}.$$

$$F^{n-i} K(X) \otimes F^{n-j} K(X) \subseteq F^{n-i-j} K(X).$$

例如对于线丛 ξ, $[\xi] - 1 \in F^{n-1}K(X)$, 因为每个线丛都存在一个开集 U 使得其同构于平凡丛. 例如对于点 p, $\mathcal{O}_p$ 如果非零, 那么包含在 $F^0K(X)$ 中, 且 $F^0K(X)$ 只由 $[\mathcal{O}_p]$ 生成.

注意 1 因为这是代数几何, 不同的点可能代表不同的类. 但是这里因为有一个群作用, 所以都一样.

根据 $\pi_i \pi_{w_0} = \pi_{w_0}$, 纯组合地可得

$$\pi_{w_0} f = \frac{\sum_{w \in \mathfrak{S}_n} (-1)^w w(f \cdot e^\rho)}{\prod_{i<j} (e^{x_i} - e^{x_j})},$$

其中 $\rho = (n-1, \ldots, 0) = nx_1 + \cdots + x_{n-1}$. 且不难计算出

$$\pi_{w_0} (1 - e^{-x_1})^n \cdots (1 - e^{-x_{n-1}}) = 1.$$

因为 $(1 - e^{-x_1})^n \cdots (1 - e^{-x_{n-1}}) \in F^0K(X)$, 所以

$$(1 - e^{-x_1})^n \cdots (1 - e^{-x_{n-1}}) = [\mathcal{O}_{w_0}].$$

4.3 Grothendieck–Riemann–Roch 定理

有一个方法去控制 Chern 特征 ch 拉回, 让一切计算变得非常容易, 即 **Grothendieck–Riemann–Roch 定理**. 但是这是一个很深的定理, 三言两语很难无法解释成立的原因.

如果 $f : X \to Y$ 是光滑射影簇之间的光滑映射, 那么下图交换

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ K(X) & \longrightarrow & K(Y) \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{CH}(X) \otimes \mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathrm{CH}(X) \otimes \mathbb{Q} \end{array}$$

纵向映射是 $\xi \mapsto \mathrm{ch}(\xi) \smile \mathrm{Todd}(\text{切丛})$.

令 Θ_X 表示 X 的切丛, 上面是说

$$\mathrm{ch}\left(f_*(\alpha)\right) \smile \mathrm{Todd}(\Theta_Y) = f_*\big(\mathrm{ch}(\alpha) \smile \mathrm{Todd}(\Theta_X)\big).$$

所谓 **Todd 类**定义如下, 对于向量丛 ξ, 假设其分解成线丛 $\xi = \xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_n$, 即

$$c(\xi) = 1 + c_1(\xi) + = (1 + x_1) \cdots (1 + x_n).$$

其中 $c_i \in \mathrm{CH}^i(\quad)$ 是 Chern 类. 那么

$$\begin{aligned} \mathrm{Todd}(\xi) &= \frac{x_1}{1 - e^{-x_1}} \cdots \frac{x_n}{1 - e^{-x_n}} \\ &= 1 + \frac{c_2(\xi)}{2} + \frac{c_1(\xi)^2 + c_2(\xi)}{12} + \frac{c_1(\xi)c_2(\xi)}{24} + \cdots \end{aligned}$$

所以对一般的向量丛也定义了.

显然 Todd 类保持保持拉回, 所以

$$\mathrm{ch}\left(f_*(\alpha)\right) = f_*\left(\mathrm{ch}(\alpha) \frac{\mathrm{Todd}(\Theta_X)}{\mathrm{Todd}(f^*\Theta_Y)}\right).$$

实践中有几类情况比较常遇见.

情况 1 如果 $X \to Y$ 是嵌入, 那么

$$\frac{\mathrm{Todd}(\Theta_X)}{\mathrm{Todd}(f^*\Theta_Y)} = \frac{1}{\mathrm{Todd}\, \mathcal{N}_X Y}.$$

其中 $\mathcal{N}_Y X$ 是 X 在 Y 中的法丛, 即 $x \in X$ 处是 $T_x Y / T_x X$.

情况 2 如果 $X \to Y$ 是纤维丛, 那么

$$\frac{\mathrm{Todd}(\Theta_X)}{\mathrm{Todd}(f^*\Theta_Y)} = \mathrm{Todd}\, \Theta_Y X.$$

其中 $\Theta_Y X$ 是 X 相对 Y 的切丛, 即每个 $x \in X$ 处是 $T_x X_{f(x)}$.

应用 1. 从 Grothendieck 到 Schubert

根据 GRR 第一种情况, 我们会发现对于光滑子簇 D,

$$\mathrm{ch}([\mathcal{O}_D]) = [D] + \text{更低维的 cycle}.$$

因为这来自于 $\mathrm{CH}(D)$ 一个首项是 1 的类的推出.

实际上, Grothendieck 多项式的最低项是 Schubert 多项式 (虽然 Schbert 胞腔不光滑, 但是也有不光滑版本的 GRR).

应用 2. 秒得 Demazure operator

我们计算过 G/B 的切丛的 Chern 类是

$$\prod_{i<j}(1+(x_i-x_j)).$$

而类似地, G/P 的切丛的 Chern 类可得是

$$\prod_{\substack{i<j,\\ j\neq i+1}}(1+(x_i-x_j)).$$

所以 $\Theta_Y X$ 的 Todd 类是 $\frac{x_i-x_{i+1}}{1-e^{-x_i+x_{i+1}}}$.

