几何拓扑自驾游

熊锐

2021 年 1 月 3 日

1 上同调速成

本节介绍如何理解和使用奇异 (singular) 上同调 (cohomology) 群.

对于拓扑空间 X, 上同调群 $H^*(X)$ 是 ____.

就像即使并不懂电脑的运行原理, 但是却可以使用电脑. 但是, **每多理解一点原理, 能做的事儿就多一点**.

本节大部分内容成立都是需要条件的, 通常会在提及之后的评注中给出.

实际上, 代数拓扑的使用原则是

$$\boxed{\text{绝不使用定义直接计算}}.$$

我们永远是发展足够多的理论, 再用刻画让计算成功.

代数拓扑在组合中的相当于提供另一种计数工具. 其有行之有效原因在于, 相当一部分计算其实可以约化成计算集合. 如果我们相信不同计数方法计算数目给出相同结果, 那我们也应该相信不同拓扑方法计算同调群会给出相同结果.

1.1 胞腔

我们在本小节需要下同调 $H_*(X)$ 和相对下同调 $H_*(X,Y)$, 其中 $Y\subseteq X$ 是一个子集.

记 n 维球面 (sphere) 和 n 维圆盘 (disk) 为

$$S^n=\{(x_1,\ldots,x_{n+1})\in\mathbb{R}^{n+1}:x_1^2+\cdots+x_{n+1}^2=1\};$$

$$D^n=\{(x_1,\ldots,x_n)\in\mathbb{R}^n:x_1^2+\cdots+x_n^2\le 1\}.$$

注意 $S^{n-1}\subseteq D^n$ (上标是维数).

需要知道的基本事实是

	0	1	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$
$H_*(S^n)$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$
$H_*(D^{n+1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$H_*(D^{n+1},S^n)$	0	0	$\cdots$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$

最后一行来自于长正合序列. 可以这样记:

D^{n+1} 相对 $S^n=D^{n+1}/S^n$ 相对于缩点 $=S^{n+1}$ 相对于一个点.

这里 D^{n+1}/S^n 表示把 D^{n+1} 上的 S^n 粘成一点 (缩点).

上同调其实是一样的

	0	1	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$
$H^*(S^n)$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$
$H^*(D^{n+1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$H^*(D^{n+1},S^n)$	0	0	$\cdots$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$

我们说一个拓扑空间 X 是 **CW 复形 (CW complex)**, 如果 X 是由圆盘 D^n 按照维数顺序粘结而成.

准确一点: X^0 是一些离散的点; X^1 是往 X^0 上粘 $D^1=$ 区间$[0,1]$, 使得 $0,1$ 粘到 X^0 上; X^2 是往 X^1 上粘 D^2, 使得 D^2 的边界 S^1 粘到 X^1 上; 以此类推.

这样依次得到的 X^n 叫作 X 的 **骨架 (skeleton)**, 每个黏上去的 D^n 叫作一个 n 维胞腔.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *D^n 的边界 S^{n-1} 必须落在低一维的 "骨架"X^{n-1} 上. (不能不粘)*

$\boxed{\text{注意 2}}$ *D^n 的内部到 X 是单射. (不能粘)*

$\boxed{\text{注意 3}}$ *严格来说, CW 的复形的拓扑是弱拓扑, 即使得每个胞腔的粘结映射连续的最弱拓扑. (C=cellular, W=weak) 其实 CW 复形的拓扑有很多点集拓扑的良好性质, 请见 [Bredon].*

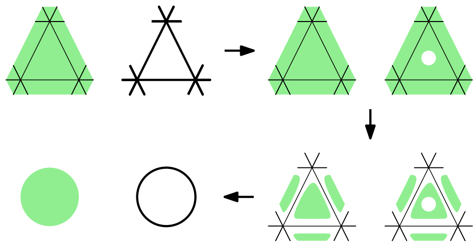
如果 X 有 CW 复形的结构, 记 X^n 是 n 维的骨架. 那么 $X^0\subseteq X^1\subseteq X^2\subseteq\cdots$. 我们可以考虑相对同调 $H_*(X^i,X^{i-1})$ 和相对上同调 $H^*(X^i,X^{i-1})$.

