1 扭结

下面我们谈论扭结理论.

一个**扭结 (knot)** 是嵌入

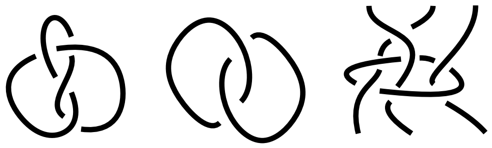
$$S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

的同痕类 (同痕 = 不发生自交的同伦). 一个 **link** 是嵌入

$$\bigsqcup^n S^1 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

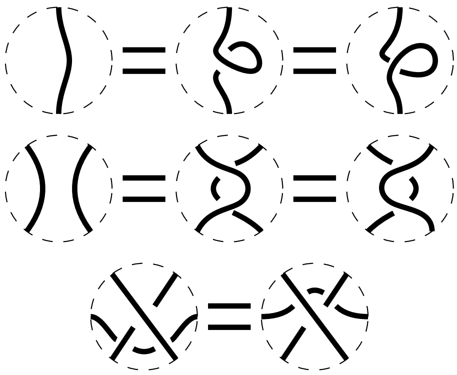
的一个同痕类.

其实之后我们操作就和同痕没关系了. 我们可以选择一个 $\mathbb{R}^3$ 中一般位置的平面将其投影下来, 得到扭结图.



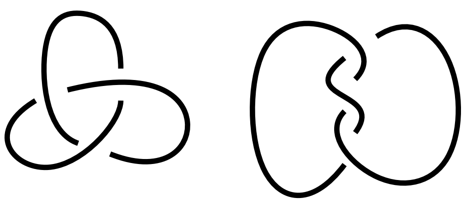
(严格来说应该标上定向)

问题是如何判断同一个扭结的不同投影相同呢? 考虑如下的 **Reidemeister move**



(带定向) 结论是两个扭结同构当且仅当二者可以通过上述操作转化.

但是实际上我们很难判断两个扭结是否是同一个, 例如这两个扭结是同一个.



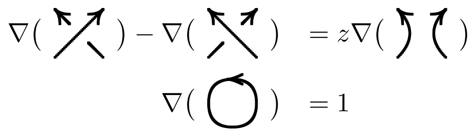
(我没发现怎么把这俩折腾成一样的, 这个可能自己打个结试试就能看出来) 于是发现更多的扭结不变量来区分他们是扭结理论的核心问题.

请看`http://katlas.org/wiki/Main_Page`.

1.1 Conway 和 Jones 多项式

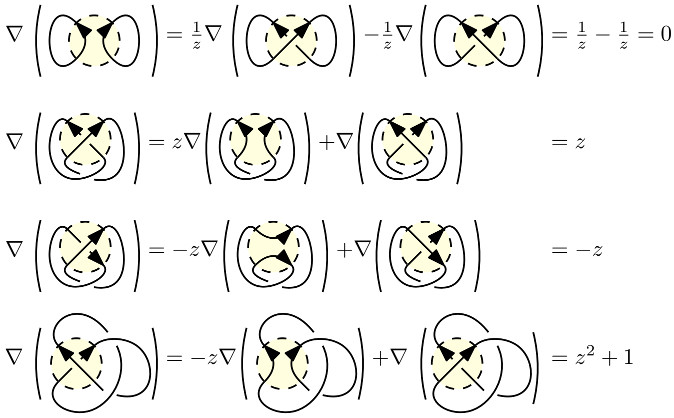
扭结理论中最具启发性的结果无疑是 Conway 多项式和 Jones 多项式.

Conway 多项式是对 link 定义的, 是唯一使得



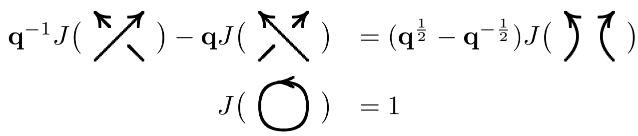
的指定. 这里的意思是局部上的变形.

例如下面的例子,



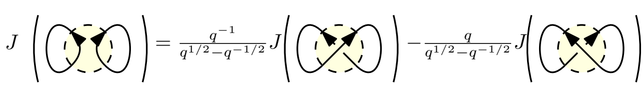
实际上, 这是扭结不变量是需要证明的, 即最终得到的多项式和 "解开  " 的顺序无关.