因此 isobaric Demazure operator 还可以这样计算

$$\begin{aligned}\pi_i f &= \partial_i\big(\tfrac{x_i-x_{i+1}}{1-e^{-x_i+x_{i+1}}}f\big)\\ &= \frac{\frac{x_i-x_{i+1}}{1-e^{-x_i+x_{i+1}}}f-\frac{x_{i+1}-x_i}{1-e^{x_i-x_{i+1}}}s_if}{x_i-x_{i+1}}\\ &= \tfrac{f-e^{-x_i+x_{i+1}}s_if}{1-e^{-x_i+x_{i+1}}}.\end{aligned}$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ *一般 Lie 群* $\partial_i = \dfrac{f-s_if}{\alpha}$, $\pi_i=\dfrac{f-e^{-\alpha}s_if}{1-e^{-\alpha}}$.

注意到显然 $\mathrm{Todd}(\xi\oplus\eta)=\mathrm{Todd}(\xi)\,\mathrm{Todd}(\eta)$.

对于射影空间 $\mathbb{C}P^n$, 我们计算切丛的 Todd 类. 考虑

$$0\to \underset{\text{重演丛}}{\tau}\to \mathbb{1}^{n+1}\to \underset{\text{万有商丛}}{\rho}\to 0$$

因为 切丛 $=\mathrm{Hom}(\tau,\rho)=\tau^*\otimes\rho$, 张量线丛 τ^* 保持正合性,

$$0\to \underset{\text{平凡丛}}{\mathbb{1}}\to \tau^{n+1}\to \underset{\text{切丛}}{\Theta}\to 0$$

故

$$\mathrm{Todd}(\Theta)=\mathrm{Todd}(\tau)^{n+1}/\,\mathrm{Todd}(\mathbb{1})=\Big(\frac{x}{1-e^{-x}}\Big)^{n+1}.$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ *这里用 Chern 类分裂算就太麻烦了.*

习题 1. 证明 $\left(\dfrac{x}{1-e^{-x}}\right)^{n+1}$ 在 x^n 前系数是 1. [提示: 因为 $\mathbb{C}P^n$ 的 `Todd class` 是 $\big(\frac{x}{1-e^{-x}}\big)^{n+1}$, 而推出 $H^*(\mathbb{C}P^n)\to H^*(\text{点})$ 到一个点等于取 $x^n=[\text{点}]$ 前的系数, 所以利用 `GRR` 可得 $\big(\frac{x}{1-e^{-x}}\big)^{n+1}$ 的 x^n 系数是 1. 代数地, 可以这么解. 对于全纯函数 $f(z)$, z^{n-1} 前的系数是 $f/z^n\mathrm{d}z$ 在 0 处的留数. 所以我们要求 $(\frac{f}{z})^n\mathrm{d}z$ 在 0 处的留数是 1, 换元 $\frac{z}{f(z)}=y$, 假设 $z=h(y)$, 于是 $\frac{h'(y)}{y^n}\mathrm{d}y$ 在 $h(0)=0$ 处的留数是 $1/n$, 所以 $h(y)=y+\frac12y^2+\frac13y^3+\cdots=-\log(1-y)$, 所以 $z=-\log(1-y)$, 即 $y=1-e^{-z}=z/\frac{z}{1-e^{-z}}$.]

$\boxed{\text{注意 1}}$ *当中用到的* $\frac{x}{1-e^{-x}}$ *是非常著名的生成函数,*

$$\frac{x}{1-e^{-x}}=1+\frac{x}{2}+\sum_{k\geq2}B_k\frac{x^k}{k!}=1+\frac{x}{2}+\frac16\frac{x^2}{2}-\frac1{30}\frac{x^4}{24}+\dots,$$

其中 B_k *是* **Bernoulli 数**.

这是为了计算幂和而提出的,

$$\begin{aligned}1+2+\cdots+n &= n(n+1)/2\\ &= \tfrac12n^2+\tfrac12n\\ 1^2+2^2+\cdots+n^2 &= n(n+1)(2n+1)/6\\ &= \tfrac13n^3+\tfrac12n^2+\tfrac16n\\ 1^3+2^3+\cdots+n^3 &= (n(n+1))^2/4\\ &= \tfrac14n^4+\tfrac13n^2+\tfrac12n\end{aligned}$$

更一般的公式是

$$\sum_{k=1}^n k^p=\frac{1}{p+1}\sum_{k=0}^p\binom{p+1}{k}B_k(-1)^{p-k+1}n^k$$

另一则著名的事实是

$$\zeta(2n)=\frac{(2\pi)^{2n}}{(-1)^{n+1}2(2n)!}B_{2n}.$$

其中 $\zeta(s)=\sum\frac{1}{n^s}$ *是 Riemann zeta 函数.*

4.4 连通 K 理论

我们注意到 Chow 环/上同调环, 和 K 理论都有推出拉回, 只不过有不同的拉回结构. 在代数配边 (cobordism) 理论中, 我们可以将 Chow 环和上同调连接起来, 即连通 (connective)K 理论.

考虑

$$K(\quad)[\beta,\beta^{-1}] = K(\quad)\otimes\mathbb{Z}[\beta,\beta^{-1}].$$

我们可以定义新的拉回和推出

$$K(X)[\beta,\beta^{-1}] \xrightarrow{f_\beta^*} K(Y)[\beta,\beta^{-1}] \qquad \alpha\longmapsto f^*\alpha$$

$$K(X)[\beta,\beta^{-1}] \xrightarrow{f_*^\beta} K(Y)[\beta,\beta^{-1}] \qquad \alpha\longmapsto \beta^{\dim Y-\dim X} f_*\alpha.$$

拉回是 $\mathbb{Z}[\beta,\beta^{-1}]$-代数同态; 推出是 $\mathbb{Z}[\beta,\beta^{-1}]$-模同态.

