

## Proof list

<b>1</b>	$J \rightarrow \neg J \vdash \neg J$	<b>1</b>
<b>2</b>	$Q \rightarrow (Q \wedge \neg Q) \vdash \neg Q$	<b>1</b>
<b>3</b>	$A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$	<b>1</b>
<b>4</b>	$K \wedge L \vdash K \leftrightarrow L$	<b>2</b>
<b>5</b>	$(C \wedge D) \vee E \vdash E \vee D$	<b>2</b>
<b>6</b>	$A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \vdash A \leftrightarrow C$	<b>2</b>
<b>7</b>	$\neg F \rightarrow G, F \rightarrow H \vdash G \vee H$	<b>3</b>
<b>8</b>	$(Z \wedge K) \vee (K \wedge M), K \rightarrow D \vdash D$	<b>3</b>
<b>9</b>	$P \wedge (Q \vee R), P \rightarrow \neg R \vdash Q \vee E$	<b>4</b>
<b>10</b>	$S \leftrightarrow T \vdash S \leftrightarrow (T \vee S)$	<b>4</b>
<b>11</b>	$\neg(P \rightarrow Q) \vdash \neg Q$	<b>5</b>
<b>12</b>	$\neg(P \rightarrow Q) \vdash P$	<b>5</b>
<b>13</b>	$A \rightarrow B, A \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \wedge C)$	<b>6</b>
<b>14</b>	$(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$	<b>6</b>
<b>15</b>	$A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	<b>6</b>
<b>16</b>	$A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$	<b>7</b>
<b>17</b>	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$	<b>7</b>
<b>18</b>	$A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow D \vdash C \vee D$	<b>8</b>
<b>19</b>	$\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$	<b>8</b>
<b>20</b>	$A \wedge \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$	<b>9</b>
<b>21</b>	$\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)$	<b>9</b>
<b>22</b>	$\vdash \neg(A \wedge \neg A)$	<b>9</b>
<b>23</b>	$\vdash ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$	<b>10</b>
<b>24</b>	$\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$	<b>11</b>

<b>25</b>	$\vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	<b>12</b>
<b>26</b>	$\vdash \neg\neg A \rightarrow A$	<b>12</b>
<b>27</b>	$\neg A \rightarrow \neg B \vdash B \rightarrow A$	<b>13</b>
<b>28</b>	$A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B$	<b>13</b>
<b>29</b>	$\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$	<b>14</b>
<b>30</b>	$A \rightarrow (B \vee C) \vdash (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$	<b>15</b>
<b>31</b>	$\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	<b>16</b>
<b>32</b>	$\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$	<b>17</b>

**1**     $J \rightarrow \neg J \vdash \neg J$

1	$J \rightarrow \neg J$	Premise
2	$J$	Assumption
3	$\neg J$	$\rightarrow E, 2, 1$
4	$\perp$	$\neg E, 2, 3$
5	$\neg J$	$\neg I, 2-4$

**2**     $Q \rightarrow (Q \wedge \neg Q) \vdash \neg Q$

1	$Q \rightarrow (Q \wedge \neg Q)$	Premise
2	$Q$	Assumption
3	$Q \wedge \neg Q$	$\rightarrow E, 2, 1$
4	$\neg Q$	$\wedge E, 3$
5	$\perp$	$\neg E, 2, 4$
6	$\neg Q$	$\neg I, 2-5$

**3**  $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \rightarrow C$

1	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Premise
2	$A \wedge B$	Assumption
3	$A$	$\wedge E, 2$
4	$B$	$\wedge E, 2$
5	$B \rightarrow C$	$\rightarrow E, 3, 1$
6	$C$	$\rightarrow E, 5, 4$
7	$(A \wedge B) \rightarrow C$	$\rightarrow I, 2-6$

**4**  $K \wedge L \vdash K \leftrightarrow L$

1	$K \wedge L$	Premise
2	$K$	Assumption
3	$L$	$\wedge E, 1$
4	$L$	Assumption
5	$K$	$\wedge E, 1$
6	$K \leftrightarrow L$	$\leftrightarrow I, 2-3, 4-5$

**5**  $(C \wedge D) \vee E \vdash E \vee D$

1	$(C \wedge D) \vee E$	Premise
2	$C \wedge D$	Assumption
3	$D$	$\wedge E, 2$
4	$E \vee D$	$\vee I, 3$
5	$E$	Assumption
6	$E \vee D$	$\vee I, 5$
7	$E \vee D$	$\vee E, 1, 2-4, 5-6$

