

# 几何拓扑自驾游

熊锐

2021 年 1 月 7 日

## Contents

1	上同调速成
2	纤维丛
3	向量丛
4	K 理论速成
5	等变拓扑速成
6	拓扑收纳箱
7	几何收纳箱
8	代数收纳箱

## 1 上同调速成

1 本节介绍如何理解和使用奇异 (singular) 上同调 (co-homology) 群.

9 对于拓扑空间  $X$ , 上同调群  $H^*(X)$  是 \_\_\_\_.

13 就像即使并不懂电脑的运行原理, 但是却可以使用电脑.

13 但是, 每多理解一点原理, 能做的事儿就多一点.

14 本节大部分内容成立都是需要条件的, 通常会在提及之后的评注中给出.

15

实际上, 代数拓扑的使用原则是

15

绝不使用定义直接计算.

15

我们永远是发展足够多的理论, 再用刻画让计算成功.

代数拓扑在组合中的相当于提供另一种计数工具. 其有行之有效原因在于, 相当一部分计算其实可以约化成计算集合. 如果我们相信不同计数方法计算数目给出相同结果, 那我们也应该相信不同拓扑方法计算同调群会给出相同结果.

### 1.1 胞腔

我们在本小节需要下同调  $H_*(X)$  和相对下同调  $H_*(X, Y)$ , 其中  $Y \subseteq X$  是一个子集.

记  $n$  维球面 (sphere) 和  $n$  维圆盘 (disk) 为

$$S^n = \{(x_1, \dots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} : x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2 = 1\};$$

$$D^n = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : x_1^2 + \dots + x_n^2 \leq 1\}.$$

注意  $S^{n-1} \subseteq D^n$  (上标是维数).

需要知道的基本事实是

	0	1	...	$n-1$	$n$	$n+1$	...
$H_*(S^n)$	$\mathbb{Z}$	0	...	0	$\mathbb{Z}$	0	...
$H_*(D^{n+1})$	$\mathbb{Z}$	0	...	0	0	0	...
$H_*(D^{n+1}, S^n)$	0	0	...	0	0	$\mathbb{Z}$	...

最后一行来自于长正合序列. 可以这样记:

$D^{n+1}$  相对  $S^n = D^{n+1}/S^n$  相对于缩点  $= S^{n+1}$  相对于一个点.

这里  $D^{n+1}/S^n$  表示把  $D^{n+1}$  上的  $S^n$  粘成一点 (缩点).

上同调其实是一样的

	0	1	...	$n-1$	$n$	$n+1$	...
$H^*(S^n)$	$\mathbb{Z}$	0	...	0	$\mathbb{Z}$	0	...
$H^*(D^{n+1})$	$\mathbb{Z}$	0	...	0	0	0	...
$H^*(D^{n+1}, S^n)$	0	0	...	0	0	$\mathbb{Z}$	...

我们说一个拓扑空间  $X$  是 **CW 复形 (CW complex)**, 如果  $X$  是由圆盘  $D^n$  按照维数顺序粘结而成.

准确一点:  $X^0$  是一些离散的点;  $X^1$  是往  $X^0$  上粘  $D^1 = \text{区间}[0, 1]$ , 使得  $0, 1$  粘到  $X^0$  上;  $X^2$  是往  $X^1$  上粘  $D^2$ , 使得  $D^2$  的边界  $S^1$  粘到  $X^1$  上; 以此类推.

这样依次得到的  $X^n$  叫作  $X$  的 **骨架 (skeleton)**, 每个黏上去的  $D^n$  叫作一个  $n$  维胞腔.

**注意 1**  $D^n$  的边界  $S^{n-1}$  必须落在低一维的 “骨架”  $X^{n-1}$  上. (不能不粘)

**注意 2**  $D^n$  的内部到  $X$  是单射. (不能粘)

**注意 3** 严格来说,  $CW$  的复形的拓扑是弱拓扑, 即使得每个胞腔的粘结映射连续的最弱拓扑. ( $C=cellular$ ,  $W=weak$ ) 其实  $CW$  复形的拓扑有很多点集拓扑的良好性质, 请见 [Bredon].

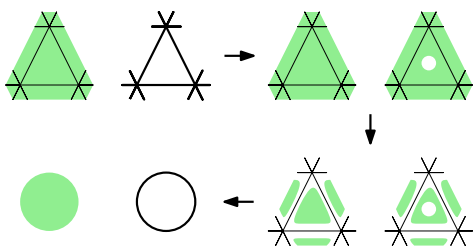
如果  $X$  有  $CW$  复形的结构, 记  $X^n$  是  $n$  维的骨架. 那么  $X^0 \subseteq X^1 \subseteq X^2 \subseteq \dots$ . 我们可以考虑相对同调  $H_*(X^i, X^{i-1})$  和相对上同调  $H^*(X^i, X^{i-1})$ .

有下面这个重要事实

$$H^*(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \text{以所有 } n\text{-维胞腔} \\ \text{为基生成的自由 Abel 群.} & * = n \\ 0 & * \neq n. \end{cases}$$

这里  $X^{-1} = \emptyset$ . 下同调结果是一样的. 请对比  $H_*(D^n, S^{n-1})$ . 这是 **切除定理 (excision)** 的一个应用.

证明如下



(图中全是三角形, 但是  $CW$  复形不一定要是三角形)

例如  $S^n$  是一个  $CW$  复形. 因为我们可以把  $D^n$  的边界  $S^{n-1}$  整个粘到一个点上得到  $S^n$ . 最简单的胞腔取法是

维数	0	1	...	$n-1$	$n$
胞腔数量	1	0	...	0	1
骨架	点	点	...	点	$S^n$
$H_n(X^n, X^{n-1})$	$\mathbb{Z}$	0	...	0	$\mathbb{Z}$

例如  $D^n$  本身也是一个  $CW$  复形. 最简单的胞腔取法是

维数	0	1	...	$n-2$	$n-1$	$n$
胞腔数量	1	0	...	1	1	1
骨架	点	点	...	点	$S^{n-1}$	$D^n$
$H_n(X^n, X^{n-1})$	$\mathbb{Z}$	0	...	0	$\mathbb{Z}$	$\mathbb{Z}$

下面假设  $X$  是  $CW$  复形, 记  $C_n = H_n(X^n, X^{n-1})$ . 那么存在一条复形

$$\dots \rightarrow C_n \rightarrow \dots \rightarrow C_1 \rightarrow C_0 \rightarrow 0$$

使得其同调群同构于  $H_*(X)$ . 记  $C^n = H^n(X^n, X^{n-1})$ . 那么存在一条复形

$$0 \rightarrow C^0 \rightarrow C^1 \rightarrow \dots \rightarrow C^n \rightarrow \dots$$

使得其上同调群同构于  $H^*(X)$ . 这被称为 **胞腔 (cellular) 同调**.

这个定理本质上只是同调代数的追图, 见 [姜].

**注意 1** 在一些 “正则” 的情况, 这个复形之间的微分  $\partial$  是可以 “看出来” 的. 例如, 当  $X$  是多面体的情况,  $n$  维胞腔就是一个  $n$  维面, 那么

$$\partial(\text{某个 } n \text{ 维面}) = \sum \text{这个面的 } n-1 \text{ 维边}.$$

这里的 “和” 需要根据预先指定的定向决定正负.

**注意 2** 有一些书喜爱使用 **单纯复形 (simplicial complex)**, 此时要任何一个单纯形 (三角形) 每条边都不黏在一起不相交, 因此往往简单的图形需要多次重分才能做到. 但是这样的好处是可以计算乘法结构.

**注意 3** 在 [Hatcher] 中, 他还定义了  $\Delta$  复形, 这时全部都是单纯形 (三角形), 但是允许一个单纯形内部的边相交. 但是实际上三角形, 四边形, 五边形, 甚至二边形都是可以的.

如果对于紧致的 Hausdorff 空间  $X$  (例如流形), 如果有一个 **分层 (stratification)**

$$X_0 \subseteq X_1 \subseteq \dots \subseteq X$$

使得每个  $X_k$  都是闭的, 且  $X_k \setminus X_{k-1} \cong \mathbb{R}^{a_k}$  对某个  $a_k$ . 我们称这个分层给出一个胞腔结构. 我们也称  $X_k \setminus X_{k-1}$  是一个  $a_k$  维胞腔.

记  $X^k = \bigcup_{\dim X_i \leq k}$ , 那么同样也有

$$H^*(X^n, X^{n-1}) = \begin{cases} \text{以所有 } n\text{-维胞腔} \\ \text{为基生成的自由 Abel 群.} & * = n \\ 0 & * \neq n. \end{cases}$$

所以一切照旧.

对于线性空间  $V = \mathbb{C}^n$ , 一个 **旗 (flag)** 是一串子线性空间

$$V^0 \subseteq V^1 \subseteq \dots \subseteq V^n$$

使得  $\dim V^i = i$ . 此时为了区别也叫 **完全 (complete) 旗**. 考虑  $\mathcal{Fl}(n)$  为  $n$  维复向量的所有旗 (flag) 组成的集合, 这可以被赋予流形和代数簇的结构. 我们称  $\mathcal{Fl}(n)$  为 **旗流形 (flag manifold)** 或 **旗簇 (flag variety)**.