有下面这个重要事实

$$\boxed{H^*(X^n,X^{n-1})=\begin{cases}\text{以所有 n-维胞腔为基生成的自由 Abel 群.} & *=n\\ 0 & *\neq n.\end{cases}}$$

这里 $X^{-1}=\varnothing$. 下同调结果是一样的. 请对比 $H_*(D^n,S^{n-1})$. 这是**切除定理 (excision)** 的一个应用.

证明如下



(图中全是三角形, 但是 CW 复形不一定要求是三角形)

例如 S^n 是一个 CW 复形. 因为我们可以把 D^n 的边界 S^{n-1} 整个粘到一个点上得到 S^n. 最简单的胞腔取法是

维数	0	1	$\cdots$	$n-1$	n
胞腔数量	1	0	$\cdots$	0	1
骨架	点	点	$\cdots$	点	S^n
$H_n(X^n, X^{n-1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$

例如 D^n 本身也是一个 CW 复形. 最简单的胞腔取法是

维数	0	1	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
胞腔数量	1	0	$\cdots$	1	1	1
骨架	点	点	$\cdots$	点	S^{n-1}	D^n
$H_n(X^n, X^{n-1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

下面假设 X 是 CW 复形, 记 $C_n = H_n(X^n, X^{n-1})$. 那么存在一条复形

$$\cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

使得其同调群同构于 $H_*(X)$. 记 $C^n = H^n(X^n, X^{n-1})$. 那么存在一条复形

$$0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^n \longrightarrow \cdots$$

使得其上同调群同构于 $H^*(X)$. 这被称为**胞腔 (cellular) 同调**.

这个定理本质上只是同调代数的追图, 见 [姜].

注意 1 *在一些 "正则" 的情况, 这个复形之间的微分 ∂ 是可以 "看出来" 的. 例如, 当 X 是多面体的情况, n 维抱歉就是一个 n 维面, 那么*

$$\partial(\text{某个 } n \text{ 维面}) = \sum \text{这个面的 } n-1 \text{ 维边}.$$

这里的 "和" 需要根据预先指定的定向决定正负.

注意 2 *有一些书喜爱使用* **单纯复形 (simplicial complex)**, *此时要任何一个单纯形 (三角形) 每条边都不黏在一起不相交, 因此往往简单的图形需要多次重分才能做到. 但是这样的好处是可以计算乘法结构.*

注意 3 *在 [Hatcher] 中, 他还定义了 Δ 复形, 这时全部都是单纯形 (三角形), 但是允许一个单纯形内部的边相交. 但是实际上三角形, 四边形, 五边形, 甚至二边形都是可以的.*

如果对于紧致的 Hausdorff 空间 X(例如流形), 如果有一个**分层 (stratification)**

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X$$

使得每个 X_k 都是闭的, 且 $X_k \setminus X_{k-1} \cong \mathbb{R}^{a_k}$ 对某个 a_k. 我们称这个分层给出一个胞腔结构. 我们也称 $X_k \setminus X_{k-1}$ 是一个 a_k 维胞腔.

记 $X^k = \bigcup_{\dim X_i \le k}$, 那么同样也有

$$H^*(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \text{以所有 n-维胞腔为基生成的自由 Abel 群}. & * = n \\ 0 & * \neq n. \end{cases}$$

所以一切照旧.

对于线性空间 $V = \mathbb{C}^n$, 一个**旗 (flag)** 是一串子线性空间

$$V^0 \subseteq V^1 \subseteq \cdots \subseteq V^n$$

使得 $\dim V^i = i$. 此时为了区别也叫**完全 (complete) 旗**. 考虑 $\mathcal{F}\ell(n)$ 为 n 维复向量的所有旗 (flag) 组成的集合, 这可以被赋予流形和代数簇的结构. 我们称 $\mathcal{F}\ell(n)$ 为**旗流形 (flag manifold)** 或**旗簇 (flag variety)**.

记 $G = \mathrm{GL}_n$, B 是全体上三角矩阵. 将每一个 $x \in \mathrm{GL}_n$ 视作 n 个线性无关的列向量 $(x_1, \ldots, x_n)$, 我们得到一个其**张成的旗** $\operatorname{span} x$

$$0 \subseteq \operatorname{span}(x_1) \subseteq \operatorname{span}(x_1, x_2) \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_n).$$

这定义了一个 (连续) 映射 $\operatorname{span} : \mathrm{GL}_n \to \mathcal{F}\ell(n)$.

