量子二项式系数

熊锐

2021 年 1 月 13 日

§ 二项式系数 §

量子二项式系数

- 令 q 是一个变量. 记

$$[\![n]\!] = \frac{q^n - q^{-n}}{q - q^{-1}} \qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[\![n]\!] \cdots [\![n-k+1]\!]}{[\![k]\!] \cdots [\![1]\!]}$$

所以如果记 $[\![n]\!]! = [\![1]\!] \cdots [\![n]\!]$, 那么

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[\![n]\!]!}{[\![k]\!]![\![n-k]\!]!}$$

有递推公式

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} n+1 \\ k+1 \end{bmatrix} &= q^{-(k+1)} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} + q^{n-k} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} \\ \begin{bmatrix} -n \\ k \end{bmatrix} &= (-1)^k \begin{bmatrix} n+k-1 \\ k \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Gauss 二项式系数

- 或许奇怪, 但令 $\mathbf{q} = q^2$. 记

$$[n] = \frac{\mathbf{q}^n - 1}{\mathbf{q} - 1} \qquad \left[\!\!\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]\!\!\right] = \frac{[n] \cdots [n-k+1]}{[k] \cdots [1]}$$

  如果记 $[n]! = [1] \cdots [n]$, 那么有

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}.$$

  显然

$$[n] = q^{n-1}[\![n]\!] \qquad [n]! = q^{n(n-1)/2}[\![n]\!] \qquad \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{k(n-k)} \left[\!\!\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]\!\!\right].$$

- Gauss 二项式系数是关于 $\mathbf{q} = q^2$ 的多项式, 且常数项为 1.

量子 vs Gauss

- Gauss 二项式 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$ 组合含义丰富.
  尤其是当 q 是素数时和有限域上的计数有关.
- 量子二项式系数 $\left[\!\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]\!\right]$ 在 bar involution $q \mapsto q^{-1}$ 下不变.
  此时 q 有丰富的几何含义 (分次, Weil sheaf, $\mathbb{C}^\times$ 的特征 etc.).
- 但是好在当 $q^2 = \mathbf{q} = 1$ 时都会回到二项式系数.

	0	1	2	3	4
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
-2	1	$-q-q^{-1}$	q^2+1 q^{-2}	$-q^3-q$ $-q^{-1}-q^{-3}$	q^4+q^2+1 $+q^{-2}+q^{-4}$
-1	1	-1	1	-1	1
0	1				
1	1	1			
2	1	$q+q^{-1}$	1		
3	1	q^2+1 $+q^{-2}$	q^2+1 $+q^{-2}$	1	
4	1	q^3+q $+q^{-1}+q^{-3}$	q^4+q^2+2 $+q^{-2}+q^{-4}$	q^3+q $+q^{-1}+q^{-3}$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Trick

- 注意当 $0 \leq k \leq n$,

$$\deg^{\pm} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \pm k(n-k)$$

那么

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = q^{?} \begin{bmatrix} n \\ k+1 \end{bmatrix} + q^{?} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}$$

其中问号使得恰好一项取到最高次, 一项取到最低次.

- 例如

$$\boxed{\begin{matrix} q^3+q \\ +q^{-1}+q^{-3} \end{matrix}} \searrow \quad \boxed{\begin{matrix} q^4+q^2+2 \\ +q^{-2}+q^{-4} \end{matrix}} \downarrow \quad \underbrace{\boxed{?}}_{\deg^{\pm}=\pm 2\cdot(5-2)}$$

$$\boxed{?} = q^3 \boxed{\begin{matrix} q^3+q \\ +q^{-1}+q^{-3} \end{matrix}} + q^{-2} \boxed{\begin{matrix} q^4+q^2+2 \\ +q^{-2}+q^{-4} \end{matrix}}$$

$$= q^{-3} \boxed{\begin{matrix} q^3+q \\ +q^{-1}+q^{-3} \end{matrix}} + q^{2} \boxed{\begin{matrix} q^4+q^2+2 \\ +q^{-2}+q^{-4} \end{matrix}}$$

