1 环面簇 (Toric Varieties)

1.1 基本定义

在欧式空间 $\mathbb{R}^n$ 中一个锥形 σ 如果是有限个闭半平面的交，我们谈论的都是顶点在原点的锥形. 我们说 σ 是严格的锥形如果 σ 不包含任何直线 (只包含射线).

考虑 $(\mathbb{R}^n)^* \cong \mathbb{R}^n$. 对于锥形 σ, 定义

$$\sigma^\vee = \{f \in (\mathbb{R}^n)^* : \forall x \in \sigma, f(x) \geq 0\}.$$

记 $N = \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, $M = \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}) \cong \mathbb{Z}^n \subseteq (\mathbb{R}^n)^*$. 我们说 σ 是有理的如果存在 $v_1, \ldots, v_k \in N = \mathbb{Z}^n$ 使得

$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} v_k$$

我们下面说的锥形都是有理的.

此时定义对应的半群

$$S_\sigma = \sigma^\vee \cap M = \{f \in \mathrm{Hom}(N, \mathbb{Z}) : \forall \sigma, f(x) \geq 0\}$$

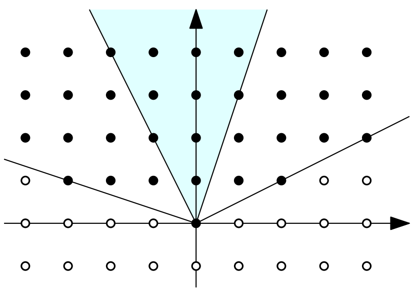
对应的仿射环面簇

$$U_\sigma = \mathrm{Hom}_{\text{幺半群}}(S_\sigma, \mathbb{C}).$$

其中 $\mathbb{C}$ 视作乘法幺半群. 上面自然地有一个代数簇的结构. 或者说, 等价地,

$$\mathcal{O}(U_\sigma) = \mathbb{C}[X^{S_\sigma}]$$

这里表示群环 $X^a X^b = X^{a+b}$.



考虑 $n = 1$, 锥形是 $\mathbb{R}_{\geq 0}$, 那么 $S_\sigma = \mathbb{Z}_{\geq 0}$. 对任何半群 X 都有

$$\mathrm{Hom}_{\text{幺半群}}(\mathbb{Z}_{\geq 0}, X) = X$$

即, $\mathbb{Z}_{\geq 0}$ 出发的同态只由 1 的像决定. 因此

$$U_\sigma = \mathbb{C} \quad 即 \quad \mathcal{O}(U_\sigma) = \mathbb{C}[X].$$

考虑 $n = 1$, 锥形是 $\{0\}$, 那么 $S_\sigma = \mathbb{Z}$. 对任何半群 X 都有

$$\mathrm{Hom}_{\text{幺半群}}(\mathbb{Z}, X) = X \text{ 中可逆元}$$

因此

$$U_\sigma = \mathbb{C}^\times. \quad 即 \quad \mathcal{O}(U_\sigma) = \mathbb{C}\big[X, \frac{1}{X}\big].$$

如果锥形 σ 有一个面 τ(差一维的面). 我们可以假设 $\tau = \{\lambda = 0\}$ 对某个 $\lambda \in S_\sigma$. 那么可以直接验证

$$S_\sigma = S_\sigma + \mathbb{Z}_{\geq 0}\lambda \subseteq S_\sigma + \mathbb{Z} \cdot \lambda = S_\tau.$$

所以 S_τ 出发的同态由其限制到 S_σ 上的同态唯一决定, 换句话说, 可以说

$$\mathrm{Hom}_{\text{幺半群}}(S_\tau, \mathbb{C}) = U_\tau \subseteq U_\sigma = \mathrm{Hom}_{\text{幺半群}}(S_\sigma, \mathbb{C})$$

实际上, 这是一个开浸入.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *但是反之, S_σ 上的同态并不总能延拓到 S_τ 上.*

我们说一把**扇子** (fan) 是一组严格 (有理) 锥形, 数量有限, 使得每个面都是组内的锥形, 两个组内的锥形的交还是组内的锥形. 对于一把扇子 Δ, 可以定义其**环面簇**

$$X(\Delta) = \bigcup_{\sigma \in \Delta} U_\sigma$$

其中包含是上段所说的. 这有 (Hausdorff 的) 代数簇的结构.