Jones 多项式是也对 link 定义的, 是唯一使得

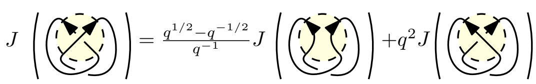


的指定. 注意, Jones 多项式一般不是多项式.

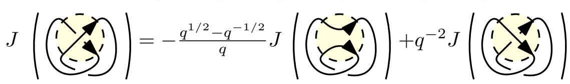
例如下面的例子,



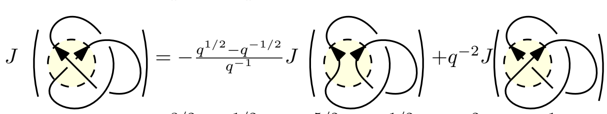
$$= \frac{q^{-1}-q}{q^{1/2}-q^{-1/2}} = -q^{1/2} - q^{-1/2}$$



$$= q^{3/2} - q^{1/2} - q^{3/2} - q^{5/2} = -q^{5/2} - q^{1/2}$$



$$= -q^{-5/2} - q^{-1/2}$$



$$= (q^{3/2} - q^{1/2})(-q^{-5/2} - q^{-1/2}) + q^{-2} = -q^{-1} + q^{-3} - q^{-4}$$

实际上，这是扭结不变量是需要证明的，即最终得到的多项式和“解开 ”的顺序无关.

注意 1　*局部上的这些关系被称为* **skein relation**.

Conway 和 Jones 多项式可以统一地推广到 — **HOMFLYPT 多项式**. *这是一个扭结不变量 I 使得*

$$t\cdot I(\ ) - t^{-1}\cdot I(\ ) = x\cdot I(\ )$$
$$I(\ ) = 1$$

其取值是 $\mathbb{Z}[t^{\pm1}, x^{\pm1}]$.

The HOMFLYPT polynomial was found independently and simultaneously by 4 different groups: Freyd and Yetter, Ocneanu, Millet and Lickorish and Hoste. All three sent their manuscripts to the same journal (BAMS) in October 1984. The editors noticed and a joint paper resulted.

Conway 多项式和 Jones 多项式启发 Vassiliev 定义 **有限形不变量**. 现在我们放松条件，允许扭结图中出现交叉 . 记

$$X_n = \left\{ 有\ n\ 个\ \ 的\text{“扭结”}类 \right\}.$$

那么 X_0 就是扭结.

一个 $v: X_0 \longrightarrow$ 某个 Abel 群 被称为 **扭结不变量**. 任何一个扭结不变量 v 都可以延拓到任何一个 X_n 上通过

$$v(\ ) = v(\ ) - v(\ ).$$

我们说 v 的阶 $\leq n$ 如果 $v(X_{n+1}) = 0$.

例如 Conway 多项式 ∇ 的 n 次系数就是一个 $\leq n$ 阶不变量，因为此时

$$\nabla(\ ) = z\nabla(\ ).$$

下面我们固定一个域 $\mathbb{F}$. 考虑所有到 $\mathbb{F}$ 上的所有 $\leq n$ 阶的不变量 $\mathbf{V}_n$，这是一个线性空间. 记有限阶不变量

$$\mathbf{V} = \bigcup_{n\geq 0} \mathbf{V}_n.$$

这对逐点定义的乘法构成一个 $\mathbb{F}$ 代数，且

$$\mathbf{V}_n\mathbf{V}_m \subseteq \mathbf{V}_{m+n}.$$

我们有

$$\dim \mathbf{V}_0 = 1.$$

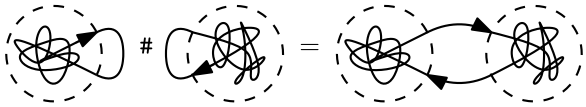
因为任何 $v \in \mathbf{V}_0$ 都满足

$$0 = v(\ ) = v(\ ) - v(\ ).$$

说明扭结可以随意穿过自身而 v 不变. 这样的不变量只有常数.