$\gg$ *Questions?* $\ll$

§ 二项式系数的组合 §

Flags

- 我们有
$$[n] = \#\{\mathbb{F}_{\mathbf{q}}^n \text{ 中的 Flag}\}$$
证明: 第一个子空间 V_1 有 $\frac{\mathbf{q}^n-1}{\mathbf{q}-1}$ 种选法, 第二个子空间等于在 $\mathbb{F}_{\mathbf{q}}^n/V_1$ 上再找一维子空间, 以此类推.
- 我们有
$$[n] = \text{旗流形上同调的 Hilbert 多项式} = \sum_{w \in \mathfrak{S}_w} \mathbf{q}^{\ell(w)}.$$
证明: Schubert 胞腔.

Grassmannian

- 我们有
$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \#\{\mathbb{F}_{\mathbf{q}}^n \text{ 中 } k \text{ 维线性子空间}\}$$
证明：考虑自然映射
$$\{\mathbb{F}_{\mathbf{q}}^n \text{ 中的 Flag}\} \to \{\mathbb{F}_{\mathbf{q}}^n \text{ 中 } k \text{ 维线性子空间}\}$$
其纤维同构于 $\{\mathbb{F}_{\mathbf{q}}^k \text{ 中的 Flag}\} \times \{\mathbb{F}_{\mathbf{q}}^{n-k} \text{ 中的 Flag}\}$.
- 我们有
$$[n] = \text{Grassmannian 流形上同调的 Hilbert 多项式} = \sum_{\lambda \in \mathbb{Y}_{k\times(n-k)}} \mathbf{q}^{\ell(\lambda)}$$
证明：Schubert 胞腔.

Young 图

- 上面已经证过, Gauss 二项式系数

$$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \sum_{Y \in \mathbb{Y}_{k\times(n-k)}} \mathtt{wt}(Y)$$

  其中 $\mathbb{Y}_{k\times(n-k)}$ 是全体 $k \times (n-k)$ 中对所有 Young 图. 其中 $\mathtt{wt}(Y)$ 是 $\mathbf{q}^{Y\text{ 的面积}}$.

- 例如

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{q} & \\ \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{q} & \mathbf{q} \\ \hline & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{q} & \\ \hline \mathbf{q} & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{q} & \mathbf{q} \\ \hline \mathbf{q} & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline \mathbf{q} & \mathbf{q} \\ \hline \mathbf{q} & \mathbf{q} \\ \hline \end{array}$$

Young 图

- 量子二项式系数

$$\left[\!\!\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix}\right]\!\!\right] = \sum_{Y \in \mathbb{Y}_{k\times(n-k)}} \mathtt{wt}(Y)$$

其中 $\mathbb{Y}_{k\times(n-k)}$ 是全体 $k\times(n-k)$ 中对所有 Young 图. 其中 $\mathtt{wt}(Y)$ 是 $q^{Y\text{ 的面积}-Y\text{ 的补的面积}}$.

- 例如

$$\begin{bmatrix} 4 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{array}{|c|c|}\hline q^{-1} & q^{-1} \\ \hline q^{-1} & q^{-1} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline q & q^{-1} \\ \hline q^{-1} & q^{-1} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline q & q \\ \hline q^{-1} & q^{-1} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline q & q^{-1} \\ \hline q & q^{-1} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline q & q \\ \hline q & q^{-1} \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|}\hline q & q \\ \hline q & q \\ \hline \end{array}$$

生成函数 1

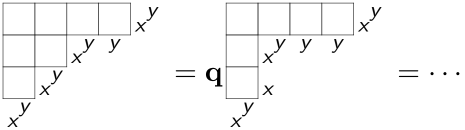
- 如果不定元 x 和 y 满足

$$yx = \mathbf{q}xy = q^2xy.$$

那么

$$(x+y)^n = \sum_k \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} x^k y^{n-k} = \sum_k q^{k(n-k)} \left[\!\left[\begin{matrix} n \\ k \end{matrix} \right]\!\right] x^k y^{n-k}.$$

证明: 直接展开是一些 x, y 的字将其表示成 Young 图 λ, 那么交换成 x 在最前恰好需要乘以 $q^{\ell(\lambda)}$.