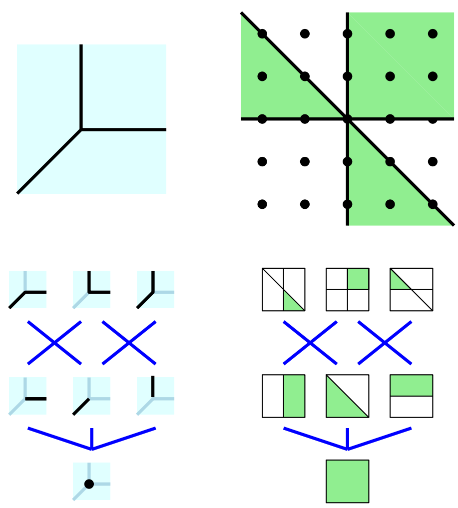
考虑下列扇子

$$\{负半轴, \{0\}, 正半轴\}$$

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_{\Game}(\mathbb{Z}_{\leq 0}, \mathbb{C}) \arrow[r, equal, "\text{-1 的像}"] & \mathbb{C} \\
\mathrm{Hom}_{\Game}(\mathbb{Z}, \mathbb{C}) \arrow[u] \arrow[d] \arrow[r, equal, "\text{1 的像}"] & \mathbb{C}^\times \arrow[u, "x \mapsto \frac{1}{x}"'] \arrow[d, "x \mapsto x"'] \\
\mathrm{Hom}_{\Game}(\mathbb{Z}_{\geq 0}, \mathbb{C}) \arrow[r, equal, "\text{1 的像}"] & \mathbb{C}
\end{tikzcd}$$

所以取并实际上是把 $\mathbb{C}$ 的无穷远点添上, 所以我们得到 $\mathbb{C}P^1$.

习题 1. *考虑平面上分出的三块区域. 证明得到的环面簇是 $\mathbb{C}P^2$.*



[提示：会算出

$$\begin{tikzcd}
\mathbb{C}^2 & & \mathbb{C}^2 & & \mathbb{C}^2 \\
\mathbb{C}\times\mathbb{C}^\times \arrow[u] \arrow[urr] & & \mathbb{C}\times\mathbb{C}^\times \arrow[ull] \arrow[urr] & & \mathbb{C}\times\mathbb{C}^\times \arrow[ull] \arrow[u] \\
& & \mathbb{C}^\times\times\mathbb{C}^\times \arrow[ull] \arrow[u] \arrow[urr] & &
\end{tikzcd}$$

但是这个里面的映射得好好算一下．]

1.2 几何性质

1. 环面作用.

对于一个锥形 σ, 对应 $S_\sigma \subseteq \mathbb{Z}^n$. 在

$$U_\sigma = \mathrm{Hom}_{\Game}(S_\sigma, \mathbb{C})$$

上有 $\mathrm{Hom}_{\Game}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{C}) \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ 显然的群作用

$$\begin{aligned} a &\in \mathrm{Hom}_{\Game}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{C}), \\ \varphi &\in \mathrm{Hom}_{\Game}(S_\sigma, \mathbb{C}) \end{aligned} \qquad (a\cdot\varphi)(x) = a(x)\varphi(x).$$

例如当 $\sigma = \{0\}$ 时

$$\begin{gathered} \sigma_0 = \{0\} \qquad S_\sigma = \mathbb{Z}^n \\ U_\sigma = \mathrm{Hom}_{\Game}(\mathbb{Z}^n, \mathbb{C}) = (\mathbb{C}^\times)^n \end{gathered}$$

上面的作用就是自然的左乘作用.

一般地, 在一把扇子 Δ 上, 对应的环面簇 $X(\Delta)$ 也有 $(\mathbb{C}^\times)^n$ 的群作用. 且此时 $U_{\{0\}} \cong (\mathbb{C}^\times)^n$ 是一个稠密开集, 在上面的作用恰好是左乘作用.

---

2. 不动点

考虑一把扇子 Δ. 对于一个锥形 $\sigma \in \Delta$, 如果 σ 是满维数的, 那么记

$$x_\sigma(p) = \begin{cases} 1 & p = 0 \\ 0 & p \neq 0 \end{cases} \in U_\sigma = \mathrm{Hom}_{\Game}(S_\sigma, \mathbb{C})$$

因为此时 S_σ 没有元素可逆 (严格性).