习题 1.　证明对于扭结，*Conway* 多项式是常数项为 1 的偶函数. ［提示：证明有两个连通分支的一定是奇函数. 而 $z=0$ 时，关系已经退化为 $\nabla(\ ) = \nabla(\ )$. ］

习题 2.　考虑扭结的 **连通和**



证明验证这和切断的点无关，且

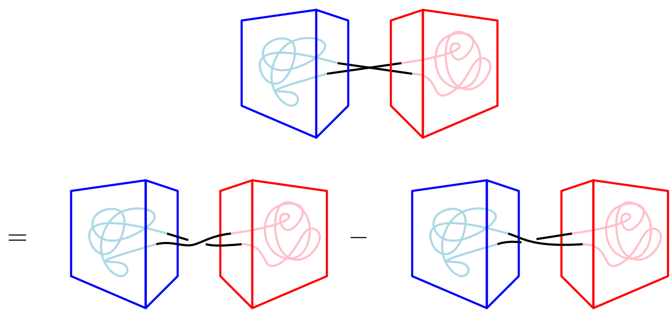
$$\begin{aligned} \nabla(K_1\#K_2) &= \nabla(K_1)\nabla(K_2), \\ J(K_1\#K_2) &= J(K_1)J(K_2). \end{aligned}$$

［提示：因为可以给定义两边同时连通和，然后实现归纳. ］

习题 3. 证明 *Jones* 多项式作换元 $q = e^{\hbar} = 1+\hbar+\frac{\hbar^2}{2}+\cdots$，作为幂级数在 $\hbar^n$ 前的系数是 n 阶不变量.

$$J(\ ) = \hbar\cdot f(\hbar)\cdot J(\ )$$

习题 4.　证明 $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_0$.　［提示：如果 $v \in \mathbf{V}_1$，那么 $v|_{X_2} = 0$，所以 X_1 中的 ``扭结'' 除了唯一的交叉，其他部分可以随意穿过自身而 v 不变. 所以我们可以将扭结交叉整理到两端.



但是图中红色箱子旋转 360° 正好相等，故抵消，于是 $\mathbf{V}_1 = \mathbf{V}_0$.］

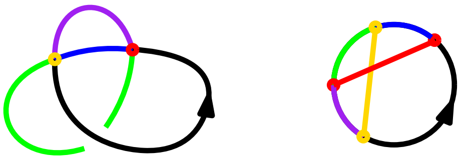
1.2　弦图

研究有限形不变量的基本工具是弦图.

回忆

$$X_n = \left\{ 有\ n\ 个\ \ 的\text{“扭结”}类 \right\}.$$

取 X_n 中某个 $S^1 \to \mathbb{R}^3$, 那么存在 S^1 上 n 对点, 每对对应一个  . 我们把每对点用弦连起来, 称为**弦图 (chord diagram)** .

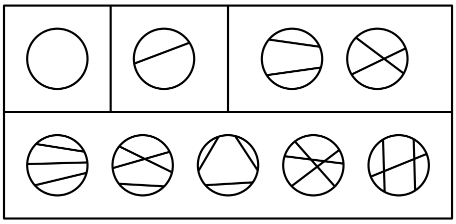


抽象地, 弦图是 S^1 上指定的 n 对点, 并且商掉一个同伦关系.

称一个弦图的阶是弦的数目, 记

$$\mathbf{CD}_n = \{\text{有 } n \text{ 条弦的弦图}\}.$$

下图是 3 阶以内的所有弦图



(当然, 弦不必画成直线)

第一段给出了一个映射

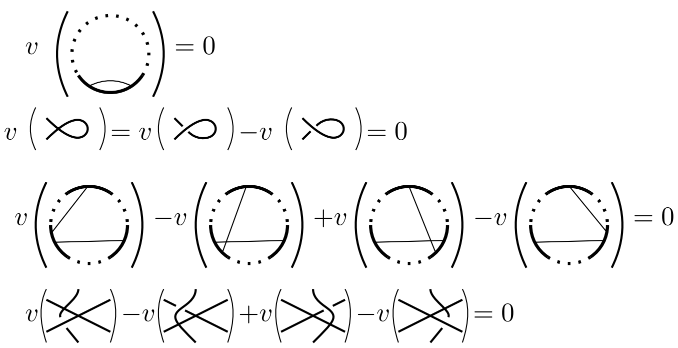
$$X_n \longrightarrow \mathbf{CD}_n.$$

这实际上是具有范性质的.

对于任何一个 n 阶不变量 $v: X_n \to A$, 存在唯一一个 $\hat{v}: \mathbf{CD}_n \to A$ 使得右图交换.

$$\begin{tikzcd} X_n \arrow[d] \arrow[dr, "v"] & \\ \mathbf{CD}_n \arrow[r, dashed, "\exists!"', "\hat{v}"] & A \end{tikzcd}$$

但是反之, 不是任何一个 $f: \mathbf{CD}_n \to A$ 复合得到的 $X_n \to A$ 都是一个不变量. 我们需要加一些关系才行. 已知的关系是 1T 关系 (一项关系) 和 4T 关系 (四项关系).