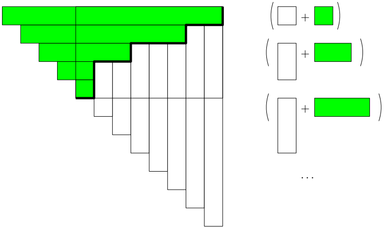


生成函数 2

- 令 z 是不定元, 那么

$$\sum_{k\geq 0} \mathbf{q}^{k(k-1)/2} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} z^k = (1+z)(1+\mathbf{q}z)\dots(1+\mathbf{q}^{n-1}z)$$

证明 (已经知道?): 请看下图



生成函数 2

- 仔细算

$$\begin{aligned}
(1+z)(1+\mathbf{q}z)\dots(1+\mathbf{q}^{n-1}z) &= \textstyle\sum_{k\geq 0}\mathbf{q}^{k(k-1)/2}\left[{n \atop k}\right]z^k \\
(1+z)(1+q^2z)\dots(1+q^{2(n-1)}z) &= \textstyle\sum_{k\geq 0}q^{k(k-1)}q^{k(n-k)}\left[\!\left[{n \atop k}\right]\!\right]z^k \\
&= \textstyle\sum_{k\geq 0}q^{k(n-1)}\left[\!\left[{n \atop k}\right]\!\right]z^k \\
&= \textstyle\sum_{k\geq 0}\left[\!\left[{n \atop k}\right]\!\right](q^{n-1}z)^k
\end{aligned}$$

所以

$$\sum_{k\geq 0}\left[\!\left[{n \atop k}\right]\!\right]z^k = (1+q^{-n+1}z)(1+q^{-n+3}z)\cdots(1+q^{n-1}z).$$

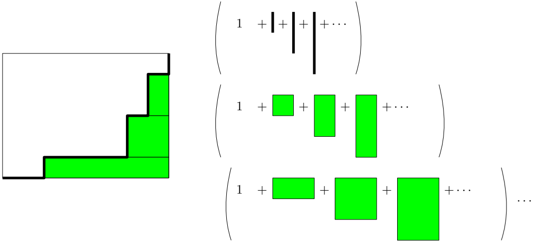
生成函数 3

- 我们有

$$\sum_{n\geq 0} \begin{bmatrix} n+k \\ k \end{bmatrix} z^n = \frac{1}{(1-z)(1-\mathbf{q}z)\cdots(1-\mathbf{q}^k z)}$$

$$\sum_{n\geq 0} \left[\!\left[\begin{matrix} n+k \\ k \end{matrix} \right]\!\right] z^n = \frac{1}{(1-q^{-k}z)(1-q^{-k+2}z)\cdots(1-q^k z)}.$$

证明 (已经知道?):



$\gg$ *Questions?* $\ll$

§ 分次代数 §

分次代数

- 我们说一个群 M 是 P-分次的如果配有一个直和分解

$$M = \bigoplus_{\gamma \in P} M_\gamma$$

  等价地, 这是半单 $\mathbb{Z}[e^P]$ 模即所谓 “权模”. ($\mathbb{Z}[e^P]$ 是群环, 但是因为加法所以写在指数上).

- 称一个代数 R 是 P-分次代数如果

$$R = \bigoplus_{\gamma \in P} M_\gamma$$

  使得 $M_{\gamma_1} \cdot M_{\gamma_2} \subseteq M_{\gamma_1 + \gamma_2}$.