**6**  $A \leftrightarrow B, B \leftrightarrow C \vdash A \leftrightarrow C$

1	$A \leftrightarrow B$	Premise
2	$B \leftrightarrow C$	Premise
3	$A$	Assumption
4	$B$	$\leftrightarrow$ E, 3, 1
5	$C$	$\leftrightarrow$ E, 4, 2
6	$C$	Assumption
7	$B$	$\leftrightarrow$ E, 6, 2
8	$A$	$\leftrightarrow$ E, 7, 1
9	$A \leftrightarrow C$	$\leftrightarrow$ I, 3-5, 6-8

**7**  $\neg F \rightarrow G, F \rightarrow H \vdash G \vee H$

1	$\neg F \rightarrow G$	Premise
2	$F \rightarrow H$	Premise
3	$\neg(G \vee H)$	Assumption
4	$F$	Assumption
5	$H$	$\rightarrow$ E, 4, 2
6	$G \vee H$	$\vee$ I, 5
7	$\perp$	$\neg$ E, 6, 3
8	$\neg F$	Assumption
9	$G$	$\rightarrow$ E, 8, 1
10	$G \vee H$	$\vee$ I, 9
11	$\perp$	$\neg$ E, 10, 3
12	$\neg F$	$\neg$ I, 4-7
13	$\neg\neg F$	$\neg$ I, 8-11
14	$\perp$	$\neg$ E, 12, 13
15	$\neg\neg(G \vee H)$	$\neg$ I, 3-14
16	$G \vee H$	$\neg\neg$ E, 15

**8**  $(Z \wedge K) \vee (K \wedge M), K \rightarrow D \vdash D$

1	$(Z \wedge K) \vee (K \wedge M)$	Premise
2	$K \rightarrow D$	Premise
3	$Z \wedge K$	Assumption
4	$K$	$\wedge E, 3$
5	$K \wedge M$	Assumption
6	$K$	$\wedge E, 5$
7	$K$	$\vee E, 1, 3-4, 5-6$
8	$D$	$\rightarrow E, 7, 2$

**9**  $P \wedge (Q \vee R), P \rightarrow \neg R \vdash Q \vee E$

1	$P \wedge (Q \vee R)$	Premise
2	$P \rightarrow \neg R$	Premise
3	$P$	$\wedge E, 1$
4	$\neg R$	$\rightarrow E, 3, 2$
5	$Q \vee R$	$\wedge E, 1$
6	$Q$	Assumption
7	$Q \vee E$	$\vee I, 6$
8	$R$	Assumption
9	$\neg Q$	Assumption
10	$\perp$	$\neg E, 8, 4$
11	$\neg\neg Q$	$\neg I, 9-10$
12	$Q$	$\neg\neg E, 11$
13	$Q \vee E$	$\vee I, 12$
14	$Q \vee E$	$\vee E, 5, 6-7, 8-13$

**10**    $S \leftrightarrow T \vdash S \leftrightarrow (T \vee S)$

1	$S \leftrightarrow T$	Premise
2	$S$	Assumption
3	$T$	$\leftrightarrow$ E, 2, 1
4	$T \vee S$	$\vee$ I, 3
5	$T \vee S$	Assumption
6	$T$	Assumption
7	$S$	$\leftrightarrow$ E, 6, 1
8	$S$	Assumption
9	$S$	R, 8
10	$S$	$\vee$ E, 5, 6–7, 8–9
11	$S \leftrightarrow (T \vee S)$	$\leftrightarrow$ I, 2–4, 5–10

**11**    $\neg(P \rightarrow Q) \vdash \neg Q$

1	$\neg(P \rightarrow Q)$	Premise
2	$Q$	Assumption
3	$P$	Assumption
4	$Q$	R, 2
5	$P \rightarrow Q$	$\rightarrow$ I, 3–4
6	$\perp$	$\neg$ E, 5, 1
7	$\neg Q$	$\neg$ I, 2–6

**12**  $\neg(P \rightarrow Q) \vdash P$

1	$\neg(P \rightarrow Q)$	Premise
2	$\neg P$	Assumption
3	$P$	Assumption
4	$\neg Q$	Assumption
5	$\perp$	$\neg$ E, 3, 2
6	$\neg\neg Q$	$\neg$ I, 4-5
7	$Q$	$\neg\neg$ E, 6
8	$P \rightarrow Q$	$\rightarrow$ I, 3-7
9	$\perp$	$\neg$ E, 8, 1
10	$\neg\neg P$	$\neg$ I, 2-9
11	$P$	$\neg\neg$ E, 10