考虑

$$\mathcal{A}_n = \begin{array}{l}\text{以 } \mathbf{CD}_n \text{ 为基生成} \\ \text{的自由 Abel 群}\end{array} \Big/ (\text{1T 关系, 4T 关系}).$$

$$\mathcal{A} = \bigoplus_{n \geq 0} \mathcal{A}_n.$$

那么根据上面的讨论, 存在单射

$$\mathbf{V}_n/\mathbf{V}_{n-1} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{A}_n, \mathbb{F}).$$

Kontsevich 积分说明在 $\mathbf{F} = \mathbb{C}$ 上时,

$$\mathbf{V}_n/\mathbf{V}_{n+1} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{A}_n, \mathbb{C}).$$

是同构.

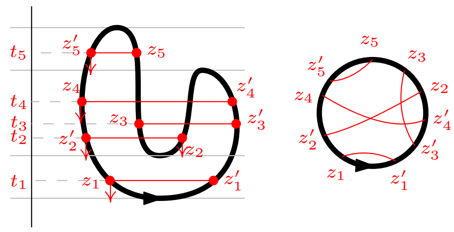
我们视 $\mathbb{R}^3 = \mathbb{C} \times \mathbb{R}$. 最后一个分类看做是高度. 对一个放在其中扭结 L, 我们技术性地假设其临界点不在同一高度. 根据环绕数积分定义的启发, Kontsevich 定义了

$$K_n(L) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \int_t \sum_z (-1)^{\downarrow} D \bigwedge_{i=1}^{n} \frac{\mathrm{d}z_i - \mathrm{d}z_i'}{z_i - z_i'} \in \mathcal{A}_n.$$

其中

$\int_t$	取遍 $t_1 < \cdots < t_n$, 且其中每个 t_i 都不含临界点.
$\sum_z$	取遍 $\{z_1, z_1'\}$, ..., $\{z_n, z_n'\}$, 其中每个 z_i, z_i' 是 L 上高度为 t_i 的两个点.
$\downarrow$	全体 z_i 和 z_i' 中下降的次数 (扭结定向).
D	在 S^1 原像上配对 z_i 和 z_i' 原像得到的弦图

注意 1 *这个积分收敛利用了 1T 和 4T 关系.*



图中的图形  被称为 **hump** .

定义

$$K(L) = \sum_{n \geq 0} K_n(L) \in \mathcal{A}.$$

定义

$$I(L) = \frac{K(L)}{K(\text{hump})^{c/2}} \in \mathcal{A}$$

其中 c 是 L 的临界点的数目, 分母按照幂级数的展开. 这是一个扭结不变量.

于是任何一个 $\mathcal{A}_n \xrightarrow{v} \mathbb{C}$, 通过复合

$$X_0 \xrightarrow{I_n(L)} \mathcal{A}_n \xrightarrow{v} \mathbb{C}$$

都可以得到一个有限型不变量. 可以证明这是

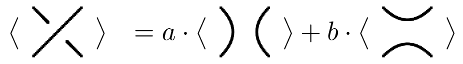
$$\mathbf{V}_n/\mathbf{V}_{n+1} \longrightarrow \mathrm{Hom}(\mathcal{A}_n, \mathbb{C})$$

的一个逆.

习题 1. 验证 $\mathcal{A}$ 对连通和构成代数. [提示: 利用 4T 关系, 我们可以 ``把弦从一侧挪到另一侧''.]

Jones 多项式的解释

Jones 多项式还有另一个构造的角度. 我们先暂时忽略定向, 定义 **Kauffman bracket** $\langle\cdot\rangle$

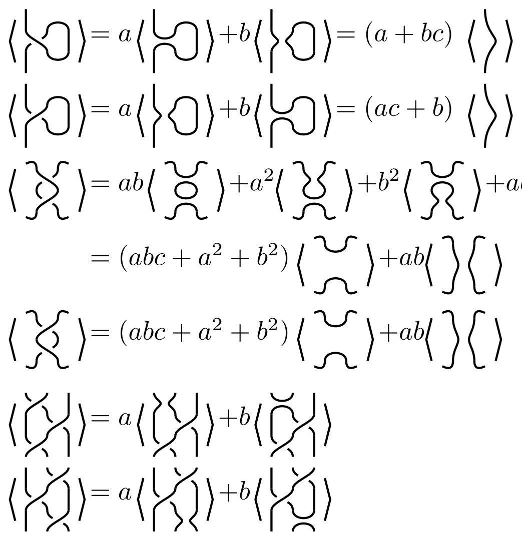


$$\langle L \sqcup \bigcirc \rangle = c \cdot \langle L \rangle$$

其中 a, b, c 待确定.