分次代数

- 令 P 是一个有限秩的自由 Abel 群, 配有 (对称) 二次型

$$B(\cdot,\cdot) : P \otimes P \to \mathbb{Z}$$

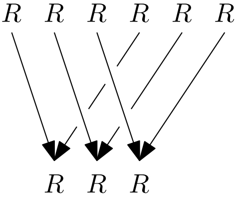
- 对于分次代数 R, 我们可以定义其张量的代数结构, 对齐次元 x_1, y_1, x_2, y_2

$$\begin{tikzcd}
(R \arrow[d] & \otimes & R) \arrow[drr] & \otimes & (R \arrow[dll] & \otimes & R) \arrow[d] & \ni (x_1 \otimes x_2) \otimes (y_1 \otimes y_2) \\
(R & \otimes \arrow[d] & R) & \otimes & (R & \otimes \arrow[d] & R) & \ni q^{B(\deg x_2, \deg y_2)} x_1 \otimes y_1 \otimes x_2 \otimes y_2 \\
 & R & & \otimes & & R & & q^{B(\deg x_2, \deg y_2)} x_1 y_1 \otimes x_2 y_2
\end{tikzcd}$$

分次代数

- 换句话说, 在这个分次模的范畴里, 交换顺序是有代价的.
- 不难验证

$$(R\otimes R)\otimes R \overset{\text{作为代数}}{\cong} R\otimes(R\otimes R)$$



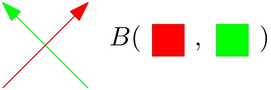
$$(x_1\otimes x_2\otimes x_3)\cdot(y_1\otimes y_2\otimes y_3) = q^{\square}x_1y_1\otimes x_2y_2\otimes x_3y_3$$

其中

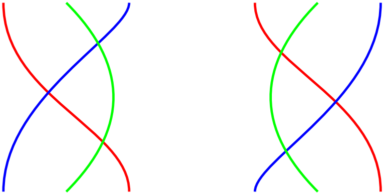
$$\square = B(\deg x_2, \deg y_1) + B(\deg x_3, \deg y_1) + B(\deg x_2, \deg y_1).$$

记号

- 因为范畴化的记号是从下往上, 所以之后我们会反过来画图.
- 我们也不画辫子图了, 因为我们下面不会处理这个交叉的逆, 这样交点还容易看一点.
- 我们取一组 P 的基 $\mathbf{I}$, 将其视作颜色.



- 我们不必担心画出的相交顺序, 因为我们有带颜色的 Yang-Baxter equation



$\mathbf{I} = \{1, 2\}$

- 我们不妨只看 $\mathbf{I} = \{1, 2\}$ 的情况 (为了看到量子 Serre 关系).
  形式地记
  $$P = \mathbb{Z}\alpha_1 \oplus \mathbb{Z}\alpha_2$$
  以及 $\alpha_1^\vee = h_1, \alpha_2^\vee = h_2$(都只是符号)
  $$\begin{pmatrix} \langle \alpha_1^\vee, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_1^\vee, \alpha_2 \rangle \\ \langle \alpha_2^\vee, \alpha_1 \rangle & \langle \alpha_2^\vee, \alpha_2 \rangle \end{pmatrix} = \left(\begin{smallmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & 2 \end{smallmatrix}\right)$$
  其中 $c_{12}, c_{21} \in \mathbb{Z}_{<0}$.

$\mathbf{I} = \{1, 2\}$

- 可以假设 $\begin{pmatrix} 2 & c_{12} \\ c_{21} & 2 \end{pmatrix}$ 可对称化，等价地，可以找到 $B(\cdot, \cdot)$ 使得

  $$\text{记} \begin{cases} q_1 = q^{B(\alpha_1, \alpha_2)/2} \\ q_2 = q^{B(\alpha_2, \alpha_2)/2} \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} q^{B(\alpha_1, \alpha_1)} = q_1^2 & q^{B(\alpha_1, \alpha_2)} = q_1^{c_{12}} \\ q^{B(\alpha_2, \alpha_1)} = q_2^{c_{21}} & q^{B(\alpha_2, \alpha_2)} = q_2^2 \end{cases}$$

  这让记号变得简明.