通过线性代数, 不难发现 span 是满射, 且

$$\operatorname{span} x = \operatorname{span} y \iff x = yb \text{对某个 } b \in B.$$

换言之, $G/B \to \mathcal{F}\ell(n)$ 是双射 (同胚).

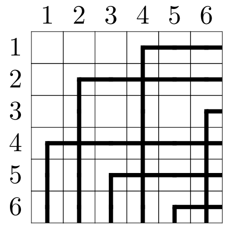
对于置换 $w \in \mathfrak{S}_n$, 记 w 是对应的置换矩阵, 即使得 $w(e_i) = e_{w(i)}$, 其中 e_i 是标准基. 也就是在 $i = 1, \ldots, n$ 位置 $(i, w(i))$ 上是 1, 其他位置是 0 的矩阵.

利用 Gauss 消元法, 可以得到**Bruhat 分解**

$$G = \bigcup_{w \in \mathfrak{S}_n} BwB \qquad (\text{无交并}).$$

其实就是打洞. 实际上这是 G 的双陪集分解. 等价地, 这说明 B 在 G/B 上作用的轨道与对称群元素一一对应. 其中 BwB/B 被称为**Schubert 胞腔**.

按下图表定义 U_w



$\binom{123456}{426135}$

$$U_w = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 0 & \mathbb{C} & 0 & \mathbb{C} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

那么利用打洞的技巧 (见 [Fulton]), 可以得到

$$\mathrm{span} : U_w \to BwB/B$$

是双射 (同胚).

用 ℓ 表示逆序数. 于是 $BwB/B \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$, 换句话说拓扑维数是 $2\ell(w)$. 因为 U_w 中 "$\mathbb{C}$" 的数目是 Rothe 图中 ╋ 的的数目.

现在我们考虑 $X^i = \bigcup_{2\ell(w)\le i} BwB/B$. 这给出 $\mathcal{F}\ell(n)$ 的一个胞腔结构. 但是因为我们**没有奇数维的胞腔**, 所以胞腔复形将形如

$$0 \to C_0 \to 0 \to C_2 \to 0 \to C_4 \to \cdots;$$

$$\cdots \to C_4 \to 0 \to C_2 \to 0 \to C_0 \to 0.$$

所以 $H^i(\mathcal{F}\ell(n)) = C^i$, $H_i(\mathcal{F}\ell(n)) = C_i$.

回忆 C_{2i}(和 C^{2i}) 是维数为 $2i$ 的胞腔生成的自由 Abel 群. 我们用 $[BwB/B]$ 记对应的基. 注意: $\dim[BwB/B] = 2\ell(w)$.

于是我们得到了

$$H^*(G/B) = \text{以 } \{[BwB/B]\}_{w\in\mathfrak{S}_n} \text{ 为基的自由 Abel 群}$$

$$H_*(G/B) = \text{以 } \{[BwB/B]\}_{w\in\mathfrak{S}_n} \text{ 为基的自由 Abel 群}$$

注意 1 *我们需要一则事实, $\mathcal{F}\ell(n)$ 是紧致的 (完备的). 这是因为紧 Lie 群 $U_n \subseteq \mathrm{GL}_n$ 到 $\mathcal{F}\ell(n)$ 是满射 (线性代数).*

注意 2 *我们还需要一则事实, 每一个 BwB/B 的闭包都是一些 BuB/B 的并. 这是因为 B 作用, 所以轨道的闭包还是轨道的并.*

实际上 $BuB/B \subseteq \overline{BwB/B}$ 当且仅当在 **Bruhat order** *下 $u \le w$.*

注意 3 *实际上 Schubert 胞腔也给出 CW 复形意义上的胞腔. 这可以用 Morse 理论的类比 Białynicki--Birula 定理得到, 请看 [CG] 第二章某一节.*

习题 1. 验证 $G/B \to \mathcal{F}\ell(n)$ 是双射. [提示: 利用基的延拓定理证明满射, 再证明正文中提到的 $\mathrm{span}\, x = \mathrm{span}\, y$ 的等价条件.]

