几何拓扑自驾游

熊锐

2021 年 1 月 20 日

Contents

1 上同调速成

本节介绍如何理解和使用奇异 (singular) 上同调 (cohomology) 群.

对于拓扑空间 X, 上同调群 $H^*(X)$ 是 ____.

就像即使并不懂电脑的运行原理, 但是却可以使用电脑. 但是, **每多理解一点原理, 能做的事儿就多一点**.

本节大部分内容成立都是需要条件的, 通常会在提及之后的评注中给出.

实际上, 代数拓扑的使用原则是

$$\boxed{\text{绝不使用定义直接计算}}.$$

我们永远是发展足够多的理论, 再用刻画让计算成功.

代数拓扑在组合中的相当于提供另一种计数工具. 其有行之有效原因在于, 相当一部分计算其实可以约化成计算集合. 如果我们相信不同计数方法计算数目给出相同结果, 那我们也应该相信不同拓扑方法计算同调群会给出相同结果.

1.1 胞腔

我们在本小节需要下同调 $H_*(X)$ 和相对下同调 $H_*(X,Y)$, 其中 $Y \subseteq X$ 是一个子集.

记 n 维球面 (sphere) 和 n 维圆盘 (disk) 为

$$S^n = \{(x_1,\ldots,x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \cdots + x_{n+1}^2 = 1\};$$

$$D^n = \{(x_1,\ldots,x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le 1\}.$$

注意 $S^{n-1} \subseteq D^n$ (上标是维数).

需要知道的基本事实是

	0	1	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$
$H_*(S^n)$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$
$H_*(D^{n+1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$H_*(D^{n+1},S^n)$	0	0	$\cdots$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$

最后一行来自于长正合序列. 可以这样记:

D^{n+1} 相对 $S^n = D^{n+1}/S^n$ 相对于缩点 $= S^{n+1}$ 相对于一个点.

这里 D^{n+1}/S^n 表示把 D^{n+1} 上的 S^n 粘成一点 (缩点).

上同调其实是一样的

	0	1	$\cdots$	$n-1$	n	$n+1$	$\cdots$
$H^*(S^n)$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$
$H^*(D^{n+1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	0	0	$\cdots$
$H^*(D^{n+1}, S^n)$	0	0	$\cdots$	0	0	$\mathbb{Z}$	$\cdots$

我们说一个拓扑空间 X 是**CW 复形 (CW complex)**, 如果 X 是由圆盘 D^n 按照维数顺序粘结而成.

准确一点: X^0 是一些离散的点; X^1 是往 X^0 上粘 $D^1 =$ 区间$[0,1]$, 使得 $0,1$ 粘到 X^0 上; X^2 是往 X^1 上粘 D^2, 使得 D^2 的边界 S^1 粘到 X^1 上; 以此类推.

这样依次得到的 X^n 叫作 X 的**骨架 (skeleton)**, 每个黏上去的 D^n 叫作一个 n 维胞腔.

注意 1 *D^n 的边界 S^{n-1} 必须落在低一维的 "骨架" X^{n-1} 上. (不能不粘)*

注意 2 *D^n 的内部到 X 是单射. (不能粘)*

注意 3 *严格来说, CW 的复形的拓扑是弱拓扑, 即使得每个胞腔的粘结映射连续的最弱拓扑. (C=cellular, W=weak) 其实 CW 复形的拓扑有很多点集拓扑的良好性质, 请见 [Bredon].*

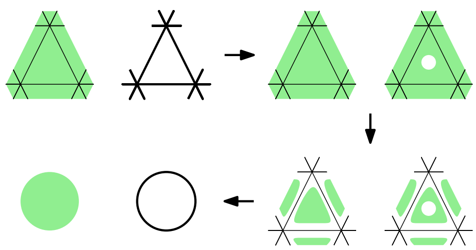
如果 X 有 CW 复形的结构, 记 X^n 是 n 维的骨架. 那么 $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \cdots$. 我们可以考虑相对同调 $H_*(X^i, X^{i-1})$ 和相对上同调 $H^*(X^i, X^{i-1})$.

有下面这个重要事实

$$\boxed{H^*(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \text{以所有 n-维胞腔为基生成的自由 Abel 群.} & * = n \\ 0 & * \neq n. \end{cases}}$$

这里 $X^{-1} = \varnothing$. 下同调结果是一样的. 请对比 $H_*(D^n, S^{n-1})$. 这是**切除定理 (excision)** 的一个应用.

证明如下



(图中全是三角形, 但是 CW 复形不一定要求是三角形)

例如 S^n 是一个 CW 复形. 因为我们可以把 D^n 的边界 S^{n-1} 整个粘到一个点上得到 S^n. 最简单的胞腔取法是

维数	0	1	$\cdots$	$n-1$	n
胞腔数量	1	0	$\cdots$	0	1
骨架	点	点	$\cdots$	点	S^n
$H_n(X^n, X^{n-1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$

例如 D^n 本身也是一个 CW 复形. 最简单的胞腔取法是

维数	0	1	$\cdots$	$n-2$	$n-1$	n
胞腔数量	1	0	$\cdots$	1	1	1
骨架	点	点	$\cdots$	点	S^{n-1}	D^n
$H_n(X^n, X^{n-1})$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

下面假设 X 是 CW 复形, 记 $C_n = H_n(X^n, X^{n-1})$. 那么存在一条复形

$$\cdots \longrightarrow C_n \longrightarrow \cdots \longrightarrow C_1 \longrightarrow C_0 \longrightarrow 0$$

使得其同调群同构于 $H_*(X)$. 记 $C^n = H^n(X^n, X^{n-1})$. 那么存在一条复形

$$0 \longrightarrow C^0 \longrightarrow C^1 \longrightarrow \cdots \longrightarrow C^n \longrightarrow \cdots$$

使得其上同调群同构于 $H^*(X)$. 这被称为**胞腔 (cellular) 同调**.

这个定理本质上只是同调代数的追图, 见 [姜].

注意 1 *在一些 "正则" 的情况, 这个复形之间的微分 ∂ 是可以 "看出来" 的. 例如, 当 X 是多面体的情况, n 维抱歉就是一个 n 维面, 那么*

$$\partial(\text{某个 } n \text{ 维面}) = \sum \text{这个面的 } n-1 \text{ 维边}.$$

这里的 "和" 需要根据预先指定的定向决定正负.

注意 2 *有一些书喜爱使用* **单纯复形 (simplicial complex)**, *此时要任何一个单纯形 (三角形) 每条边都不黏在一起不相交, 因此往往简单的图形需要多次重分才能做到. 但是这样的好处是可以计算乘法结构.*

注意 3 *在 [Hatcher] 中, 他还定义了 Δ 复形, 这时全部都是单纯形 (三角形), 但是允许一个单纯形内部的边相交. 但是实际上三角形, 四边形, 五边形, 甚至二边形都是可以的.*

如果对于紧致的 Hausdorff 空间 X(例如流形), 如果有一个 **分层 (stratification)**

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \cdots \subseteq X$$

使得每个 X_k 都是闭的, 且 $X_k \setminus X_{k-1} \cong \mathbb{R}^{a_k}$ 对某个 a_k. 我们称这个分层给出一个胞腔结构. 我们也称 $X_k \setminus X_{k-1}$ 是一个 a_k 维胞腔.

记 $X^k = \bigcup_{\dim X_i \le k}$, 那么同样也有

$$\boxed{H^*(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \begin{array}{c}\text{以所有 n-维胞腔} \\ \text{为基生成的自由 Abel 群.}\end{array} & * = n \\ 0 & * \neq n. \end{cases}}$$

所以一切照旧.

对于线性空间 $V = \mathbb{C}^n$, 一个**旗 (flag)** 是一串子线性空间

$$V^0 \subseteq V^1 \subseteq \cdots \subseteq V^n$$

使得 $\dim V^i = i$. 此时为了区别也叫**完全 (complete) 旗**. 考虑 $\mathcal{F}\ell(n)$ 为 n 维复向量的所有旗 (flag) 组成的集合, 这可以被赋予流形和代数簇的结构. 我们称 $\mathcal{F}\ell(n)$ 为**旗流形 (flag manifold)** 或**旗簇 (flag variety)**.

记 $G = \mathrm{GL}_n$, B 是全体上三角矩阵. 将每一个 $x \in \mathrm{GL}_n$ 视作 n 个线性无关的列向量 $(x_1, \ldots, x_n)$, 我们得到一个其**张成的旗** $\operatorname{span} x$

$$0 \subseteq \operatorname{span}(x_1) \subseteq \operatorname{span}(x_1, x_2) \subseteq \cdots \subseteq \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_n).$$

这定义了一个 (连续) 映射 $\operatorname{span} : \mathrm{GL}_n \to \mathcal{F}\ell(n)$.

通过线性代数, 不难发现 span 是满射, 且

$$\operatorname{span} x = \operatorname{span} y \iff x = yb \text{对某个 } b \in B.$$

换言之, $G/B \to \mathcal{F}\ell(n)$ 是双射 (同胚).

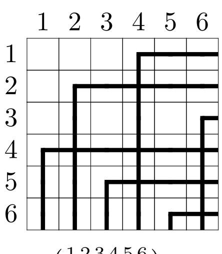
对于置换 $w \in \mathfrak{S}_n$, 记 w 是对应的置换矩阵, 即使得 $w(e_i) = e_{w(i)}$, 其中 e_i 是标准基. 也就是在 $i = 1, \ldots, n$ 位置 $(i, w(i))$ 上是 1, 其他位置是 0 的矩阵.

利用 Gauss 消元法, 可以得到 **Bruhat 分解**

$$G = \bigcup_{w \in \mathfrak{S}_n} BwB \qquad (\text{无交并}).$$

其实就是打洞. 实际上这是 G 的双陪集分解. 等价地, 这说明 B 在 G/B 上作用的轨道与对称群元素一一对应. 其中 BwB/B 被称为 **Schubert 胞腔**.

按下图表定义 U_w



$\binom{123456}{426135}$

$$U_w = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 0 & \mathbb{C} & 0 & \mathbb{C} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

那么利用打洞的技巧 (见 [Fulton]), 可以得到

$$\text{自然映射} : U_w \to BwB/B$$

是双射 (同胚).

用 ℓ 表示逆序数. 于是 $BwB/B \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$, 换句话说拓扑维数是 $2\ell(w)$. 因为 U_w 中 "$\mathbb{C}$" 的数目是 Rothe 图中 ⊞ 的的数目.

现在我们考虑 $X^i = \bigcup_{2\ell(w) \le i} BwB/B$. 这给出 $\mathcal{F}\ell(n)$ 的一个胞腔结构. 但是因为我们**没有奇数维的胞腔**, 所以胞腔复形将形如

$$0 \to C_0 \to 0 \to C_2 \to 0 \to C_4 \to \cdots;$$

$$\cdots \to C_4 \to 0 \to C_2 \to 0 \to C_0 \to 0.$$

所以 $H^i(\mathcal{F}\ell(n)) = C^i$, $H_i(\mathcal{F}\ell(n)) = C_i$.

回忆 C_{2i}(和 C^{2i}) 是维数为 $2i$ 的胞腔生成的自由 Abel 群. 我们用 $[BwB/B]$ 记对应的基. 注意: $\dim[BwB/B] = 2\ell(w)$.

于是我们得到了

$$H^*(G/B) = \text{以 } \{[BwB/B]\}_{w \in \mathfrak{S}_n} \text{ 为基的自由 Abel 群}$$

$$H_*(G/B) = \text{以 } \{[BwB/B]\}_{w \in \mathfrak{S}_n} \text{ 为基的自由 Abel 群}$$

注意 1 *我们需要一则事实, $\mathcal{F}\ell(n)$ 是紧致的 (完备的). 这是因为紧 Lie 群 $U_n \subseteq \mathrm{GL}_n$ 到 $\mathcal{F}\ell(n)$ 是满射 (线性代数).*

注意 2 *我们还需要一则事实, 每一个 BwB/B 的闭包都是一些 BuB/B 的并. 这是因为 B 作用, 所以轨道的闭包还是轨道的并.*

实际上 $BuB/B \subseteq \overline{BwB/B}$ 当且仅当在 **Bruhat order** *下 $u \le w$.*

注意 3 *实际上 Schubert 胞腔也给出 CW 复形意义上的胞腔. 这可以用 Morse 理论的类比 Białynicki–Birula 定理得到, 请看 [CG] 第二章某一节.*

习题 1. 验证 $G/B \to \mathcal{F}\ell(n)$ 是双射. [提示: 利用基的延拓定理证明满射, 再证明正文中提到的 $\operatorname{span} x = \operatorname{span} y$ 的等价条件.]