$\gg$ *Questions?* $\ll$

§ LUSZTIG $\tilde{\mathfrak{f}}$-代数 §

Lusztig $\tilde{\mathfrak{f}}$-代数

- 我们考虑 $\mathbf{I} = \{1, 2\}$ 的简单情况. 考虑 θ_1, θ_2 生成的自由代数

$$\tilde{\mathfrak{f}} = \Bbbk\{\theta_1, \theta_2\} \qquad \Bbbk = \mathbb{Q}(q)$$

其中

$$\deg \theta_1 = \alpha_1 \in P \qquad \deg \theta_2 = \alpha_2 \in P.$$

- 所以对于 $\gamma = n_1\alpha_1 + n_2\alpha_2 \in P$,

$$\dim \tilde{\mathfrak{f}}_\gamma = \{从\ 0\ 出发到\ \gamma\ 的道路数目,\ 每步走\ \alpha_1\ 或\ \alpha_2\} = \binom{n_1 + n_2}{n_1}$$

Hopf 结构

- 考虑由下列映射决定的唯一的**代数**映射 $\Delta : \tilde{\mathfrak{f}} \to \tilde{\mathfrak{f}} \otimes \tilde{\mathfrak{f}}$

$$\theta_i \mapsto \theta_1 \otimes 1 + 1 \otimes \theta_1 \qquad \theta_2 \mapsto \theta_2 \otimes 1 + 1 \otimes \theta_2$$

(即, 量子 Leibniz 法则)

- 考虑其对偶 $\tilde{\mathfrak{f}}^*$, 上面的余乘诱导了乘法. 考虑 θ_1, θ_2 的 (对应次数的) 对偶基 $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_1$ (这是唯一的, 因为只有一次), 那么

$$\theta_1 \mapsto \hat{\theta}_1 \qquad \theta_2 \mapsto \hat{\theta}_2$$

可以延拓成一个代数映射 (因为 $\tilde{\mathfrak{f}}$ 是自由代数).

配合

- 于是这定义了一个齐次配合

$$(\cdot,\cdot):\tilde{\mathfrak{f}}\otimes\tilde{\mathfrak{f}}\to\Bbbk.$$

(目前来说还够用, 不必用带 $\frac{\delta_{ij}}{1-q_i^{-2}}$). 使得

$$(x\cdot y,z)=(x\otimes y,\Delta(z))\qquad(z,x\cdot y)=(\Delta(z),x\otimes y)$$

其中 $\tilde{\mathfrak{f}}^{\otimes 2}$ 上的配合直接诱导自 $\tilde{\mathfrak{f}}$ 上面的配合

$$(x_1\otimes x_2,y_1\otimes y_2)=(x_1,y_1)\cdot(x_2,y_2).$$

而且可以验证这样的配合是对称的.

- 问题:

$$\boxed{\text{这个配合非退化吗?}}$$

如何计算余乘?

- 考虑
$$\begin{aligned}\Delta(\theta_1^n) &= \Delta(\theta_1)^n = (\theta_1 \otimes 1 + 1 \otimes \theta_1)^n \\ & \sum \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1 \theta_1^k \otimes \theta_1^{n-k}.\end{aligned}$$
这里 $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_1$ 表示把里面的 $\mathbf{q}$ 代为 q_1^2. 注意,
$$(1 \otimes \theta_i)(\theta_i \otimes 1) = q_1^2(\theta_i \otimes 1)(1 \otimes \theta_i).$$
- 高阶版本考虑 $\Delta_m : \tilde{\mathfrak{f}} \to \tilde{\mathfrak{f}}^{\otimes m}$
$$\Delta_m(\theta_1^n) = \sum \begin{bmatrix} & n & \\ k_1 & \cdots & k_m \end{bmatrix}_1 \theta_1^{k_1} \otimes \cdots \otimes \theta_1^{k_m}.$$
这是 Gauss 多项式系数 (归纳).

