

# 1 量子群

Lie 代数的标准技巧是“拿  $\mathfrak{sl}_2$ ”当尺子. 记

$$h = \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix} \quad e = \begin{pmatrix} & 1 \\ 0 & \end{pmatrix} \quad f = \begin{pmatrix} & \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

对于一个  $\mathfrak{sl}_2$  的不可约表示  $V$ , 记  $V_n = \{x \in V : hx = nx\}$ .

熟知最高权为  $n$  的不可约表示形如

$$0 \xleftarrow{f} V_{-n} \xrightleftharpoons[e]{e} V_{-n+2} \xrightleftharpoons[e]{e} \cdots \xrightleftharpoons[e]{e} V_{n-2} \xrightleftharpoons[e]{e} V_n \xrightarrow{e} 0$$

且  $\dim V_\bullet = 1$ .

此时, 任意选取一个非零元  $b_i \in V_i$  组成  $\mathcal{B}$ . 那么我们

$$\begin{aligned} \epsilon(x) &= \max\{i : e^i x \neq 0\} \\ \varphi(x) &= \max\{i : f^i x \neq 0\} \end{aligned}$$

所以  $x \in V_i$  其中  $i = \varphi(x) - \epsilon(x)$ .

如果我们  $\mathcal{B}$  选得好, 那么

$$e_i(\mathcal{B}) \subseteq \mathcal{B} \cup \{0\} \supseteq f_i(\mathcal{B}).$$

## 1.1 $\mathfrak{sl}_n$ 的表示

回忆  $\mathfrak{sl}_n$  中, Cartan 子代数

$$\mathfrak{h} = \{\text{diag}(x_1, \dots, x_n) : x_1 + \dots + x_n = 0\}$$

将  $x_1, \dots, x_n \in \mathfrak{h}^*$  视作坐标. 单根取作  $\{\alpha_i = x_i - x_{i+1} : i = 1, \dots, n-1\}$ . 那么  $\mathfrak{sl}_2$ -triple 对应

$$\begin{aligned} h_i &= \text{diag}(\dots, 0, \begin{pmatrix} 1 & \\ & -1 \end{pmatrix}, 0, \dots) \\ e_i &= \text{diag}(\dots, 0, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots) = E_{i,i+1} \\ f_i &= \text{diag}(\dots, 0, \begin{pmatrix} 0 & \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, 0, \dots) = E_{i+1,i} \end{aligned}$$

回忆其自然表示  $V = \mathbb{C}^n$ . 记  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  为自然基. 那么

$$\mathbb{C}\mathbf{v}_i = V_{x_i} = \{v \in V : \text{diag}(x_1, \dots, x_n)v = x_i v\}.$$

其作用由下表给出

	$\cdots$	$\mathbf{v}_{i-1}$	$\mathbf{v}_i$	$\mathbf{v}_{i+1}$	$\mathbf{v}_{i+2}$	$\cdots$
$e_i$	$\cdots$	0	0	$\mathbf{v}_i$	0	$\cdots$
$f_i$	$\cdots$	0	$\mathbf{v}_{i+1}$	0	0	$\cdots$

考虑  $V^{\otimes N}$ , 此时

$$\mathfrak{gl}_n \text{ 左作用 } \curvearrowright V^{\otimes N} \curvearrowleft \mathfrak{S}_N \text{ 左作用}$$

对于  $N$  的一个分拆  $\lambda = \lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots$ , 并填入 1 到  $N$ .

取 Young symmetriser  $b_\lambda = c_\lambda r_\lambda$ , 其中  $c_\lambda$  是列交错和,  $r_\lambda$  是行和. 记

$$V_\lambda = V^{\otimes N} b_\lambda$$

把  $x_1 \otimes \dots \otimes x_N$  按照填入的数按顺序记入 Young 表, 并且将  $\mathbf{v}_i$  在 Young 图中改写为  $i$ .

$$r_\lambda = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{1,2,3,4\}} \times \mathfrak{S}_{\{5,6,7\}} \times \mathfrak{S}_{\{8\}}} \sigma \quad (-1)^\sigma \sigma$$

1	2	3	4
5	6	7	
8			

$$x_1 \otimes \dots \otimes x_8 = \begin{matrix} x_1 \otimes x_2 \otimes x_3 \otimes x_4 \\ \otimes \quad \otimes \quad \otimes \\ x_5 \otimes x_6 \otimes x_7 \\ \otimes \\ x_8 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} \mathbf{v}_4 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_4 \otimes \mathbf{v}_1 \\ \otimes \quad \otimes \quad \otimes \\ \mathbf{v}_3 \otimes \mathbf{v}_2 \otimes \mathbf{v}_1 \\ \otimes \\ \mathbf{v}_1 \end{matrix} = \begin{matrix} 4 & 2 & 4 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & \\ 1 & & & \end{matrix}$$

令  $M$  是一个 Young 表对应的单项式. 注意到:

- 当列中有重复元素时,  $M \cdot b_\lambda = 0$ . [因为列是交错和]
- (非零时) 其权为  $\phi_1 x_1 + \dots + \phi_n x_n$ , 其中  $\phi_i$  是 Young 表中  $i$  的使用次数.

