1 Hecke 代数

令 $G = \mathrm{GL}_n$, $B = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix}$ 是上三角矩阵.

回顾 Tits system

$$BwB \cdot Bs_iB = \begin{cases} Bws_iB, & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1; \\ Bws_iB \cup BwB, & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1. \end{cases}$$

注意到

$$BwB \times Bs_iB \to BwB \cdot Bs_iB$$

不是一一的. 他们之间究竟有何关系?

一般地, 考虑置换 u, v, w, 我们要计算 w 在下面映射下的原像.

$$BuB \times BvB \xrightarrow{\mu} BuB \cdot BvB \subseteq G.$$

即

$$\{(y, z) : yz = w,\, y \in BuB,\, z \in BuB\}.$$

我们称为 w 的纤维.

1.1 有限域

为了考虑这个问题我们先在有限域上看. 令 $\mathbb{F}_{\mathbf{q}}$ 是一个有限域. 令 $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_{\mathbf{q}})$, $B = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots \\ & & * \end{pmatrix}$.

考虑 G 上所有左右 B-不变的 (整数值) 函数

$$\mathsf{Fun}(B\backslash G/B) = \{f \in \mathsf{Fun}(G) : \forall x \in G, f(BxB) = f(x)\}$$

根据 Bruhat 分解维数恰好是对称群.

我们可以定义**卷积 (convolution)**

$$(f * g)(x) = \frac{1}{|B|} \sum_{x=yz} f(y)g(z).$$

这个乘法显然是结合的.

此时得到的代数

$$(\mathsf{Fun}(B\backslash G/B), \text{卷积})$$

被称为**Hecke 代数**.

组合上说, Hecke 代数是 $\{BwB : w \in \mathfrak{S}_w\}$ 的所有 "带重数子集".

记 $T_w \in \mathsf{Fun}(B\backslash G/B)$ 是 BwB 的特征函数, 记 $T_i = T_{s_i}$. 因为 T_{id} 显然是这个代数的单位元, 所以记为 1.

显然

$$T_u * T_v = \sum (T_u * T_v)(w) \cdot T_w.$$

我们考虑三个置换 u, v, w

$$\begin{aligned} (T_u * T_v)(w) &= \tfrac{1}{|B|} \textstyle\sum_{w=yz} T_a(y) T_b(z) \\ &= \tfrac{1}{|B|} \{(y, z) : yz = w,\, y \in BuB,\, z \in BvB\} \end{aligned}$$

是我们要的纤维的数量.

因此 Tits system 的转述是

$$T_w * T_i = \begin{cases} \mathbb{Z} \cdot T_{ws_i} & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1; \\ \mathbb{Z} \cdot T_{ws_i} + \mathbb{Z} \cdot T_w & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1; \end{cases}.$$

因为上面的计算, 第一行, 当 $\ell(ws_i) = \ell(w) + 1$, 还可以细化为

$$T_w * T_i = \frac{1}{|B|} \frac{|BwB \times Bs_iB|}{|Bws_iB|} T_{ws_i} = T_{ws_i}$$

注意到 $|BwB| = |BwB/B| \times |B| = \mathbf{q}^{\ell(w)} \times |B|$.

直接计算第二行不太容易, 但是介由第一行, 我们只需要计算 $T_i * T_i$.

$$Bs_iB \times Bs_iB \xrightarrow{\mu} G.$$

显然 1 的原像显然是 $|Bs_iB|$, 数量是 $\mathbf{q} \cdot |B|$. 而 μ 的像是 $Bs_iB \cup B$, 所以 s_i 的原像数目是

$$\frac{Bs_iB \times Bs_iB \setminus \mu^{-1}(B)}{|Bs_iB|} = (\mathbf{q} - 1) \cdot |B|$$

因此

$$T_i * T_i = (\mathbf{q} - 1) T_i + \mathbf{q}.$$

因为一些几何的缘故, 我们会想做替换 $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}^{-1}$. 为了得到漂亮干净的结果, 我们记

$$q = \mathbf{q}^{1/2}, \qquad h_i = -q^{-1} T_i$$

于是

$$(h_i + q)(h_i - q^{-1}) = 0.$$

令 G 是一个有限群, B 是一个子群, 我们希望能够控制诱导表示 $\mathbb{1}{\uparrow}_B^G$. 回忆诱导表示

$$V{\uparrow}_B^G = \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}[B]}(\mathbb{C}[G], V) = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[B]} V.$$

后一个映射由 $f \mapsto \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes f(g)$ 给出. 因此 $\uparrow$ 和 $\downarrow$ 是双边伴随.

$$\begin{aligned} \mathrm{Hom}_G(U, V{\uparrow}_B^G) &= \mathrm{Hom}_B(U{\downarrow}_B^G, V) \\ \mathrm{Hom}_G(V{\uparrow}_B^G, U) &= \mathrm{Hom}_B(V, U{\downarrow}_B^G) \end{aligned}$$