全体

$$\{x_\sigma : \sigma \in \Delta \text{ 满维数}\}$$

就是所有 T 的不动点.

---

3. 极限点

一般地, 对于锥形 $\tau \in \Delta$, 我们定义

$$x_\tau(p) = \begin{cases} 1 & p \in \tau^\perp \\ 0 & p \in S_\tau \setminus \tau^\perp \end{cases} \in \mathrm{Hom}_{\Game}(S_\tau, \mathbb{C})$$

这里 $\tau^\perp = \{p \in \mathbb{R}^n : \langle \tau, p\rangle = 0\}$. 这是一个半群同态因为 S_τ 在 $\tau^\perp$ 一侧,

$x+y$	(τ 上)	($\tau^\perp$ 一侧)
($\tau^\perp$ 上)	($\tau^\perp$ 上)	($\tau^\perp$ 一侧)
($\tau^\perp$ 一侧)	($\tau^\perp$ 一侧)	($\tau^\perp$ 一侧)

+	1	0
1	1	0
0	0	0

对于 $v \in \mathbb{Z}^n \subseteq \mathbb{R}^n$, 我们定义 $\lambda_v(z) \in U_{\{0\}} \subseteq X(\Delta)$ 为

$$(\lambda_v(z))(p) = z^{\langle v, p\rangle}.$$

那么此时

$$\lim_{z\to 0} \lambda_v(z) = x_\tau$$

其中 τ 表示 v 所在的最小的锥形 (即, 在这个锥形的相对内部).

这是因为在 U_τ 上, 点 λ_v 享有相同的表达式. 回忆,

$$\lim_{z\to 0} z^n = \begin{cases} 0 & n > 0 \\ 1 & n = 0 \\ \text{不存在} & n < 0 \end{cases}$$

v 落在 τ 相对内部的条件是说 $p \in S_\tau$ 和 v 垂直就和整个 τ 垂直.

---

4. 轨道

对于一把扇子 $\Delta \subseteq \mathbb{R}^n$, 其每条 $T = (\mathbb{C}^\times)^n$ 轨道都经过唯一的一个上面定义的 x_τ. 轨道可以直接写出来

$$T\cdot x_\tau = \left\{ \lambda \in U_\tau : \begin{array}{l} \lambda(\tau^\perp) \in \mathbb{C}^\times \\ \lambda(S_\tau \setminus \tau^\perp) = 0 \end{array} \right\} \cong \mathrm{Hom}_{\text{群}}(\tau^\perp \cap S_\tau, \mathbb{C}^\times).$$

这里 $\tau^\perp = \{p \in \mathbb{R}^n : \langle \tau, p\rangle = 0\}$.

因此轨道的维数

$$\dim T\cdot x_\tau = \tau \text{ 的余维数}.$$

且

$$\overline{T\cdot x_\sigma} = \bigcup_{\tau \geq \sigma} T\cdot x_\tau \qquad U_\sigma = \bigcup_{\tau \leq \sigma} T\cdot x_\tau.$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ *Morse* 理论的类比. 每个点 $x \in X(\Delta)$, 考虑往一个 “方向”$v \in \mathbb{Z}^n$ 处作用 $\lambda_v(z)\cdot x$. 假设下列极限存在

$$\lim_{z\to 0} \lambda_v(z)x \qquad \lim_{z\to\infty} \lambda_v(z)x.$$

那么他们都是不动点. 但是其中一个稳定, 一个不稳定.

---

5. 紧致性

对于一把扇子 Δ, 对应的环面簇 $X(\Delta)$. 那么

$$X(\Delta) \text{ 紧致} \iff \boxed{\Delta \text{ 铺满了整个 } \mathbb{R}^n.}$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 一般地, 假如有 $\mathbb{Z}^n$ 和 $\mathbb{Z}^m$ 中的两把扇子 Δ_1 和 Δ_2. 且 $\varphi : \mathbb{Z}^n \to \mathbb{Z}^m$ 把任何 Δ_1 中锥形的像映到 Δ_2 的某