记  $G = \mathrm{GL}_n$ ,  $B$  是全体上三角矩阵. 将每一个  $x \in \mathrm{GL}_n$  视作  $n$  个线性无关的列向量  $(x_1, \dots, x_n)$ , 我们得到一个其 **张成的旗**  $\mathrm{span} x$

$$0 \subseteq \mathrm{span}(x_1) \subseteq \mathrm{span}(x_1, x_2) \subseteq \dots \subseteq \mathrm{span}(x_1, \dots, x_n).$$

这定义了一个 (连续) 映射  $\mathrm{span} : \mathrm{GL}_n \rightarrow \mathcal{Fl}(n)$ .

通过线性代数, 不难发现  $\mathrm{span}$  是满射, 且

$$\mathrm{span} x = \mathrm{span} y \iff x = yb \text{ 对某个 } b \in B.$$

换言之,  $G/B \rightarrow \mathcal{Fl}(n)$  是双射 (同胚).

对于置换  $w \in \mathfrak{S}_n$ , 记  $w$  是对应的置换矩阵, 即使得  $w(e_i) = e_{w(i)}$ , 其中  $e_i$  是标准基. 也就是在  $i = 1, \dots, n$  位置  $(i, w(i))$  上是 1, 其他位置是 0 的矩阵.

利用 Gauss 消元法, 可以得到 **Bruhat 分解**

$$G = \bigcup_{w \in \mathfrak{S}_n} BwB \quad (\text{无交并}).$$

其实就是打洞. 实际上这是  $G$  的双陪集分解. 等价地, 这说明  $B$  在  $G/B$  上作用的轨道与对称群元素一一对应. 其中  $BwB/B$  被称为 **Schubert 胞腔**.

按下图表定义  $U_w$

(1 2 3 4 5 6)  
(4 2 6 1 3 5)

$$U_w = \begin{bmatrix} \mathbb{C} & \mathbb{C} & \mathbb{C} & 1 & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \mathbb{C} & 0 & \mathbb{C} & 0 & \mathbb{C} & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

那么利用打洞的技巧 (见 [Fulton]), 可以得到

$$\mathrm{span} : U_w \rightarrow BwB/B$$

是双射 (同胚).

用  $\ell$  表示逆序数. 于是  $BwB/B \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$ , 换句话说拓扑维数是  $2\ell(w)$ . 因为  $U_w$  中 “ $\mathbb{C}$ ” 的数目是 Rothe 图中  $\begin{smallmatrix} \square & \square \\ \square & \square \end{smallmatrix}$  的数目.

现在我们考虑  $X^i = \bigcup_{2\ell(w) \leq i} BwB/B$ . 这给出  $\mathcal{Fl}(n)$  的一个胞腔结构. 但是因为我们没有奇数维的胞腔, 所以胞腔复形将形如

$$0 \rightarrow C_0 \rightarrow 0 \rightarrow C_2 \rightarrow 0 \rightarrow C_4 \rightarrow \dots;$$

$$\dots \rightarrow C_4 \rightarrow 0 \rightarrow C_2 \rightarrow 0 \rightarrow C_0 \rightarrow 0.$$

所以  $H^i(\mathcal{Fl}(n)) = C^i$ ,  $H_i(\mathcal{Fl}(n)) = C_i$ .

回忆  $C_{2i}$  (和  $C^{2i}$ ) 是维数为  $2i$  的胞腔生成的自由 Abel 群. 我们用  $[BwB/B]$  记对应的基. 注意:  $\dim[BwB/B] = 2\ell(w)$ .

于是我们得到了

$H^*(G/B) =$  以  $\{[BwB/B]\}_{w \in \mathfrak{S}_n}$  为基的自由 Abel 群

$H_*(G/B) =$  以  $\{[BwB/B]\}_{w \in \mathfrak{S}_n}$  为基的自由 Abel 群

**注意 1** 我们需要一则事实,  $\mathcal{Fl}(n)$  是紧致的 (完备的). 这是因为紧 Lie 群  $U_n \subseteq \mathrm{GL}_n$  到  $\mathcal{Fl}(n)$  是满射 (线性代数).

**注意 2** 我们还需要一则事实, 每一个  $BwB/B$  的闭包都是一些  $BuB/B$  的并. 这是因为  $B$  作用, 所以轨道的闭包还是轨道的并.

实际上  $BuB/B \subseteq \overline{BwB/B}$  当且仅当在 **Bruhat order** 下  $u \leq w$ .

**注意 3** 实际上 **Schubert** 胞腔也给出  $CW$  复形意义上的胞腔. 这可以用 **Morse** 理论的类比 **Bialynicki-Birula** 定理得到, 请看 [CG] 第二章某一节.

**习题 1.** 验证  $G/B \rightarrow \mathcal{Fl}(n)$  是双射. [提示: 利用基的延拓定理证明满射, 再证明正文中提到的  $\mathrm{span} x = \mathrm{span} y$  的等价条件.]

**习题 2.** 验证  $U_w \rightarrow BwB/B$  是双射. [提示: 首先证明  $U_w$  在  $G \rightarrow G/B$  下的像落在  $BwB/B$  内; 对于每个  $x \in G$ , 证明  $xB/B$  一定等于某个  $yB/B$  对某个  $y \in U_w$ , 这要从最后一行开始打洞; 最后证明这是单射, 这要从最后一行开始比起.]

**习题 3.** 证明  $\dim G/B = 2 \max_{w \in \mathfrak{S}_n} \ell(w)$ . 利用  $G/B$  光滑的事实说明只有唯一的元素取到最大值.

习题 4. 记  $[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ,  $[n]! = [n] \cdot [n-1] \cdots [1]$ . 经典的计数表明  $[n]!$  是有限域  $\mathbb{F}_q$  上  $n$  维线性空间中旗的数量. 证明这还是  $H^*(G/B)$  的 Hilbert 多项式

$$[n]! = \sum_k \text{rank } H^{2k}(G/B) q^k.$$

[提示: 在有限域上也有 Schubert 胞腔, 这时  $BwB/B \cong \mathbb{F}_q^{\ell(w)}$ , 这贡献  $q^{\ell(w)}$  这么多元素, 而在  $\mathbb{C}$  上的情况, 这时  $BwB/B \cong \mathbb{C}^{\ell(w)}$  在 Hilbert 多项式中贡献  $q^{\ell(w)}$ .]

习题 5. 考虑复射影空间  $\mathbb{C}P^n$  为  $n+1$  维空间所有的 1 维子空间. 将  $\mathbb{C}P^n$  写成一些  $\mathbb{C}^{2i}$  的并, 并且证明  $H^{2k+1}(\mathbb{C}P^n) = 0$ , 且

$$\begin{array}{c|cccccc} & 0 & 2 & \cdots & 2n & 2n+1 & \cdots \\ \hline H^*(\mathbb{C}P^n) & \mathbb{Z} & \mathbb{Z} & \cdots & \mathbb{Z} & 0 & \cdots \end{array}$$

[提示: 对非零向量  $(x_0, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$ , 记  $[x_0 : \cdots : x_n]$  为对应的 1 维子空间. 换言之  $[x_0 : \cdots : x_n] = [y_0 : \cdots : y_n]$  当且仅当  $(x_0, \dots, x_n) = \lambda(y_0, \dots, y_n)$  对某个  $\lambda \in \mathbb{C}^\times$ . 对  $i = 0, \dots, n$ , 记  $A^i = \{[\cdots 0 : 1 : \underbrace{\mathbb{C} : \cdots : \mathbb{C}}_i]\}$ .]

## 1.2 推出与拉回

令  $X \xrightarrow{f} Y$  是一个连续映射, 那么诱导了拉回 (pull back)

$$H^*(X) \xleftarrow{f^*} H^*(Y).$$

注意 1 这是一个齐次映射.

$$\alpha \in H^n(Y) \implies f^*(\alpha) \in H^n(X).$$

注意 2 这是一个代数同态.

$$f^*(\alpha \smile \beta) = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta).$$

令  $X$  是紧致光滑定向流形. 那么有 Poincaré 对偶

$$H^*(X) \xrightarrow{\sim} H_\bullet(X) \quad * + \bullet = \dim X.$$

注意 1 这个最经典的, 也最容易理解的是组合的解释, 见 [姜]. 现代通行的做法是用 cap 积  $\frown$  给出具体的映射. 更进一步还可以用层的语言改写 (与对偶层对偶).

注意 2 这个同构需要选定一个定向, 所以区分 “可定向 (orientable)” 和 “定向 (oriented)”.

假设  $X$  和  $Y$  都是紧致光滑定向流形. 令  $X \xrightarrow{f} Y$  是一个连续映射, 那么可以定义推出 (push forward)

$$H^*(X) \xrightarrow{f_*} H^*(Y),$$

其中  $\dim X - * = \dim Y - \dagger$ , 使得下图交换

$$\begin{array}{ccc} H^*(X) & \longrightarrow & H^\dagger(Y) \\ \text{对偶} \downarrow & & \downarrow \text{对偶} \\ H_\bullet(X) & \longrightarrow & H_\bullet(Y) \end{array}$$

即, 先对偶到下同调, 推出, 再对偶回上同调.

