- CURS 6 - Alg aprox
Tehnici de prog liniară

Ex $\min(x+y)$, $x \geq 0$
$y \geq 0$
$x + 2y > 3$
$x, y \in \mathbb{R}$

} se rez în timp ~~liniar~~ polinomial

$c_{11}x_1 + \dots + c_{1n}x_n \geq b_1$
$c_{21}x_1 + \dots + c_{2n}x_n \geq b_2$
$\vdots$
$c_{m1}x_1 + \dots + c_{mn}x_n \geq b_m$

de $x_i \in \mathbb{R}$ - ~~p~~ (LP)
$x_i \in \mathbb{Z}$ - NP (iLP)

Deoarece pb de prog lin pe întregi (integer liniar programming iLP) sunt NP, putem reduce (∀) pb din clasa NP la iLP.

Avantaje:

1. putem rula solvere pe iLP (ex ~~Grobhi~~ Gurobi) pe pb redusă
2. putem să fol iLP pt a proiecta alg de aprox lowerbound

OPT_{LP} OPT_{iLP}

VC -> iLP

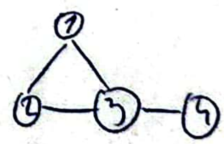
x_i - o var coresp nodului v_i

$x_i = \begin{cases} 1, & \text{de face parte din VC} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$

$\min \sum_{i=1}^{n} x_i$

$x + y \geq 1$ (∀) $(x, y) \in E$ cu $\{x, y\} \in \{0, 1\}$

$\min x_1 + x_2 + x_3 + x_4$



$x_1 + x_2 \geq 1$
$x_1 + x_3 \geq 1$
$x_2 + x_3 \geq 1$
$x_3 + x_4 \geq 1$

Relaxăm iLP a.î. $x \in [0, 1]$ și notăm cu x_i' soluția opt a pb relaxate => $x_i' \in [0, 1]$

Scop vreau să trans x_i' în $x_i^* \in \{0, 1\}$ a.î.:

- x_i^* să fie o sol fezabilă (să resp constrângerile)
- $\sum_{i=1}^{n} x_i^*$ să nu crească foarte mult

$OPT_{VC} \geq \sum_{i=1}^{n} x'_i$

x'_i sau y'_i din sumă $\geq 0,5$

Alg:

1) form VC ca un ILP
2. rez în timp p relaxarea ILP și obținem sol $x'_i \in [0, 1]$
3. setăm $x^*_i = 1$, $x'_i \geq 0,5$

$x^*_i = 0$, $x'_i < 0,5$

$$ALG = \underbrace{\sum_{i=1}^{n} x^*_i \leq 2 \cdot \cancel{OPT_{VC}} \sum_{i=1}^{n} x'_i}_{x^*_i \leq 2 x'_i} \underbrace{\leq 2 \cdot OPT_{VC}}_{\text{relaxare ILP}}$$

Pe x^*_i e o sol fezabilă

DEM $x^*_i + y^*_i \geq 1$ $(\forall)(x_i, y_i) \in E$

deoarece x'_i sau $y'_i \geq 0,5 \Rightarrow x^*_i = 1$ sau $y^*_i = 1$

SET COVER (SC)

Se dă o mult de elem U, ~~ai~~ unde $|U| = n$, și o colecție de submulț ale lui U $\mathcal{S} = \{S_1, S_2, \ldots, S_m\}$, unde fiecare mult S_i are asociat un cost $c(S_i) > 0$. Să se găsească $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ de cost minim a.î. $\bigcup_{S_i \in \mathcal{S}'} S_i = U$.

Ex $U = \{1, 2, 3, 4, 5\}$

$S_1 = \{1, 2, 3\}$	$c(S_1) = 1$	$c(S_1) = 100$
$S_2 = \{3, 5\}$	$c(S_2) = 3$	$c(S_2) = 300$
$S_3 = \{4, 5\}$	$c(S_3) = 1$	$c(S_3) = 50$
$S_4 = \{1, 2, 4\}$	$c(S_4) = 5$	$c(S_4) = 70$
$S_5 = \{2, 3, 5\}$	$c(S_5) = 2$	$c(S_5) = 214$

$S_1 + S_3 = U$ și $c(S_1) + c(S_3) = 2$

ALG de aprox:

- la fiecare pas alegem S_i cu propr. că:

$\frac{c(S_i)}{h}$ este min, unde h este nr de elem noi care nu au fost ocup

de S' este ce rămâne să aleg S_i

$h = |S_i \setminus S'|$

Ex P_1: alegem S_4 cu $\frac{c(S_4)}{3} = \frac{70}{3}$ este min

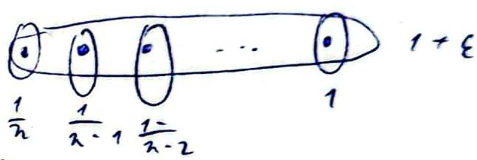
P_2: alegem S_2: $\frac{c(S_2)}{1} = \frac{50}{1}$

P_3: alegem S_1: $\frac{c(S_1)}{1} = \frac{100}{1}$

(ALG) total = 220

OPT = 150

$ALG = \frac{1}{n} + \dots + 1 = \ln n$ -> aprox



$OPT = 1 + \varepsilon$

cel mai bun alg aprox

Th ALG de mai sus este $(\ln n)$-aprox.