个锥形里,

$$\begin{array}{c} \sigma_1 \xrightarrow{\varphi} \sigma_2 \\ \Downarrow \\ S_{\sigma_1} \xleftarrow{\varphi^*} S_{\sigma_2} \\ \Downarrow \\ U_{\sigma_1} = \mathrm{Hom}_{\circlearrowleft}(S_{\sigma_1}, \mathbb{C}) \xrightarrow{\varphi} \mathrm{Hom}_{\circlearrowleft}(S_{\sigma_2}, \mathbb{C}) = U_{\sigma_2} \end{array}$$

这诱导了 $X(\Delta_1) \to X(\Delta_2)$, 此时

$X(\Delta_1) \to X(\Delta_2)$ 逆紧 $\Longleftrightarrow$ $\boxed{\Delta_2 \text{ 在 } \varphi \text{ 下的原像被 } \Delta_1 \text{ 铺满.}}$

---

6. 光滑性

对于一个锥形 σ, 对应的仿射环面簇 U_σ. 那么

U_σ 光滑 $\Longleftrightarrow$ 存在 $v_1, \ldots, v_k \in \mathbb{Z}^n$ 使得
$$\sigma = \mathbb{R}_{\geq 0} v_1 + \cdots + \mathbb{R}_{\geq 0} v_k,$$
且 $v_1, \ldots, v_k$ 可以延拓为 $\mathbb{Z}^n$ 的一组基.

在此时,

$$S_\sigma \cong \mathbb{Z}_{\geq 0}^k \oplus \mathbb{Z}^{n-k}.$$

所以

$$U_\sigma = \mathbb{C}^k \times (\mathbb{C}^\times)^{n-k}.$$

注意 1 很多情况都不是光滑的.

1. 考虑四个向量 $(\pm 1, \pm 1, 1)$ 的非负线性组合, 这是三维却必须用四个向量生成.

2. 平面上考虑 $(1,2)$ 和 $(1,5)$ 的非负线性组合, 因为 $\det \left(\begin{smallmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 5 \end{smallmatrix}\right) \neq \pm 1$, 所以也不是光滑的.

---

7. 爆破

考虑一个满维数的锥形 σ, 在内部选择一条射线, 这把 σ 分成 n 份满维数的锥形 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$.

σ	$\sigma = \sigma_1 \cup \cdots \cup \sigma_n$	$\sigma_1, \cdots, \sigma_n$, $\sigma_1 \cap \sigma_2, \cdots$
S_σ	$S_\sigma = S_{\sigma_1} \cap \cdots \cap S_{\sigma_n}$	$S_{\sigma_1}, \cdots, S_{\sigma_n}, S_{\sigma_1 \cap \sigma_2}, \cdots$
U_σ	?	$U_{\sigma_1}, \cdots, U_{\sigma_n}, U_{\sigma_1 \cap \sigma_2}, \cdots$

此时有映射

$$\bigcup U_{\sigma_i} \longrightarrow U_\sigma.$$

这是 T 等变的, 所以我们可以主要分析轨道 (上的代表点 x_τ).

不难发现

轨道	原像
$x_\sigma = T \cdot x_\sigma$	$\bigcup_{\sigma' \leq \sigma} T x_{\sigma'}$
$T \cdot x_\tau$	$T \cdot x_\tau \quad (\tau < \sigma)$

所以除了 x_σ 原像比较大, 其他点原像都是一个点.

如果 $\sigma_1, \ldots, \sigma_n$ 都光滑, 那么 $\bigcup_{\sigma' \leq \sigma} T x_{\sigma'} \cong \mathbb{C}P^{n-1}$, 且上面的

$$\bigcup U_{\sigma_i} \longrightarrow U_\sigma$$

恰是在 x_σ 处的爆破.

习题 1. 证明曲面环面簇 *(即二维的环面簇)*, 一定可以通过爆破变成光滑的. [提示: 只需要考虑一个锥形. 这是 `Eulid` 算法, 通过一个 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ 可以假设其中一个向量是 $(0,1)$, 另一个是 $(n,-d)$, 其中 $n > d > 0$. 这时用 $(1,0)$ 分割. 假设 $n = kd + r$, 其中 $0 < r < d$, 那么通过 $\mathrm{GL}_2(\mathbb{Z})$ $\left(\begin{smallmatrix} 1 & n \\ 0 & -d \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ 0 & -d \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 1 & r \\ 1 & r-d \end{smallmatrix}\right) \longrightarrow \left(\begin{smallmatrix} 0 & r \\ 1 & r-d \end{smallmatrix}\right)$.]