注意 1 这是不是一个齐次映射.

但是如果我们对  $\alpha \in H^*(X)$ , 记  $\text{codim } \alpha = \dim X - *$ , 那么  $f_*$  保持  $\text{codim}$ .

注意 2 这是不是一个代数同态. 但是对于  $\alpha \in H^*(X), \beta \in H^*(Y)$ , 有 projective formula

$$f_*(\alpha \smile f^*(\beta)) = f_*(\alpha) \smile \beta.$$

这是一个 “模同态”, 因为通过  $f^*$ ,  $H^*(X)$  是  $H^*(Y)$ -代数, 从而是  $H^*(Y)$ -模.

注意 3 其实我们不需要  $X$  和  $Y$  都紧致, 只需要  $f$  是逆紧的 (proper) 即可定义; 实际上最需要的是当  $f$  是一个纤维丛, 且纤维是紧致光滑定向流形.

**注意 4** 对于一个“拉回方阵”

即  $\square = \{(y, z) \in Y \times Z : f(y) = g(z)\}$ .  
从  $H^*(Y)$  到  $H^*(Z)$  的两个映射

$$g^* \circ f_* = F_* \circ G^*$$

$$\begin{array}{ccc} \square & \xrightarrow{G} & Y \\ F \downarrow & & \downarrow f \\ Z & \xrightarrow{g} & X \end{array}$$

令  $X$  是一个紧致流形, 设  $[X]$  使得

$$\text{单位元 } 1 \in H^0(X) \xrightarrow{\text{对偶}} [X] \in H_n(X)$$

我们称  $[X]$  是  $X$  的**基本类 (fundamental class)**.

**注意 1** 如果给  $X$  一个三角剖分, 即把  $X$  分割成一些单纯形, 那么  $H_n(X)$  是这些单纯形的和 (事先选好定向) 的类. 换句话说,

$$[X] = \text{“同调意义下”的 } X \text{ 本身.}$$

令  $Y$  是一个紧致流形,  $X$  是一个嵌入**闭**子流形. 令  $i: X \rightarrow Y$  是包含映射. 定义  $X$  在  $Y$  中的**fundamental class** (滥用记号)

$$[X] = i_*(1) \in H^*(Y),$$

特别地,  $1 = [Y]$ .

请注意!

$$\deg[X] = \text{codim } X = \dim Y - \dim X \text{ 是 } X \text{ 的余维数.}$$

另外,  $[X] \stackrel{\text{有可能}}{=} 0$ .

**注意 1** 请看

$$1 \in H^0(X) \longrightarrow H^{\text{codim } X}(Y) \ni [X]$$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow \text{对偶} & \\ & & \downarrow \text{对偶} \end{array}$$

$$[X] \in H_{\dim X}(X) \longrightarrow H_{\dim X}(Y) \ni (\dots)$$

所以

$$[X] = \text{“} Y \text{ 的同调意义下”的 } X \text{ 本身.}$$

**注意 1** 对于代数簇, 即使子簇  $X$  不是光滑的, 我们也可以在  $H^*(Y)$  中定义代数闭链 (algebraic cycles)  $[X]$ . 但是至少需要是闭的. 使用的方法是 Borel-Moore 同调, 请见 [Fulton].

**注意 2** 直接把代数闭链拿出来商掉“代数”同伦, 这就是周环 (Chow ring) 的定义. 只有  $X$  是光滑的时候,  $X$  的周“环”才是环.

**注意 3** 一般来说上同调不一定总是由代数闭链生成的, 这个是被 well-studied, 更广的配边理论也对此有研究.

— 下面我们用 fundamental classes 重新理解上同调 —

以下内容不尽严格. 严格地, 要加何种条件应该看 [Fulton], 周环的版本应该看 [3264]. 但是拿来用基本是没问题的, 而且实际上用式性类等工具能很大程度上避免这类问题.

## 1. Cup 积

假设  $\dim A = a, \dim B = b$ . 那么  $A \cap B$  的期待维数是  $n - [(n - a) + (n - b)]$ . 此时

$$[A] \smile [B] = \begin{cases} [A \cap B] & A \text{ 和 } B \text{ 直交} \\ 0 & \text{比期待维数小} \\ \text{不知道} & \text{比期待维数大} \end{cases}$$

在  $A$  和  $B$  直交 (transversal) 时, 一定取到期待维数.

**注意 1** 所谓直交是说局部上上看是线性空间的交, 也就是说没有  $\times$ .

**注意 2** 微分几何中需要计算定向, 但是如果是代数簇, 定向是复结构一定选定的, 所以没有问题.

## 2. 拉回

$$(f: X \rightarrow Y)$$

对于  $B \subseteq Y, \dim B = b$ , 那么  $f^{-1}(B)$  的期待维数是  $x - (y - b)$ .

$$f^*[B] = \begin{cases} [f^{-1}(B)] & f^{-1}(B) \text{ 横截} \\ 0 & \text{比期待维数小} \\ \text{不知道} & \text{比期待维数大} \end{cases}$$

在  $f^{-1}(B)$  横截 (transversal) 时, 一定取到期待维数.

**注意 1** 所谓横截是说局部上上看是线性映射, 例如对应的 Jacobi 矩阵秩取到期待的秩.

(这不严格)

所以

$$\begin{array}{|c|} \hline f^*(\alpha \smile \beta) \\ \hline = f^*(\alpha) \smile f^*(\beta) \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{同调版本的} \\ f^{-1}(A \cap B) \\ = f^{-1}(A) \cap f^{-1}(B) \\ \hline \end{array}$$

## 3. 推出

$$(f: X \rightarrow Y)$$

对于  $A \subseteq X, \dim A = a$ , 那么  $f(A)$  的期待维数是  $a$ .

$$f_*[A] = \begin{cases} d \cdot [f(A)] & \text{取到期待维数} \\ 0 & \text{比期待维数小} \end{cases}$$

这里  $d$  是映射度, 即  $f(A)$  中几乎所有点的原像都是  $d$  个  $A$  中的点.

(这也不严格)

所以

$$\begin{array}{|c|} \hline \text{projective formula} \\ \hline f_*(\alpha \smile f^*(\beta)) \\ = f_*(\alpha) \smile \beta \\ \hline \end{array} = \begin{array}{|c|} \hline \text{同调版本的} \\ \hline f(A \cap f^{-1}(B)) \\ = f(A) \cap B \\ \hline \end{array}$$

对于  $i = 1, \dots, n-1$ . 考虑

$$P_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \cdots & * \\ & \ddots & & & \\ & & * & \cdots & * \\ & & & \ddots & \\ & & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & * \end{pmatrix}$$

这比上三角矩阵群  $B$  在  $(i+1, i)$  位置多一个自由度.

齐次流形  $G/B$  和  $\mathcal{F}\ell(n)$  同胚. 那么  $G/P$  呢?

$$\begin{aligned} G/B &\cong \{V^0 \subseteq \dots \subseteq V^{i-1} \subseteq V^i \subseteq V^{i+1} \subseteq \dots \subseteq V^n\} \\ G/P &\cong \{V^0 \subseteq \dots \subseteq V^{i-1} \subseteq V^{i+1} \subseteq \dots \subseteq V^n\} \end{aligned}$$

且自然映射

$$G/B \longrightarrow G/P$$

就是“把 complete flags 中维数为  $i$  的子空间去掉”.

考虑

$$\begin{aligned} P_i/B &= \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \cdots & * \\ & \ddots & & & \\ & & * & \cdots & * \\ & & & \ddots & \\ & & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & * \end{pmatrix} / \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \cdots & * \\ & \ddots & & & \\ & & * & \cdots & * \\ & & & \ddots & \\ & & * & \cdots & * \\ & & & & \ddots & \\ & & & & & * \end{pmatrix} \\ &= (**)/(**) = \mathcal{F}\ell(2) = \mathbb{C}P^1 \end{aligned}$$

最后  $\mathcal{F}\ell(2) = \mathbb{C}P^1$  是因为  $\mathbb{C}^2$  中的旗实际上由维数为 1 的子空间决定.

另外注意到  $\mathbb{C}P^1 = \mathbb{C} \cup \{\infty\} \cong S^2$  是 Riemann 球.

$$\begin{array}{c|cccccc} * & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \hline H^*(P_i/B) & \mathbb{Z} & 0 & \mathbb{Z} & 0 & 0 & \cdots \end{array}$$

让我们考虑自然映射  $G/B \xrightarrow{\pi} G/P$ . 我们定义 **Demazure operator** 为

$$\partial_i: H^*(G/B) \xrightarrow[\pi_*]{\text{推出}} H^{*-2}(G/P) \xrightarrow[\pi^*]{\text{拉回}} H^{*-2}(G/B).$$

这里的  $2 = \dim G/B - \dim G/P = \dim P/B$ .