对于向量丛 ξ, 假设其分解成线丛 $\xi=\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_n$, 即

$$c(\xi)=1+c_1(\xi)+\cdots=(1+x_1)\cdots(1+x_n).$$

其中 $c_i\in\mathrm{CH}^i(\quad)$ 是 Chern 类. 那么

$$\mathrm{ch}_\beta(\xi)=e^{\beta x_1}\oplus_\beta\cdots\oplus_\beta e^{\beta x_n}$$

所以对一般的向量丛也定义了. 且和拉回交换

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ K(X)[\beta,\beta^{-1}] & \longleftarrow & K(Y)[\beta,\beta^{-1}] \\ \mathrm{ch}_\beta\downarrow & & \downarrow\mathrm{ch}_\beta \\ \mathrm{CH}(X)\otimes\mathbb{Q}[\beta,\beta^{-1}] & \longleftarrow & \mathrm{CH}(Y)\otimes\mathbb{Q}[\beta,\beta^{-1}] \end{array}$$

但是推出则不然,

$$\begin{array}{ccc} X & \longrightarrow & Y \\ K(X)[\beta,\beta^{-1}] & \longrightarrow & K(Y)[\beta,\beta^{-1}] \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathrm{CH}(X)\otimes\mathbb{Q}[\beta,\beta^{-1}] & \longrightarrow & \mathrm{CH}(Y)\otimes\mathbb{Q}[\beta,\beta^{-1}] \end{array}$$

纵向映射是 $\mathrm{ch}_\beta\smile\mathrm{Todd}_\beta$(切丛).

所谓 **Todd 类** 定义如下, 对于向量丛 ξ, 假设其分解成线丛 $\xi=\xi_1\oplus\cdots\oplus\xi_n$, 即

$$c(\xi)=1+c_1(\xi)+=(1+x_1)\cdots(1+x_n).$$

其中 $c_i\in\mathrm{CH}^i(\quad)$ 是 Chern 类. 那么

$$\mathrm{Todd}_\beta(\xi)=\frac{\beta x_1}{1-e^{-\beta x_1}}\cdots\frac{\beta x_n}{1-e^{-\beta x_n}}$$

所以对一般的向量丛也定义了.

于是在 $K(X)[\beta,\beta^{-1}]$ 情况下的 Demazure operator

$$\begin{aligned}\pi_i^\beta f &= \partial_i\left(\frac{\beta x_i-\beta x_{i+1}}{1-e^{-\beta x_i+\beta x_{i+1}}}f\right)\\ &=\beta\frac{f-e^{-\beta x_i+\beta x_{i+1}}s_if}{1-e^{-\beta x_i+\beta x_{i+1}}},\\ &=\beta\frac{e^{\beta x_i}f-s_i(e^{\beta x_i}f)}{e^{\beta x_i}-e^{\beta x_{i+1}}}\end{aligned}$$

对线丛 ξ, 如果 $c_1(\xi)=x$, 记

$$c_1^\beta(\xi)=\frac{1-e^{-\beta x}}{\beta}\in\mathrm{CH}(X)[\beta,\beta^{-1}].$$

那么对于线丛 ξ,η,

$$c_1^\beta(\xi\otimes\eta)=c_1^\beta(\xi)\oplus_\beta c_1^\beta(\eta)$$

其中 $\oplus_\beta$ 是 formal group law

$$u\oplus_\beta v=u+v-\beta uv.$$

在 $K(G/B)[\beta,\beta^{-1}]$ 的情况, 记

$$X_i=\frac{1-e^{-\beta x_i}}{\beta}=-c_1^\beta(\mathbb{C}x_i).$$

此时最高次的 Demazure operator

$$\pi_{w_0}^\beta f=\frac{\sum_{w\in\mathfrak{S}_n}(-1)^w(f\cdot e^{\beta\rho})}{\prod_{i<j}(e^{\beta x_i}-e^{\beta x_{i+1}}/\beta)}$$

其中 $\rho=nx_1+\cdots+x_{n-1}$. 不难发现 $X_1^{n-1}\cdots X_{n-1}$ 作用后是 1. 因此

$$\mathfrak{G}_{w_0}(x;\beta)=X_1^{n-1}\cdots X_{n-1}$$

这也是 β-Grothendieck 多项式的定义.

习题 1. 验证对于 *Formal group law* $\oplus_\beta$, 有 $(u\oplus_\beta v)x=x(u\oplus_\beta v)$. [提示: 因为 $u\oplus_\beta v=u+v-\beta uv$, 显然.]

习题 2. 证明对于与 π_i^β 交换的不定元 $x,y\in\mathbb{Z}[\beta,\beta^{-1}]$, 记算子 $h_i(x)=1-\beta x\pi_i^\beta$, 证明

$$\begin{cases} h_i(x)h_j(y)=h_j(y)h_i(x) & |i-j|\geq 2\\ h_i(x)h_{i+1}(x\oplus_\beta y)h_i(y)=h_{i+1}(y)h_i(x\oplus_\beta y)h_{i+1}(x) \end{cases}$$

[提示: 第一条平凡. 对第二条展开我们只需要验证 π_i^β 和 π_{i+1}^β 项, 这来自事实 $-\beta x-\beta y+\beta^2xy=-\beta x\oplus_\beta y$.]