习题 2. 验证 $U_w \to BwB/B$ 是双射. [提示: 首先证明 U_w 在 $G \to G/B$ 下的像落在 BwB/B 内; 对于每个 $x \in G$, 证明 xB/B 一定等于某个 yB/B 对某个 $y \in U_w$, 这需要从最后一行开始打洞; 最后证明这是单射, 这需要从最后一行开始比起.]

习题 3. 证明 $\dim G/B = 2 \max_{w \in \mathfrak{S}_w} \ell(w)$. 利用 G/B 光滑的事实说明只有唯一的元素取到最大值.

习题 4. 记 $[n]=\frac{\mathbf{q}^n-1}{\mathbf{q}-1}$, $[n]!=[n]\cdot[n-1]\cdot\dots\cdot[1]$. 经典的计数表明 $[n]!$ 是有限域 $\mathbb{F}_\mathbf{q}$ 上 n 维线性空间中旗的数量. 证明这还是 $H^*(G/B)$ 的 *Hilbert* 多项式

$$[n]!=\sum_k \operatorname{rank} H^{2k}(G/B)\mathbf{q}^k.$$

[提示: 在有限域上也有 Schubert 胞腔, 这时 $BwB/B\cong\mathbb{F}_\mathbf{q}^{\ell(w)}$, 这贡献 $\mathbf{q}^{\ell(w)}$ 这么多元素, 而在 $\mathbb{C}$ 上的情况, 这时 $BwB/B\cong\mathbb{C}^{\ell(w)}$ 在 Hilbert 多项式中贡献 $\mathbf{q}^{\ell(w)}$.]

习题 5. 考虑**复射影空间** $\mathbb{C}P^n$ 为 $n+1$ 维空间所有的 1 维子空间. 将 $\mathbb{C}P^n$ 写成一些 $\mathbb{C}^{2i}$ 的并, 并且证明 $H^{2k+1}(\mathbb{C}P^n)=0$, 且

	0	2	$\cdots$	$2n$	$2n+1$	$\cdots$
$H^*(\mathbb{C}P^n)$	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$	$\cdots$	$\mathbb{Z}$	0	$\cdots$

[提示: 对非零向量 $(x_0,\dots,x_n)\in\mathbb{C}^{n+1}$, 记 $[x_0:\dots:x_n]$ 为对应的 1 维子空间. 换言之 $[x_0:\dots:x_n]=[y_0:\dots:y_n]$ 当且仅当 $(x_0,\dots,x_n)=\lambda(y_0,\dots,y_n)$ 对某个 $\lambda\in\mathbb{C}^\times$. 对 $i=0,\dots,n$, 记 $A^i=\{[\cdots 0:1:\underbrace{\mathbb{C}:\dots:\mathbb{C}}_{i}]\}$.]

1.2 推出与拉回

令 $X\xrightarrow{f}Y$ 是一个连续映射, 那么诱导了**拉回 (pull back)**

$$H^*(X)\xleftarrow{f^*}H^*(Y).$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 这是一个齐次映射.

$$\alpha\in H^n(Y)\implies f^*(\alpha)\in H^n(X).$$

$\boxed{\text{注意 2}}$ 这是一个代数同态.

$$f^*(\alpha\smile\beta)=f^*(\alpha)\smile f^*(\beta).$$

令 X 是紧致光滑定向流形. 那么有**Poincaré 对偶**

$$H^*(X)\xrightarrow{\sim}H_\bullet(X)\qquad *+\bullet=\dim X.$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 这个最经典的, 也最容易理解的是组合的解释, 见 *[姜]*. 现代通行的做法是用 *cap* 积 $\frown$ 给出具体的映射. 更进一步还可以用层的语言改写 *(*与对偶层对偶*)*.

$\boxed{\text{注意 2}}$ 这个同构需要选定一个定向, 所以区分 “可定向 *(orientable)*” 和 “定向 *(oriented)*”.

假设 X 和 Y 都是紧致光滑定向流形. 令 $X\xrightarrow{f}Y$ 是一个连续映射, 那么可以定义**推出 (push forward)**

$$H^*(X)\xrightarrow{f_*}H^\dagger(Y),$$

其中 $\dim X-*=\dim Y-\dagger$, 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) & \longrightarrow & H^\dagger(Y)\\ \text{对偶}\downarrow & & \downarrow\text{对偶}\\ H_\bullet(X) & \longrightarrow & H_\bullet(Y)\end{array}$$

即, 先对偶到下同调, 推出, 再对偶回上同调.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 这不是一个齐次映射.

但是如果我们对 $\alpha\in H^*(X)$, 记 $\operatorname{codim}\alpha=\dim X-*$, 那么 f_* 保持 codim.

$\boxed{\text{注意 2}}$ 这不是一个代数同态. 但是对于 $\alpha\in H^*(X),\beta\in H^*(Y)$, 有 **projective formula**

$$f_*(\alpha\smile f^*(\beta))=f_*(\alpha)\smile\beta.$$

这是一个 “模同态”, 因为通过 f^*, $H^*(X)$ 是 $H^*(Y)$-代数, 从而是 $H^*(Y)$-模.

$\boxed{\text{注意 3}}$ 其实我们不需要 X 和 Y 都紧致, 只需要 f 是**逆紧的 (proper)** 即可定义; 实际上最需要的是当 f 是一个纤维丛, 且纤维是紧致光滑定向流形.

注意 4 对于一个“拉回方阵”:

即 $\square = \{(y,z) \in Y \times Z : f(y) = g(z)\}$. 从 $H^*(Y)$ 到 $H^*(Z)$ 的两个映射

$$g^* \circ f_* = F_* \circ G^*$$

$$\begin{tikzcd} \square \arrow[r, "G"] \arrow[d, "F"'] & Y \arrow[d, "f"] \\ Z \arrow[r, "g"'] & X \end{tikzcd}$$

令 X 是一个紧致流形, 设 $[X]$ 使得

$$\text{单位元 } 1 \in H^0(X) \overset{\text{对偶}}{\longleftrightarrow} [X] \in H_n(X)$$

我们称 $[X]$ 是 X 的 **基本类 (fundamental class)**.

注意 1 如果给 X 一个三角剖分, 即把 X 分割成一些单纯形, 那么 $H_n(X)$ 是这些单纯形的和 (事先选好定向) 的类. 换句话说,

$$\boxed{[X] = \text{“同调意义下”的 } X \text{ 本身.}}$$

令 Y 是一个紧致流形, X 是一个嵌入**闭**子流形. 令 $i : X \to Y$ 是包含映射. 定义 X 在 Y 中的 **fundamental class** (滥用记号)

$$[X] = i_*(1) \in H^*(Y),$$

特别地, $1 = [Y]$.

请注意!

$$\boxed{\deg[X] = \operatorname{codim} X = \dim Y - \dim X \text{ 是 } X \text{ 的余维数.}}$$

另外, $[X] \overset{\text{有可能}}{=\!=} 0$.

注意 1 请看

$$\begin{array}{ccccc} 1 \in & H^0(X) & \longrightarrow & H^{\operatorname{codim} X}(Y) & \ni [X] \\ & \text{对偶} \big\downarrow & & \big\downarrow \text{对偶} & \\ [X] \in & H_{\dim X}(X) & \longrightarrow & H_{\dim X}(Y) & \ni (\cdots) \end{array}$$

所以

$$\boxed{[X] = \text{“}Y \text{ 的同调意义下”的 } X \text{ 本身.}}$$

注意 1 对于代数簇, 即使子簇 X 不是光滑的, 我们也可以在 $H^*(Y)$ 中定义 **代数闭链 (algebraic cycles)** $[X]$. 但是至少需要是闭的. 使用的方法是 *Borel–Moore* 同调, 请见 *[Fulton]*.

注意 2 直接把代数闭链拿出来商掉“代数”同伦, 这就是 **周环 (Chow ring)** 的定义. 只有 X 是光滑的时候, X 的周“环”才是环.

注意 3 一般来说上同调不一定总是由代数闭链生成的, 这个是被 *well-studied*, 更广的配边理论也对此有研究.

—下面我们用 fundamental classes 重新理解上同调—

以下内容不尽严格. 严格地, 要加何种条件应该看 [Fulton], 周环的版本应该看 [3264]. 但是拿来用基本是没问题的, 而且实际上用式性类等工具能很大程度上避免这类问题.

---

1. Cup 积

假设 $\dim A = a, \dim B = b$. 那么 $A \cap B$ 的期待维数是 $n - [(n-a) + (n-b)]$. 此时

$$[A] \smile [B] = \begin{cases} [A \cap B] & A \text{ 和 } B \text{ 直交} \\ 0 & \text{比期待维数小} \\ \text{不知道} & \text{比期待维数大} \end{cases}$$

在 A 和 B **直交 (transversal)** 时, 一定取到期待维数.

注意 1 所谓直交是说局部上上看是线性空间的交, 也就是说没有 .

注意 2 微分几何中需要计算定向, 但是如果是代数簇, 定向是复结构一定选定的, 所以没有问题.

---

2. 拉回 $(f : X \to Y)$

对于 $B \subseteq Y$, $\dim B = b$, 那么 $f^{-1}(B)$ 的期待维数是 $x - (y - b)$.

$$f^*[B] = \begin{cases} [f^{-1}(B)] & f^{-1}(B) \text{ 横截} \\ 0 & \text{比期待维数小} \\ \text{不知道} & \text{比期待维数大} \end{cases}$$

在 $f^{-1}(B)$ **横截 (transversal)** 时, 一定取到期待维数.

注意 1 所谓横截是说局部上上看是线性映射, 例如对应的 *Jacobi* 矩阵秩取到期待的秩.

(这不严格)

所以

$$\boxed{\begin{array}{c} f^*(\alpha \smile \beta) \\ = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta) \end{array}} = \boxed{\begin{array}{c} \text{同调版本的} \\ f^{-1}(A \cap B) \\ = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \end{array}}$$

---

3. 推出 $(f : X \to Y)$

对于 $A \subseteq X$, $\dim A = a$, 那么 $f(A)$ 的期待维数是 a.

$$f_*[A] = \begin{cases} d \cdot [f(A)] & \text{取到期待维数} \\ 0 & \text{比期待维数小} \end{cases}$$

这里 d 是映射度, 即 $f(A)$ 中几乎所有点的原像都是 d 个 A 中的点.

(这也不严格)

所以

$$\boxed{\begin{array}{c}\text{projective formula}\\ f_*(\alpha\smile f^*(\beta))\\ =f_*(\alpha)\smile\beta\end{array}} = \boxed{\begin{array}{c}\text{同调版本的}\\ f(A\cap f^{-1}(B))\\ =f(A)\cap B\end{array}}$$

对于 $i=1,\dots,n-1$. 考虑

$$P_i=\begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix}$$

这比上三角矩阵群 B 在 $(i+1,i)$ 位置多一个自由度.

齐次流形 G/B 和 $\mathcal{F}\ell(n)$ 同胚. 那么 G/P 呢?

$$\begin{aligned} G/B &\cong \{V^0\subseteq\cdots\subseteq V^{i-1}\subseteq V^i\subseteq V^{i+1}\subseteq\cdots\subseteq V^n\}\\ G/P &\cong \{V^0\subseteq\cdots\subseteq V^{i-1}\qquad\;\;\subseteq V^{i+1}\subseteq\cdots\subseteq V^n\}\end{aligned}$$

且自然映射

$$G/B\longrightarrow G/P$$

就是 "把 complete flags 中维数为 i 的子空间去掉".

考虑

$$\begin{aligned} P_i/B &= \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix} \Bigg/ \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix}\\ &= \begin{pmatrix} * & * \\ * & * \end{pmatrix}\Big/\begin{pmatrix} * & * \\ & * \end{pmatrix} = \mathcal{F}\ell(2) = \mathbb{C}P^1\end{aligned}$$

最后 $\mathcal{F}\ell(2)=\mathbb{C}P^1$ 是因为 $\mathbb{C}^2$ 中的旗实际上由维数为 1 的子空间决定.