**13**  $A \rightarrow B, A \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \wedge C)$

1	$A \rightarrow B$	Premise
2	$A \rightarrow C$	Premise
3	$A$	Assumption
4	$B$	$\rightarrow$ E, 3, 1
5	$C$	$\rightarrow$ E, 3, 2
6	$B \wedge C$	$\wedge$ I, 4, 5
7	$A \rightarrow (B \wedge C)$	$\rightarrow$ I, 3-6

**14**  $(A \wedge B) \rightarrow C \vdash A \rightarrow (B \rightarrow C)$

1	$(A \wedge B) \rightarrow C$	Premise
2	$A$	Assumption
3	$B$	Assumption
4	$A \wedge B$	$\wedge$ I, 2, 3
5	$C$	$\rightarrow$ E, 4, 1
6	$B \rightarrow C$	$\rightarrow$ I, 3-5
7	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	$\rightarrow$ I, 2-6

**15**  $A \rightarrow (B \rightarrow C) \vdash (A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$

1	$A \rightarrow (B \rightarrow C)$	Premise
2	$A \rightarrow B$	Assumption
3	$A$	Assumption
4	$B$	$\rightarrow$ E, 3, 2
5	$B \rightarrow C$	$\rightarrow$ E, 3, 1
6	$C$	$\rightarrow$ E, 4, 5
7	$A \rightarrow C$	$\rightarrow$ I, 3-6
8	$(A \rightarrow B) \rightarrow (A \rightarrow C)$	$\rightarrow$ I, 2-7



**16**  $A \vee (B \wedge C) \vdash (A \vee B) \wedge (A \vee C)$

1	$A \vee (B \wedge C)$	Premise
2	$A$	Assumption
3	$A \vee B$	$\vee I, 2$
4	$A \vee C$	$\vee I, 2$
5	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\wedge I, 3, 4$
6	$B \wedge C$	Assumption
7	$B$	$\wedge E, 6$
8	$C$	$\wedge E, 6$
9	$A \vee B$	$\vee I, 7$
10	$A \vee C$	$\vee I, 8$
11	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\wedge I, 9, 10$
12	$(A \vee B) \wedge (A \vee C)$	$\vee E, 1, 2-5, 6-11$

**17**  $(A \wedge B) \vee (A \wedge C) \vdash A \wedge (B \vee C)$

1	$(A \wedge B) \vee (A \wedge C)$	Premise
2	$A \wedge B$	Assumption
3	$A$	$\wedge E, 2$
4	$B$	$\wedge E, 2$
5	$B \vee C$	$\vee I, 4$
6	$A \wedge (B \vee C)$	$\wedge I, 3, 5$
7	$A \wedge C$	Assumption
8	$A$	$\wedge E, 7$
9	$C$	$\wedge E, 7$
10	$B \vee C$	$\vee I, 9$
11	$A \wedge (B \vee C)$	$\wedge I, 8, 10$
12	$A \wedge (B \vee C)$	$\vee E, 1, 2-6, 7-11$

**18**  $A \vee B, A \rightarrow C, B \rightarrow D \vdash C \vee D$

1	$A \vee B$	Premise
2	$A \rightarrow C$	Premise
3	$B \rightarrow D$	Premise
4	$A$	Assumption
5	$C$	$\rightarrow$ E, 4, 2
6	$C \vee D$	$\vee$ I, 5
7	$B$	Assumption
8	$D$	$\rightarrow$ E, 7, 3
9	$C \vee D$	$\vee$ I, 8
10	$C \vee D$	$\vee$ E, 1, 4–6, 7–9

**19**  $\neg A \vee \neg B \vdash \neg(A \wedge B)$

1	$\neg A \vee \neg B$	Premise
2	$\neg A$	Assumption
3	$A \wedge B$	Assumption
4	$A$	$\wedge$ E, 3
5	$\perp$	$\neg$ E, 4, 2
6	$\neg(A \wedge B)$	$\neg$ I, 3–5
7	$\neg B$	Assumption
8	$A \wedge B$	Assumption
9	$B$	$\wedge$ E, 8
10	$\perp$	$\neg$ E, 9, 7
11	$\neg(A \wedge B)$	$\neg$ I, 8–10
12	$\neg(A \wedge B)$	$\vee$ E, 1, 2–6, 7–11

**20**  $A \wedge \neg B \vdash \neg(A \rightarrow B)$

1	$A \wedge \neg B$	Premise
2	$A$	$\wedge E, 1$
3	$\neg B$	$\wedge E, 1$
4	$A \rightarrow B$	Assumption
5	$B$	$\rightarrow E, 2, 4$
6	$\perp$	$\neg E, 5, 3$
7	$\neg(A \rightarrow B)$	$\neg I, 4-6$