回忆  $x$  在张量积上的作用是逐项作用再相加.

记  $M_0$  是第  $i$  行全部填  $i$  的 Young 表对应的单项式. 注意到:

- 第  $i$  行全部填  $i$  时, 记为  $M_0$ , 那么  $M_0 \cdot b_\lambda = 0$ .

因为  $M$  在  $M \cdot b_\lambda$  前的系数是 1.

- 任何一个  $M$ , 都可以作用数次  $\{E_{ij}\}$  进入  $\mathbb{C}M_0$ . 且如果列元素不同, 那么可以作用数次  $\{E_{ij}\}$  进入  $\mathbb{C}^\times M_0$ .

看下面的例子.

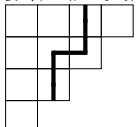
$$\begin{array}{c}
\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \\
\\
e_1 = E_{12} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & (1) & 3 & 2 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & (1) \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 2 \\ \hline (1) & 3 & 4 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} (=0) \\
\\
e_1 = E_{12} \rightarrow \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & (1) \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} + 0 + \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & (1) & 3 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} + 0 = 2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \\
\\
E_{13} = [e_1, e_3] \rightarrow 2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & (1) & 1 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} + 2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 & 1 \\ \hline 2 & (1) & 4 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} (=0) \\
\\
e_2 \rightarrow 2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & (2) & 4 & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{E_{42}=[e_4, [e_3, e_2]]} 2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & (2) & \\ \hline 4 & & & \\ \hline \end{array} + 0 \\
\\
e_3 = E_{43} \rightarrow 2 \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 & 2 & \\ \hline (3) & & & \\ \hline \end{array}
\end{array}$$

之后的步骤如下

- 从上面两点说明  $V_\lambda$  中含有一个  $\mathfrak{sl}_n$  的一个最高权为  $\lambda_1 x_1 + \dots + \lambda_n x_n$  的不可约表示.
- 证明列严格递增且行单调递增 (半标准 Young 表) 的 Young 表构成一组基.
- 此时再利用 Weyl 特征公式 (即 Schur 函数) 说明这个表示必定是整个  $V_\lambda$ .

上述过程还可以用 Schur-Weyl 对偶来说明.

**习题 1.** 证明列严格递增且行单调递增 (半标准 Young 表) 的 Young 表构成一组基. [提示: 首先他们线性无关, 说明每个半标准 Young 图都被一串  $E_{i < j}$  提到  $M_0$ , 且作用在比其小 (某个序下) Young 图上得 0. 再说明张成整个表示, 我们说明任何一个 Young 表对应的单项式都可以. 首先可以假设列严格递增; 找最先 (某个序下) 出现的的行递减. 考

虑  中 “标出位置” 的对称群  $G \subseteq \mathfrak{S}_N$ . 记  $g$

是他们的交错和. 这是任何列内的置换  $\sigma$  都一定存在一个两个 “标出位置” 位置出现在同一行. 因此行内变换含有一个  $\sigma^{-1} G \sigma$  的对换, 因此  $M \cdot g \cdot b_\lambda = 0$ . 展开  $Mg$  归纳.]

## 1.2 Kashiwara 晶体基

上一节我们虽然说明

任何一个  $M$ , 都可以作用数次  $\{E_{ij}\}$  进入  $\mathbb{C}M_0$ .

但是我们没法确定前面的系数.

以后见之明, 量子群告诉我们

$$\begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & (1) & 2 & 4 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array} + q \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & (1) & 4 \\ \hline 2 & 3 & 4 & \\ \hline 3 & & & \\ \hline \end{array}$$

即  $2 = (1+q)|_{q=1}$ . 换句话说 Lie 代数作为  $q = 1$  的特殊情况, 把 Young 图上某种 “分次” 结构隐藏掉了. Kashiwara 的想法是取  $q = 0$ .