习题 2. 验证 $U_w \to BwB/B$ 是双射. [提示: 首先证明 U_w 在 $G \to G/B$ 下的像落在 BwB/B 内; 对于每个 $x \in G$, 证明 xB/B 一定等于某个 yB/B 对某个 $y \in U_w$, 这需要从最后一行开始打洞; 最后证明这是单射, 这需要从最后一行开始比起.]

习题 3. 证明 $\dim G/B = 2\max_{w\in\mathfrak{S}_w} \ell(w)$. 利用 G/B 光滑的事实说明只有唯一的元素取到最大值.

习题 4. 记 $[n] = \frac{\mathbf{q}^n-1}{\mathbf{q}-1}$, $[n]! = [n]\cdot[n-1]\cdot\cdots\cdot[1]$. 经典的计数表明 $[n]!$ 是有限域 $\mathbb{F}_{\mathbf{q}}$ 上 n 维线性空间中旗的数量. 证明这还是 $H^*(G/B)$ 的 *Hilbert* 多项式

$$[n]! = \sum_k \mathrm{rank}\, H^{2k}(G/B)\mathbf{q}^k.$$

[提示: 在有限域上也有 `Schubert` 胞腔, 这时 $BwB/B \cong \mathbb{F}_{\mathbf{q}}^{\ell(w)}$, 这贡献 $\mathbf{q}^{\ell(w)}$ 这么多元素, 而在 $\mathbb{C}$ 上的情况, 这时 $BwB/B \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$ 在 `Hilbert` 多项式中贡献 $\mathbf{q}^{\ell(w)}$.]

习题 5. 考虑**复射影空间** $\mathbb{C}P^n$ 为 $n+1$ 维空间所有的 1 维子空间. 将 $\mathbb{C}P^n$ 写成一些 $\mathbb{C}^{2i}$ 的并, 并且证明 $H^{2k+1}(\mathbb{C}P^n) = 0$, 且

	0	2	$\cdots$	$2n$	$2n+1$	$\cdots$
$H^*(\mathbb{C}P^n)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\cdots$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$

[提示: 对非零向量 $(x_0,\ldots,x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$, 记 $[x_0:\cdots:x_n]$ 为对应的 1 维子空间. 换言之 $[x_0:\cdots:x_n] = [y_0:\cdots:y_n]$ 当且仅当 $(x_0,\ldots,x_n) = \lambda(y_0,\ldots,y_n)$ 对某个 $\lambda \in \mathbb{C}^\times$. 对 $i = 0,\ldots,n$, 记 $A^i = \{[\cdots 0 : 1 : \underbrace{\mathbb{C}:\cdots:\mathbb{C}}_{i}]\}$.]

1.2 推出与拉回

令 $X \xrightarrow{f} Y$ 是一个连续映射, 那么诱导了 **拉回 (pull back)**

$$H^*(X) \xleftarrow{f^*} H^*(Y).$$

注意 1 这是一个齐次映射.

$$\alpha \in H^n(Y) \quad \Longrightarrow \quad f^*(\alpha) \in H^n(X).$$

注意 2 这是一个代数同态.

$$f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta).$$

令 X 是紧致光滑定向流形. 那么有 **Poincaré 对偶**

$$H^*(X) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(X) \qquad * + \bullet = \dim X.$$

注意 1 这个最经典的, 也最容易理解的是组合的解释, 见 *[姜]*. 现代通行的做法是用 *cap* 积 $\frown$ 给出具体的映射. 更进一步还可以用层的语言改写 *(与对偶层对偶)*.

注意 2 这个同构需要选定一个定向, 所以区分 "可定向 *(orientable)*" 和 "定向 *(oriented)*".

假设 X 和 Y 都是紧致光滑定向流形. 令 $X \xrightarrow{f} Y$ 是一个连续映射, 那么可以定义 **推出 (push forward)**

$$H^*(X) \xrightarrow{f_*} H^\dagger(Y),$$

其中 $\dim X - * = \dim Y - \dagger$, 使得下图交换

$$\begin{tikzcd} H^*(X) \arrow[r] \arrow[d, "对偶"'] & H^\dagger(Y) \arrow[d, "对偶"] \\ H_\bullet(X) \arrow[r] & H_\bullet(Y) \end{tikzcd}$$

即, 先对偶到下同调, 推出, 再对偶回上同调.