用旗的语言,

$$\begin{array}{l} \boxed{\text{推出 } \pi_*} = \begin{array}{|c|} \hline \text{同调地} \\ \hline \text{“把维数 } i \text{ 的子空间 } V^i \text{ 去掉”} \\ \hline \end{array} \\ \boxed{\text{拉回 } \pi^*} = \begin{array}{|c|} \hline \text{同调地} \\ \hline \text{“把 } V^{i-1} \subseteq V^{i+1} \text{ 之间全部} \\ \quad i \text{ 维子空间加上”} \\ \hline \end{array} \end{array}$$

令  $B^- = w_0 B w_0$  为下三角矩阵群, 其中  $w_0$  是最长元  $\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ n & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathfrak{S}_n$ . 那么我们记  $\Sigma_w$  为

$$[BwB/B] \text{ 作为上同调胞腔} = [\overline{B^-wB/B}] \text{ 作为基本类.}$$

这个等号实际上是通过计算下同调的相交证明的, 请见 [Fulton]. 于是

$$H^*(G/B) = \text{以 } \{\Sigma_w\}_{w \in \mathfrak{S}_n} \text{ 为基的自由 Abel 群}$$

令  $s_i = (i, i+1) \in \mathfrak{S}_n$  是  $i$  和  $i+1$  的对换. 注意到  $P_i = B \cup Bs_i B$ .

下面我们可以计算 Demazure operator 在  $\Sigma_w$  上的作用. 根据定义

$$\begin{aligned} \partial_i(\Sigma_w) &= \pi^*(\pi_*(\Sigma_w)) = \pi^*(\pi_*([\overline{B^-wB/B}])) \\ &= \delta_{\text{维数正确}} \cdot [\pi^{-1}(\pi(\overline{B^-wB/B}))] \\ &= \delta_{\text{维数正确}} \cdot [\pi^{-1}(\overline{B^-wP/P})] \\ &= \delta_{\text{维数正确}} \cdot [\overline{B^-wB/B} \cup \overline{B^-ws_i B/B}] \\ &= \begin{cases} [\overline{B^-ws_i B/B}], & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1, \\ 0, & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1. \end{cases} \\ &= \begin{cases} \Sigma_{ws_i}, & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1, \\ 0, & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1. \end{cases} \end{aligned}$$

这里实际上用到了 **Tits system**.

Tits system 是说

$$BwB \cdot Bs_i B = \begin{cases} Bws_i B, & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1; \\ Bws_i B \cup BwB, & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1. \end{cases}$$

**注意 1** 实际上我们已经可以证明在任何系数下 Demazure operator 满足**幂零辫子关系 (braid relation)**. 但是之后我们会建立多项式版本的联系, 那时将可以直接证明.

**习题 1.** 哪条集合论的事实的上同调版本是  $g^* \circ f_* = F_* \circ G^*$ ? [提示:  $F(G^{-1}(A)) = g^{-1}(f(A))$ .]

**习题 2.** 根据 Poincaré 对偶,

$$H^*(\mathbb{C}P^n) \otimes H^{2n-*}(\mathbb{C}P^n) \xrightarrow{\sim} H^{2n}(\mathbb{C}P^n) \cong \mathbb{Z}$$

构成完美配对. 取  $H$  是  $\mathbb{C}P^n$  中任意一个超平面, 记  $x = [H] \in H^*(\mathbb{C}P^n)$ . 证明  $H^*(\mathbb{C}P^n)$  作为环同构于  $\mathbb{Z}[x]/(x^{n+1})$ , 其中  $\deg x = 2$ . [提示: 显然  $H$  的 (实) 余维数是 2. 注意到不同超平面给出相同的基本类, 所以我们直接计算相交知道  $x^n = 1 \cdot [\text{点}] \neq 0$ . 要说明  $H^*(\mathbb{C}P^n)$  是由  $x$  生成的, 我们将  $H$  视为  $\mathbb{C}P^{n-1}$ , 用  $i^*$  结合完美配对的事实归纳证明.]

**习题 3.** 对于一般的  $d$  次超平面  $D \subseteq \mathbb{C}P^n$ , 证明  $[D] = dx$ , 其中  $x$  是超平面类. [提示: 注意到因为  $H^2(\mathbb{C}P^n) = \mathbb{Z}x$ , 所以一定有一个整数  $d'$  使得  $[D] = d'x$ . 注意到  $D$  与一条一般位置的直线交  $d$  个点, 而直线又可以写成  $n-1$  个超平面的交,  $d'x \cdot x^{n-1} = [D] \smile [H]^{n-1} = [D \cap H_1 \cap \dots] = d \cdot [\text{点}] = dx^n$ , 所以  $d = d'$ .]

**习题 4.** 请说明

$$\Sigma_w = [\overline{w_0 B w_0 w B / B}] = [\overline{B w_0 w B / B}]$$

[提示: 因为可以在  $GL_n$  中找到一条从 1 通往  $w_0$  的道路, 从而构造一个同伦.]

**习题 5.** 在 [Fulton] 中, 为了计算 Demazure operators, 他用了拉回方阵  $\begin{array}{ccc} \square & \rightarrow & G/B \\ \downarrow & & \downarrow \\ G/B & \rightarrow & G/P \end{array}$ , 证明这时  $\square$  和下面的集合是双射.

$$\square = \left\{ \dots \subseteq V^{i-1} \begin{array}{c} \subsetneq V_1^i \\ \supsetneq V_2^i \end{array} \subsetneq V^{i+1} \subseteq \dots \right\}.$$

### 1.3 Lie 群的一些补充

对于  $GL_n$ , 对于  $\lambda_1 + \dots + \lambda_k$ , 我们记抛物 (parabolic) 子群

$$P_\lambda = \begin{pmatrix} GL_{\lambda_1} & * & \cdots & * \\ & GL_{\lambda_2} & \cdots & * \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & GL_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

我们考虑  $G/P$ .

实际上 (集合论意义上可以直接验证)

$$G/P_\lambda = \left\{ 0 \subseteq V^{\lambda_1} \subseteq V^{\lambda_1 + \lambda_2} \subseteq \dots \subseteq \mathbb{C}^n \right\}$$

且如果  $P_1$  分的块都是  $P_2$  的子块, 那么

$$G/P_1 \rightarrow G/P_2$$

就是“把多余维数的子空间去掉”.

让我们用分成  $k$  组的  $n$  个标上 1 到  $n$  的  $\bullet$  来记  $\lambda_i$

$$(\lambda_1 \text{ 个 } \bullet)(\lambda_2 \text{ 个 } \bullet) \cdots (\lambda_k \text{ 个 } \bullet)$$

如果  $\lambda_i = 1$ , 则省略括号.

那么  $\lambda_1 + \dots + \lambda_j$  是第  $j$  组最后一个  $\bullet$  的编号.

第一个例子

$$\bullet \cdots \bullet_{i-1} (\bullet_i \bullet_{i+1} \bullet_{i+2} \cdots \bullet_n)$$

对应上一节的

$$P_i = \begin{pmatrix} * & \cdots & * & \cdots & * \\ & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ & & * & \cdots & * \\ & & * & \cdots & * \\ & & & \ddots & * \end{pmatrix}$$

第二个例子

$$(\bullet \cdots \bullet_k) (\bullet_{k+1} \cdots \bullet_n)$$

对应 Grassmannian 流形/簇

$$G/P_\lambda = Gr(k, n) = \{0 \subseteq V^k \subseteq \mathbb{C}^n\}.$$

令

$$\mathfrak{S}_\lambda = \mathfrak{S}_{\lambda_1} \times \cdots \times \mathfrak{S}_{\lambda_k}$$

是“组内置换”构成的群.

注意到

$$P = \bigcup_{u \in \mathfrak{S}_\lambda} BuB.$$

(严格说还是用了 Tits system).

对于  $\sigma \in \mathfrak{S}_\lambda$ , 我们有

$$Bw\sigma P/P = BwP/P.$$

所以

$$G = \bigcup_{w \in \mathfrak{S}_w/\mathfrak{S}_\lambda} BwP \quad (\text{无交并}).$$

称  $\{BwP/P : w \in \mathfrak{S}_w/\mathfrak{S}_\lambda\}$  为  $G/P_\lambda$  上的 **Schubert 胞腔**.

**注意 1** 一般没有  $\dim BwP/P = 2\ell(w)$ .

但是, 如果  $w$  是陪集  $w\mathfrak{S}_\lambda$  中长度最小者, 则

$$\text{自然映射} : BwB/B \longrightarrow BwP/P$$

是双射 (同胚). 记

$$\mathfrak{S}^\lambda = \{\text{每个陪集 } \mathfrak{S}_w/\mathfrak{S}_\lambda \text{ 选出的唯一的长度最小者}\}$$

那么  $\{BwP_\lambda/P_\lambda : w \in \mathfrak{S}^\lambda\}$  给出  $G/P_\lambda$  的胞腔结构.

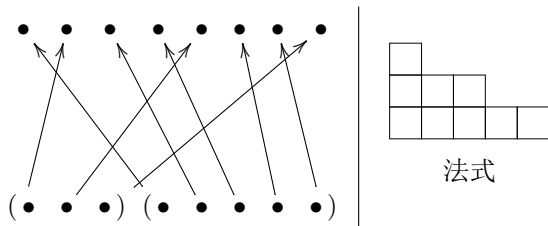
**注意 1** 这是因为作用  $P$  等于作用  $\bigcup_{u \in \mathfrak{S}_\lambda} BuB$ , 而  $BwB \cdot BuB = BwuB$  如果  $\ell(wu) = \ell(w) + \ell(u)$  (Tits system). 换句话说如果  $P$  内  $B$  以外的元素作用在  $BwB$  上一定无法回到  $BwB$ .

