Reductions

$P = \{$ polinomyal solvable time $\}$

$NP = \{$ Non-Deterministic, verifiable in poly-time $\}$

$A \to NP$-completă dacă $\to A \in NP$

$\to \forall B \in NP \Rightarrow \underbrace{B \le_p A}_{\text{se reduce în timp polinomial}}$

$f: B \to A$ a.î. $\forall w \in B \Leftrightarrow f(w) \in A$

$3SAT \rightsquigarrow$ Clică $\rightsquigarrow A$

① SAT $\rightsquigarrow$ 3SAT

$$\underbrace{x_1 \vee x_2 \vee \dots \vee x_l}_{} = (x_1 \vee x_2 \vee x_A) \wedge \underbrace{[x_A \Leftrightarrow (x_3 \vee \dots \vee x_i)]}_{}$$

$$x_1 \vee x_2 \vee x_3 \vee x_4 = (x_1 \vee x_2 \vee x_A) \wedge (x_A \Leftrightarrow (x_3 \vee x_4)) \text{ } NF$$

$$= (x_1 \vee x_2 \vee x_A) \wedge [(x_A \Rightarrow (x_3 \vee x_4)) \wedge ((x_3 \vee x_4) \Rightarrow x_A)]$$

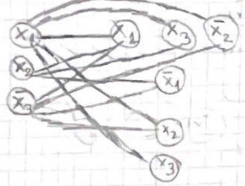
$$= (x_1 \vee x_2 \vee x_A) \wedge [(\neg x_A \vee x_3 \vee x_4) \wedge (\neg x_3 \wedge \neg x_4 \vee x_A)$$

$$= (x_1 \vee x_2 \vee x_A) \wedge [(\bar{x}_A \vee x_3 \vee x_4) \wedge ((x_A \vee \bar{x}_3) \wedge (x_A \vee \bar{x}_4))]$$

$$= \underbrace{(x_1 \vee x_2 \vee x_A) \wedge (\bar{x}_A \vee x_3 \vee x_4) \wedge (x_A \vee \bar{x}_3 \vee x_A) \wedge (x_A \vee \bar{x}_4 \vee x_A)}_{3\,SAT}$$

② Clică → subgraf complet

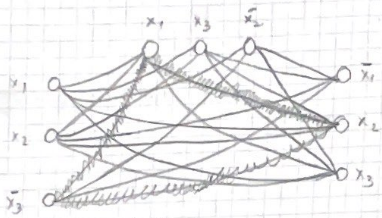
$(x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (x_1 \vee x_3 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$



Regulă

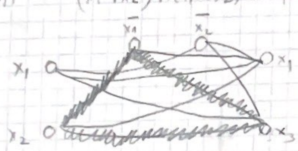
a) nu se unesc din aceeași clauză

b) se unesc doar ce nu e opus (nu unim x_1 cu $\bar{x}_1$)



$x_1 = T$
$x_2 = T$
$x_3 = F$

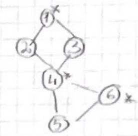
Same for SAT $(x_1 \vee x_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2) \wedge (x_1 \vee x_3)$



$x_1 = T$
$x_2 = T$
$x_3 = T$

③ Vertex Cover

- alegem noduri care să traverseze toate muchiile

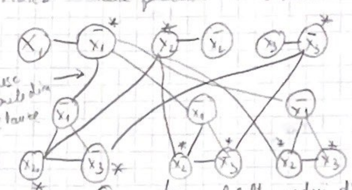


$k = 3 \; \{1, 4, 6\}$ ✓

$(x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee x_3)$

① Notez toate perechile de literali

④ unesc valorile din clauze →



② Notez clauzele ca noduri și fac subgrafuri complete

⑤ marchez celelalte noduri din clauze

③ aleg interpretare corectă (satisfiabilă)

$x_1 = F$
$x_2 = T$
$x_3 = F$

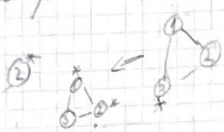
$k = n + m \cdot 2$

$= 3 + 3 \cdot 2 = 9$

④ Vertex Cover şi Max Independent Set

MIS = mulţime de cardinalitate k care să conţină noduri fără muchii

VC => Încercăm să facem MIS



① VC => MIS

$VC = \langle G, K \rangle$

$G = (V, E)$

$MIS = \langle G', m-k \rangle$

$G' = V/C$

cover

$\forall u, v \in G'$ nu pot avea muchii în graf pt că excludem coverul (care conţine toate nodurile cu muchii)

② MIS => VC

$MIS = \langle G, K \rangle$

$G = (V, E)$

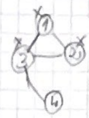
$VC = G', n-k$

$G' = V/MIS$

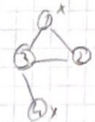
$\forall u, v \in G'$ trebuie să aibă muchie pt că nu conţine noduri indep.