注意 1 这是不是一个齐次映射.

但是如果我们对 $\alpha \in H^*(X)$, 记 $\operatorname{codim}\alpha = \dim X - *$, 那么 f_* 保持 codim.

注意 2 这是不是一个代数同态. 但是对于 $\alpha \in H^*(X), \beta \in H^*(Y)$, 有 **projective formula**

$$f^*(f_*(\alpha) \smile \beta) = \alpha \smile f^*(\beta).$$

这是一个 "模同态", 因为通过 f^*, $H^*(X)$ 是 $H^*(Y)$-代数, 从而是 $H^*(Y)$-模.

注意 3 其实我们不需要 X 和 Y 都紧致, 只需要 f 是**逆紧的 (proper)** 即可定义; 实际上最需要的是当 f 是一个纤维丛, 且纤维是紧致光滑定向流形.

注意 4 对于一个 "拉回方阵".

即 $\square = \{(y, z) \in Y \times Z : f(y) = g(z)\}$. 从 $H^*(Y)$ 到 $H^*(Z)$ 的两个映射

$$g^* \circ f_* = F_* \circ G^*$$

$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

令 X 是一个紧致流形, 设 $[X]$ 使得

$$单位元\ 1 \in H^0(X) \xleftrightarrow{对偶} [X] \in H_n(X)$$

我们称 $[X]$ 是 X 的 **基本类 (fundamental class)** .

注意 1 如果给 X 一个三角剖分, 即把 X 分割成一些单纯形, 那么 $H_n(X)$ 是这些单纯形的和 *(事先选好定向)* 的类. 换句话说,

$$\boxed{[X] = \text{“同调意义下” 的 } X \text{ 本身.}}$$

令 Y 是一个紧致流形, X 是一个嵌入闭子流形. 令 $i : X \to Y$ 是包含映射. 定义 X 在 Y 中的 **fundamental class** (滥用记号)

$$[X] = i_*(1) \in H^*(Y),$$

请注意!

$$\boxed{\deg[X] = \operatorname{codim} X = \dim Y - \dim X \text{ 是 } X \text{ 的余维数.}}$$

注意 1 请看

$$\begin{array}{ccccc} 1 \in & H^0(X) & \longrightarrow & H^{\operatorname{codim} X}(Y) & \ni [X] \\ & \downarrow 对偶 & & \downarrow 对偶 & \\ [X] \in & H_{\dim X}(X) & \longrightarrow & H_{\dim X}(Y) & \ni (\cdots) \end{array}$$

所以

$$\boxed{[X] = \text{“}Y \text{ 的同调意义下” 的 } X \text{ 本身.}}$$

注意 1 对于代数簇, 即使子簇 X 不是光滑的, 我们也可以在 $H^*(Y)$ 中定义**代数闭链 (algebraic cycles)** $[X]$. 但是至少需要是闭的. 使用的方法是 *Borel–Moore* 同调, 请见 *[Fulton]*.

注意 2 直接把代数闭链拿出来商掉 "代数" 同伦, 这就是**周环 (Chow ring)** 的定义. 只有 X 是光滑的时候, X 的周 "环" 才是环.

注意 3 一般来说上同调不一定总是由代数闭链生成的, 这个是被 *well-studied*, 更广的配边理论也对此有研究.

—下面我们用 fundamental classes 重新理解上同调—

以下内容不尽严格. 严格地, 要加何种条件应该看 [Fulton], 周环的版本应该看 [3264]. 但是拿来用基本是没问题的, 而且实际上用式性类等工具能很大程度上避免这类问题.

---

1. **Cup 积**

$$[A] \smile [B] = [A \cap B]$$

如果 A 和 B **直交 (transversal)**; 这需要计算定向来决定符号.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *但是如果是代数簇, 定向永远没有问题.*

$\boxed{\text{注意 2}}$ *如果没法 "move" 到直交的位置, 那么 cup 积结果是 0.*

---

2. **拉回** $(f: X \to Y)$

$$f^*[B] = \begin{cases} [f^{-1}(B)] & \text{如果维数正确} \\ 0 & \text{如果维数不正确} \end{cases}$$

如果 $B \subseteq Y$, 使得 $f^{-1}(B)$ 是闭子流形. (这不严格)