记  $\mathbb{I} = \{1, \dots, n-1\}$ , 权格  $\Lambda = \mathbb{Z}x_1 \oplus \dots \oplus \mathbb{Z}x_n / (x_1 + \dots + x_n)$ , fundamental weight  $\omega_i = x_1 + \dots + x_i$ .

我们定义 **Kashiwara 晶体基** 是  $\mathcal{B}$  伴着下列映射

作用  $e_i, f_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathcal{B} \cup \{0\}$

尺度  $\epsilon_i, \varphi_i : \mathcal{B} \rightarrow \mathbb{Z} \cup \{0\}$

权  $\mathbf{wt} : \mathcal{B} \rightarrow \Lambda$

我们要求

$$e_i(x) = y \iff f_i(y) = x.$$

$$\text{且此时} \begin{cases} \epsilon_i(y) = \epsilon_i(x) - 1 \\ \varphi_i(y) = \varphi_i(x) + 1 \\ \mathbf{wt}(y) = \mathbf{wt}(x) + \alpha_i. \end{cases} \text{ 还要求}$$

$$\varphi_i(x) - \epsilon_i(x) = \langle h_i, \mathbf{wt}(x) \rangle.$$

**注意 1** 这里的  $e_i, f_i$  是 Kashiwara operator 和 Lie 代数中的  $e_i$  和  $f_i$  不一样, 虽然有联系, 但是这里仅仅不妨理解为一个记号.

**注意 2** 实际上不如说 Kashiwara 晶体基是定义了一个带了一些结构的图 (晶体图). 为了画出这个图, 我们可以只标记  $f_i$ , 且可以略去  $f_i(x) = 0$  的那些. 下图中出现的情况, 都有

$$\epsilon_i(x) = \max\{k : e_i^k x \neq 0\}$$

$$\varphi_i(x) = \max\{k : f_i^k x \neq 0\}$$

例如, 仿照  $\mathfrak{sl}_n$  的表示, 定义一个 Young 表的权是  $\ell_1 x_1 + \dots + \ell_n x_n$ , 其中  $\ell_i$  是  $i$  使用的次数.

下面是一些例子

$$\mathbb{I} = \{1\} \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbb{I} = \{1, 2, 3\} \quad \begin{array}{|c|} \hline 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|} \hline 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{2} \begin{array}{|c|} \hline 3 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{3} \begin{array}{|c|} \hline 4 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 1 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 2 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 2 \\ \hline \end{array}$$

$$\downarrow 2 \quad \downarrow 2 \quad \downarrow 2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 1 & 3 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

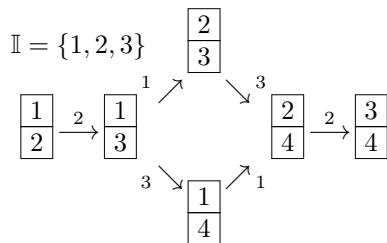
$$\downarrow 2 \quad \downarrow 2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 3 \\ \hline \end{array} \xrightarrow{1} \begin{array}{|c|c|c|} \hline 2 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbb{I} = \{1, 2\}$$

$$\downarrow 2$$

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline 3 & 3 & 3 \\ \hline \end{array}$$



Kashiwara 晶体基的一个优点是在张量积下非常好。对于两个晶体基  $\mathcal{B}_1$  和  $\mathcal{B}_2$ 。那么可以定义二者的张量积  $\text{wt}(x \otimes y) = \text{wt}(x) + \text{wt}(y)$  以及

$$f_i(x \otimes y) = \begin{cases} f_i(x) \otimes y & \varphi_i(y) \leq \epsilon_i(x) \\ x \otimes f_i(y) & \varphi_i(y) > \epsilon_i(x) \end{cases}$$

$$e_i(x \otimes y) = \begin{cases} e_i(x) \otimes y & \varphi_i(y) < \epsilon_i(x) \\ x \otimes e_i(y) & \varphi_i(y) \geq \epsilon_i(x) \end{cases}$$

$$\varphi_i(x \otimes y) = \max\{\varphi_i(x), \varphi_j(y) + \langle h_i, \text{wt}(x) \rangle\}$$

$$\epsilon_i(x \otimes y) = \max\{\epsilon_i(x), \epsilon_j(y) - \langle h_i, \text{wt}(x) \rangle\}$$