如何计算配合?

- 定义

$$B(\theta_1,\theta_1)=1=B(\theta_2,\theta_1)\qquad B(\theta_1,\theta_2)=0.$$

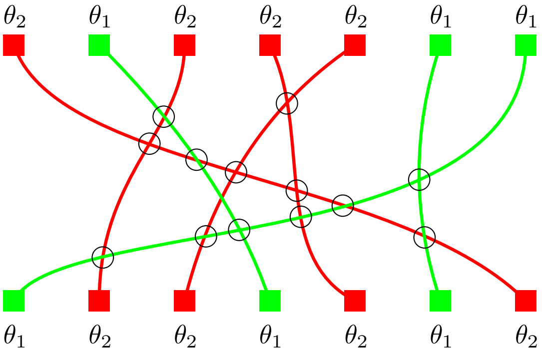
- 不齐次, 配合是 0

$$B(\theta_1,1)=0\qquad B(\theta_2,1)=0$$

- 用余乘打开 —先计算余乘

$$\begin{aligned}
B(\theta_1^n,\theta_1^n) &= B(\Delta_n\theta_1^n,\theta_1\cdots\theta_1)\\
&= \sum \begin{bmatrix} n \\ k_1 \cdots k_n \end{bmatrix}_1 B(\theta_1^{k_1}\otimes\cdots\otimes\theta_1^{k_m},\theta_1\otimes\cdots\theta_1).\\
&= \begin{bmatrix} n \\ 1 \cdots 1 \end{bmatrix}_1 = \frac{[n]_1!}{[1]_1\cdots[1]_1} = [n]_1!.
\end{aligned}$$

所以只需要将一边写成 θ_1 和 θ_2 的乘积, 另一边尽量展开到可以用定义.



$\otimes$ $q_2^2 = q^{(\alpha_2,\alpha_2)}$

$\otimes$ $q_2^{c_{21}} = q^{(\alpha_1,\alpha_2)}$

$\otimes$ $q_1^2 = q^{(\alpha_1,\alpha_1)}$

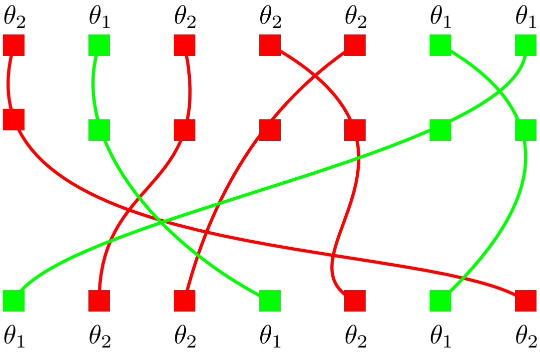
$\otimes$ $q_1^{c_{12}} = q^{(\alpha_1,\alpha_2)}$

$$(\theta_1\theta_2^2\theta_1\theta_2\theta_1\theta_2, \theta_2\theta_1\theta_2^3\theta_1^2) = \sum \cdots$$

求和取遍所有保持颜色的置换. (实际上这计算的是 $\Delta_6(\theta_1\theta_2^2\theta_1\theta_2\theta_1\theta_2)$ 里 $\theta_2 \otimes \theta_1 \otimes \theta_2 \otimes \theta_2 \otimes \theta_2 \otimes \theta_1 \otimes \theta_1$ 前的系数, 里面当然也有 $\theta_1\theta_2^2 \otimes \cdots$, 但是不齐次所以配合是 0)

divided power

- 但是这样还是不容易计数.



- 我们可以先计算每组内部的交叉, 在计算组内不交叉的置换 (抛物分解). 组内所有交叉总数为

$$\sum_{w\in\mathfrak{S}_n} q_i^{2\ell(w)} = [n]_i!$$

(如果这组的点颜色是 i, 点数是 n).