另外注意到 $\mathbb{C}P^1=\mathbb{C}\cup\{\infty\}\cong S^2$ 是 Riemann 球.

$*$	0	1	2	3	4	$\cdots$
$H^*(P_i/B)$	$\mathbb{Z}$	0	$\mathbb{Z}$	0	0	$\cdots$

让我们考虑自然映射 $G/B\xrightarrow{\pi}G/P_i$. 我们定义 **Demazure operator** 为

$$\partial_i:\quad H^*(G/B)\underset{\pi_*}{\xrightarrow{\text{推出}}}H^{*-2}(G/P)\underset{\pi^*}{\xrightarrow{\text{拉回}}}H^{*-2}(G/B).$$

这里的 $2=\dim G/B-\dim G/P=\dim P/B$.

用旗的语言,

$$\boxed{\text{推出 }\pi_*} = \boxed{\begin{array}{c}\text{同调地}\\ \text{"把维数 } i \text{ 的子空间 } V^i \text{ 去掉"}\end{array}}$$

$$\boxed{\text{拉回 }\pi^*} = \boxed{\begin{array}{c}\text{同调地}\\ \text{"把 } V^{i-1}\subseteq V^{i+1} \text{ 之间全部}\\ i\text{ 维子空间加上"}\end{array}}$$

令 $B^-=w_0Bw_0$ 为下三角矩阵群, 其中 w_0 是最长元 $\binom{1\cdots n}{n\cdots 1}\in\mathfrak{S}_n$. 那么我们记 Σ_w 为

$$[BwB/B]\text{作为上同调胞腔}=[\overline{B^-wB/B}]\text{作为基本类}.$$

这个等号实际上是通过计算下同调的相交证明的, 请见 [Fulton]. 于是

$$H^*(G/B)=\text{以 }\{\Sigma_w\}_{w\in\mathfrak{S}_n}\text{ 为基的自由 Abel 群}$$

令 $s_i=(i,i+1)\in\mathfrak{S}_n$ 是 i 和 $i+1$ 的对换. 注意到 $P_i=B\cup Bs_iB$.

下面我们可以计算 Demazure operator 在 Σ_w 上的作用. 根据定义

$$\begin{aligned}\partial_i(\Sigma_w) &= \pi^*(\pi_*(\Sigma_w))=\pi^*(\pi_*([\overline{B^-wB/B}]))\\ &=\delta_{\text{维数正确}}\cdot[\pi^{-1}(\pi(\overline{B^-wB/B})]\\ &=\delta_{\text{维数正确}}\cdot[\pi^{-1}(\overline{B^-wP/P})]\\ &=\delta_{\text{维数正确}}\cdot[\overline{B^-wB/B}\cup\overline{B^-ws_iB/B}]\\ &=\begin{cases}[\overline{B^-ws_iB/B}], & \ell(ws_i)=\ell(w)-1,\\ 0, & \ell(ws_i)=\ell(w)+1.\end{cases}\\ &=\begin{cases}\Sigma_{ws_i}, & \ell(ws_i)=\ell(w)-1,\\ 0, & \ell(ws_i)=\ell(w)+1.\end{cases}\end{aligned}$$

这里实际上用到了 **Tits system**.

Tits system 是说

$$BwB\cdot Bs_iB=\begin{cases}Bws_iB, & \ell(ws_i)=\ell(w)+1;\\ Bws_iB\cup BwB, & \ell(ws_i)=\ell(w)-1.\end{cases}$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 实际上我们已经可以证明在任何系数下 *Demazure operator* 满足幂零**辫子关系 (braid relation)**. 但是之后我们会建立多项式版本的联系, 那时将可以直接证明.

习题 1. 哪条集合论的事实的上同调版本是 $g^*\circ f_*=F_*\circ G^*$? [提示: $F(G^{-1}(A))=g^{-1}(f(A))$.]

习题 2. 根据 *Poincaré* 对偶,

$$H^*(\mathbb{C}P^n)\otimes H^{2n-*}(\mathbb{C}P^n)\xrightarrow{\smile}H^{2n}(\mathbb{C}P^n)\cong\mathbb{Z}$$

构成完美配对. 取 H 是 $\mathbb{C}P^n$ 中任意一个超平面, 记 $x=[H]\in H^*(\mathbb{C}P^n)$. 证明 $H^*(\mathbb{C}P^n)$ 作为环同构于 $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$, 其中 $\deg x=2$. [提示: 显然 H 的 (实) 余维数是 2. 注意到不同超平面给出相同的基本类, 所以我们直接计算相交知道 $x^n=1\cdot[\text{点}]\neq 0$. 要说明 $H^*(\mathbb{C}P^n)$ 是由 x 生成的, 我们将 H 视为 $\mathbb{C}P^{n-1}$, 用 i^* 结合完美配对的事实归纳证明.]

习题 3. 对于一般的 d 次超平面 $D \subseteq \mathbb{C}P^n$, 证明 $[D] = dx$, 其中 x 是超平面类. [提示: 注意到因为 $H^2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}x$, 所以一定有一个整数 d' 使得 $[D] = d'x$. 注意到 D 与一条一般位置的直线交 d 个点, 而直线又可以写成 $n-1$ 个超平面的交, $d'x \cdot x^{n-1} = [D] \smile [H]^{n-1} = [D \cap H_1 \cap \cdots] = d \cdot [\text{点}] = dx^n$, 所以 $d = d'$.]

习题 4. 请说明

$$\Sigma_w = [\overline{w_0 B w_0 w B/B}] = [\overline{B w_0 w B/B}]$$

[提示: 因为可以在 GL_n 中找到一条从 1 通往 w_0 的道路, 从而构造一个同伦.]

习题 5. 在 *[Fulton]* 中, 为了计算 *Demazure operators*, 他用了拉回方阵 $\begin{tikzcd} \square \arrow[r] \arrow[d] & G/B \arrow[d] \\ G/B \arrow[r] & G/P \end{tikzcd}$, 证明这时 $\square$ 和下面的集合是双射.

$$\square = \left\{ \cdots \subseteq V^{i-1} \begin{array}{ccc} & V_1^i & \\ \rotatebox{45}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{-45}{$\subsetneq$} \\ \rotatebox{-45}{$\subsetneq$} & & \rotatebox{45}{$\subsetneq$} \\ & V_2^i & \end{array} V^{i+1} \subseteq \cdots \right\}.$$

1.3 抛物子群

对于 GL_n, 对于 $\lambda_1 + \ldots + \lambda_k$, 我们记 **抛物 (parabolic) 子群**

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_{\lambda_1} & * & \cdots & * \\ & \mathrm{GL}_{\lambda_2} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & \mathrm{GL}_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

我们考虑 G/P.

实际上 (集合论意义上可以直接验证)

$$G/P_\lambda = \left\{ 0 \subseteq V^{\lambda_1} \subseteq V^{\lambda_1+\lambda_2} \subseteq \cdots \subseteq \mathbb{C}^n \right\}$$

且如果 P_1 分的块都是 P_2 的子块, 那么

$$G/P_1 \to G/P_2$$

就是 "把多余维数的子空间去掉".

让我们用分成 k 组的 n 个标上 1 到 n 的 $\bullet$ 来记 λ_i

$$(\lambda_1 \text{ 个 } \bullet)\,(\lambda_2 \text{ 个 } \bullet) \cdots (\lambda_k \text{ 个 } \bullet)$$

如果 $\lambda_i = 1$, 则省略括号.

那么 $\lambda_1 + \ldots + \lambda_j$ 是第 j 组最后一个 $\bullet$ 的编号.

第一个例子

$$\underset{1}{\bullet} \cdots \underset{i-1}{\bullet} \big(\underset{i}{\bullet} \quad \underset{i+1}{\bullet}\big) \underset{i+2}{\bullet} \cdots \underset{n}{\bullet}$$

对应上一节的

$$P_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & * & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \vdots \\ & & & & & * \end{pmatrix}$$

第二个例子

$$\big(\underset{1}{\bullet} \cdots \underset{k}{\bullet}\big) \big(\underset{k+1}{\bullet} \cdots \underset{n}{\bullet}\big)$$

对应 **Grassmaniann 流形/簇**

$$G/P_\lambda = \mathcal{G}r(k,n) = \{0 \subseteq V^k \subseteq \mathbb{C}^n\}.$$

令

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k}$$

是 "组内置换" 构成的群.

注意到

$$P = \bigcup_{u \in \mathfrak{S}_\lambda} BuB.$$

(严格说还是用了 Tits system).

对于 $\sigma\in\mathfrak{S}_\lambda$, 我们有

$$Bw\sigma P/P = BwP/P.$$

所以

$$G=\bigcup_{w\in\mathfrak{S}_w/\mathfrak{S}_\lambda} BwP \qquad (\text{无交并}).$$

称 $\{BwP/P : w\in\mathfrak{S}_w/\mathfrak{S}_\lambda\}$ 为 G/P_λ 上的**Schubert 胞腔**.

$\boxed{\text{注意 } 1}$ 一般没有 $\dim BwP/P = 2\ell(w)$.

但是, 如果 w 是陪集 $w\mathfrak{S}_\lambda$ 中长度最小者, 则

$$\text{自然映射}: BwB/B \longrightarrow BwP/P$$

是双射 (同胚). 记

$$\mathfrak{S}^\lambda = \{\text{每个陪集 } \mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_\lambda \text{ 选出的唯一的长度最小者}\}$$

那么 $\{BwP_\lambda/P_\lambda : w\in\mathfrak{S}^\lambda\}$ 给出 G/P_λ 的胞腔结构.

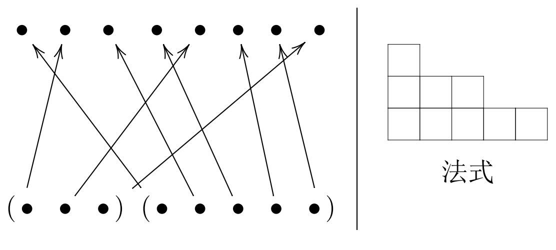
$\boxed{\text{注意 } 1}$ *这是因为作用 P 等于作用 $\bigcup_{u\in\mathfrak{S}_\lambda} BuB$, 而 $BwB\cdot BuB = BwuB$ 如果 $\ell(wu)=\ell(w)+\ell(u)$(Tits system). 换句话说如果 P 内 B 以外的元素作用在 BwB 上一定无法回到 BwB.*

我们证明对于 Grassmaniann 的情况

$$(\underset{1}{\bullet}\cdots\underset{k}{\bullet})(\underset{k+1}{\bullet}\cdots\underset{n}{\bullet})$$

$\mathfrak{S}^\lambda$ 和 $k\times(n-k)$ 的 Young 图 (保持 ℓ) 一一对应.

请看



我们曾经提到 $\mathcal{F}\ell(n)$ 是紧致的, 是因为 $\mathcal{F}\ell(n)$ 是酉群 U_n 的商.

具体来说, 记 $K=U_n$, T_K 是 U_n 中的对角矩阵. 那么

$$U_n/T_K \xrightarrow{\sim} G/B \cong \mathcal{F}\ell(n)$$

是同胚. 这实际上是如下一则线性代数的转述

任何旗都 admits 一个酉正交基.

但是 U_n/T_K 上面没有显然的代数簇结构 (酉群不是代数群!), 所以**无法刻画 Schubert 胞腔**. 但是当我们不用胞腔的时候, 复结构 (代数簇结构) 反而显得累赘.

注意 $\mathfrak{S}_n$ 通过共轭, 作用在如下群上

$$U_n,\quad U_n \text{ 中的对角矩阵群} = T_K,$$

$$\mathrm{GL}_n,\quad \mathrm{GL}_n \text{ 中的对角矩阵群}.$$

但是唯独不作用在上三角矩阵群 B 上.

前两者诱导了 $\mathfrak{S}_n$ 在

$$U_n/T_K \xrightarrow{\sim} G/B \cong \mathcal{F}\ell(n)$$

上的作用.

但是 GL_n/B 上面没有显然的 $\mathfrak{S}_n$ 作用.