所以

$$\boxed{\begin{array}{c} f^*(\alpha \smile \beta) \\ = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta) \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{同调版本的} \\ f^{-1}(A \cap B) \\ = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{array}}$$

---

3. **推出** $(f: X \to Y)$

$$f_*[A] = \begin{cases} [f(A)] & \text{如果维数正确} \\ 0 & \text{如果维数不正确} \end{cases}$$

如果 $A \subseteq X$, 使得 $f(A)$ 是闭子流形. (这也不严格)

所以

$$\boxed{\begin{array}{c} \text{projective formula} \\ f^*(f_*(\alpha) \smile \beta) \\ = \alpha \smile f^*(\beta) \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{同调版本的} \\ f^{-1}(f(A) \cap B) \\ = A \cap f^{-1}(B) \end{array}}$$

对于 $i = 1, \ldots, n-1$. 考虑

$$P_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix}$$

这比上三角矩阵群 B 在 $(i, i+1)$ 位置多一个自由度.

齐次流形 G/B 和 $\mathcal{F}\ell(n)$ 同胚. 那么 G/P 呢?

$$\begin{aligned} G/B &\cong \left\{V^0 \subseteq \cdots \subseteq V^{i-1} \subseteq V^i \subseteq V^{i+1} \subseteq \cdots \subseteq V^n\right\} \\ G/P &\cong \left\{V^0 \subseteq \cdots \subseteq V^{i-1} \qquad\quad \subseteq V^{i+1} \subseteq \cdots \subseteq V^n\right\} \end{aligned}$$

且自然映射

$$G/B \longrightarrow G/P$$

就是 "把 complete flags 中维数为 i 的子空间去掉".

考虑

$$\begin{aligned} P_i/B &= \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix} \Big/ \begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix} = \mathcal{F}\ell(2) = \mathbb{C}P^1 \end{aligned}$$

最后 $\mathcal{F}\ell(2) = \mathbb{C}P^1$ 是因为 $\mathbb{C}^2$ 中的旗实际上由维数为 1 的子空间决定.

另外注意到 $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$ 是 Riemann 球.

$*$	0	1	2	3	4	$\cdots$
$H^*(P_i/B)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\cdots$

让我们考虑自然映射 $G/B \xrightarrow{\pi} G/P_i$. 我们定义 **Demazure operator** 为

$$\partial_i: \quad H^*(G/B) \xrightarrow[\pi_*]{\text{推出}} H^{*-2}(G/P) \xrightarrow[\pi^*]{\text{拉回}} H^{*-2}(G/B).$$

这里的 $2 = \dim G/B - \dim G/P = \dim P/B$.

用旗的语言,

$$\boxed{\text{推出 } \pi_*} = \boxed{\begin{array}{c} \text{同调地} \\ \text{“把维数 } i \text{ 的子空间 } V^i \text{ 去掉”} \end{array}}$$

$$\boxed{\text{拉回 } \pi_*} = \boxed{\begin{array}{c} \text{同调地} \\ \text{“把 } V^{i-1} \subseteq V^{i+1} \text{ 之间全部} \\ i \text{ 维子空间加上”} \end{array}}$$

令 $B^- = w_0 B w_0$ 为下三角矩阵群, 其中 w_0 是最长元 $\binom{1 \cdots n}{n \cdots 1} \in \mathfrak{S}_n$. 那么我们记 Σ_w 为

$$[BwB/B] \text{作为上同调胞腔} = [\overline{B^- wB/B}] \text{作为基本类}.$$

这个等号实际上是通过计算下同调的相交证明的, 请见 [Fulton]. 于是

$$H^*(G/B) = \text{以 } \{\Sigma_w\}_{w \in \mathfrak{S}_n} \text{ 为基的自由 Abel 群}$$

令 $s_i = (i, i+1) \in \mathfrak{S}_n$ 是 i 和 $i+1$ 的对换. 注意到 $P_i = B \cup Bs_iB$.