附录：凝聚层

局部上，代数与几何有如下对应

几何	代数	对应
空间	$\mathbb{C}$交换环	$X \mapsto \mathcal{O}(X) = \{X \xrightarrow{\text{多项式}} \mathbb{C}\}$
点	到 $\mathbb{C}$ 的同态 素理想	$p \mapsto$ evaluate p $\{f : f(p) = 0\}$
闭子空间	理想 商环	$K \leftrightarrow \{f : f(K) = 0\}$ $C(X)/\{f : f(K) = 0\}$
开子空间	乘性子集 局部化	$U \leftrightarrow \{f : f(U) \neq 0\}$ $\{f/g : g(U) \neq 0\}$

那么向量丛，对应代数的什么？对于 X 上的 (代数) 向量丛 $\xi : \underset{X}{\overset{E}{\downarrow}}$，考虑 X 上的 section，即 global section

$$\{s : X \to E : \xi \circ s = \mathrm{id}_X\}.$$

这是一个 $\mathcal{O}(X)$ 模，通过逐点相乘 $f \cdot s(x) = f(x)s(x)$。这是一个有限生成投射模 (交换代数)。

问题：如何填补??

向量丛	有限生成投射模	$E \leftrightarrow \{\text{global section}\}$
??	有限生成模	

注意到包含所有有限生成投射模的 Abel 范畴就是所有有限生成模 (假设 Noether)。

因为上面的对应总是要划到局部，所以不妨抽象成所有开集。

对于 X 的每个开基 U，定义

$$\mathcal{O}(U) = \{U \to \mathbb{C} : \text{多项式映射}\}.$$

对于向量丛 $\xi : \underset{X}{\overset{E}{\downarrow}}$，对每个 X 的开集 U，定义

$$\mathcal{E}(U) = U \text{ 上的 section}\{s : U \to E : \xi \circ s = \mathrm{id}_U\}.$$

那么 $\mathcal{E}(U)$ 是 $\mathcal{O}(U)$-投射模 (52 第二章一道习题)。

凝聚层的严格定义可在代数几何书中找到。粗略来说，一个 X 上的凝聚层就是对每个开集 U 指定一个 $\mathcal{O}(U)$ 模。

向量丛的直和	层的直和	$[\mathcal{E} \oplus \mathcal{F}](U) = \mathcal{E}(U) \oplus \mathcal{F}(U)$
向量丛的张量	层的张量	$[\mathcal{E} \otimes \mathcal{F}](U) = \mathcal{E}(U) \otimes_{\mathcal{O}(U)} \mathcal{F}(U)$

注意 1 *需要注意，向量丛并不是凝聚层范畴中的投射对象。例如 $\mathrm{Hom}_{\mathcal{O}}(\mathcal{O}, -) = \Gamma(-)$，这有高次上同调。*

注意 2 *对于 de Rham 复形中出现的微分 $d : \Omega^i \to \Omega^{i+1}$，这是层的映射，但是不是凝聚层的映射 (= 对应向量丛的映射)。因为凝聚层映射是要求 $fd\omega = d(f\omega)$。*

注意 3 *常数层不是凝聚层，局部常数层如何变成 Abel 范畴是另一个故事。*

对于代数簇的态射 $f : X \longrightarrow Y$ 我们可以定义拉回和推出。

对于 X 上的凝聚层 $\mathcal{F}$，定义推出

$$f_*\mathcal{F}(V_{\text{开}\subseteq Y}) = \mathcal{F}(f^{-1}(V))$$

对于 Y 上的凝聚层 $\mathcal{G}$，定义拉回

$$f^*\mathcal{G}(U_{\text{开}\subseteq X}) = \varinjlim_{f(U)\subseteq V} \mathcal{O}(U) \otimes_{\mathcal{O}(V)} \mathcal{F}(V)$$

这虽然看起来古怪，但是可以验证这对应向量丛的拉回。

一种层的理解方式是用 stalk. 对于层 $\mathcal{F}$，点 x，定义

$$\mathcal{F}_x = \varinjlim_{x\in U} \mathcal{F}(U) = \frac{\{s : s \text{ 定义在 } p \text{ 附近}\}}{s = t \iff \text{在 } p \text{ 附近} s = t}.$$

我们 "可以" 说 stalk 决定了层。

注意，stalk 通常不会是有限维线性空间，即使 $\mathcal{F}$ 是一个向量丛，例如函数在 p 处取值相同，但是在 p 附近行为可能不同。

一点仔细验证会发现如果 $f(x) = y$，那么

$$f^*\mathcal{G}_x = \mathcal{G}_y.$$

推出和拉回不保持正合性，所以一个修正是利用导出函子，

$$R^i f_* \qquad L_i f^*$$

对于推出，为了确保 $R^i f_*$ 把凝聚层映成凝聚层，我们需要假设 f 是 proper.

对于拉回，为了确保 $L_i f^*$ 是无限和，我们假设 f 是 smooth.