$\boxed{\text{注意 } 1}$ *注意到 $\mathfrak{S}_n$ 通过共轭诱导的 $H^*(K)$ 和 $H^*(T_K)$ 上的作用都平凡. 因为我们可以找到 $w\in\mathfrak{S}_n$ 的道路构造同伦. 但是在 $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$ 上却不平凡. 原因是此时作用是 $xT_K\mapsto wxw^{-1}T_K$, 乘在内侧. 另外, 我们几乎不如何知道 $\mathfrak{S}_n$ 在胞腔上如何作用 (等价于 $\mathfrak{S}_n$ 在 Schubert 多项式的作用).*

上面的事实也有紧致版本. 记

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} U_{\lambda_1} & & & \\ & U_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_{\lambda_k}\end{pmatrix}$$

那么

$$G/P_\lambda = U_n/U_\lambda.$$

但是同样 Schubert 胞腔也无法刻画.

习题 1. 证明 $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_\lambda$ 每个陪集中都有唯一的一个长度最小者, 他们是那些组内单调递增的置换.

习题 2. 请验证 $G/P_\lambda = U_n/U_\lambda$. [提示：因为我们已经给出过 G/P_λ 对应的旗的刻画，所以可以直接验证；另一方面，还可以说明 $U_\lambda = U_n\cap P_\lambda$.]

习题 3 (极大紧子群). 证明 $\mathrm{GL}_n(\mathbb{C})$ 中任何一个紧致子群都共轭到 U_n 的子群. [提示：需要用到一则事实，紧致子群有 Haar 测度 μ. 任意取一个酉内积，将这个酉内积对这个子群作用取平均，如此得到一个新的酉内积，而这个子群作用保持. 再利用事实 ---$\mathbb{C}^n$ 上的所有酉内积都相同.]

习题 4. 证明 GL_n/U_n 是一个欧式空间. [提示：回忆正交化算法给出的所谓 QR 分解；对酉群也是类似的，任何一个矩阵 x 都可以写成一个酉矩阵和一个上三角矩阵的乘积，如果我们要求上三角矩阵的对角线上排列着 1，那么这个分解是唯一的. 所以 GL_n/U_n 和对角线全为 1 的上三角矩阵同胚.]

1.4 双旗流形

Bruhat 分解

$$G=\bigcup_{w\in\mathfrak{S}_n} BwB \qquad (\text{无交并})$$

有一个几何解释. 即

$$\boxed{\text{任何两个 Flags 都 admit 一组公共基.}}$$

而上面的解释可以用线性代数延拓定理解决.

对于一系列线性空间 V 的子空间 $\{V_i\}$, 称基 B 是他们的基如果 $V_i\cap B$ 是 V_i 的基.

回忆映射

$$G/B\longrightarrow \mathcal{F}\ell(n)$$

假设 xB 对应到旗

$$V^\bullet=\{V^i=\operatorname{span}(x_1,\dots,x_i)\}.$$

那么 $V^\bullet$ 的基的所有选择就是 xB 的列向量 (忽略列向量的顺序).

因此

$$\boxed{\text{任何两个 Flag 都 admit 一组公共基.}}$$

$$\Updownarrow$$

任意$x,y\in G$, 存在$w\in\mathfrak{S}_n$, $x'\in xB, y'\in yB$, 使得$x'w=y'$

这等价到 Bruhat 分解.

回忆

$$\begin{array}{lcl} G \underset{\text{对角}}{\curvearrowright} & G/B\times G/B & \\ & \big\downarrow & (xB,yB)\mapsto x\times x^{-1}yB \\ G \underset{\text{左乘}}{\curvearrowright} & G\times_B G/B & \\ & \text{比较} & \\ B \underset{\text{左乘}}{\curvearrowright} & G/B & \end{array}$$

因此

$$\begin{aligned} \text{对角 } G\text{-轨道}(G/B\times G/B) &= \text{左乘 } G\text{-轨道}(G\times_B G/B)\\ &= \mathsf{pt}\times_G G\times_B G/B\\ &= \mathsf{pt}\times_B G/B\\ &= B\text{-轨道}(G/B). \end{aligned}$$

于是我们发现

$$B\text{-轨道}(G/B)\longleftrightarrow \text{对角 } G\text{-轨道}(G/B\times G/B)$$

其中 BwB/B 对应于 $G/B\times G/B$ 中的

$$\{(xB,yB):x^{-1}y\in BwB\}.$$

此时我们称 xB 和 yB 对应的 flags 具有**相对位置** w (和标准记号 up to left and right).

对于两个 flags $F_1^\bullet,F_2^\bullet$ 具有相对位置 w. 根据条件, 我们可以找到一个矩阵 y, 使得

$$\operatorname{span} yw^{-1}=U^\bullet,\qquad \operatorname{span} y=V^\bullet$$

即 $y=(y_1,\dots,y_n)$

$$F_1^i=\operatorname{span}(y_{w(1)},\dots,y_{w(i)}),\qquad F_2^i=\operatorname{span}(y_1,\dots,y_i).$$

考虑

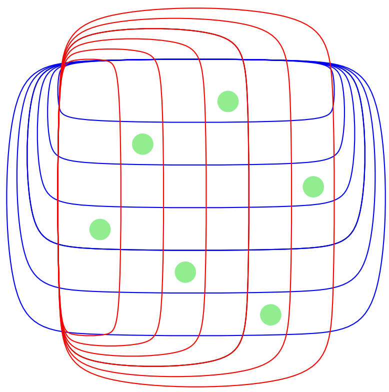
$$\begin{aligned} &\dim\frac{F_1^{i-1}+F_2^j\cap F_1^i}{F_1^{i-1}+F_2^{j-1}\cap F_1^i}\\ =&\dim\frac{\operatorname{span}\left\{(y_w(1),\dots,y_{w(i-1)})\cup(y_1,\dots,y_j)\cap(y_{w(1)},\dots,y_{w(i)})\right\}}{\operatorname{span}\left\{(y_1,\dots,y_{w(i-1)})\cup(y_1,\dots,y_{j-1})\cap(y_{w(1)},\dots,y_{w(i)})\right\}}\\ =&\#(\{1,\dots,w(i-1)\}\cup\{1,\dots,j\}\cap\{1,\dots,w(i)\})\\ &-\#(\{1,\dots,w(i-1)\}\cup\{1,\dots,j\}\cap\{1,\dots,w(i)\})\\ =&\begin{cases}1 & w(i)=j\\ 0 & \text{其他}\end{cases} \end{aligned}$$

所以这个恰好来自置换矩阵.

$\boxed{\text{注意 1}}$ *这给出一个相对位置的内蕴刻画. 这样 $\mathcal{F}\ell(n)$ 上的 Schubert 胞腔也可以内蕴刻画. 对于 $\mathcal{F}\ell(n)$, 选定一个旗 $V_1^\bullet$, 所有和这个 $V_1^\bullet$ 相对位置为 w 的旗 $V_2^\bullet$ 恰好对应 Schubert 胞腔 BwB/B.*

$$V_2^1\subset V_2^2\subset\cdots$$

$$\begin{array}{c} V_1^1\\ \cap\\ V_2^2\\ \cap\\ \vdots \end{array}$$



回忆 Zassenhaus' Butterfly Lemma

$$\begin{array}{ccc} \dfrac{F_1^{i-1}+F_2^j\quad\cap F_1^i}{F_1^{i-1}+F_2^{j-1}\cap F_1^i} & \cong & \dfrac{F_2^{j-1}+F_1^i\quad\cap F_2^j}{F_2^{j-1}+F_1^{i-1}\cap F_2^j}\\ \| & & \|\\ \dfrac{F_1^i\cap F_2^j}{(F_1^{i-1}\cap F_2^j)+(F_1^i\cap F_2^{j-1})} & \cong & \dfrac{(F_1^i+F_2^{j-1})\cap(F_1^{i-1}+F_2^j)}{F_1^{i-1}+F_2^{j-1}} \end{array}.$$

所以

$$\dim(F_1^i\cap F_2^j)=\#\{\bullet\le i:w(\bullet)\le j\}$$

$$\Updownarrow$$

$$\dim(F_1^i+F_2^j)=i+j-\#\{\bullet\le i:w(\bullet)\le j\}$$

习题 1. 注意我这个蝴蝶定理比 *Serge Lang* 等书上多断言了一个同构, 请证明之.

习题 2. 对于三个子空间, 举例说明我们不能找到公共基. ［提示：例如 $\begin{array}{c} 0 \subseteq \langle e_1 \rangle \subseteq \mathbb{C}^2, \\ 0 \subseteq \langle e_2 \rangle \subseteq \mathbb{C}^2 \\ 0 \subseteq \langle e_1 + e_2 \rangle \subseteq \mathbb{C}^2 \end{array}$. ］

习题 3. 证明对于任意两条线性子空间的链, 一定可以找到他们的一组基. ［提示：线性代数中学的 $\dim(U+V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$ 的证明过程. ］

习题 4. 对于线性空间 V 中的三个线性子空间 V_1, V_2, V_3, 证明一定存在这样一组基 B, 使得 V_i 由 $(B+B) \cap V_i$ 张成. 其中 $B+B$ 为可以写成两个基之和的向量. ［提示：我非常确定这是对的，但是我证明用了表示论. 我还没有想到简单证明. 原因如下，每个子空间的指定给出 D_4 的一个 quiver 表示，而其表示已经分类，一定是以下 12 种可能性的直和

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] \mathbb{k} \arrow[dr, "\subseteq" sloped] & \\ & \mathbb{k} \supseteq 0 \\ 0 \arrow[ur, "\subseteq" sloped] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] 0 \arrow[dr, "\subseteq" sloped] & \\ & \mathbb{k} \supseteq 0 \\ \mathbb{k} \arrow[ur, "\subseteq" sloped] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] 0 \arrow[dr, "\subseteq" sloped] & \\ & \mathbb{k} \supseteq \mathbb{k} \\ 0 \arrow[ur, "\subseteq" sloped] & \end{tikzcd}$$

$$\alpha_1 + \alpha_2 \qquad \alpha_2 + \alpha_3 \qquad \alpha_2 + \alpha_4$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] 0 \arrow[dr, "\subseteq" sloped] & \\ & \mathbb{k} \supseteq \mathbb{k} \\ \mathbb{k} \arrow[ur, "\subseteq" sloped] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] \mathbb{k} \arrow[dr, "\subseteq" sloped] & \\ & \mathbb{k} \supseteq \mathbb{k} \\ 0 \arrow[ur, "\subseteq" sloped] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] \mathbb{k} \arrow[dr, "\subseteq" sloped] & \\ & \mathbb{k} \supseteq 0 \\ \mathbb{k} \arrow[ur, "\subseteq" sloped] & \end{tikzcd}$$

$$\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_4 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] 0 \arrow[dr, "\subseteq" sloped] & \\ & \mathbb{k} \supseteq 0 \\ 0 \arrow[ur, "\subseteq" sloped] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] \mathbb{k} \arrow[dr, "\subseteq" sloped] & \\ & \mathbb{k} \supseteq \mathbb{k} \\ \mathbb{k} \arrow[ur, "\subseteq" sloped] & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] \mathbb{k} \oplus 0 \arrow[dr, "\subseteq" sloped] & \\ & \mathbb{k}^2 \supseteq \text{对角线} \\ 0 \oplus \mathbb{k} \arrow[ur, "\subseteq" sloped] & \end{tikzcd}$$

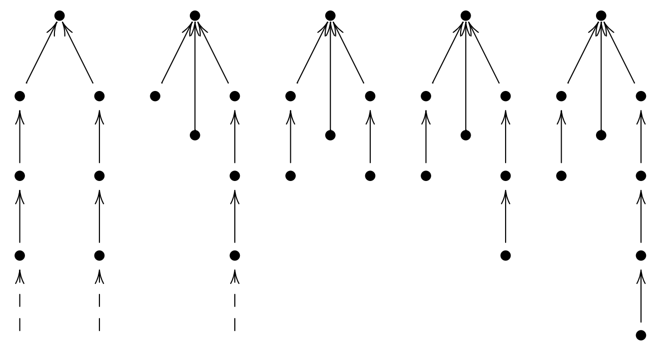
$$\alpha_2 \qquad \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 \qquad \alpha_1 + 2\alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4$$

$$\begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] \mathbb{k} \arrow[dr] & & \\ & 0 & 0 \arrow[l] \\ 0 \arrow[ur] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] 0 \arrow[dr] & & \\ & 0 & 0 \arrow[l] \\ \mathbb{k} \arrow[ur] & & \end{tikzcd} \qquad \begin{tikzcd}[row sep=small, column sep=small] 0 \arrow[dr] & & \\ & 0 & \mathbb{k} \arrow[l] \\ 0 \arrow[ur] & & \end{tikzcd}$$

$$\alpha_1 \qquad \alpha_3 \qquad \alpha_4$$

前面九种对应单射（包含），满足条件. ］

$\boxed{\text{注意 1}}$ 实际上能有类似结论的情况很少. 他们分别是



A_n D_n E_6 E_7 E_8

每个箭头 $\to$ 代表一个包含 $\subseteq$. 注意 A 型是上上题, D_4 的情况是上题.