- 记

$$\theta_1^{(n)} = \frac{\theta_1^n}{[\![n]\!]_1^!} = \frac{\theta_1^n}{q_1^{-n(n-1)/2}[n]_1^!} \qquad \theta_2^{(n)} = \frac{\theta_2^n}{[\![n]\!]_2^!} = \frac{\theta_2^n}{q_2^{-n(n-1)/2}[n]_2^!}$$

注意到这和我们期待的 $(\theta^n/[n]!)$ 稍微差一点, 同样也是为了 bar-不变 (必要牺牲).

$\gg$ *Questions?* $\ll$

§ 量子 Serre 关系 §

量子 Serre 关系

- 下面我们要证明量子 Serre 关系

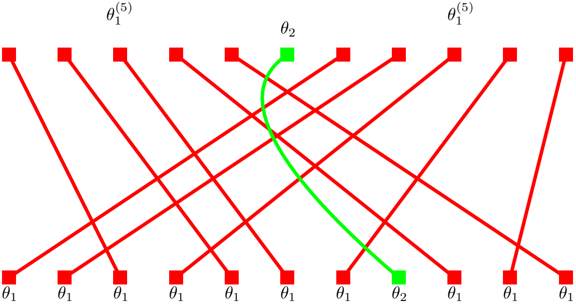
$$\sum_{k=1}^{1-c_{12}} (-1)^k \left[\!\left[\begin{matrix} 1-c_{12} \\ k \end{matrix} \right]\!\right] \theta_1^{1-c_{12}-k}\theta_2\theta_1^k \text{在 } (\cdot,\cdot) \text{ 根基里}.$$

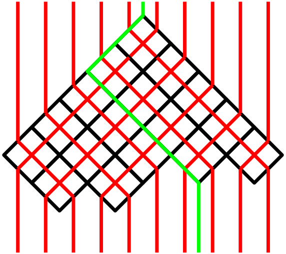
  我们证明对任何 $a+b=1-c_{12}$,

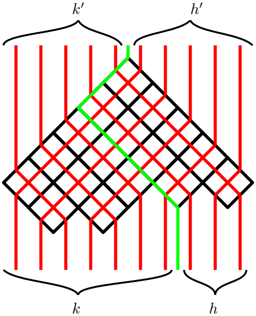
$$\left(\sum_{k=1}^{1-c_{12}} (-1)^k \left[\!\left[\begin{matrix} 1-c_{12} \\ k \end{matrix} \right]\!\right] \theta_1^{1-c_{12}-k}\theta_2\theta_1^k, \frac{\theta_1^a}{[a]_1^!}\theta_2\frac{\theta_2^b}{[b]_1^!} \right) = 0.$$

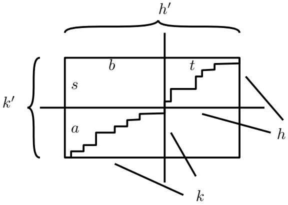
- 我们之前说过如何计算

$$(\theta_1^k\theta_2\theta_1^h, \frac{\theta_1^a}{[a]_1^!}\theta_2\frac{\theta_2^b}{[b]_1^!})$$


$\theta_1^{(5)}$
θ_2
$\theta_1^{(5)}$
θ_1 θ_1 θ_1 θ_1 θ_1 θ_1 θ_1 θ_2 θ_1 θ_1 θ_1







$$
\begin{aligned}
\left(\theta_i^k\theta_j\theta_i^h, \frac{\theta_i^{k'}}{[k']!}\theta_j\frac{\theta_i^{h'}}{[h']!}\right) &= \sum_{\substack{ab\\st}} \begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ t \end{bmatrix} q_i^{2sb} q_i^{-(s+b)c} \\
&= \sum_{\substack{ab\\st}} \left[\!\!\begin{bmatrix} k \\ b \end{bmatrix}\!\!\right] \left[\!\!\begin{bmatrix} h \\ t \end{bmatrix}\!\!\right] q_i^{ab+st+2sb-(s+b)c}
\end{aligned}
$$

where the sum over all $\begin{array}{cccc} a & + & b & = k \\ + & & + & \\ s & + & t & = h \\ \| & & \| & \\ k' & & h' & \end{array}$. 其中 $c = -c_{ij} > 0$.