注意 1 *光滑这里指的是非退化，不是任何一个微分流形里面定义的光滑映射。*

注意 1 *实际上，Chow 环类比的并不严格是上同调，而是 Borel–Moore(下) 同调。这在光滑时是相同的。K-理论也是一样，因此需要稍微注意。实际上，我们在建立基本类理论的时候做了一些不严格的类比 (主要原因是 Schubert 胞腔不光滑)，严格地还是应该建立 Borel–Moore type 的同调理论 (不是上同调!)。*

注意 2 *K 理论非常丰富，有拓扑的，代数 (几何) 的，解析的，光滑的。在我们的情况下，$K^0(G/B)$ 都是相同的，因为有胞腔结构。但是 $K^1(G/B)$ 乃至更高阶则完全不能期待，他们的计算也十分复杂。*

其中最方便定义推出拉回的的是代数几何的 K 理论。但是可能不够容易被理解。

5 等变理论速成 (未完成)

5.1 万有丛 BG

我们已经铺垫了大量的例子足够谈论一般的分类丛 BG 了.

5.2 等变上同调

5.3 等变向量丛

5.4 局部化定理

Atiyah–Bott 局部化定理

GMK

6 等变 K 理论 (未完成)

6.1 等变向量丛

6.2 Borel–Weil 定理

考虑 T 的一个表示 V, 通过要求 $\begin{pmatrix}1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1\end{pmatrix}$ 作用平凡延拓到 B 上, 那么

$$\underline{V} = \begin{array}{c} G \underset{B}{\times} V \\ \big\downarrow \\ G/B \end{array}$$

是一个向量丛.

而且映射是 G-等变的, 即

$$\begin{array}{cc} G \curvearrowright_{\text{左乘}} & G \underset{B}{\times} V \\ & \big\downarrow \\ G \curvearrowright_{\text{左乘}} & G/B \end{array}$$

于是 $\underline{V}$ 的 section

$$\begin{array}{c} \Gamma(\underline{V}) = \left\{ G/B \xrightarrow{s} G \underset{B}{\times} V : \xi \circ s = \mathrm{id}_{G/B} \right\} \\ \| \\ \left\{ G \xrightarrow{f} V : f(xb) = b \cdot f(x) \right\} \end{array}$$

上有 G 的线性作用, 所以是一个表示.

这定义了一个映射

$$T\text{-Rep} \longrightarrow G\text{-Rep}.$$

问题是如何描述这个映射?

任何表示 V 定义最高权空间

$$V_{\text{highest}} = \left\{ x \in V : \begin{pmatrix}1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1\end{pmatrix} x = x \right\}.$$

且

$$V \underset{G\text{-Rep}}{\cong} V' \iff V_{\text{highest}} \underset{T\text{-Rep}}{\cong} V'_{\text{highest}}$$

对于不可约表示 V, 最高权空间是 T 的一维表示.

对于分拆 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 是整数 (不必为正),

$$V = \mathbb{C}(\lambda_1 x_1 + \ldots + \lambda_n x_n) = \mathbb{C}\lambda$$

即 $\mathrm{diag}(x_1, \ldots, x_n)$ 的作用是数乘 $x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_1}$.

Lie 群表示论告诉我们存在唯一的一个 G 的不可约表示 $V(\lambda)$ 使得

$$V(\lambda)_{\text{highest}} \cong \mathbb{C}\lambda.$$

注意, $V(\lambda)^* \cong V(-w_0\lambda)^*$.

对于代数群 G, 有代数版本的 Peter–Weyl 定理

$$\{G \xrightarrow{f} \mathbb{C}\} \cong \bigoplus_{\text{不可约表示}V} V \otimes V^*.$$

作为 $G \times G$ 表示 (代表左乘和右乘).

即

$$\{G \xrightarrow{f} \mathbb{C}\} \cong \bigoplus_{\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n} V(\lambda)^* \otimes V(\lambda).$$

所以, $\mathbb{C}\lambda$ 的 global section

$$\Gamma(\underline{\mathbb{C}}\lambda) = \left\{ G \xrightarrow{f} \mathbb{C}\lambda : f(xb) = b \cdot f(x) \right\} \cong V(\lambda)^*.$$

这就是 **Borel–Weil 定理**.

另一方面考虑缩成一个点的映射

$$p : G/B \longrightarrow \text{点}$$

我们要计算

$$p_* : H_G^*(G/B) \longrightarrow H_G^{*-\dim G/B}(\text{点})$$

$$p_* : K_G(G/B) \longrightarrow K_G(\text{点})$$

我们知道

$$H_G^*(G/B) \longrightarrow H_B^*(G/B)$$

$$K_G(G/B) \longrightarrow K_B(G/B)$$

是单射, 所以我们只需要求

$$p_* : H_B^*(G/B) \longrightarrow H_B^*(\text{点})$$

$$p_* : K_B(G/B) \longrightarrow K_B(\text{点})$$

这是 $H_B^*(\text{点})$ 模同态.

首先, 上同调中, 因为维数的原因

$$p_*[\Sigma_w] = \begin{cases} 1, & w = w_0, \\ 0, & w \neq w_0 \end{cases} \qquad \Sigma_w = \overline{B^- wB/B}.$$

因此恰好是

$$\partial_{w_0} : H^*(G/B) \longrightarrow H^*(\text{点}).$$

在 K 理论中是类似的,

$$p_*[\mathcal{O}_w] = \begin{cases} 1, & w = w_0, \\ \text{还是}1, & w \neq w_0 \end{cases} \qquad \mathcal{O}_w = \mathcal{O}_{\overline{B^- wB/B}}.$$

因此恰好是

$$\pi_{w_0} : K(G/B) \longrightarrow K(\text{点}).$$

另一种语言, 对于 G/B 上的向量丛 ξ,

$$p_*[\xi] = \sum_{i\geq 0}(-1)^i H^i(G/B;\xi).$$

另一方面 Borel–Weil 其实证明了, 当 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$ 时,

$$H^i(\underline{\mathbb{C}}\lambda) = \begin{cases}\Gamma(\underline{\mathbb{C}}\lambda) & i=0\\ 0 & i\geq 0\end{cases}$$

因为 $[\mathbb{C}\lambda^*] = e^\lambda$, 我们得到了 Weyl 特征公式

$$\mathrm{ch}(V(\lambda)^*) = \partial_{w_0} e^{\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n}.$$

这是几何特征, 代数特征则可以直接计算得是

$$\chi(V(\lambda)) = \pi_{w_0} e^{\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n}.$$

这是著名的 Weyl 特征公式.