我们证明对于 Grassmannian 的情况

$$(\bullet \cdots \bullet)_1^k (\bullet \cdots \bullet)_{k+1}^n$$

$\mathfrak{S}^\lambda$  和  $k \times (n-k)$  的 Young 图 (保持  $\ell$ ) 一一对应.

请看



我们曾经提到  $\mathcal{F}\ell(n)$  是紧致的, 是因为  $\mathcal{F}\ell(n)$  是酉群  $U_n$  的商.

具体来说, 记  $K = U_n$ ,  $T_K$  是  $U_n$  中的对角矩阵. 那么

$$U_n/T_K \xrightarrow{\sim} G/B \cong \mathcal{F}\ell(n)$$

是同胚. 这实际上是如下一则线性代数的转述

任何旗都 admits 一个酉正交基.

但是  $U_n/T_K$  上面没有显然的代数簇结构 (酉群不是代数群!), 所以无法刻画 **Schubert 胞腔**. 但是当我们不用胞腔的时候, 复结构 (代数簇结构) 反而显得累赘.

注意  $\mathfrak{S}_n$  通过共轭, 作用在如下群上

$$U_n, \quad U_n \text{ 中的对角矩阵群} = T_K,$$

$$\text{GL}_n, \quad \text{GL}_n \text{ 中的对角矩阵群}.$$

但是唯独不作用在上三角矩阵群  $B$  上.

前两者诱导了  $\mathfrak{S}_n$  在

$$U_n/T_K \xrightarrow{\sim} G/B \cong \mathcal{F}\ell(n)$$

上的作用.

但是  $\text{GL}_n/B$  上面没有显然的  $\mathfrak{S}_n$  作用.

**注意 1** 注意到  $\mathfrak{S}_n$  通过共轭诱导的  $H^*(K)$  和  $H^*(T_K)$  上的作用都平凡. 因为我们可以找到  $w \in \mathfrak{S}_n$  的道路构造同伦. 但是在  $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$  上却不平凡. 原因是此时作用是  $xT_K \mapsto wxw^{-1}T_K$ , 乘在内侧. 另外, 我们几乎不如何知道  $\mathfrak{S}_n$  在胞腔上如何作用 (等价于  $\mathfrak{S}_n$  在 **Schubert** 多项式的作用).

上面的事实也有紧致版本. 记

$$U_\lambda = \begin{pmatrix} U_{\lambda_1} & & & \\ & U_{\lambda_2} & & \\ & & \ddots & \\ & & & U_{\lambda_k} \end{pmatrix}$$

那么

$$G/P_\lambda = U_n/U_\lambda.$$

但是同样 **Schubert 胞腔** 也无法刻画.

**习题 1.** 证明  $\mathfrak{S}_n/\mathfrak{S}_\lambda$  每个陪集中都有一个唯一的长度最小者, 他们是那些组内单调递增的置换.

**习题 2.** 请验证  $G/P_\lambda = U_n/U_\lambda$ . [提示: 因为我们已经给出过  $G/P_\lambda$  对应的旗的刻画, 所以可以直接验证; 另一方面, 还可以说明  $U_\lambda = U_n \cap P_\lambda$ .]

**习题 3.** 证明  $\text{GL}_n(\mathbb{C})$  中任何一个紧致子群都共轭到  $U_n$  的子群. [提示: 需要用到一则事实, 紧致子群有 **Haar** 测度  $\mu$ . 任意取一个酉内积, 将这个酉内积对这个子群作用取平均, 如此得到一个新的酉内积, 而这个子群作用保持. 再利用事实 ---  $\mathbb{C}^n$  上的所有酉内积都相同. ]

**习题 4.** 证明  $\text{GL}_n/U_n$  是一个欧式空间. [提示: 回忆正交化算法给出的所谓 **QR** 分解; 对酉群也是类似的, 任何一个矩阵  $x$  都可以写成一个酉矩阵和一个上三角矩阵的乘积, 如果我们要求上三角矩阵的对角线上排列着 1, 那么这个分解是唯一的. 所以  $\text{GL}_n/U_n$  和对角线全为 1 的上三角矩阵同胚. ]



参考文献

- Hatcher. Algebraic Topology.
- Bredon. Geometry and Topology. GTM139.
- 姜伯驹. 代数拓扑.
- Fulton. Young Tableaux.
- Chriss, Ginzburg. Representation Theory and Complex Geometry.
- Eisenbud, Harris. 3264 and all that.

关于 Lie 群有不少书, 推荐

- Bump. Lie Group. GTM 225. 里面也有很多相关的组合.
- Knapp. Lie groups beyond an introduction.
- Humphrey. Linear Algebraic Groups. GTM21. 请看 29. Tits system.
- Springer. Linear Algebraic Groups. 请看 8.5, Bruhat order 的几何解释.

2 纤维丛

上节我们提到关于计算环结构的方法只是理论上的, 但是实际并不能广泛地用于计算.

4. 计算环结构

取两个基本类, 求第三个基本类前系数  
通过完美配对, 变成计算三个基本类相交  
移动到直交位置, 计算相交点的数目

2.1 纤维丛

为了真的能够计算, 并更好地理解上同调, 我们需要理解纤维丛.

对于连续映射  $E \xrightarrow{\pi} B$ , 对于  $b \in B$ , 称  $\pi^{-1}(b) \subseteq E$  是  $b$  处的纤维 (fibre), 也记作  $E_b$ .

$$\begin{array}{ccc} E & \xrightarrow{\pi} & B \\ \cup & & \cup \\ E_b & \xleftarrow{\text{原像}} & b \end{array}$$

$B$  和  $F$  是拓扑空间,

$$\begin{array}{ccc} E = B \times F & & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ B & & F \end{array}$$

那么映射  $E \xrightarrow{\pi} B$  每一点的纤维 (= 原像) 都是一个  $F$  的拷贝. 此时  $E \rightarrow B$  被称为以  $F$  为纤维的平凡丛.

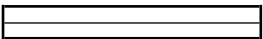
令  $E \xrightarrow{\pi} B$  是一个连续映射, 我们说这是一个以  $F$  为纤维的纤维丛 (fibre bundle), 如果局部上是平凡丛.

任 意 一 个 点  $b \in B$ , 都存在邻域  $U$  使得  $\pi^{-1}(U) \rightarrow U$  同构于平凡丛.

$$\begin{array}{ccccc} U \times F & \cong & \pi^{-1}(U) & \subseteq & E \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ U & = & U & \subseteq & B \end{array}$$

其中  $B$  叫底空间 (base space),  $E$  叫全空间 (total space).

例子: Möbius 带, 将下列纸带



卷成 Möbius 带时, 中间的轴线会粘成一个圆圈  $S^1$ . 而垂直方向则是一个区间  $I$ . 所以 Möbius 带  $\rightarrow S^1$  是以  $I$  为纤维的纤维丛.

~~ ★★ 菜谱 ★★ ~~  
—如何计算上同调?

1. 计算群结构.  
找胞腔结构, 计算他们的维数.  
胞腔复形, 计算上同调.  
没有奇数  $\implies$  复形平凡

2. 计算相交配对  
取两个维数互补的基本类  
移动到直交位置  
计算相交点的数目

3. 计算推出拉回  
计算像和原像  
比维数

4. 计算环结构  
取两个基本类, 求第三个基本类前系数  
通过完美配对, 变成计算三个基本类相交  
移动到直交位置, 计算相交点的数目

本节的上同调

$\approx$

集合论

+

算开闭

+

算维数

不是所有纤维丛都平凡

例子: 任何一个流形  $M$ , 在点  $x \in M$  有切空间  $T_x M$ . 定义切丛

$$TM = \bigcup_{x \in M} T_x M$$

为所有点处切空间的形式并. 实际上可以找到  $TM$  的流形结构使得

$$TM \rightarrow M \quad \text{来自 } T_x M \text{ 的切向量 } \mapsto x$$

是一个纤维丛.

**注意 1** 请注意

不是所有切丛都平凡

例如著名的毛球 (hairy ball) 定理. 点  $x$  处切空间  $T_x M$  可以看出这一点处的无穷小移动组成的向量空间. 这可以用线素 (毛) 画出.

对于纤维丛  $\pi = \downarrow_B^E$ , 我们称  $s: \uparrow_B^E$  是一个 **截面 (section)** 如果  $\pi \circ s = \text{id}_B$ .

换句话说,  $\forall x \in B, s(x) \in E_x$ ,

**截面** = 每条纤维上选一个点.

**连续截面** = 每条纤维上连续地选一个点.

对于平凡丛  $E = B \times F$ , 截面就是一个函数  $B \rightarrow F$ .

而纤维丛局部上是平凡丛, 所以截面局部上是函数.

一般而言对于纤维丛, 截面并没有一个典范地选择 (有时甚至不存在, 例如 Möbius 带的边界), 即: 我们不能认为  $B \subseteq E$ .

因为我们总遇到大量的纤维丛, 如何计算他们的上同调呢? 对于平凡丛,  $E = B \times F$ , 可以用 **万有系数定理**, 例如在  $H^*(B)$  或  $H^*(F)$  其中一个自由的时候,

$$H^*(E) = H^*(B) \otimes H^*(F) \quad (\text{作为环}).$$

一般地我们也希望这个成立. 但是一般不能作为环同构, 也不典范.