我们计算 $\mathrm{End}_G(\mathbb{1}\uparrow_B^G)$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{End}_G(\mathbb{1}\uparrow_B^G) &= \mathrm{Hom}_G(\mathbb{1}\uparrow_B^G, \mathbb{1}\uparrow_B^G)\\
&= \mathrm{Hom}_B(\mathbb{1}\uparrow_B^G\downarrow_B, \mathbb{1})\\
&= \mathrm{Hom}_B(\mathbb{C}[G]\otimes_B \mathbb{1}, \mathbb{1})\\
&= \mathrm{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{1}\otimes_B \mathbb{C}[G]\otimes_B \mathbb{1}, \mathbb{1})\\
&= \mathsf{Fun}_{\mathbb{C}}(B\backslash G/B).
\end{aligned}$$

我们要仔细计算一下对应的乘法, 因为同构选择的不同, 有可能差一个常数. 但是最终会发现那么对应到 End 上自然的乘法是卷积.

习题 1. 证明

$$(T_u * T_v)(w) = \frac{1}{|B|}|Bu^{-1}Bw \cap BvB|.$$

1.2 复数域

在复数域上, 我们把计数的工具换成 Euler 示性数.

$$\chi(X) = \sum_{i\geq 0}(-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H_i^{\mathsf{BM}}(X;\mathbb{C}).$$

这里下同调是 **Borel–Moore 同调** (上同调会有一些问题).

对于闭集 K, 假设其补集是 U, 那么

$$\chi(X) = \chi(K) + \chi(U).$$

"加法原理".

如果有以 F 为纤维的纤维从 $\overset{E}{\underset{B}{\downarrow}}$, 那么根据谱序列,

$$\chi(E) = \chi(B)\times\chi(F).$$

"乘法原理"

我们说一个函数 $f : X\to\mathbb{Z}$ 是**可构造的 (constructible)**, 如果 $f^{-1}(n)$ 是可构造的, 即是一个开集和闭基的交.

对于函数 $f: X\to\mathbb{Z}$, 那么我们可以定义积分

$$\int_{x\in X} f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} n\cdot\chi(f^{-1}(n)).$$

我们可以同样考虑 G 上所有左右 B-不变的整数值函数

$$\mathsf{Fun}(B\backslash G/B) = \{f\in\mathsf{Fun}(G) : \forall x\in G, f(BxB) = f(x)\}$$

对于 $f, g\in\mathsf{Fun}(B\backslash G/B)$ 我们可以定义**卷积 (convolution)**

$$(f*g)(x) = \int_{y\in G} f(y)g(y^{-1}x) = \int_{z\in G} f(xz^{-1})g(z).$$

这个乘法显然是结合的.

我们同样记 $T_w\in\mathsf{Fun}(B\backslash G/B)$ 是 BwB 的特征函数. 我们考虑三个置换 u, v, w

$$\begin{aligned}
(T_u * T_v)(w) &= \int_{y\in G} f(wz^{-1})g(w)\\
&= \chi\{z : wz^{-1}\in BuB, z\in BvB\}\\
&= \chi\{(y,z) : yz = w, y\in BuB, z\in BvB\}
\end{aligned}$$

是我们要的纤维的 Euler 式性数. 最终我们会得到

$$(\mathsf{Fun}(B\backslash G/B), \text{卷积}) \cong \mathbb{Z}[\mathfrak{S}_n].$$

习题 1. 对于闭基集 $f\in\mathsf{Fun}(X\times Y)$ 可构造, 证明 **Fubini 定理**

$$\int_y\int_x f(x,y) = \int_{(x,y)} f(x,y).$$

习题 2. 证明 $Bs_iB\times_B Bs_iB\to G$ 中 s_i 的原像同胚于 $\mathbb{C}\setminus 0$. [提示: 原像同胚于 $(Bs_iB\cap s_iBs_iB)/B$. 令 $P = B\cup Bs_iB$, 那么 $P/B = \mathbb{C}P^1$, 而 s_i 的作用是反转 0 和 ∞.]

1.3 上同调

我们试图抽象一点.

对于 $\varphi: X\to Y$, 我们定义拉回和推出

$$\begin{cases}
\varphi^* : \mathsf{Fun}(Y)\to\mathsf{Fun}(X) & f\mapsto f\circ\varphi\\
\varphi_* : \mathsf{Fun}(X)\to\mathsf{Fun}(Y) & f\mapsto \sum_{x\in\varphi^{-1}(y)} f(x) \quad \text{自变量是 } y
\end{cases}$$

考虑下图. 令 p_1 是把右侧 G 缩成一点, p_2 是把左侧 G 缩成一点, μ 是乘法映射

$$\begin{tikzcd}
 & G\times_B G \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dr, "p_2"] \arrow[dd, "\mu"] & \\
G & & G\\
 & G &
\end{tikzcd}$$