Demazure 特征公式 是 Weyl 特征公式的细化. 对于 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, 考虑在 $\overline{B^-wB/B}$ 上的 section

$$\Gamma(\overline{B^-wB/B};\underline{\mathbb{C}}\lambda^*).$$

即 $\underline{\mathbb{C}}\lambda^*$ 拉回 $\overline{B^-wB/B}$ 取上同调, 类似上面的讨论,

$$K_B(\overline{B^-wB/B}) \longrightarrow K_B(\text{点})$$

恰好可由 π_w 担任. 因此, 假如没有高次上同调的话,

$$\mathrm{ch}(\Gamma(\overline{B^-wB/B})) = \pi_w e^{\lambda_1 x_1+\cdots+\lambda_n x_n}.$$

事实上, Demazure 证明了只要 $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_n$, 确实没有.

习题 1. 对于 P_λ 其中 $\lambda = \lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r$ 是一个 n 的分拆, 那么 $G/B \to G/P$ 的推出 $H_G^*(G/B) \longrightarrow H_G^*(G/P)$ 是怎样的呢? [提示: 是 $\partial_{w_0^1\times\cdots\times w_0^r}$, 其中 $w_0^1\times\cdots\times w_0^r$ 是 $\mathfrak{S}_{\lambda_1}\times\cdots\times\mathfrak{S}_{\lambda_r}\subseteq\mathfrak{S}_n$ 的最长元. 即提取 $H^*(G/B) = H^*(P_\lambda/B)\otimes H^*(G/P_\lambda)$ 在 $[\Sigma_{w_0^1\times\cdots\times w_0^r}]\in H^*(P_\lambda/B)$ 中的系数, 而 $\partial_{w_0^1\times\cdots\times w_0^r}$ 恰好可以担此重任. 实际上 K 理论这件事也对.]

7 更多计算 (未完成)

7.1 射影丛定理

associated Grassmannian bundle

associated flag bundle

7.2 Bott-Samelson 流形

7.3 无穷 $\mathcal{F}\ell$ 和 $\mathcal{G}r$

回顾

$$\begin{gathered}\mathcal{F}\ell(n)=\mathrm{GL}_n/B_n\\ \|\\ \left\{0\subseteq V_1\subseteq\cdots\subseteq\mathbb{C}^n:\text{是 }\mathbb{C}^n\text{ 中的 flag, }\dim V_i=i.\right\}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{GL}_n/T_n\\ \|\\ \left\{(\ell_1,\ldots,\ell_n):\begin{matrix}\ell_1,\ldots,\ell_n\text{ 是 }\mathbb{C}^n\text{ 中线性无关}\\ \text{的 1 维子空间.}\end{matrix}\right\}\end{gathered}$$

$$H^*(\mathcal{F}\ell(n))=\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]\Big/\langle e_1,\ldots,e_n\rangle.$$

回顾

$$\begin{gathered}\mathcal{G}r(k,n)=\mathrm{GL}_n/\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{GL}_k & *\\ & \mathrm{GL}_{n-k}\end{smallmatrix}\right)\\ \|\\ \left\{V_k:V_k\text{ 是 }\mathbb{C}^n\text{ 中的 }k\text{ 维子空间.}\right\}\end{gathered}$$

$$H^*(\mathcal{G}r(k,n))=\mathbb{Z}[e_1^k,\ldots,e_k^k]\Big/\langle e_1^n,\ldots,e_n^n\rangle.$$

我们可以

$$\begin{pmatrix}* & \cdots & *\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ * & \cdots & *\end{pmatrix}\xRightarrow{\text{无限版本}}\begin{pmatrix}* & \cdots & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots\\ \vdots & \ddots & \ddots\end{pmatrix}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{GL}_n=\left\{\text{invertible }\left(\begin{smallmatrix}* & \cdots & *\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ * & \cdots & *\end{smallmatrix}\right)\right\}\\ \Downarrow\\ \mathrm{GL}_\infty=\left\{\text{invertible }\left(\begin{smallmatrix}* & \cdots & \cdots\\ \vdots & \ddots & \ddots\\ \vdots & \ddots & \ddots\end{smallmatrix}\right):\text{和 }I\text{ 只相差有限位置}\right\}\end{gathered}$$

回顾

$$\begin{gathered}\mathcal{F}\ell(n,\infty)=\mathrm{GL}_\infty/\left(\begin{smallmatrix}B_n & *\\ & \mathrm{GL}_\infty\end{smallmatrix}\right)\\ \|\\ \left\{0\subseteq V_1\subseteq V_2\subseteq\cdots:\begin{matrix}\text{是 }\mathbb{C}^\infty\text{ 中的 flag, }\dim V_i=i.\\ \text{当 }n\text{ 充分大时 }V_n=\mathbb{C}^n.\end{matrix}\right\}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{GL}_\infty/\left(\begin{smallmatrix}T_n & *\\ & \mathrm{GL}_\infty\end{smallmatrix}\right)\\ \|\\ \left\{(\ell_1,\ell_2,\ldots):\begin{matrix}\ell_1,\ell_2,\ldots\text{ 是 }\mathbb{C}^\infty\text{ 中线性无关}\\ \text{的 1 维子空间. 当 }n\text{ 充分大}\\ \text{时 }\ell_n=e_n\text{ (标准基).}\end{matrix}\right\}\end{gathered}$$

$$H^*(\mathcal{F}\ell(n,\infty))=\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n].$$