取纤维丛  $\downarrow_B^E$ , 任意选择一个点  $b$ , 纤维为  $F$ . 由如下两个映射

$$\begin{array}{ccc} F \subseteq E & & E \rightarrow B \\ \Downarrow & \text{诱导了} & \downarrow \\ H^*(F) \xleftarrow{\text{限制}} H^*(E) & & H^*(E) \xleftarrow{\pi^*} H^*(B) \end{array}$$

我们称  $\downarrow_B^E$  是 **形式的 (formal)** (非广泛术语) 如果满足下面的条件.

存在  $H^*(F)$  在  $H^*(E)$  的提升  $A$

$$\left[ \begin{array}{l} \text{即子群 } A \subseteq H^*(E) \text{ 使得下面复合是同构} \\ H^*(F) \xleftarrow{\text{限制}} H^*(E) \xleftarrow{\supseteq} A \\ \text{假设 } \tilde{\alpha} \in A \text{ 对应到 } \alpha \in H^*(F) \end{array} \right]$$

使得

$$H^*(B) \otimes H^*(F) \longrightarrow H^*(E) \quad \beta \otimes \alpha \mapsto \pi^*(\beta) \smile \tilde{\alpha},$$

是群同构.

**注意 1** 此时

$$\begin{array}{ccc} H^*(F) & \xleftarrow{\text{限制}} & H^*(E) \\ \parallel & & \uparrow \\ H^*(F) & \longleftarrow & H^*(B) \otimes H^*(F) \\ \alpha & \longleftarrow & 1 \otimes \alpha \\ 0 & \longleftarrow & \beta \otimes \alpha \quad \deg \beta \geq 1 \end{array}$$

**注意 2** 此时

$$\begin{array}{ccc} H^*(E) & \xleftarrow{\pi^*} & H^*(B) \\ \uparrow & & \parallel \\ H^*(B) \otimes H^*(F) & \longleftarrow & H^*(B) \\ \beta \otimes 1 & \longleftarrow & \beta \end{array}$$

有两个非平凡情况能得到 formality.

1. **Leray-Hirsch 定理** 如果  $H^*(F)$  是自由模 (wrt 系数), 且存在一个  $H^*(E)$  上的一些元素  $\{\alpha_i\}$  使得  $\{\alpha_i\}$  限制在每一点处的纤维  $H^*(E_x)$  都构成一组基.

2. **Serre-Leray 谱序列退化情况** 如果  $H^*(B)$  和  $H^*(F)$  都只有偶数维的自由模 (wrt 系数).

前者请看 [Hatcher], 内含大量应用, 包括一个计算  $H^*(\mathcal{F}\ell(n))$  的命题 (但是没有算出环结构, 所以我们不采用). 后者也推荐 [Hatcher].

请看我们上节提到的

$$G/B \xrightarrow{\pi} G/P_i.$$

这是一个以  $P_i/B \cong \mathbb{C}P^1$  为纤维的向量丛. 一切都只有偶数维的同调, 所以我们可以放心地得到

$$H^*(G/B) = H^*(G/P_i) \otimes H^*(\mathbb{C}P^1).$$

回忆  $H^*(\mathbb{C}P^1) = \mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z} \cdot [\text{点}]$ . [注意:  $\mathbb{C}P^1$  的超平面就是点.]

等价地, 存在一个  $\omega_i \in H^2(G/B)$ , 使得

$$\begin{array}{ccc} H^2(\mathbb{CP}^1) = H^2(P/B) & \longleftarrow & H^2(G/B) \\ \downarrow \Psi & & \downarrow \Psi \\ [\text{点}] & \longleftarrow & \omega_i \end{array}$$

以及, 任何一个  $H^*(G/B)$  的元素都可以唯一地写成

$$\omega_i \smile \pi^* \alpha + \pi^* \beta, \quad \alpha, \beta \in H^*(G/P_i).$$

回忆 Demazure operator 是拉回和推出的复合, 所以对于  $f = \omega_i \smile \pi^* \alpha + \pi^* \beta \in H^*(G/B)$ ,

$$\begin{aligned} \partial_i f &= \partial_i(\omega_i \smile \pi^* \alpha + 1 \smile \pi^* \beta) && \text{定义} \\ &= \partial_i(\omega_i \smile \pi^* \alpha) + \partial_i(1 \smile \pi^* \beta) && \text{定义} \\ &= \pi^*(\pi_*(\omega_i \smile \pi^*(\alpha))) + \pi^*(1 \smile \pi_*(\pi^* \beta)) && \text{定义} \\ &= \pi^*(\pi_* \omega_i \smile \alpha) + \pi^*(\pi_* 1 \smile \beta) && \text{定义} \\ &\quad \because \text{projective formula} \\ &= \pi^*(\pi_* \omega_i) \smile \pi^* \alpha + \pi^*(\pi_* 1) \smile \pi^* \beta \\ &\quad \because \text{cup 积是代数同态} \\ &= \pi^* \alpha && \text{请看下一段} \end{aligned}$$

注意到  $\pi^*(\pi_* 1) \in H^{-2}(G/B) = 0$ .

注意到  $\pi^* \pi_* \omega_i \in H^0(G/B) \cong \mathbb{Z}$  是一个数, 所以可以

用下面的拉回方阵计算

$$\begin{array}{ccccc} & & P/B \rightarrow \text{点} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow \\ & & G/B \rightarrow G/P & & \\ \begin{array}{c} \text{[点]} \\ \uparrow \\ \omega_i \end{array} & \in H^2(P/B) & \xrightarrow{\text{推出}} & H^0(\text{点}) & \ni 1 \\ & \uparrow \text{拉回} & & \parallel \text{拉回} & \\ \omega_i & \in H^2(G/B) & \xrightarrow{\text{推出}} & H^0(G/P) & \ni \pi_* \omega_i \end{array}$$

所以  $\pi^* \pi_* \omega_i = \pi^* 1 = 1$ .

回忆上一节对紧致群的补充. 此时

$$G/B = U_n / \begin{pmatrix} * & & \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}, \quad G/P_i = U_n / \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}.$$

此时  $\mathfrak{S}_n$  良定义作用在  $G/B = U_n/T$  上 (我们这里只用右作用),

$$U_n/T \ni xT \xrightarrow{\sigma} x\sigma^{-1}T \in U_n/T.$$

这是良定义的是因为  $\sigma T \sigma^{-1} = T$ .

此时

$$\mathfrak{S}_{\{1, \dots, i-1\}} \times \mathfrak{S}_{\{i, i+1\}} \times \mathfrak{S}_{\{i+1, \dots, n\}}$$

还良定义地作用在  $G/P_i = U_n / \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$  上, 和上面相同的公式.

但是  $s_i$  作用是平凡的, 因为  $s_i \in \begin{pmatrix} * & & \\ & * & \\ & & * \end{pmatrix}$ . 所以

$$H^*(G/B) \xleftarrow{\pi^*} H^*(G/P)$$

的像是关于  $s_i$  对称的.

特别地, Demazure operator 的在  $s_i$  作用下不变.

**习题 1.** 考虑紧致的版本  $U_n$  为酉群,  $T_K$  为其对角矩阵. 注意到  $U_n/V = \mathcal{G}r(k, n)$ , 其中  $V = \begin{pmatrix} U_k & \\ & U_{n-k} \end{pmatrix}$ . 由此说明  $H^*(\mathcal{F}l(n)) = H^*(\mathcal{F}l(k)) \otimes H^*(\mathcal{F}l(n-k)) \otimes H^*(\mathcal{G}r(k, n-k))$ .

[提示: 利用  $U_n/T_K \rightarrow U_n/V$ . 需要证明  $V/T_K = \mathcal{F}l(k) \times \mathcal{F}l(n-k)$ .]

**习题 2.** 回忆我们之前定义的  $[n] = \frac{q^n - 1}{q - 1}$ ,  $[n]! = [n] \cdots [1]$ . 我们可以定义  $q$ -二项式系数  $\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix} = \frac{[n]!}{[k]![n-k]!}$ . 证明这是  $\mathbb{F}_q$  中  $n$  维空间  $k$  维子空间的数目. [提示: 我们之前将  $[n]!$  解释成 Hilbert 多项式. 注意到张量的 Hilbert 多项式是 Hilbert 多项式相乘. 所以根据上题我们得到  $H^*(\mathcal{G}r(k, n))$  的 Hilbert 多项式. 而  $\mathcal{G}r(k, n)$  也有胞腔结构, 所以前面某道旗流形的问题是一样的.]