参考文献

- Hatcher. Algebraic Topology.
- Bredon. Geometry and Topology. GTM139.
- 姜伯驹. 代数拓扑.
- Fulton. Young Tableaux.
- Chriss, Ginzburg. Representation Theory and Complex Geometry.
- Eisenbud, Harris. 3264 and all that.

关于 Lie 群有不少书, 推荐

- Bump. Lie Group. GTM 225. 里面也有很多相关的组合.
- Knapp. Lie groups beyond an introduction.
- Humphreys. Linear Algebraic Groups. GTM21. 请看 29. Tits system.
- Springer. Linear Algebraic Groups. 请看 8.5, Bruhat order 的几何解释.

~~ ★★ **菜谱** ★★ ~~

—如何计算上同调?

1. 计算群结构.
   找胞腔结构, 计算他们的维数.
   胞腔复形, 计算上同调.
   没有奇数 $\Longrightarrow$ 复形平凡
2. 计算相交配对
   取两个维数相补的基本类
   移动到直交位置
   计算相交点的数目
3. 计算推出拉回
   计算像和原像
   比维数
4. 计算环结构
   取两个基本类, 求第三个基本类前系数
   通过完美配对, 变成计算三个基本类相交
   移动到直交位置, 计算相交点的数目

$\boxed{\text{本节的上同调}} \approx \boxed{\text{集合论}} + \boxed{\text{算开闭}} + \boxed{\text{算维数}}.$

2 纤维丛

上节我们提到关于计算环结构的方法只是理论上的，但是实际并不能广泛地用于计算.

4. 计算环结构

取两个基本类, 求第三个基本类前系数

通过完美配对, 变成计算三个基本类相交

移动到直交位置, 计算相交点的数目

2.1 纤维丛

为了真的能够计算, 并更好地理解上同调, 我们需要理解纤维丛.

对于连续映射 $E \xrightarrow{\pi} B$, 对于 $b \in B$, 称 $\pi^{-1}(b) \subseteq E$ 是 b 处的 **纤维 (fibre)**, 也记作 E_b.

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\pi"] & B \\ E_b \arrow[u, phantom, "\cup|"] & b \arrow[u, phantom, "\Psi"] \arrow[l, "\text{原像}"] \end{tikzcd}$$

B 和 F 是拓扑空间,

$$\begin{tikzcd} & E = B \times F \arrow[dl, "\pi_1"'] \arrow[dr, "\pi_2"] & \\ B & & F \end{tikzcd}$$

那么投射 $E \xrightarrow{\pi_2} B$ 每一点的纤维 (= 原像) 都是一个 F 的拷贝. 此时 $E \to B$ 被称为以 F 为纤维的 **平凡丛**.

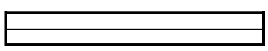
令 $E \xrightarrow{\pi} B$ 是一个连续映射, 我们说这是一个以 F 为纤维的 **纤维丛 (fibre bundle)**, 如果局部上是平凡丛.

任意一个点 $b \in B$, 都存在邻域 U 使得 $\pi^{-1}(U) \to U$ 同构于平凡丛.

$$\begin{array}{ccccc} U \times F & \cong & \pi^{-1}(U) & \subseteq & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & = & U & \subseteq & B \end{array}$$

其中 B 叫 **底空间** (base space), E 叫 **全空间 (total space)**.

例子: Möbius 带, 将下列纸带



卷成 Möbius 带时, 中间的轴线会粘成一个圆圈 S^1. 而垂直方向则是一个区间 I. 所以 Möbius 带 $\to S^1$ 是以 I 为纤维的纤维丛.

$\boxed{\text{不是所有纤维丛都平凡}}$

例子: 任何一个流形 M, 在点 $x \in M$ 有切空间 T_xM. 定义切丛

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_xM$$

为所有点处切空间的形式并. 实际上可以找到 TM 的流形结构使得

$$TM \to M \qquad \text{来自 } T_xM \text{ 的切向量} \mapsto x$$

是一个纤维丛.

注意 1 请注意

$\boxed{\text{不是所有切丛都平凡}}$

例如著名的毛球 *(hairy ball)* 定理. 点 x 处切空间 T_xM 可以看出这一点处的无穷小移动组成的向量空间. 这可以用线素 *(毛)* 画出.

对于纤维丛 $\pi = \begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ B \end{smallmatrix}$, 我们称 $s : \begin{smallmatrix} E \\ \uparrow \\ B \end{smallmatrix}$ 是一个 **截面 (section)** 如果 $\pi \circ s = \mathrm{id}_B$.

换句话说, $\forall x \in B, s(x) \in E_x$,

$$\boxed{\text{截面}} = \boxed{\text{每条纤维上选一个点}}.$$

$$\boxed{\text{连续截面}} = \boxed{\text{每条纤维上连续地选一个点}}.$$

对于平凡丛 $E = B \times F$, 截面就是一个函数 $B \to F$.

而纤维丛局部上是平凡丛, 所以截面局部上是函数.

一般而言对于纤维丛, 截面并没有一个典范地选择 (有时甚至不存在, 例如 Möbius 带的边界), 即: 我们不能认为 $B \subseteq E$.

因为我们总遇到大量的纤维丛, 如何计算他们的上同调呢? 对于平凡丛, $E = B \times F$, 可以用 **万有系数定理**, 例如在 $H^*(B)$ 或 $H^*(F)$ 其中一个自由的时候,

$$H^*(E) = H^*(B) \otimes H^*(F) \qquad (\text{作为环}).$$

一般地我们也希望这个成立. 但是一般不能作为环同构, 也不典范.

取纤维丛 $\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ B \end{smallmatrix}$, 任意选择一个点 b, 纤维为 F. 由如下两个映射

$$\begin{array}{ccc} F \subseteq E & & E \to B \\ \Downarrow & \text{诱导了} & \downarrow \\ H^*(F) \xleftarrow{\text{限制}} H^*(E) & & H^*(E) \xleftarrow[\pi^*]{} H^*(B) \end{array}$$

我们称 $\begin{smallmatrix}E\\ \downarrow\\ B\end{smallmatrix}$ 是**形式的 (formal)** (非广泛术语) 如果满足下面的条件.

存在 $H^*(F)$ 在 $H^*(E)$ 的提升 A

$$\left[\begin{array}{l}\text{即子群 } A\subseteq H^*(E) \text{ 使得下面复合是同构}\\[1em] \qquad\qquad H^*(F)\xleftarrow{\text{限制}} H^*(E)\xhookleftarrow{\supseteq} A\\[1em] \text{假设 } \tilde{\alpha}\in A \text{ 对应到 } \alpha\in H^*(F)\end{array}\right]$$

使得

$$H^*(B)\otimes H^*(F)\longrightarrow H^*(E)\qquad \beta\otimes\alpha\mapsto\pi^*(\beta)\smile\tilde{\alpha},$$

是群同构.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 此时

$$\begin{array}{ccccc}
H^*(F) & \xleftarrow{\text{限制}} & H^*(E) & & \\
\Vert & & \uparrow & & \\
H^*(F) & \longleftarrow & H^*(B)\otimes H^*(F) & & \\
\alpha & \leftarrow\!\shortmid & 1\otimes\alpha & & \\
0 & \leftarrow\!\shortmid & \beta\otimes\alpha & & \deg\beta\geq 1
\end{array}$$

$\boxed{\text{注意 2}}$ 此时

$$\begin{array}{ccc}
H^*(E) & \underset{\pi^*}{\longleftarrow} & H^*(B)\\
\uparrow & & \Vert\\
H^*(B)\otimes H^*(F) & \longleftarrow & H^*(B)\\
\beta\otimes 1 & \leftarrow\!\shortmid & \beta
\end{array}$$

有两个非平凡情况能得到 formality.

1. **Leray–Hirsch 定理** 如果 $H^*(F)$ 是自由模 (wrt 系数), 且存在一个 $H^*(E)$ 上的一些元素 $\{\alpha_i\}$ 使得 $\{\alpha_i\}$ 限制在**每一点**处的纤维 $H^*(E_x)$ 都构成一组基.

2. **Serre–Leray 谱序列退化情况** 如果 $H^*(B)$ 和 $H^*(F)$ 都只有偶数维的自由模 (wrt 系数).

前者请看 [Hatcher], 内含大量应用, 包括一个计算 $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$ 的命题 (但是没有算出环结构, 所以我们不采用). 后者也推荐 [Hatcher].

请看我们上节提到的

$$G/B\xrightarrow{\pi}G/P_i.$$

这是一个以 $P_i/B\cong\mathbb{C}P^1$ 为纤维的向量丛. 一切都只有偶数维的同调, 所以我们可以放心地得到

$$H^*(G/B)=H^*(G/P_i)\otimes H^*(\mathbb{C}P^1).$$

回忆 $H^*(\mathbb{C}P^1)=\mathbb{Z}\oplus\mathbb{Z}\cdot[\text{点}]$. [注意: $\mathbb{C}P^1$ 的超平面就是点.]

等价地, 存在一个 $\omega_i\in H^2(G/B)$, 使得

$$\begin{array}{ccc}
H^2(\mathbb{C}P^1)=H^2(P/B) & \longleftarrow & H^2(G/B)\\
\cup & & \cup\\
[\text{点}] & \leftarrow\!\shortmid & \omega_i
\end{array}$$

以及, 任何一个 $H^*(G/B)$ 的元素都可以唯一地写成

$$\omega_i\smile\pi^*\alpha+\pi^*\beta,\qquad \alpha,\beta\in H^*(G/P_i).$$

回忆 Demazure operator 是拉回和推出的复合, 所以对于 $f=\omega_i\smile\pi^*\alpha+\pi^*\beta\in H^*(G/B)$,

$$\begin{aligned}
\partial_i f &= \partial_i(\omega_i\smile\pi^*\alpha+1\smile\pi^*\beta) && \text{定义}\\
&= \partial_i(\omega_i\smile\pi^*\alpha)+\partial_i(1\smile\pi^*\beta) && \text{定义}\\
&= \pi^*\big(\pi_*(\omega_i\smile\pi^*(\alpha))\big)+\pi^*\big(1\smile\pi_*(\pi^*\beta)\big) && \text{定义}\\
&= \pi^*\big(\pi_*\omega_i\smile\alpha\big)+\pi^*\big(\pi_*1\smile\beta\big)\big) &&\\
& && \because\text{ projective formula}\\
&= \pi^*(\pi_*\omega_i)\smile\pi^*\alpha+\pi^*(\pi_*1)\smile\pi^*\beta &&\\
& && \because\text{ cup 积是代数同态}\\
&= \pi^*\alpha && \text{请看下一段}
\end{aligned}$$

注意到 $\pi^*(\pi_*1)\in H^{-2}(G/B)=0$.

注意到 $\pi^*\pi_*\omega_i\in H^0(G/B)\cong\mathbb{Z}$ 是一个数, 所以可以用下面的拉回方阵计算 $\begin{smallmatrix}P/B&\to&\text{点}\\ \downarrow&&\downarrow\\ G/B&\to&G/P\end{smallmatrix}$,

$$\begin{tikzcd}
{[\text{点}]} \arrow[rrr, mapsto, bend left] & \in H^2(P/B) \arrow[r, "\text{推出}"] & H^0(\text{点}) \ni & 1\\
\omega_i \arrow[u, mapsto] \arrow[rrr, mapsto, bend right] & \in H^2(G/B) \arrow[r, "\text{推出}"'] \arrow[u, "\text{拉回}"] & H^0(G/P) \ni \arrow[u, equal, "\text{拉回}"] & \pi_*\omega_i \arrow[u]
\end{tikzcd}$$

所以 $\pi^*\pi_*\omega_i=\pi^*1=1$.