回顾

$$\begin{gathered}\mathcal{G}r(k,\infty)=\mathrm{GL}_\infty/\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{GL}_k & *\\ & \mathrm{GL}_\infty\end{smallmatrix}\right)\\ \|\\ \left\{V_k:V_k\text{ 是 }\mathbb{C}^\infty\text{ 中的 }k\text{ 维子空间.}\right\}\end{gathered}$$

$$H^*(-)=\mathbb{Z}[e_1,\ldots,e_n].$$

通过把 $A\in\mathrm{GL}_n$ 当做 $\left(\begin{smallmatrix}A & 0\\ & 1\end{smallmatrix}\right)\mathrm{GL}_{n+1}$, 我们可以认为

$$\begin{aligned}\mathrm{GL}_\infty&=\textstyle\bigcup_{n\geq 0}\mathrm{GL}_n\\ \mathrm{GL}_\infty/B_\infty&=\textstyle\bigcup_{n\geq 0}\mathrm{GL}_n/B_n=\bigcup_{n\geq 0}\mathcal{F}\ell(n).\\ \mathrm{GL}_\infty/\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{GL}_k & *\\ & \mathrm{GL}_\infty\end{smallmatrix}\right)&=\textstyle\bigcup_{n\geq k}\mathrm{GL}_n/\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{GL}_k & *\\ & \mathrm{GL}_{n-k}\end{smallmatrix}\right)=\bigcup_{n\geq k}\mathcal{G}r(k,n).\end{aligned}$$

这还保持胞腔. 根据 Schubert 多项式的理论,

$$\begin{gathered}\mathcal{F}\ell(\infty)=\mathrm{GL}_\infty/B_\infty\\ \|\\ \left\{0\subseteq V_1\subseteq V_2\subseteq\cdots:\begin{matrix}\text{是 }\mathbb{C}^\infty\text{ 中的 flag, }\dim V_i=i.\\ \text{当 }n\text{ 充分大时 }V_n=\mathbb{C}^n.\end{matrix}\right\}\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}\mathrm{GL}_\infty/T\\ \|\\ \left\{(\ell_1,\ell_2,\ldots):\begin{matrix}\ell_1,\ell_2,\ldots\text{ 是 }\mathbb{C}^\infty\text{ 中线性无关}\\ \text{的 1 维子空间. 当 }n\text{ 充分大}\\ \text{时 }\ell_n=e_n\text{ (标准基).}\end{matrix}\right\}\end{gathered}$$

$$H^*(\mathcal{F}\ell(\infty))=\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n,\ldots].$$

下面我们的目标是

$$\xRightarrow{\text{无限版本}}\begin{pmatrix}\ddots & \vdots & .\cdot^{\cdot}\\ \cdots & * & \cdots\\ .\cdot^{\cdot} & \vdots & \ddots\end{pmatrix}$$

定义

$$\mathrm{GL}=\left\{\text{invertible }\left(\begin{smallmatrix}\ddots & \vdots & .\cdot^{\cdot}\\ \cdots & * & \cdots\\ .\cdot^{\cdot} & \vdots & \ddots\end{smallmatrix}\right):\text{和 }I\text{ 只相差有限位置}\right\}$$

$$\mathcal{F}\ell=\mathrm{GL}\Big/\left(\begin{smallmatrix}\ddots & & \\ & * & \\ & & \ddots\end{smallmatrix}\right)\qquad \mathcal{G}r=\mathrm{GL}\Big/\left(\begin{smallmatrix}\mathrm{GL} & *\\ & \mathrm{GL}\end{smallmatrix}\right)$$

为了方便, 我们表示 GL 元素时, 用线把 0 和 1 的交界处割开.

通过把 $A\in\mathrm{GL}_{2n}$ 当做 $\begin{pmatrix}1 & & \\ & A & \\ & & 1\end{pmatrix}\in\mathrm{GL}_{2n+2}$, 具体来说

$$\left(\begin{array}{c|c}A_{11} & A_{12}\\ \hline A_{21} & A_{22}\end{array}\right)\longmapsto\left(\begin{array}{cc|cc}1 & & & \\ & A_{11} & A_{12} & \\ \hline & A_{21} & A_{22} & \\ & & & 1\end{array}\right)$$

我们可以认为

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL} &= \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{GL}_{2n} \\
\mathrm{GL}/B &= \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{GL}_{2n}/B_{2n} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}\ell(2n). \\
\mathrm{GL}/\begin{pmatrix} \mathrm{GL} & * \\ & \mathrm{GL} \end{pmatrix} &= \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{GL}_{2n}/\begin{pmatrix} \mathrm{GL}_n & * \\ & \mathrm{GL}_n \end{pmatrix} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{G}r(n,2n).
\end{aligned}$$

他们都保持胞腔.