## 2.2 更多计算

## 2.3 切空间

流形上的 Lie 括号取成  $[X, Y] = XY - YX$ ,

	左世界		右世界
$\mathfrak{g}$	左不变向量场	$\xleftrightarrow[\text{Lie 括号差符号}]{\text{通过 } T_1 G}$	右不变向量场
指数映射	$\exp$	$=$	$\exp$
对应的 flow	$x \mapsto x \cdot \exp(tX)$	$\neq$	$x \mapsto (\exp tX) \cdot x$
$G$ 左伴随作用	$\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad } x} \mathfrak{g}$	$\xleftrightarrow[\text{相等}]{\text{通过 } T_1 G}$	$\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad } x} \mathfrak{g}$
$\mathfrak{g}$ 左伴随作用	$\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad } X} \mathfrak{g}$	$\xleftrightarrow[\text{相等}]{\text{通过 } T_1 G}$	$\mathfrak{g} \xrightarrow{\text{ad } X} \mathfrak{g}$

例如对于  $G = \text{GL}_n$ ,

$$\begin{array}{ccc} & \text{左世界} & \text{右世界} \\ \hline \mathfrak{gl}_n & [X, Y] = XY - YX & [X, Y] = YX - XY \\ & (\text{ad } X)Y = XY - YX & (\text{ad } X)Y = XY - YX \end{array}$$

因此

代数上多用左不变向量场.

但是因为几何的缘故

几何上多用右不变向量场.

因为平移不变性, specialization at  $x$  给出到  $x$  处的切空间的同构, 所以我们有

$$\begin{array}{ccc} G \times \mathfrak{g} & \xrightarrow{\sim} & TG \\ \downarrow & & \downarrow \\ G & \xlongequal{\quad} & G \end{array}$$

此时

$$G \xrightarrow{\text{左乘}} G \xrightarrow{\text{右乘}} G$$

在切丛上也诱导一个作用

$$G \xrightarrow{\text{左乘}} TG \xrightarrow{\text{右乘}} G$$

如何把这个作用转移到  $G \times \mathfrak{g}$  上呢?

$$\underline{G \xrightarrow{(\text{左乘} \times \text{共轭})} G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{(\text{右乘} \times \text{平凡})} G}$$

例如对于  $G = \text{GL}_n$ , 视作  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  的开集, 每一点的切空间都可以自然地看成是  $\mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  的一个拷贝. 所以切丛是平凡的, 即

$$T\text{GL}_n = \text{GL}_n \times \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$$

在  $\text{GL}_n$  的情况下,

$$G \xrightarrow{(\text{左乘} \times \text{左乘})} \text{GL}_n \times \mathbb{M}_n(\mathbb{C}) \xrightarrow{(\text{右乘} \times \text{右乘})} G$$

此时  $G$  上的切向量场即  $G \rightarrow \mathbb{M}_n(\mathbb{C})$  的函数.

$$f \text{ 右不变} \iff \forall g, x \in G, \quad f(x \cdot g) = f(x) \cdot g.$$

因此右不变向量场由  $f(1)$  决定, 对应于

$$\text{在 } x \text{ 处选择 } f(1) \cdot x$$

此时

$$\begin{aligned} g \cdot \boxed{\text{在 } x \text{ 处选择 } f(1) \cdot x} &= \boxed{\text{在 } gx \text{ 处选择 } gf(1) \cdot x} \\ &= \boxed{\text{在 } x \text{ 处选择 } gf(1)g^{-1}x} \\ \boxed{\text{在 } x \text{ 处选择 } f(1) \cdot x} \cdot g &= \boxed{\text{在 } xg \text{ 处选择 } f(1) \cdot xg} \\ &= \boxed{\text{在 } x \text{ 处选择 } f(1) \cdot x} \end{aligned}$$

下面的问题是  $G/B$  的切空间. 令  $\mathfrak{b}$  是  $B$  的 Lie 代数. 那么无疑  $1 \cdot B$  处的切空间的一种取法是  $\mathfrak{g}/\mathfrak{b}$ . 其他点则需要阐明.

注意到在这个等同下

$$G \xrightarrow{(\text{左乘} \times \text{共轭})} G \times \mathfrak{g} \xrightarrow{(\text{右乘} \times \text{平凡})} B$$

$B$  在  $\mathfrak{g}$  分量上的作用是平凡的.

我们需要回忆  $G/B$  的微分结构是由切片定理给出的, 所以

$$xB \text{ 在 } G/B \text{ 的切空间} = \frac{x \text{ 在 } G \text{ 上的切空间}}{x \text{ 在 } B \text{ 轨道上的切空间}} = \mathfrak{g}/\text{ad}_x \mathfrak{b}.$$

一般而言是切空间没有自然地选取的, 但是这里有, 是因为这里  $xB$  处的切空间不依赖于选取.

## 参考文献

- Hatcher. Algebraic Topology.
- Hatcher. Spectral Sequences.
- 時枝正. Topology in Four Days [翻译: 拓扑四日谈].

### 3 向量丛

### 4 K 理论速成

## 5 等变拓扑速成

### 5.1 等变上同调

### 5.2 等变 K 理论

## 6 拓扑收纳箱

### 6.1 Connected K-theory

### 6.2 相交上同调

### 6.3 量子上同调

### 6.4 反常层

## 7 几何收纳箱

### 7.1 旗流形的推广

### 7.2 Hilbert 概形 (Hilbert Schemes)

### 7.3 动量图 (Moment Graphs)

### 7.4 箭图簇 (Quiver Varieties)

### 7.5 环面簇 (Toric Varieties)

## 8 代数收纳箱

### 8.1 扭结

### 8.2 量子群

## 8.3 Hecke 代数

令  $G = \mathrm{GL}_n$ ,  $B = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$  是上三角矩阵.

回顾 Tits system

$$BwB \cdot Bs_iB = \begin{cases} Bws_iB, & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1; \\ Bws_iB \cup BwB, & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1. \end{cases}$$

注意到

$$BwB \times Bs_iB \rightarrow BwB \cdot Bs_iB$$

不是一一的. 他们之间究竟有何关系?

---

一般地, 考虑置换  $u, v, w$ , 我们要计算  $w$  在下面映射下的原像.

$$BuB \times BvB \xrightarrow{\mu} BuB \cdot BvB \subseteq G.$$

即

$$\{(y, z) : yz = w, y \in BuB, z \in BvB\}.$$

我们称为  $w$  的纤维.

### 8.3.1 有限域

为了考虑这个问题我们先在有限域上看. 令  $\mathbb{F}_q$  是一个有限域. 令  $G = \mathrm{GL}_n(\mathbb{F}_q)$ ,  $B = \begin{pmatrix} * & \cdots & * \\ & \ddots & \\ & & * \end{pmatrix}$ .

---

考虑  $G$  上所有左右  $B$ -不变的 (整数值) 函数

$$\mathrm{Fun}(B \backslash G / B) = \{f \in \mathrm{Fun}(G) : \forall x \in G, f(BxB) = f(x)\}$$

根据 Bruhat 分解维数恰好是对称群.

我们可以定义 **卷积 (convolution)**

$$(f * g)(x) = \frac{1}{|B|} \sum_{x=yz} f(y)g(z).$$

这个乘法显然是结合的.

---

此时得到的代数

$$(\mathrm{Fun}(B \backslash G / B), \text{卷积})$$

被称为 **Hecke 代数**.

组合上说, Hecke 代数是  $\{BwB : w \in \mathfrak{S}_w\}$  的所有“带重数子集”.

---

记  $T_w \in \mathrm{Fun}(B \backslash G / B)$  是  $BwB$  的特征函数, 记  $T_i = T_{s_i}$ . 因为  $T_{\mathrm{id}}$  显然是这个代数的单位元, 所以记为 1.

显然

$$T_u * T_v = \sum (T_u * T_v)(w) \cdot T_w.$$

我们考虑三个置换  $u, v, w$

$$\begin{aligned}(T_u * T_v)(w) &= \frac{1}{|B|} \sum_{w=yz} T_u(y) T_v(z) \\ &= \frac{1}{|B|} \{(y, z) : yz = w, y \in BuB, z \in BvB\}\end{aligned}$$

是我们要的纤维的数量。

因此 Tits system 的转述是

$$T_w * T_i = \begin{cases} \mathbb{Z} \cdot T_{ws_i} & \ell(ws_i) = \ell(w) + 1; \\ \mathbb{Z} \cdot T_{ws_i} + \mathbb{Z} \cdot T_w & \ell(ws_i) = \ell(w) - 1; \end{cases}.$$

因为上面的计算, 第一行, 当  $\ell(ws_i) = \ell(w) + 1$ , 还可以细化为

$$T_w * T_i = \frac{1}{|B|} \frac{|BwB \times Bs_iB|}{|Bws_iB|} T_{ws_i} = T_{ws_i}$$

注意到  $|BwB| = |BwB/B| \times |B| = \mathbf{q}^{\ell(w)} \times |B|$ .