量子 Serre 关系

$$
\begin{aligned}
&\sum_{k+h=1+c}\sum_{\substack{ab\\st}}(-1)^{a+b}\begin{bmatrix}1+c\\k\end{bmatrix}\left[\!\!\left[\begin{matrix}k\\b\end{matrix}\right]\!\!\right]\left[\!\!\left[\begin{matrix}h\\t\end{matrix}\right]\!\!\right]q_i^{ab+st+2sb-(s+b)c}\\
=&\sum_{k+h=1+c}\sum_{\substack{ab\\st}}(-1)^{a+b}\begin{bmatrix}1+c\\k\end{bmatrix}\left[\!\!\left[\begin{matrix}k\\b\end{matrix}\right]\!\!\right]\left[\!\!\left[\begin{matrix}h\\t\end{matrix}\right]\!\!\right]q_i^{b(b+t-1)+s(a+s-1)}\\
=&\sum_{\substack{a+s=k'\\b+t=h'}}(-1)^{a+b}\begin{bmatrix}1+c\\a\,b\,s\,t\end{bmatrix}q_i^{b(h'-1)}q_i^{s(k'-1)}\\
=&\Big(\sum_b(-1)^b\left[\!\!\left[\begin{matrix}h'\\b\end{matrix}\right]\!\!\right]q_i^{b(h'-1)}\Big)\Big(\sum_s(-1)^s\left[\!\!\left[\begin{matrix}k'\\s\end{matrix}\right]\!\!\right]q_i^{s(k'-1)}\Big)(-1)^{k'}=0.
\end{aligned}
$$

整完了. (这个式子可以直接看出来吗?)

量子 Serre 关系

- 记 $\theta_i^{(n)} = \frac{\theta_i^n}{[\![n]\!]_i^!}$. 那么量子 Serre 关系可以写成

$$\sum_{k+h=1+c} (-1)^k \theta_i^{(k)} \theta_j \theta^{(h)} = 0$$

  其中 $c = -c_{ij}$.

- 其实更简单的证明是 Δ(左边) $=$ 左边 $\otimes$ 左边, 但是我不知道高阶可否这样证明.
- 我们还有高阶量子 Serre 关系 (表述有点烦, 但是我觉得思想是一致的)
- 这个是不是和 KLR 代数有关?
- 来自表示论的结论说当 q 超越, 基域特征 0 的时候, 量子 Serre 关系生成的理想构成根基.

一则解释

- Serre 关系来自于复办单 lie 代数 $(\mathrm{ad}\, E_i)^{1-c_{ij}}(E_j)$ 的权是 $\alpha_j + (1 - c_{ij})\alpha_i$ 会超出根系，所以需要为 0. 但是注意 $\mathrm{ad}\, E_i =$ 左乘E_i − 右乘E_i, 所以可以二项式展开

$$(\mathrm{ad}\, E_i)^{1-c_{ij}}(E_j) = \sum \binom{1-c_{ij}}{k} E_i^{1-cij-k} E_j E_i^k = 0.$$

- 量子群正部 $\tilde{\mathfrak{f}}$ 中正确的 adjoint(这里也是 Hopf 代数的 adjoint) 是

$$(\mathrm{ad}\, \theta_i)(x) = \theta_i x - q^{(\alpha_i, \deg x)} x \theta_i.$$

此时

$$(\mathrm{ad}\, \theta_i)^{1-c_{ij}} \theta_j = \sum \begin{bmatrix} 1-c_{ij} \\ k \end{bmatrix} E_i^{1-c_{ij}-k} E_j E_i^k = 0.$$

$\gg$ *Questions?* $\ll$

§ 请老师指导 §