通过把 $A \in \mathrm{GL}_\infty$ 当做 $\begin{pmatrix} 1 & \\ & A \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_\infty$, 具体来说

$$\left(\begin{array}{c|c} A_{11} & A_{12} \\ \hline A_{21} & A_{22} \end{array}\right) \longmapsto \left(\begin{array}{cc|c} 1 & & \\ & A_{11} & A_{12} \\ \hline & A_{21} & A_{22} \end{array}\right)$$

我们可以认为

$$\begin{aligned}
\mathrm{GL} &= \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{GL}_\infty \\
\mathrm{GL}/B &= \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{GL}_\infty/B_\infty = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{F}\ell(\infty). \\
\mathrm{GL}/\begin{pmatrix} \mathrm{GL} & * \\ & \mathrm{GL} \end{pmatrix} &= \bigcup_{n\geq 0} \mathrm{GL}_\infty/\begin{pmatrix} \mathrm{GL}_n & * \\ & \mathrm{GL}_\infty \end{pmatrix} = \bigcup_{n\geq 0} \mathcal{G}r(n,\infty).
\end{aligned}$$

他们都保持胞腔.

为了方便起见, 我们约定

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & * & * & \cdots \\ \hline & * & * & \ddots \\ & \vdots & \ddots & \ddots \end{array}\right) \Big/ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & B_n & * & \cdots \\ \hline & & * & \ddots \\ & & & \ddots \end{array}\right) \cong \mathcal{F}\ell(\infty)$$

的上同调是

$$\mathbb{Z}[x_{-n+1}, x_{-n+2}, \ldots, x_0].$$

因此

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & * & * & \cdots \\ \hline & * & * & \ddots \\ & \vdots & \ddots & \ddots \end{array}\right) \Big/ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & \mathrm{GL}_n & * & \cdots \\ \hline & & * & \cdots \\ & & \vdots & \ddots \end{array}\right) \cong \mathcal{G}r(n,\infty)$$

的上同调是

$$\mathbb{Z}[x_{-n+1}, x_{-n+2}, \ldots, x_0]^{\mathfrak{S}_n}.$$

因此上同调层面上

$$\begin{aligned}
H^*(\mathcal{F}\ell(\infty)) &\longrightarrow H^*(\mathcal{F}\ell(\infty)) \\
f(x_{-n}, x_{-n+1}\ldots) &\longmapsto f(0, x_{-n+1}, \ldots).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
H^*(\mathcal{G}r(n+1,\infty)) &\longrightarrow H^*(\mathcal{G}r(n+1,\infty)) \\
f(x_{-n}, \ldots, x_0) &\longmapsto f(0, x_{-n+1}, \ldots, x_0).
\end{aligned}$$

仔细分析每个胞腔的意义 + 精细的比较可得

$$H^*(\mathcal{G}r) = \varprojlim H^*(\mathcal{G}r(n,\infty)) = \Lambda$$

是以 $\{x_i\}_{i=-\infty}^0$ 为不定元的对称多项式环.

对于 $\mathcal{F}\ell$, 直接取极限得不到正确的结果, 但是注意到

$$\mathrm{GL}/B = \mathcal{F}\ell \longrightarrow \mathcal{G}r = \mathrm{GL}/\begin{pmatrix} \mathrm{GL} & * \\ & \mathrm{GL} \end{pmatrix}$$

是一个以 $\mathcal{F}\ell(\infty) \times \mathcal{F}\ell(\infty)$ 为纤维的纤维丛, 因此

$$H^*(\mathcal{F}\ell) = \Lambda \otimes \mathbb{Z}[\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots].$$

即所谓的 Back stable symmetric polynomial ring.

此时也有 Schubert 胞腔 $[BwB/B] \in H^*(\mathcal{F}\ell)$, 根据定义, 这应该被表作 back stable Schubert polynomial

$$\lim_{n\to\infty} \mathfrak{S}_{1_n \boxtimes w}(x_{-n+1}, x_{-n+2}, \ldots).$$

因为在 n 充分大时, 这个胞腔在

$$\left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & * & * & \cdots \\ \hline & * & * & \ddots \\ & \vdots & \ddots & \ddots \end{array}\right) \Big/ \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & & & \\ & B_n & * & \cdots \\ \hline & & * & \ddots \\ & & & \ddots \end{array}\right) \cong \mathcal{F}\ell(\infty)$$

的像就是这个多项式.

此时自然投射

$$\mathrm{GL}/B = \mathcal{F}\ell \longrightarrow \mathcal{G}r = \mathrm{GL}/\begin{pmatrix} \mathrm{GL} & * \\ & \mathrm{GL} \end{pmatrix}$$

诱导的上同调拉回

$$H^*(\mathcal{G}r) \longrightarrow H^*(\mathcal{F}\ell)$$

就是包含

$$\Lambda \subseteq \Lambda \otimes \mathbb{Z}[\ldots, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \ldots].$$

但是比较出乎意料的地方是反方向也有一个自然的映射, 所谓的 wrong way map.

$$\mathcal{G}r \longrightarrow \mathcal{F}\ell \overset{\text{诱导了}}{\Longrightarrow} H^*(\mathcal{F}\ell) \longrightarrow H^*(\mathcal{G}r)$$

这个映射把 $x_i \mapsto 0$.

同时

$$\mathcal{G}r(k,2k) \subseteq \mathcal{G}r \overset{\text{诱导了}}{\Longrightarrow} H^*(\mathcal{G}r) \longrightarrow H^*(\mathcal{G}r(k,2k)).$$

最终证明对于 Schubert cells, 这个复合之后是一个对应的 positroid, 所以用 Knutson 的 IP pipe dream 可以计算.