**21**  $\vdash \neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)$

1	$\neg A$	Assumption
2	$A$	Assumption
3	$\perp$	$\neg E, 2, 1$
4	$A \rightarrow \perp$	$\rightarrow I, 2-3$
5	$\neg A \rightarrow (A \rightarrow \perp)$	$\rightarrow I, 1-4$

**22**  $\vdash \neg(A \wedge \neg A)$

1	$A \wedge \neg A$	Assumption
2	$A$	$\wedge E, 1$
3	$\neg A$	$\wedge E, 1$
4	$\perp$	$\neg E, 2, 3$
5	$\neg(A \wedge \neg A)$	$\neg I, 1-4$

$$\mathbf{23} \quad \vdash ((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$$

1	$(A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)$	Assumption
2	$A \vee B$	Assumption
3	$A$	Assumption
4	$A \rightarrow C$	$\wedge E, 1$
5	$C$	$\rightarrow E, 3, 4$
6	$B$	Assumption
7	$B \rightarrow C$	$\wedge E, 1$
8	$C$	$\rightarrow E, 6, 7$
9	$C$	$\vee E, 2, 3-5, 6-8$
10	$(A \vee B) \rightarrow C$	$\rightarrow I, 2-9$
11	$((A \rightarrow C) \wedge (B \rightarrow C)) \rightarrow ((A \vee B) \rightarrow C)$	$\rightarrow I, 1-10$

**24**  $\vdash \neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$

1		$\neg(A \rightarrow B)$	Assumption
2		$\neg(A \wedge \neg B)$	Assumption
3		$B$	Assumption
4		$A$	Assumption
5		$B$	R, 3
6		$A \rightarrow B$	$\rightarrow$ I, 4-5
7		$\perp$	$\neg$ E, 6, 1
8		$\neg B$	$\neg$ I, 3-7
9		$\neg A$	Assumption
10		$A$	Assumption
11		$\neg B$	Assumption
12		$\perp$	$\neg$ E, 10, 9
13		$\neg\neg B$	$\neg$ I, 11-12
14		$B$	$\neg\neg$ E, 13
15		$A \rightarrow B$	$\rightarrow$ I, 10-14
16		$\perp$	$\neg$ E, 15, 1
17		$\neg\neg A$	$\neg$ I, 9-16
18		$A$	$\neg\neg$ E, 17
19		$A \wedge \neg B$	$\wedge$ I, 18, 8
20		$\perp$	$\neg$ E, 19, 2
21		$\neg\neg(A \wedge \neg B)$	$\neg$ I, 2-20
22		$A \wedge \neg B$	$\neg\neg$ E, 21
23		$\neg(A \rightarrow B) \rightarrow (A \wedge \neg B)$	$\rightarrow$ I, 1-22

**25**  $\vdash (\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$

1		$\neg A \vee B$	Assumption
2		$\neg A$	Assumption
3		$A$	Assumption
4		$\neg B$	Assumption
5		$\perp$	$\neg$ E, 3, 2
6		$\neg\neg B$	$\neg$ I, 4-5
7		$B$	$\neg\neg$ E, 6
8		$A \rightarrow B$	$\rightarrow$ I, 3-7
9		$B$	Assumption
10		$A$	Assumption
11		$B$	R, 9
12		$A \rightarrow B$	$\rightarrow$ I, 10-11
13		$A \rightarrow B$	$\vee$ E, 1, 2-8, 9-12
14		$(\neg A \vee B) \rightarrow (A \rightarrow B)$	$\rightarrow$ I, 1-13

**26**  $\vdash \neg\neg A \rightarrow A$

1		$\neg\neg A$	Assumption
2		$A$	$\neg\neg$ E, 1
3		$\neg\neg A \rightarrow A$	$\rightarrow$ I, 1-2

**27**  $\neg A \rightarrow \neg B \vdash B \rightarrow A$

1	$\neg A \rightarrow \neg B$	Premise
2	$B$	Assumption
3	$\neg A$	Assumption
4	$\neg B$	$\rightarrow E, 3, 1$
5	$\perp$	$\neg E, 2, 4$
6	$\neg\neg A$	$\neg I, 3-5$
7	$A$	$\neg\neg E, 6$
8	$B \rightarrow A$	$\rightarrow I, 2-7$