那么卷积

$$f * g = \mu_*(p_1^* f\cdot p_2^* g).$$

注意到

$$\begin{array}{ccc}
G \underset{\text{对角}}{\curvearrowright} & G/B\times G/B & \\
 & \big\downarrow & (xB, yB)\mapsto x\times x^{-1}yB\\
G \underset{\text{左乘}}{\curvearrowright} & G\times_B G/B & \\
 & \text{比较} & \\
B \underset{\text{左乘}}{\curvearrowright} & G/B &
\end{array}$$

因此有一个双射

$$\mathsf{Fun}(B\backslash G/B) = \mathsf{Fun}_G(G/B\times G/B).$$

左侧的 f 对应到右侧的 F 使得 $F(x,y)=f(x^{-1}y)$. 所以原本

$$(f*g)(x)=\frac{1}{B}\sum_{x=yz} f(y)g(z)$$

应该被重新改写为

$$(F*G)(x,y)=\sum_{z\in G/B} F(x,z)g(z,y)$$

我们考虑 π_i 为舍弃第 i 个分量的投射

$$\begin{tikzcd}
 & G/B\times G/B\times G/B \arrow[dl, "\pi_3"'] \arrow[dd, "\pi_2"] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\
G/B\times G/B & & G/B\times G/B \\
 & G/B\times G/B &
\end{tikzcd}$$

那么卷积

$$F*G=(\pi_2)_*\big(\pi_3^*F\cdot\pi_1^*G\big).$$

上同调也有推出拉回那一系列, 所以我们也可以定义

$$H_B^*(G/B)=H^*(B\backslash G/B) \qquad (\text{同伦商})$$

上的卷积为

$$\alpha*\beta=\mu_*(p_1^*\alpha\smile p_2^*\beta).$$

$$\begin{tikzcd}
 & G\times_B G \arrow[dl, "p_1"'] \arrow[dd, "\mu"] \arrow[dr, "p_2"] & \\
G & & G \\
 & G &
\end{tikzcd}$$

注意

$$-\deg(\alpha*\beta)=\dim G/B-(\deg\alpha+\deg\beta)$$

例如我们要计算等变基本类,

$$\begin{aligned}
[\overline{BwB}]_B*[\overline{Bs_iB}]_B &= \mu^*[\overline{BwB}\times\overline{Bs_iB}] \\
&= \begin{cases} [\overline{Bws_iB}] & \ell(us_i)=\ell(w)+1; \\ 0 & \ell(us_i)=\ell(w)-1. \end{cases}
\end{aligned}$$

因为 $H_B^*(G/B)$ 还有 $H_B^*(\mathsf{pt})$ 的左乘作用, 所以综上

$$\big(H_B^*(G/B),\text{卷积}\big)=\boxed{\begin{array}{c}\text{由 Demazure operators 和}\\ \text{左乘作用生成的代数.}\end{array}}$$

右者又被称为**仿射 (affine)Hecke 代数**.

但是另一方面,

$$H_B^*(G/B)=H_G^*(G/B\times G/B)$$

我们考虑 π_i 为舍弃第 i 个分量的投射

$$\begin{tikzcd}
 & G/B\times G/B\times G/B \arrow[dl, "\pi_3"'] \arrow[dd, "\pi_2"] \arrow[dr, "\pi_1"] & \\
G/B\times G/B & & G/B\times G/B \\
 & G/B\times G/B &
\end{tikzcd}$$

那么卷积

$$\alpha*\beta=(\pi_2)_*\big(\pi_3^*\alpha\cdot\pi_1^*\beta\big).$$

如果我们不用等变的情况,

$$H^*(G/B\times G/B)=H^*(G/B)\otimes H^*(G/B)$$

也可以如上定义卷积.

和等变的情况相同, 也有对应 Schubert 胞腔 (在 $G/B\times G/B$ 上是 G-轨道), 加上 $H^*(G/B)$ 的左乘作用,

$$\big(H^*(G/B\times G/B),\text{卷积}\big)=\boxed{\begin{array}{c}\text{由 Demazure operators 和}\\ \text{左乘作用生成的代数.}\end{array}}$$

另一方面, 在通常的同调下, 此时卷积不过是中间 $H^*(G/B)$ 和 $H^*(G/B)$ 通过 Poincaré 对偶配合, 所以

$$\big(H^*(G/B\times G/B),\text{卷积}\big)=\mathrm{End}(H^*(G/B))$$

特别地, 秩为 $n!$.

等变情况想要做类似的事儿则需要等变 Borel–Moore 下同调. 值得一提的是, 这个下同调理论是有负项的. 这部分其实并没有很好的材料, 理解了等变层这些也就自动理解了.

习题 1. *请利用推出的拉回的下列性质来证明结合律.*

$$\begin{cases}
\varphi*(f\cdot g)=\varphi^*f\cdot\varphi^*g \\
\varphi_*(\varphi^*f\cdot g)=f\cdot\varphi^*g \\
\text{对 } \textit{Cartesian} \text{ 方阵有 } \textit{projective formula}
\end{cases}$$