回忆上一节对紧致群的补充. 此时

$$G/B=U_n/\begin{pmatrix}* & & \\ & \ddots & \\ & & *\end{pmatrix},\qquad G/P_i=U_n/\begin{pmatrix}* & & & \\ & * & * & \\ & * & * & \\ & & & *\end{pmatrix}.$$

此时 $\mathfrak{S}_n$ 良定义作用在 $G/B=U_n/T$ 上 (我们这里只用右作用),

$$U_n/T\ni\qquad xT\overset{\sigma}{\longmapsto}x\sigma^{-1}T\qquad\in U_n/T.$$

这是良定义的是因为 $\sigma T\sigma^{-1}=T$.

此时

$$\mathfrak{S}_{\{1,\ldots,i-1\}}\times\mathfrak{S}_{\{i,i+1\}}\times\mathfrak{S}_{\{i+1,\ldots,n\}}$$

还良定义地作用在 $G/P_i=U_n/\begin{pmatrix}* & & & \\ & * & * & \\ & * & * & \\ & & & *\end{pmatrix}$ 上, 和上面相同的公式.

但是 s_i 作用是平凡的, 因为 $s_i \in \begin{pmatrix} * & & & \\ & * & * & \\ & * & * & \\ & & & * \end{pmatrix}$. 所以

$$H^*(G/B) \xleftarrow{\pi^*} H^*(G/P)$$

的像是关于是关于 s_i 对称的.

特别地, Demazure operator 的像在 s_i 作用下不变.

习题 1. 考虑紧致的版本 U_n 为酉群, T_K 为其对角矩阵. 注意到 $U_n/V = \mathcal{G}r(k,n)$, 其中 $V = \begin{pmatrix} U_k & \\ & U_{n-k} \end{pmatrix}$. 由此说明

$$H^*(\mathcal{F}\ell(n)) = H^*(\mathcal{F}\ell(k)) \otimes H^*(\mathcal{F}\ell(n-k)) \otimes H^*(\mathcal{G}r(k,n-k)).$$

[提示: 利用 $U_n/T_K \to U_n/V$. 需要证明 $V/T_K = \mathcal{F}\ell(k) \times \mathcal{F}\ell(n-k)$.]

习题 2. 回忆我们之前定义的 $[n] = \frac{\mathbf{q}^n - 1}{\mathbf{q} - 1}$, $[n]! = [n]\cdots[1]$. 我们可以定义 **q-二项式系数** $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$. 证明这是 $\mathbb{F}_\mathbf{q}$ 中 n 维空间 k 维子空间的数目. [提示: 我们之前将 $[n]!$ 解释成 Hilbert 多项式. 注意到张量的 Hilbert 多项式是 Hilbert 多项式相乘. 所以根据上题我们得到 $H^*(\mathcal{G}r(k,n))$ 的 Hilbert 多项式. 而 $\mathcal{G}r(k,n)$ 也有胞腔结构, 所以前面某道旗流形的问题是一样的.]

2.2 一些无穷空间

在进行更多的计算之前, 让我们先来定义一些无穷空间.

$$\mathbb{C}^\infty = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathbb{C}e_i = \{(x_i)_{i=1}^\infty : \text{几乎所有 } i \text{ 都有 } x_i = 0\}$$

其中 $e_i = (\cdots 0, \overset{i}{1}, 0 \cdots)$ 是标准基.

令

$$\mathrm{GL}_\infty = \left\{ (x_{ij})_{1 \le i,j} : \begin{array}{l} \text{可逆, 且在 } n \gg 0 \text{ 时, 除了左} \\ \text{上角 } n \times n \text{ 方块以外, 和单位} \\ \text{阵相同.} \end{array} \right\}$$

$$\mathrm{GL}_\infty = \left\{ \begin{pmatrix} A & & & \\ & 1 & & \\ & & 1 & \\ & & & \ddots \end{pmatrix} \right\}.$$

对于有限的 n, 考虑嵌入

$$\mathrm{GL}_n \longrightarrow \mathrm{GL}_{n+1} \qquad A \longmapsto \begin{pmatrix} A & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

那么 $\mathrm{GL}_\infty = \bigcup \mathrm{GL}_n$.

令 B_∞ 是 GL_∞ 中的上三角矩阵, 定义

$$\mathcal{F}\ell(\infty) = \left\{ V^0 \subseteq V^1 \subseteq \cdots : \begin{array}{l} \text{每个 } V_i \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 } i \text{ 维} \\ \text{线性子空间; 当 } n \text{ 充分} \\ \text{大时, } V^n \cong \mathbb{C}^n. \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}\ell(\infty) = \mathrm{GL}_\infty / B_\infty.$$

对于有限的 n, 考虑嵌入

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}\ell(n) & \longrightarrow & \mathcal{F}\ell(n+1) \\ \| & & \| \\ \mathrm{GL}_n / B_n & \longrightarrow & \mathrm{GL}_{n+1} / B_{n+1} \end{array}$$

那么 $\mathcal{F}\ell(\infty) = \bigcup \mathcal{F}\ell(n)$.

令 $P_k = \begin{pmatrix} B_k & * \\ & \mathrm{GL}_\infty \end{pmatrix} \subseteq \mathrm{GL}_\infty$, 定义

$$\mathcal{F}\ell(k,\infty) = \left\{ V^1 \subseteq \cdots V^k : \begin{array}{l} \text{每个 } V_i \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 } i \text{ 维} \\ \text{线性子空间.} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{F}\ell(k,\infty) = \mathrm{GL}_\infty / P_k.$$

为长度为 k 的旗 (断句) 流形 (我们没有对有限的定义).

令 $P_k = \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_k & * \\ & \mathrm{GL}_\infty \end{pmatrix} \subseteq \mathrm{GL}_\infty$, 定义

$$\mathcal{G}r(k,\infty) = \left\{ V \subseteq \mathbb{C}^\infty : \begin{array}{l} \text{每个 } V \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 } k \text{ 维} \\ \text{线性子空间.} \end{array} \right\}$$

$$\mathcal{G}r(\infty) = \mathrm{GL}_\infty / P_k.$$

对于有限的 n, 考虑嵌入

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{G}r(k,n) & \longrightarrow & \mathcal{G}r(k,n+1) \\ \| & & \| \\ \mathrm{GL}_n / P_{kn} & \longrightarrow & \mathrm{GL}_{n+1} / P_{k,n+1} \end{array}$$

(请允许我不详细说记号) 那么 $\mathcal{G}r(k,\infty) = \bigcup \mathcal{G}r(k,n)$.

作为特例, **无穷维射影空间**

$$\mathbb{C}P^\infty = \mathcal{G}r(1,\infty) = \left\{ V \subseteq \mathbb{C}^\infty : \begin{array}{l} \text{每个 } V \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 } 1 \text{ 维} \\ \text{线性子空间.} \end{array} \right\}$$

此时还可以写成

$$\mathbb{C}P^\infty = (\mathbb{C}^\infty \setminus 0) \big/ \mathbb{C}^\times.$$

我们在上面定义了以下拓扑空间

$\mathcal{F}\ell(\infty)$	无穷旗 “流形”
$\mathcal{F}\ell(k,\infty)$	长度 k 的无穷旗 “流形”
$\mathcal{G}r(k,\infty)$	无穷 Grassmannian
$\mathbb{C}P^\infty$	无穷射影空间

注意, 他们都不是流形, 也不紧致. 不过好在胞腔结构总是良好, 所以

$$\boxed{H^*(\text{以上}) \text{ 都是自由 Abel 群, 且只有偶数维上同调}}$$

这在下一节 (向量丛与式性类) 很重要.

具体一些,

$H^*(\mathcal{F}\ell(\infty))=\bigoplus\mathbb{Z}[\Sigma_w]$	$w\in\mathfrak{S}_\infty$.
$H^*(\mathcal{F}\ell(k,\infty))=\bigoplus\mathbb{Z}[\Sigma_w]$	$w\ \in\mathfrak{S}_\infty/\mathfrak{S}_{k+\infty}$ $=\{k$ 个不同的数$\}$.
$\mathcal{G}r(k,\infty)=\bigoplus\mathbb{Z}[\Sigma_w]$	$w\ \in\mathfrak{S}_\infty/\mathfrak{S}_k\times\mathfrak{S}_\infty$ $=\{k$ 个严格递增的数$\}$.
$\mathbb{C}P^\infty=\bigoplus\mathbb{Z}[\mathbb{C}P^n]$	$n\in\mathbb{Z}_{\geq 0}$

目前为止, 上述同调群中我们唯一知道环结构的只有 $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$.

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty)=\mathbb{Z}[t]$$

记多项式乘法. 这是因为

$$H^*(\mathbb{C}P^n)=\mathbb{Z}[t]/(t^{n+1}).$$

习题 1. 验证映射 $\mathcal{F}\ell(n)\to\mathcal{F}\ell(n+1)$ 是 "把 $\mathbb{C}^n$ 中的旗末尾添上 $\mathbb{C}^{n+1}$ 变成 $\mathbb{C}^{n+1}$ 的旗".

习题 2. 计算 $H^*(\mathcal{F}\ell(k,\infty))$ 的 *Hilbert* 多项式. [提示: 我们可以先算有限的情况再取极限, 计算 $\mathfrak{S}_{n+k}/\mathfrak{S}_n$

$$\prod_{i=1}^{n+k}\frac{\mathbf{q}^i-1}{\mathbf{q}-1}\Big/\prod_{i=1}^{n}\frac{\mathbf{q}^i-1}{\mathbf{q}-1}=\prod_{i=n+1}^{n+k}\frac{\mathbf{q}^i-1}{\mathbf{q}-1}=\prod_{i=1}^{k}\frac{\mathbf{q}^{i+n}-1}{\mathbf{q}-1}$$

取幂级数意义下的极限 $\mathbf{q}^n\to 0$, 所以最终结果是 $\frac{1}{(1-\mathbf{q})^k}$.]

2.3 更多计算

下面我们用上面提到的两条纤维丛上同调的定理做一些计算.

> 有两个非平凡情况能得到 formality.
>
> 1. **Leray–Hirsch 定理** 如果 $H^*(F)$ 是自由模 (wrt 系数), 且存在一个 $H^*(E)$ 上的一些元素 $\{\alpha_i\}$ 使得 $\{\alpha_i\}$ 限制在**每一点**处的纤维 $H^*(E_x)$ 都构成一组基.
>
> 2. **Serre–Leray 谱序列退化情况** 如果 $H^*(B)$ 和 $H^*(F)$ 都只有偶数维的自由模 (wrt 系数).

令 R 是一个交换环, 例如 $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$.

对于以 F 为纤维的纤维丛 $E\to B$, 如果

$$H^*(F;R)=\begin{cases}R & *=0\\ 0 & *\neq 0\end{cases}=H^*(\text{点};R)$$

那么

$$H^*(E;R)=H^*(B;R).$$

应用 1

记 $G=\mathrm{GL}_n$, 记 $T=\begin{pmatrix}* & & \\ & \ddots & \\ & & *\end{pmatrix}$ 为全体 GL_n 的对角矩阵, $B=\begin{pmatrix}* & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & *\end{pmatrix}$ 为全体 GL_n 的上三角矩阵. 那么

$$H^*(G/B)\cong H^*(G/T).$$

注意, 虽然二者同调群一样, 但是 G/T 不是紧致的.