De asemenea acoperă toate muchiile pt că e opusul unui set independent

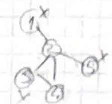
⑤ MIS -> Clică



clică $k=3$



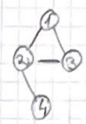
MIS $k=2$



Clică $k=3$

MIS $k=1$

Putem construi opusul Grafului



clică $k=3$

$\{1, 2, 3\}$

MIS cu $k=2$

$\{3, 4\}$

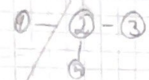
⑥ SUBSET SUM -> 3SAT

$(x_1 \vee x_2 \vee x_3) \wedge (\bar{x}_2 \vee \bar{x}_3 \vee x_4) \wedge (x_1 \vee \bar{x}_2 \vee \bar{x}_3)$

	x_1	x_2	x_3	x_4	C_1	C_2	C_3	
x_1	1	0	0	0	1	0	1	*
$\bar{x}_1$	1	0	0	0	0	0	0	
x_2	0	1	0	0	1	0	0	
$\bar{x}_2$	0	1	0	0	0	1	1	*
x_3	0	0	1	0	1	1	0	
$\bar{x}_3$	0	0	1	0	0	0	1	*
x_4	0	0	0	1	0	1	0	*
$\bar{x}_4$	0	0	0	1	0	0	0	
C_1				1	0	0	0	
C_1'				1				
C_2				0	1	0	0	*
C_2'					1			*
C_3					0	1	0	*
C_3'						1	0	
C_4					1	0	1	
C_4'						0	1	
					3	3	3	

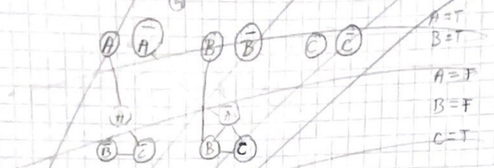
1000101
100011
10001
1010
100
100
10

⑦ Graf G. Există drum de lungime > k

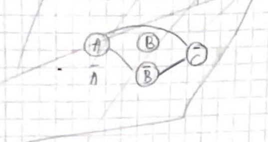


3 SAT

$(A \vee \bar{B} \vee \bar{C}) \wedge (\bar{A} \vee B \vee \bar{C})$



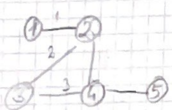
Dacă e satisfiabilă



Arătăm că DM ∈ NP

Dacă avem un set de muchii și un graf $G = (V, E)$ putem verifica că are mai mult de k muchii drumul (mergem din nod în nod și numărăm muchiile) => HP

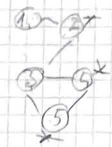
Reducție la Hamiltonian Path



Luăm $HP = (G, V)$ unde V sunt nodurile incluse în drumul hamiltonian

Luam $LP = (G', K)$ unde $G = G'$ și $K = |V| - 1$

⑧ ① $G = (V, E)$ $\exists\, x \subseteq V$ cu $|x| \leq k$ a.î. $\forall (a, b) \in E$ fie $a \in x$, $b \in X$ sau $a, b \in X$



$X = \{3, 4\}$ → VC ...

② $G = (V, E)$, $K \in \mathbb{Z}$ MIS

⇒ Fie $G = (V, E)$ și X un cover pt G. Construim $G' = (V / x, E)$. Atunci MIS are soluția G' cu $K = m - |x|$, $m = |V|$.

Fie $u, v \in G'$. Nu putem avea muchie între u și v pentru că altfel ar fi fost în cover

⇐ Fie $G = (V, E)$ și x un MIS. Construim G' cu $V' = V - x$. G' este un vertex cover.

Fie $u, v \in G'$. Ele trebuie să aibă muchie pt că altfel erau MIS.