直接计算第二行不太容易, 但是介由第一行, 我们只需要计算  $T_i * T_i$ .

$$Bs_iB \times Bs_iB \xrightarrow{\mu} G.$$

显然 1 的原像是  $|Bs_iB|$ , 数量是  $\mathbf{q} \cdot |B|$ . 而  $\mu$  的像是  $Bs_iB \cup B$ , 所以  $s_i$  的原像数目是

$$\frac{|Bs_iB \times Bs_iB \setminus \mu^{-1}(B)|}{|Bs_iB|} = (\mathbf{q} - 1) \cdot |B|$$

因此

$$T_i * T_i = (\mathbf{q} - 1)T_i + \mathbf{q}.$$

因为一些几何的缘故, 我们会想做替换  $\mathbf{q} \mapsto \mathbf{q}^{-1}$ . 为了得到漂亮干净的结果, 我们记

$$q = \mathbf{q}^{1/2}, \quad h_i = -q^{-1}T_i$$

于是

$$(h_i + q)(h_i - q^{-1}) = 0.$$

令  $G$  是一个有限群,  $B$  是一个子群, 我们希望能够控制诱导表示  $\mathbb{1} \uparrow_B^G$ . 回忆诱导表示

$$V \uparrow_B^G = \text{Hom}_{\mathbb{C}[B]}(\mathbb{C}[G], V) = \mathbb{C}[G] \otimes_{\mathbb{C}[B]} V.$$

后一个映射由  $f \mapsto \sum_{g \in G} g^{-1} \otimes f(g)$  给出. 因此  $\uparrow$  和  $\downarrow$  是双边伴随.

$$\begin{aligned}\text{Hom}_G(U, V \uparrow_B^G) &= \text{Hom}_B(U \downarrow_B^G, V) \\ \text{Hom}_G(V \uparrow_B^G, U) &= \text{Hom}_B(V, U \downarrow_B^G)\end{aligned}$$

我们计算  $\text{End}_G(\mathbb{1} \uparrow_B^G)$ ,

$$\begin{aligned}\text{End}_G(\mathbb{1} \uparrow_B^G) &= \text{Hom}_G(\mathbb{1} \uparrow_B^G, \mathbb{1} \uparrow_B^G) \\ &= \text{Hom}_B(\mathbb{1} \uparrow_B^G \downarrow_B, \mathbb{1}) \\ &= \text{Hom}_B(\mathbb{C}[G] \otimes_B \mathbb{1}, \mathbb{1}) \\ &= \text{Hom}_{\mathbb{C}}(\mathbb{1} \otimes_B \mathbb{C}[G] \otimes_B \mathbb{1}, \mathbb{1}) \\ &= \text{Fun}_{\mathbb{C}}(B \backslash G / B).\end{aligned}$$

我们要仔细计算一下对应的乘法, 因为同构选择的不同, 有可能差一个常数. 但是最终会发现那么对应到  $\text{End}$  上自然的乘法是卷积.

**习题 1.** 证明

$$(T_u * T_v)(w) = \frac{1}{|B|} |Bu^{-1}Bw \cap BvB|.$$

### 8.3.2 复数域

在复数域上, 我们把计数的工具换成 Euler 示性数.

$$\chi(X) = \sum_{i \geq 0} (-1)^i \dim_{\mathbb{C}} H_i^{\text{BM}}(X; \mathbb{C}).$$

这里下同调是 **Borel–Moore** 同调 (上同调会有一些问题).

对于闭集  $K$ , 假设其补集是  $U$ , 那么

$$\chi(X) = \chi(K) + \chi(U).$$

“加法原理”.

如果有以  $F$  为纤维的纤维丛  $\begin{smallmatrix} E \\ \downarrow \\ B \end{smallmatrix}$ , 那么根据谱序列,

$$\chi(E) = \chi(B) \times \chi(F).$$

“乘法原理”

我们说一个函数  $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$  是 **可构造的 (constructible)**, 如果  $f^{-1}(n)$  是可构造的, 即是一个开集和闭基的交.

对于函数  $f : X \rightarrow \mathbb{Z}$ , 那么我们可以定义积分

$$\int_{x \in X} f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} n \cdot \chi(f^{-1}(n)).$$

我们可以同样考虑  $G$  上所有左右  $B$ -不变的整数值函数

$$\text{Fun}(B \backslash G / B) = \{f \in \text{Fun}(G) : \forall x \in G, f(BxB) = f(x)\}$$

对于  $f, g \in \text{Fun}(B \backslash G / B)$  我们可以定义 **卷积 (convolution)**

$$(f * g)(x) = \int_{y \in G} f(y) g(y^{-1}x) = \int_{z \in G} f(xz^{-1}) g(z).$$

这个乘法显然是结合的.



我们同样记  $T_w \in \text{Fun}(B \backslash G/B)$  是  $BwB$  的特征函数。我们考虑三个置换  $u, v, w$

$$\begin{aligned}(T_u * T_v)(w) &= \int_{y \in G} f(wz^{-1})g(w) \\ &= \chi\{z : wz^{-1} \in BuB, z \in BvB\} \\ &= \chi\{(y, z) : yz = w, y \in BuB, z \in BvB\}\end{aligned}$$

是我们要的纤维的 Euler 式性数。

**习题 2.** 对于闭基集  $f \in \text{Fun}(X \times Y)$  可构造, 证明 **Fubini 定理**

$$\int_y \int_x f(x, y) = \int_{(x, y)} f(x, y).$$

**习题 3.** 证明  $Bs_i B \times_B Bs_i B \rightarrow G$  中  $s_i$  的原像同胚于  $\mathbb{C} \setminus 0$ . [提示: 原像同胚于  $(Bs_i B \cap s_i Bs_i B)/B$ . 令  $P = B \cup Bs_i B$ , 那么  $P/B = \mathbb{C}P^1$ , 而  $s_i$  的作用是反转 0 和  $\infty$ . ]

### 8.3.3 上同调

我们试图抽象一点。

对于  $\varphi : X \rightarrow Y$ , 我们定义拉回和推出

$$\begin{cases} \varphi^* : \text{Fun}(Y) \rightarrow \text{Fun}(X) & f \mapsto f \circ \varphi \\ \varphi_* : \text{Fun}(X) \rightarrow \text{Fun}(Y) & f \mapsto \sum_{x \in \varphi^{-1}(y)} f(x) \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{自变量是 } y \\ \alpha * \beta = \mu_*(p_1^* \alpha \sim p_2^* \beta). \end{array}$$

考虑下图. 令  $p_1$  是把右侧  $G$  缩成一点,  $p_2$  是把左侧  $G$  缩成一点,  $\mu$  是乘法映射

$$\begin{array}{ccc} & G \times_B G & \\ p_1 \swarrow & \downarrow \mu & \searrow p_2 \\ G & & G \\ & \downarrow & \\ & G & \end{array}$$

那么卷积

$$f * g = \mu_*(p_1^* f \cdot p_2^* g).$$

注意到

$$\begin{array}{ccc} G \xrightarrow{\text{对角}} G/B \times G/B & & \\ \downarrow (xB, yB) \mapsto x \times x^{-1}yB & & \\ G \xrightarrow{\text{左乘}} G \times_B G/B & & \\ \text{比较} & & \\ B \xrightarrow{\text{左乘}} G/B & & \end{array}$$

因此有一个双射

$$\text{Fun}(B \backslash G/B) = \text{Fun}_G(G/B \times G/B).$$

左侧的  $f$  对应到右侧的  $F$  使得  $F(x, y) = f(x^{-1}y)$ . 所以原本

$$(f * g)(x) = \frac{1}{B} \sum_{x=yz} f(y)g(z)$$

应该被重新改写为

$$(F * G)(x, y) = \sum_{z \in G/B} F(x, z)g(z, y)$$

我们考虑  $\pi_i$  为舍弃第  $i$  个分量的投影

$$\begin{array}{ccc} & G/B \times G/B \times G/B & \\ \pi_3 \swarrow & \downarrow \pi_2 & \searrow \pi_1 \\ G/B \times G/B & & G/B \times G/B \\ & \downarrow & \\ & G/B \times G/B & \end{array}$$

那么卷积

$$F * G = (\pi_2)_*(\pi_3^* F \cdot \pi_1^* G).$$

上同调也有推出拉回那一列, 所以我们可以定义

$$H_B^*(G/B) = H^*(B \backslash G/B) \quad (\text{同伦商})$$

上的卷积为

$$\begin{array}{ccc} & G \times_B G & \\ p_1 \swarrow & \downarrow \mu & \searrow p_2 \\ G & & G \\ & \downarrow & \\ & G & \end{array}$$

注意

$$-\deg(\alpha * \beta) = \dim G/B - (\deg \alpha + \deg \beta)$$

例如我们要计算等变基本类,

$$\begin{aligned} [\overline{BwB}]_B * [\overline{Bs_i B}]_B &= \mu^*[\overline{BwB} \times \overline{Bs_i B}] \\ &= \begin{cases} [\overline{Bws_i B}] & \ell(us_i) = \ell(w) + 1; \\ 0 & \ell(us_i) = \ell(w) - 1. \end{cases} \end{aligned}$$

因为  $H_B^*(G/B)$  还有  $H_B^*(\text{pt})$  的左乘作用, 所以综上

$$(H_B^*(G/B), \text{卷积}) = \boxed{\text{由 Demazure operators 和左乘作用生成的代数.}}$$

右者又被称为仿射 (affine) Hecke 代数。

**习题 4.** 请利用推出的拉回的下列性质来证明结合律。

$$\begin{cases} \varphi * (f \cdot g) = \varphi^* f \cdot \varphi^* g \\ \varphi_*(\varphi^* f \cdot g) = f \cdot \varphi_* g \\ \text{对 Cartesian 方阵有 projective formula} \end{cases}$$

8.3.4 上同调

8.3.5 K 理论

8.4 Buildings

8.5 Cluster 代数

8.6 Hall 代数