这是因为 $\begin{matrix}G/T\\ \downarrow\\ G/B\end{matrix}$ 是以 B/T 为纤维的纤维丛, 而

$$B/T\cong\begin{pmatrix}1 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & 1\end{pmatrix}\cong\mathbb{C}^{n(n-1)/2}.$$

上述过程其实也是 "拓扑地打洞"(原本打洞是一个点一个点地打, 这个是一个开集一个开集地打)

我们也可以赋予 G/T 一个几何意义, 为全体线性无关的一维子空间构成的集合

$$\widetilde{\mathcal{F}\ell}(n)=\left\{(\ell_1,\ldots,\ell_n)\in\mathbb{C}P^{n-1}:{\scriptstyle\dim\ell_i=1\atop\ell_1,\ldots,\ell_n\ \text{线性无关}}\right\}.$$

且 $G/T\to G/B$ 的映射是 $(\ell_i)\mapsto F$, 其中

$$\boxed{F\text{ 的第 }i\text{ 个子空间}}=\boxed{\text{前 }i\text{ 个 }\ell_*\text{ 张成的 }i\text{ 维子空间}}.$$

应用 2

记 T_∞ 是 GL_∞ 中的对角矩阵.

$$\widetilde{\mathcal{F}\ell}(\infty)=\left\{(\ell_i)_{i=1}^\infty:\begin{matrix}\text{每个 }\ell_i\text{ 是 }\mathbb{C}^\infty\text{ 的 1 维}\\ \text{线性子空间; 全体 }\{\ell_i\}\\ \text{线性无关; 当 }n\text{ 充分大}\\ \text{时, }\ell_n\cong\mathbb{C}\cdot e_n.\end{matrix}\right\}$$

$$\widetilde{\mathcal{F}\ell}(\infty)=\mathrm{GL}_\infty/T_\infty$$

用上段一模一样的技巧可以得到

$$H^*(\mathcal{F}\ell(\infty))=H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(\infty)).$$

记

$$\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)=\left\{(\ell_i)_{i=1}^k:\begin{matrix}\text{每个 }\ell_i\text{ 是 }\mathbb{C}^\infty\text{ 的 1 维}\\ \text{线性子空间; 全体 }\{\ell_i\}\\ \text{线性无关;}\end{matrix}\right\}$$

$$\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)=\mathrm{GL}_\infty/\begin{pmatrix}T_k & * \\ & \mathrm{GL}_\infty\end{pmatrix}.$$

用上段一模一样的技巧还可以得到

$$H^*(\mathcal{F}\ell(k,\infty))=H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)).$$

应用 3

对于 $1 \leq i \leq k$ 我们可以考虑映射

$$\begin{array}{rccc} & \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty) & = & \mathrm{GL}_\infty / \begin{pmatrix} T_k & * \\ & \mathrm{GL}_\infty \end{pmatrix} \\ f_i = & \downarrow & & \downarrow \\ & \mathbb{C}P^\infty & = & \mathbb{C}P^\infty \end{array}$$

将第 i 个列向量取出张成一个线性空间.

等价地,

$$\begin{array}{lcl} \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty) = \left\{ (\ell_i)_{i=1}^k : \begin{array}{l} \text{每个 } \ell_i \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 1 维} \\ \text{线性子空间; 全体 } \{\ell_i\} \\ \text{线性无关;} \end{array} \right\} & & \ni (\ell_i)_{i=1}^k \\ \qquad\qquad\downarrow & & \quad\ \downarrow \\ \mathbb{C}P^\infty = \left\{ V \subseteq \mathbb{C}^\infty : \begin{array}{l} \text{每个 } V \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 1 维} \\ \text{线性子空间.} \end{array} \right\} & & \ni \ell_i \end{array}$$

其在 ℓ_i 处的纤维是

$$\left\{ (\ell_i)_{i=1}^{k-1} : \begin{array}{l} \text{每个 } \ell_i \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty/\ell_i \text{ 的} \\ \text{1 维线性子空间; 全体} \\ \{\ell_i\} \text{ 线性无关;} \end{array} \right\} \cong \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k-1,\infty).$$

此时纤维和底空间都只有偶数维的上同调, 所以

$$\begin{aligned} & H^*(\mathcal{F}\ell(k,\infty)) = H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)) \\ & = H^*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k-1,\infty)) \\ & = H^*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes H^*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k-2,\infty)) \\ & = H^*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes \overset{k}{\cdots} \otimes H^*(\mathbb{C}P^\infty) \end{aligned}$$

注意 1 *虽然我们已经知道*

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty) = \mathbb{Z}[t]$$

且乘法是多项式乘法. 但是目前为止从上面的计算我们不能对 $H^*(\mathcal{F}\ell(k,\infty))$ 的环结构说些什么.

但是上面的 f_i 不止一个,

$$\begin{tikzcd} & & \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty) \arrow[dll, "f_1"] \arrow[dl, "f_2"] \arrow[dr] \arrow[drr] & & \\ \mathbb{C}P^\infty & \mathbb{C}P^\infty & \cdots & \mathbb{C}P^\infty & \mathbb{C}P^\infty \end{tikzcd}$$

$$\begin{tikzcd} & & H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)) & & \\ H^*(\mathbb{C}P^\infty) \arrow[urr, "f_1^*"] & H^*(\mathbb{C}P^\infty) \arrow[ur, "f_2^*"] & \cdots & H^*(\mathbb{C}P^\infty) \arrow[ul] & H^*(\mathbb{C}P^\infty) \arrow[ull] \end{tikzcd}$$

由此可以得到一个

$$H^*(\mathbb{C}P^\infty) \otimes \overset{k}{\cdots} \otimes H^*(\mathbb{C}P^\infty) \longrightarrow H^*(\mathcal{F}\ell(k,\infty))$$

生成元恰好打到我们上面计算同构中的生成元, 因此这是一个**环**同构.

记 x_i 是 $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$ 的 (典范) 生成元在

$$f_i^* : H^*(\mathbb{C}P^\infty) \to H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty))$$

下的像. 于是我们证明了环同构

$$H^*(\mathcal{F}\ell(k,\infty)) = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k].$$

注意 1 *注意 $\mathbb{C}P^\infty$ 上是有典范的定向, 从而 $H^*(\mathbb{C}P^\infty)$ 的生成元是有典范的选取的 (在有限时, 是超平面的基本类).*

应用 4

下面考虑自然映射

$$\begin{array}{ccc} \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty) & = & \mathrm{GL}_\infty / \begin{pmatrix} T_k & * \\ & \mathrm{GL}_\infty \end{pmatrix} \\ \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{G}r(k,\infty) & = & \mathrm{GL}_\infty / \begin{pmatrix} \mathrm{GL}_k & * \\ & \mathrm{GL}_\infty \end{pmatrix} \end{array}$$

注意 1 *其实不难根据胞腔结构验证这个诱导的上同调映射是单射. (即 $[\Sigma_w] \mapsto 0$ 除非 w 是陪集中长度最小者). (这个对有限的情况也对, 好像前面忘说这件事了)*

等价地,

$$\begin{array}{lcl} \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty) = \left\{ (\ell_i)_{i=1}^k : \begin{array}{l} \text{每个 } \ell_i \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 1 维} \\ \text{线性子空间; 全体 } \{\ell_i\} \\ \text{线性无关;} \end{array} \right\} & & \ni (\ell_i)_{i=1}^k \\ \qquad\qquad\downarrow & & \quad\ \downarrow \\ \mathcal{G}r(k,\infty) = \left\{ V \subseteq \mathbb{C}^\infty : \begin{array}{l} \text{每个 } V \text{ 是 } \mathbb{C}^\infty \text{ 的 } k \text{ 维} \\ \text{线性子空间.} \end{array} \right\} & & \ni \mathrm{span}(\ell_i)_{i=1}^k \end{array}$$

且这个映射的纤维是 $\mathrm{GL}_k / T_k = \widetilde{\mathcal{F}\ell}(k)$.

注意到, $\widetilde{\mathcal{F}\ell}$ 上有一个显然的 $\mathfrak{S}_k$ 作用, 即置换这些一维子空间的指标. 因为这等于置换上面那些 f_i, 反映在上同调上恰好对应

$$\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_k]$$

上的置换作用.

而不论怎么换,

$$\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty) \longrightarrow \mathcal{G}r(k,\infty)$$

的像不变.

所以综上所述诱导的映射

$$H^*(\mathcal{G}r(k,\infty)) \longrightarrow H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty))$$

factor through

$$H^*(\mathcal{G}r(k,\infty)) \longrightarrow H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty))^{\mathfrak{S}_k} = \text{对称多项式环}.$$

注意我们之前说过这是一个单射.

而我们可以计算 Grassmannian 的 Hilbert 多项式, 和对称多项式环的 Hilbert 多项式 (在 $\mathbb{Q}$ 和任何有限域 $\mathbb{F}_p$ 上), 二者恰好是一样的. 所以下面是同构

$$H^*(\mathcal{G}r(k,\infty)) \longrightarrow H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty))^{\mathfrak{S}_k} = \text{对称多项式环}.$$

注意 1 *A type 的好处在于 $\mathcal{G}r(k,\infty)$ 只有偶数维上同调, 而对称多项式也可以在任何环上刻画. 一般情况只能说明 $\otimes\mathbb{Q}$ 后是同构.*

此时因为 $\mathcal{G}r(k,\infty)$ 只有偶数维上同调, 所以

$$H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)) = H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k)) \otimes H^*(\mathcal{G}r(k,\infty)).$$

不过这个同构只是作为 $H^*(\mathcal{G}r(k,\infty))$ 代数.

但是我们已经可以观察到

映射 $H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k,\infty)) \to H^*(\widetilde{\mathcal{F}\ell}(k))$ 是满射, 且 kernel 是 $H^{\geq 1}(\mathcal{G}r(k,\infty))$ 生成的理想.

于是一石二鸟,

$$H^*(\mathcal{G}r(k,\infty)) = \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_k]^{\mathfrak{S}_k} = \text{对称多项式环}.$$

$$H^*(\mathcal{F}\ell(k)) = \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_k]/\langle\text{常数项为 0 的对称多项式}\rangle.$$

前者被称为 **invariant algebra**, 后者被称为 **coinvariant algebra**.

我们现在其实已经可以说明 Demazure operator 的表达式

$$\partial_i f = \frac{f(x) - f(s_i x)}{x_i - x_{i+1}}.$$

回顾

$$P_i/B \to G/B \to G/P.$$

回忆 Demazure operator 把

$$\omega_i \smile \pi^*\alpha + \pi^*\beta \longmapsto \pi^*\alpha$$

其中 $\omega_i \in H^*(G/B)$ 是任何一个限制在 $H^*(P_i/B)$ 是 [点] 的同调类.

仔细追一下上面的过程会发现 ω_i 可以直接取作

$$x_i \in H^*(G/B) = \mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]/\langle\text{常数项为 0 的对称多项式}\rangle$$

而 α, β 关于 s_i 的作用对称, 所以对于 $\phi = \omega_i \smile \pi^*\alpha + \pi^*\beta$

$$\partial_i \phi = \frac{\phi - s_i\phi}{x_i - x_{i-1}}.$$

注意 1 *之后有了式性类作为工具这个可以看得更清楚.*

应用 5

考虑 “取第一个子空间”

$$\mathcal{F}\ell(n) \longrightarrow \mathbb{C}P^{n-1}$$

是一个以 $\mathcal{F}\ell(n-1)$ 为纤维的纤维丛, 所以

$$\begin{aligned} H^*(\mathcal{F}\ell(n)) &= H^*(\mathbb{C}P^{n-1}) \otimes H*(\mathcal{F}\ell(n-1)) \\ &= H^*(\mathbb{C}P^{n-1}) \otimes H^*(\mathbb{C}P^{n-2}) \otimes H*(\mathcal{F}\ell(n-2)) \\ &= H^*(\mathbb{C}P^{n-1}) \otimes \cdots \otimes H^*(\mathbb{C}P^1) \end{aligned}$$

但是仔细核查

$$\mathcal{F}\ell(n) \longrightarrow \mathcal{F}\ell(n,\infty)$$

诱导的

$$\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n] = H^*(\mathcal{F}\ell(n,\infty)) \longrightarrow H^*(\mathcal{F}\ell(n))$$

会发现我们可以选取提升 (回忆 formality), 使得 x_i 的像恰好是 $H^*(\mathbb{C}P^{n-i})$ 的生成元.