我们要使得其在 Reidemeister move 下不变.

请看下面的计算.



如果我们保证 $\langle\cdot\rangle$ 在第二类 Reidemeister move 保持不变, 那么 $\langle\cdot\rangle$ 在第三类 Reidemeister move 上将自动保持不变. 且此时

$$ab = 1, \qquad a^2 + b^2 + abc = 0.$$

即 $b = a^{-1}$ 且 $c = -a^2 - a^{-2}$. 此时第一类 Reidemeister move 中出现的系数

$$\begin{aligned} a + bc &= a + a^{-1}(-a^2 - a^{-2}) = -a^{-3}, \\ ad + b &= a(-a^2 - a^{-2}) + a^{-1} = -a^3. \end{aligned}$$

此时我们似乎必须让 $a = -1$ 才能让 $\langle\cdot\rangle$ 在第一类 Reidemeister move 上将自动保持不变.

但是实际上我们某种意义下可以数清经历了多少次第一类 Reidemeister move. 记

令

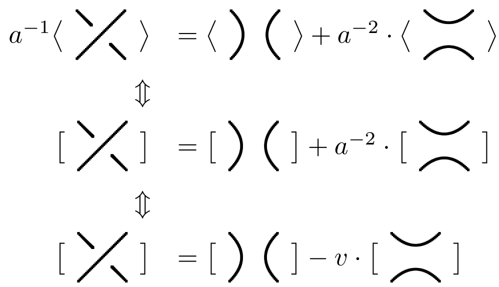
$$J(L) = (-a)^{-3w(L)} \langle L \rangle,$$

那么 $J(L)$ 是一个扭结不变量. 作替换 $a^4 = \mathbf{q}^{-1}$, 就会得到 Jones 多项式.

定义

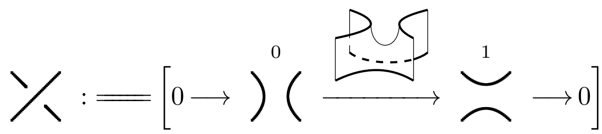
$$[L] = a^{-交叉数}\langle L \rangle.$$

那么



其中 $-v = a^{-2} = \mathbf{q}^{1/2}$.

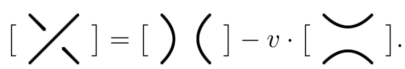
Khovanov 敏锐地发觉了上述构造中的精髓, 将 Jones 多项式范畴化为 Khovanov 同调. 具体来说, 他构造了一个加性范畴里的复形



那么复形对应的分次 Euler 示性数

$$\chi(C^\bullet) = \sum v^i [C^\bullet] \in 范畴的 \text{ Grothendieck 群}$$

就体现为



$\boxed{\text{注意 1}}$ *另一方面, 从 Jones 多项式被构造之初, 大家就已经察觉到其和量子群表示和 Hecke 代数的联系 (量子版本的 Schur–Weyl 对偶, 尽管最开始来自于 Brauer 代数). 我们考虑 $\mathfrak{S}_n$ 对应的 Hecke 代数,*

$$(h_i + q)(h_i - q^{-1}) = 0 \iff h_i - h_i^{-1} = q - q^{-1}$$

即

[] − [] $= (q - q^{-1})$[].

调整一个交点的数目就会重新得到 *Jones* 多项式的定义.

而 *Hecke* 代数本身已经被范畴化为 *Soergel* 双模, 这促使 *Rouquier* 定义出一个 “由模组成” 的复形从而将 *Khovanov* 同调变成了真正的同调. 最终 *HOMFLYPT* 多项式也通过 *Hochschild* 上同调后取同调实现.

参考文献

- Chmutov, Duzhin. Introduction to Vassiliev Knot Invariants (= the CD Book).
- Bar-Natan. On Khovanov's categorification of the Jones polynomial.
- Elias, Makisumi, Thiel, Williamson. Introduction to Soergel Bimodules.