下面我们可以计算 Demazure operator 在 Σ_w 上的作用. 根据定义

$$
\begin{aligned}
\partial_i(\Sigma_w) &= \pi^*(\pi_*(\Sigma_w)) = \pi^*(\pi_*([\overline{B^-wB/B}])) \\
&= \delta_{\text{维数正确}} \cdot [\pi^{-1}(\pi(\overline{B^-wB/B})] \\
&= \delta_{\text{维数正确}} \cdot [\pi^{-1}(\overline{B^-wP/P})] \\
&= \delta_{\text{维数正确}} \cdot [\overline{B^-wB/B \cup B^-ws_iB/B}] \\
&= \begin{cases} [\overline{B^-ws_iB/B}], & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1, \\ 0, & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1. \end{cases} \\
&= \begin{cases} \Sigma_{ws_i}, & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1, \\ 0, & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1. \end{cases}
\end{aligned}
$$

这里实际上用到了 **Tits system**.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 实际上我们已经可以证明在任何系数下 *Demazure operator* 满足幂零**辫子关系 (braid relation)**. 但是之后我们会建立多项式版本的联系, 那时将可以直接证明.

习题 1. 哪条集合论的事实的上同调版本是 $g^* \circ f_* = F_* \circ G^*$? ［提示: $F(G^{-1}(A)) = g^{-1}(f(A))$. ］

习题 2. 根据 *Poincaré* 对偶,

$$H^*(\mathbb{C}P^n) \otimes H^{2n-*}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\smile} H^{2n}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$$

构成完美配对. 取 H 是 $\mathbb{C}P^n$ 中任意一个超平面, 记 $x = [H] \in H^*(\mathbb{C}P^n)$. 证明 $H^*(\mathbb{C}P^n)$ 作为环同构于 $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$, 其中 $\deg x = 2$. ［提示: 显然 H 的 (实) 余维数是 2. 注意到不同超平面给出相同的基本类, 所以我们直接计算相交知道 $x^n = 1 \cdot [\text{点}] \neq 0$. 要说明 $H^*(\mathbb{C}P^n)$ 是由 x 生成的, 我们将 H 视为 $\mathbb{C}P^{n-1}$, 用 i^* 结合完美配对的事实归纳证明. ］

习题 3. 对于一般的 d 次超平面 $D \subseteq \mathbb{C}P^n$, 证明 $[D] = dx$, 其中 x 是超平面类. ［提示: 注意到因为 $H^2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}x$, 所以一定有一个整数 d' 使得 $[D] = d'x$. 注意到 D 与一条一般位置的直线交 d 个点, 而直线又可以写成 $n-1$ 个超平面的交, $d'x \cdot x^{n-1} = [D] \smile [H]^{n-1} = [D \cap H_1 \cap \cdots] = d \cdot [\text{点}] = dx^n$, 所以 $d = d'$. ］

习题 4. 请说明

$$\Sigma_w = [\overline{w_0Bw_0wB/B}] = [\overline{Bw_0wB/B}]$$

［提示: 因为可以在 GL_n 中找到一条从 1 通往 w_0 的道路, 从而构造一个同伦. ］

习题 5. 在 *[Fulton]* 中, 为了计算 *Demazure operators*, 他用了拉回方阵 $\begin{array}{ccc} \square & \to & G/B \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/B & \to & G/P \end{array}$, 证明这时 $\square$ 和下面的集合是双射.

$$\square = \left\{ \cdots \subseteq V^{i-1} \begin{array}{c} \subsetneq V_1^i \subsetneq \\ \subsetneq V_2^i \subsetneq \end{array} V^{i+1} \subseteq \cdots \right\}.$$

~~ ★★ **菜谱** ★★ ~~

—如何计算上同调?

1. 计算群结构.
   找胞腔结构, 计算他们的维数.
   胞腔复形, 计算上同调.
   没有奇数 $\Longrightarrow$ 复形平凡
2. 计算相交配对
   取两个维数相补的基本类
   移动到直交位置
   计算相交点的数目
3. 计算环结构
   取两个基本类, 求第三个基本类前系数
   通过完美配对, 变成计算三个基本类相交
   移动到直交位置, 计算相交点的数目

参考文献

- Hatcher. Algebraic Topology.
- Bredon. Geometry and Topology. GTM139.
- 姜伯驹. 代数拓扑.
- Fulton. Young Tableaux.
- Chriss, Ginzburg. Representation Theory and Complex Geometry.
- Eisenbud, Harris. 3264 and all that.

2 纤维丛与式性类