我们已经知道

$$H^*(\mathbb{C}P^k) = \mathbb{Z}[t]/(t^{k+1}) = \bigoplus_{i=0}^{k} \mathbb{Z}\cdot t^i.$$

所以

$$H^*(\mathcal{F}\ell(n)) = \bigoplus_{\lambda\leq\rho} \mathbb{Z}\cdot x^\lambda$$

其中 $\rho = (n-1, n-2, \ldots)$, $\lambda \leq \rho$ 表示对每个 $i = 1,\ldots,n$ 都有 $\lambda_i \leq n-i$, $x^\lambda = x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n}$.

但是同样我们不知道这是否是环同构 (实际上不是环同态).

习题 1. *计算对称多项式的 Hilbert 多项式. 计算 Grassmannian 的 Hilbert 多项式.*

习题 2. *证明作为 $\mathfrak{S}_n$ 的表示, $H^*(\mathcal{F}\ell(n);\mathbb{C})$ 同构于群环.*

[提示: 我们断言同构

$$H^*(\mathcal{F}\ell(n,\infty)) = H^*(\mathcal{F}\ell(n)) \otimes H^*(\mathcal{G}r(n,\infty)),$$

是表示的同构. 所以 $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$ 的 graded 特征是

$$\chi(g) = \frac{1}{\det(1-\mathbf{q}\pi(g))} \Big/ \frac{1}{(1-\mathbf{q})(1-\mathbf{q}^2)\cdots(1-\mathbf{q}^n)}$$

其中 $\pi : \mathfrak{S}_n \to \mathrm{GL}_n$ 是自然表示. 注意只有在 $\pi(g) = \mathrm{id}$, 带入 $t = 1$ 才不是 0, 这恰好是群环的特征.]

习题 3. 找一个下列命题的代数证明.

$$\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]/\langle\text{常数项为 0 的对称多项式}\rangle$$

是自由 *Abel* 群, 且以那些支配序下小于 $x_1^{n-1}\cdots x_{n-1}$ 的单项式

$$\{x_1^{\lambda_1}\cdots x_n^{\lambda_n} : (\lambda_1,\ldots,\lambda_n) \underset{\text{每项}}{\le} (n-1,n-2,\cdots,1,0)\}$$

作为一组基. [提示: 反正我没找到过, $\otimes\mathbb{Q}$ 的版本反而见的很多.]

习题 4. 计算

$$\mathcal{F}\ell(k,n) = \left\{V^1 \subseteq \cdots V^k : \begin{array}{l}\text{每个 } V_i \text{ 是 } \mathbb{C}^n \text{ 的 } i \text{ 维} \\ \text{线性子空间.}\end{array}\right\}$$

$$\mathcal{F}\ell(k,n) = \mathrm{GL}_n \Big/ \begin{pmatrix} B_k & * \\ & \mathrm{GL}_{n-k}\end{pmatrix}.$$

的上同调群. [提示: 考虑 $\widetilde{\mathcal{F}\ell}(n,\infty)\to\widetilde{\mathcal{F}\ell}(n-k,\infty)$ 将 (ℓ_i) 后 $n-k$ 个选出. 另一方面也可以考虑纤维丛 $\mathcal{F}\ell(k,n)\to\mathbb{C}P^{n-1}$, 这以 $\mathcal{F}\ell(k-1,n-1)$ 为纤维.]

2.4 Grassmannian 流形

参考文献

- Hatcher. Algebraic Topology.
- Hatcher. Spectral Sequences.
- 時枝正. Topology in Four Days [翻译: 拓扑四日谈].
- Hiller. Geometry of Coxeter Groups.

$\mathcal{F}\ell(n)$	群	$\bigoplus\mathbb{Z}\cdot[\Sigma_w]$ $\qquad \bigoplus\mathbb{Z}\cdot x^\lambda$
	环	$\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]/\langle$常数项为 0 的对称多项式$\rangle$
$\mathcal{F}\ell(n,\infty)$	群	$\bigoplus\mathbb{Z}\cdot[\Sigma_w]$
	环	$\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]$
$\mathcal{G}r(n,\infty)$	群	$\bigoplus\mathbb{Z}\cdot[\Sigma_\lambda]$
	环	$\mathbb{Z}[x_1,\ldots,x_n]^{\mathfrak{S}_n}$

$\boxed{\text{不论怎么算 } \mathcal{F}\ell(n) \text{ 的上同调, 结果都是一样的}}$

(这是一句废话吗?)

3 向量丛

3.1 切空间的计算

令 $G=\mathrm{GL}_n$, H 为一个子群, 记 $\mathfrak{g}=\mathfrak{gl}_n$, $\mathfrak{h}$ 为 H 的 Lie 代数. 记 $\mathrm{ad}_x:\mathfrak{g}\to\mathfrak{g}$ 为共轭 $A\mapsto xAx^{-1}$.

对于 $xH\in G/H$, 考虑商空间 $\mathfrak{g}/\mathrm{ad}_x\,\mathfrak{h}$. 注意到 $xH=yH$ 时, $\mathfrak{g}/\mathrm{ad}_x\,\mathfrak{h}=\mathfrak{g}/\mathrm{ad}_y\,\mathfrak{h}$.

考虑映射

$$\bigcup_{x\in G/H}\mathfrak{g}/\mathrm{ad}_x\,\mathfrak{h}\longrightarrow G/H$$

这定义了一个 G/H 向量丛. 实际上这就是 G/H 的切丛.

对于 $g\in G$, 定义

$$\mathrm{ad}\,g:\mathfrak{g}/\mathrm{ad}_x\,\mathfrak{h}\xrightarrow{\mathrm{ad}\,g}\mathfrak{g}/\mathrm{ad}_{gx}\,\mathfrak{h}.$$

这复原了 G 在 G/H 上的左乘作用.

$\boxed{\text{注意 1}}$ 要严格说明, 请看下图. 利用**右**平移,

$$\begin{array}{ccc} G\times\mathfrak{g} & \xrightarrow{\sim} & TG \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & = & G\end{array}$$

得到 G 上诱导的 TG 作用可以重新写成

$$G\underset{(\text{左乘}\times\text{共轭})}{\curvearrowright} G\times\mathfrak{g}\underset{(\text{右乘}\times\text{平凡})}{\curvearrowleft} G$$

而在 x 处的 H 轨道等于把 H 这个子群从单位元处移过来, 所以 (切片定理)

$$xH \text{ 在 } G/H \text{ 的切空间} = \frac{x \text{ 在 } G \text{ 上的切空间}}{x \text{ 在 } H \text{ 轨道上的切空间}} = \mathfrak{g}/\mathrm{ad}_x\,\mathfrak{h}.$$

因为商比较难把握, 所以我们考虑其对偶, 即余切丛 $T^*(G/B)$. 为了计算 $(\mathfrak{g}/\mathrm{ad}_x\,\mathfrak{b})^*$, 我们考虑 $\mathfrak{g}$ 上的二次型

$$\mathfrak{gl}_n\times\mathfrak{gl}_n:(A,B)\mapsto\mathrm{tr}(AB).$$

(注意: 这不是 Killing form)

不难验证这是完美配对, 且

$$\text{上三角代数}\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix}^{\perp} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & 0 \end{pmatrix}\text{严格上三角代数}$$

$$\langle\mathrm{ad}_x\,A,B\rangle=\langle A,\mathrm{ad}_{x^{-1}}\,B\rangle$$

令 $\mathfrak{n}$ 为严格上三角代数. 因此

$$(\mathfrak{g}/\mathrm{ad}_x\,\mathfrak{b})^*=\mathrm{ad}_x\,\mathfrak{n}.$$

对应的 $g\in G$ 左平移作用 (注意到余切丛左乘诱导的方向 $g:T^*_{gx}\to T^*_x$)

$$\mathrm{ad}_{gx}\,\mathfrak{n}\xrightarrow{\mathrm{ad}_{g^{-1}}}\mathrm{ad}_x\,\mathfrak{n}.$$

$\boxed{\text{注意 1}}$ 令 B 是上三角矩阵群, $\mathfrak{b}$ 为上三角 *Lie* 代数. 那么

$$\begin{aligned}\mathfrak{g}/\operatorname{ad}_x\mathfrak{b} &= \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ * & \cdots & * \end{pmatrix} \Big/ x\begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix}x^{-1} \\ &= x\begin{pmatrix} * & & \\ \vdots & \ddots & \\ * & \cdots & * \end{pmatrix}x^{-1}\end{aligned}$$

算是算出来了, 但是我们没法从里面看出 $g \in G$ 的作用.

考虑 B 在 G 中所有的共轭类

$$\mathcal{B} = \{x\mathfrak{b}x^{-1} \subseteq G : x \in G\}.$$

考虑

$$G \to \mathcal{B} \qquad x \mapsto x\mathfrak{b}x^{-1}$$

不难发现 $x\mathfrak{b}x^{-1} = y\mathfrak{b}y^{-1}$ 当且仅当

$$y^{-1}x \in \{g \in G : g\mathfrak{b}g^{-1} = \mathfrak{b}\} \overset{\text{线性代数}}{=\!=} B$$

所以有同构

$$\begin{tikzcd} G \overset{\curvearrowright}{_{\text{左乘}}} G/B \arrow[d] & xB \arrow[d, mapsto] \\ G \overset{\curvearrowright}{_{\text{共轭}}} \mathcal{B} & x\mathfrak{b}x^{-1} \end{tikzcd}$$

我们考虑 B 的共轭类也有类似的结果.

所以 G/B 有很多解释.

$$\begin{tikzcd} & x \arrow[ddl, mapsto] & & x \arrow[ddr, mapsto] & \\ & & G/B \arrow[dl] \arrow[d] & & \\ \operatorname{span}(x) & \mathcal{F}\ell(n) \arrow[r] & \mathcal{B} & & x\mathfrak{b}x^{-1} \end{tikzcd}$$

$$\{V^i\} \longmapsto \{x \in \mathfrak{g} : xV^i = V^i\}$$

在一个 $\text{flag}\{V^i\} \in \mathcal{F}\ell(n)$ 处的余切空间是

$$\{x \in \mathfrak{g} : x \text{ 幂零}, xV^i = V^i\}.$$

在一个 $\mathfrak{b}' \in \mathcal{B}$ 处的切空间是 $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}'$. 余切空间是

$$\{x \in \mathfrak{b}' : x \text{ 幂零}\}.$$

习题 1. 验证

$$\{g \in G : g\mathfrak{b}g^{-1} = \mathfrak{b}\} \overset{\text{线性代数}}{=\!=} B.$$

习题 2. 验证 $\mathcal{F}\ell(n) \to \mathcal{B}$ 的映射是

$$\{V^i\} \longmapsto \{x \in \mathfrak{g} : xV^i = V^i\}.$$

习题 3 (Springer 理论). 考虑矩阵

$$x = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \\ & 0 & \\ & & 0 \end{pmatrix}.$$

记

$$\mathcal{F}\ell_x = \{V^i \in \mathcal{F}\ell(n) : xV^i = V^i\}.$$

求 $\dim \mathcal{F}\ell_x$, 以及 $\mathcal{F}\ell_x$ 有多少不可约分支? [提示：其实，这是 x 的不变子空间组成的旗. 只要分两种情况，V^2 是特征子空间时，有 $\dim \mathbb{C}P^1$ 多种选择. 当 V^2 不是特征子空间时，V_2 必须选为 $x^{-1}(V^1)$. 而 V^1 的选择也有 $\dim \mathbb{C}P^1 \setminus \infty$ 多种选择，维数是 2，不可约分支数目是 2. 这分别对应 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1}\end{array}$ 和 $\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \cline{1-1}\end{array}$.]

$\boxed{\text{注意 1}}$ 这个可以推广到任意的幂零矩阵上. 注意 *Jordan* 标准型告诉我们幂零矩阵也由 *Young* 图标定. 对应的连通分支的数目恰好是 *hook length.*

4 K 理论速成

5 等变拓扑速成

5.1 等变上同调

5.2 等变 K 理论

6 收纳箱

6.1 Connected K-theory

6.2 相交上同调

6.3 量子上同调

6.4 反常层

6.5 旗流形的推广

6.6 Hilbert 概形 (Hilbert Schemes)

6.7 箭图簇 (Quiver Varieties)

6.8 动量图 (Moment Graphs)

6.9 热带几何?

6.10 扭结

6.11 Buildings?

6.12 Cluster 代数

6.13 Hall 代数