**28**  $A \rightarrow B \vdash \neg A \vee B$

1	$A \rightarrow B$	Premise
2	$\neg(\neg A \vee B)$	Assumption
3	$\neg A$	Assumption
4	$\neg A \vee B$	$\vee I, 3$
5	$\perp$	$\neg E, 4, 2$
6	$\neg\neg A$	$\neg I, 3-5$
7	$A$	$\neg\neg E, 6$
8	$B$	$\rightarrow E, 7, 1$
9	$\neg A \vee B$	$\vee I, 8$
10	$\perp$	$\neg E, 9, 2$
11	$\neg\neg(\neg A \vee B)$	$\neg I, 2-10$
12	$\neg A \vee B$	$\neg\neg E, 11$

**29**  $\vdash \neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$

1		$\neg(A \wedge B)$	Assumption
2		$\neg(\neg A \vee \neg B)$	Assumption
3		$\neg A$	Assumption
4		$\neg A \vee \neg B$	$\vee I, 3$
5		$\perp$	$\neg E, 4, 2$
6		$\neg B$	Assumption
7		$\neg A \vee \neg B$	$\vee I, 6$
8		$\perp$	$\neg E, 7, 2$
9		$\neg\neg A$	$\neg I, 3-5$
10		$A$	$\neg\neg E, 9$
11		$\neg\neg B$	$\neg I, 6-8$
12		$B$	$\neg\neg E, 11$
13		$A \wedge B$	$\wedge I, 10, 12$
14		$\perp$	$\neg E, 13, 1$
15		$\neg\neg(\neg A \vee \neg B)$	$\neg I, 2-14$
16		$\neg A \vee \neg B$	$\neg\neg E, 15$
17		$\neg(A \wedge B) \rightarrow (\neg A \vee \neg B)$	$\rightarrow I, 1-16$



**30**  $A \rightarrow (B \vee C) \vdash (A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$

1	$A \rightarrow (B \vee C)$	Premise
2	$\neg((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))$	Assumption
3	$A$	Assumption
4	$B \vee C$	$\rightarrow$ E, 3, 1
5	$B$	Assumption
6	$A$	Assumption
7	$B$	R, 5
8	$A \rightarrow B$	$\rightarrow$ I, 6–7
9	$(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$	$\vee$ I, 8
10	$C$	Assumption
11	$A$	Assumption
12	$C$	R, 10
13	$A \rightarrow C$	$\rightarrow$ I, 11–12
14	$(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$	$\vee$ I, 13
15	$(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$	$\vee$ E, 4, 5–9, 10–14
16	$\perp$	$\neg$ E, 15, 2
17	$\neg A$	$\neg$ I, 3–16
18	$\neg A$	Assumption
19	$A$	Assumption
20	$\neg B$	Assumption
21	$\perp$	$\neg$ E, 19, 18
22	$\neg\neg B$	$\neg$ I, 20–21
23	$B$	$\neg\neg$ E, 22
24	$A \rightarrow B$	$\rightarrow$ I, 19–23
25	$(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$	$\vee$ I, 24
26	$\perp$	$\neg$ E, 25, 2
27	$\neg\neg A$	$\neg$ I, 18–26
28	$\perp$	$\neg$ E, 17, 27
29	$\neg\neg((A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C))$	17 $\neg$ I, 2–28
30	$(A \rightarrow B) \vee (A \rightarrow C)$	$\neg\neg$ E, 29

**31**  $\vdash (A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$

1		$\neg((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	Assumption
2		$A$	Assumption
3		$B$	Assumption
4		$A$	R, 2
5		$B \rightarrow A$	$\rightarrow$ I, 3–4
6		$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	$\vee$ I, 5
7		$\perp$	$\neg$ E, 6, 1
8		$\neg A$	Assumption
9		$A$	Assumption
10		$\neg B$	Assumption
11		$\perp$	$\neg$ E, 9, 8
12		$\neg\neg B$	$\neg$ I, 10–11
13		$B$	$\neg\neg$ E, 12
14		$A \rightarrow B$	$\rightarrow$ I, 9–13
15		$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	$\vee$ I, 14
16		$\perp$	$\neg$ E, 15, 1
17		$\neg A$	$\neg$ I, 2–7
18		$\neg\neg A$	$\neg$ I, 8–16
19		$\perp$	$\neg$ E, 17, 18
20		$\neg\neg((A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A))$	$\neg$ I, 1–19
21		$(A \rightarrow B) \vee (B \rightarrow A)$	$\neg\neg$ E, 20

**32**  $\vdash ((A \rightarrow B) \rightarrow A) \rightarrow A$

1			$(A \rightarrow B) \rightarrow A$	Assumption
2			$\neg A$	Assumption
3				
4				
5				
6				
7				
8				
9				
10				
11				
12				
13				