这样定义是有动机的，这是经典的 Clebsch–Gordan 公式

$x \otimes y$	$y$	$\overline{1111} \rightarrow \overline{1112} \rightarrow \overline{1222} \rightarrow \overline{2222}$
$x$	$\epsilon(x) \varphi(y)$	3 2 1 0
$\overline{11111}$	0	$\overline{11111} \otimes \overline{1111} \rightarrow \overline{11111} \otimes \overline{1112} \rightarrow \overline{11111} \otimes \overline{1222} \rightarrow \overline{11111} \otimes \overline{2222}$
$\downarrow$		
$\overline{11112}$	1	$\overline{11112} \otimes \overline{1111} \rightarrow \overline{11112} \otimes \overline{1112} \rightarrow \overline{11112} \otimes \overline{1222} \rightarrow \overline{11112} \otimes \overline{2222}$
$\downarrow$		
$\overline{11122}$	2	$\overline{11122} \otimes \overline{1111} \rightarrow \overline{11122} \otimes \overline{1112} \rightarrow \overline{11122} \otimes \overline{1222} \rightarrow \overline{11122} \otimes \overline{2222}$
$\downarrow$		
$\overline{12222}$	3	$\overline{12222} \otimes \overline{1111} \rightarrow \overline{12222} \otimes \overline{1112} \rightarrow \overline{12222} \otimes \overline{1222} \rightarrow \overline{12222} \otimes \overline{2222}$
$\downarrow$		
$\overline{22222}$	4	$\overline{22222} \otimes \overline{1111} \rightarrow \overline{22222} \otimes \overline{1112} \rightarrow \overline{22222} \otimes \overline{1222} \rightarrow \overline{22222} \otimes \overline{2222}$

例如

$x \otimes y$	$y$	$\overline{1} \xrightarrow{1} \overline{2} \xrightarrow{2} \overline{3} \xrightarrow{3} \overline{4}$
$x$	$\epsilon(x) \varphi(y)$	100 010 001 000
$\overline{1}$	0	$\overline{1} \otimes \overline{1} \xrightarrow{1} \overline{1} \otimes \overline{2} \xrightarrow{2} \overline{1} \otimes \overline{3} \xrightarrow{3} \overline{1} \otimes \overline{4}$
$\downarrow$		
$\overline{2}$	1	$\overline{2} \otimes \overline{1} \xrightarrow{1} \overline{2} \otimes \overline{2} \xrightarrow{2} \overline{2} \otimes \overline{3} \xrightarrow{3} \overline{2} \otimes \overline{4}$
$\downarrow$		
$\overline{3}$	0	$\overline{3} \otimes \overline{1} \xrightarrow{1} \overline{3} \otimes \overline{2} \xrightarrow{2} \overline{3} \otimes \overline{3} \xrightarrow{3} \overline{3} \otimes \overline{4}$
$\downarrow$		
$\overline{4}$	0	$\overline{4} \otimes \overline{1} \xrightarrow{1} \overline{4} \otimes \overline{2} \xrightarrow{2} \overline{4} \otimes \overline{3} \xrightarrow{3} \overline{4} \otimes \overline{4}$

由此出发能够得到经典的 Littlewood–Richardson rule. 具体来说，考虑自然表示  $V_{\square}$ ,

$$\overline{1} \xrightarrow{1} \dots \xrightarrow{n-1} \overline{n}.$$

对每一个 fundamental weight  $\omega_i = x_1 + \dots + x_N$  对应的基本表示  $V_i$  可以嵌入  $V_{\square}^{\otimes N}$ . 对应连通分支的晶体图是  $\overline{i_1} \otimes \dots \otimes \overline{i_N}$  使得  $i_1 < \dots < i_N$ . 我们将其记为

$$\begin{matrix} \overline{i_1} \\ \vdots \\ \overline{i_N} \end{matrix}$$

一般地，假如把任何一个权  $\lambda$  写成  $\omega_i$  的和按照  $\omega_1 > \omega_2 > \dots > \omega_{n-1}$  降序

$$\lambda = \omega_{n-1} + \dots + \omega_{n-2} + \dots$$

可以把对应的表示嵌入到对应

$$V_{n-1} \otimes V_{n-1} \otimes \dots \otimes V_{n-2} \otimes \dots$$

中. 此时记为

$$\overline{\begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}} \otimes \overline{\begin{matrix} \square \\ \square \end{matrix}} = \overline{\begin{matrix} \square & \square \\ \square & \square \end{matrix}}$$

对应的 Crystal graph 的连通分支恰好对应半标准 Young 表.

## 参考文献

- Bump, Schilling. Crystal Bases: Representations And Combinatorics
- Nakashima. Crystal base and a generalization of the Littlewood-Richardson rule for the classical Lie algebras.