DEM Notăm pt fiecare elem din mulț $(e_i) \in U$; preț(e_1) = efic mulț care acoperă prima dată

preț$(1) = \frac{70}{3}$

preț$(2) = \frac{70}{3}$

preț$(3) = \frac{100}{1}$

preț$(4) = \frac{70}{3}$

preț$(5) = \frac{50}{1}$

$ALG = \sum_{e_i \in U}^{n}$ preț(e_i)

Sortăm elem a.î. preț$(e_1) \le$ preț$(e_2) \le \dots \le$ preț(e_n)

Arătăm că preț$(e_i) \le \frac{OPT}{n-i+1}$ =>

=> $\sum_{e_i \in U}$ preț$(e_i) \le OPT\left(1 + \frac{1}{2} + \dots \frac{1}{n}\right)$

CURS 7 - Alg aprox

SET COVER (SC)

$U = \{e_1, \dots, e_n\}$
$\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$
$S_i \subseteq U$
$c : \mathcal{S} \to \mathbb{R}_+$

SCOPE: o colecț de cost min care să acopere U

Formulare ILP pt SC

x_S pt fiecare $S \in \mathcal{S}$

$$x_S = \begin{cases} 1, & \text{dc } S \in \text{sol} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$\boxed{\min \sum_{S \in \mathcal{S}} c(S) \cdot x_S}$$

constr

$$\forall e \in U \Rightarrow \sum_{\substack{S \in \mathcal{S} \\ e \in S}} x_S \geq 1$$

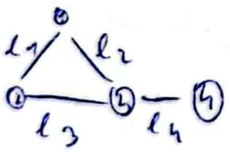
$x_S \in \{0, 1\}$ pt ILP

$x_S \in [0, 1]$ pt relaxare la LP

VC ~> SC

$U = E$

$\mathcal{S} = V$



~>

$U = \{e_1, \dots, e_4\}$
$S_1 = \{e_1, e_2\}$
$S_2 = \{e_1, e_3\}$
$S_3 = \{e_2, e_3, e_4\}$
$S_4 = \{e_4\}$

Relaxare ILP

Repetăm de $c \ln n$ ori, c ct ce o det mai târziu

Adăugăm S la sol cu prob x_S.

Analiza alg

P(l să nu fie acceptat după o rundă) =

P(să nu sel niciun mult care cont l) =

$= \prod_{\substack{S \in \mathcal{F} \\ l \in S}} (1 - x_S) \leq \prod \left(1 - \frac{1}{k}\right)^{k} = \left(\frac{k-1}{k}\right)^{k} \leq \frac{1}{e}$, e 2.7182

P(l să nu fie acoperit după o rundă după $c \ln n$) $\leq \left(\frac{1}{e}\right)^{c \ln n}$

aleg c a.î. $\left(\frac{1}{e}\right)^{c \ln n} \leq \frac{1}{4n}$

Prob să nu (∃) un elem acoperit $\leq \frac{n}{4n} = \frac{1}{4}$

Dem că avem o sol de cost $\leq c \ln n$

~~Costul soluției =~~

Costul mediu după o rundă $= \sum_{S \in \mathcal{F}} c(S)$ P(S să fie în sol)

$= \sum_{S \in \mathcal{F}} c(S)\, x_S \leq OPT$

costul sol

$\mathbb{E}$(costul sol) $\leq c \ln n \cdot OPT$

Ineg lui Markov

P(costul sol $\geq 4 c \ln n \cdot OPT$) $\leq \frac{1}{4}$

P(sol să fie cu costul $\geq 4 c \ln n \cdot OPT$ sau să nu acopere elem)

$\leq \frac{1}{2} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4}$

Pb Minimum Steiner Tree (MST)

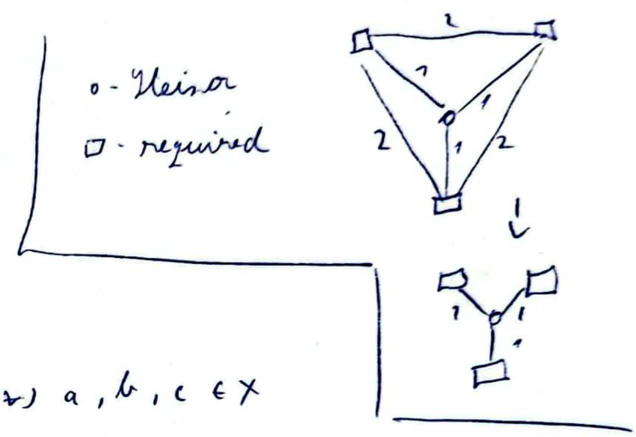
Se dă un graf neor $G = (V, E)$, unde fiecare muchie are un cost pozitiv.

$V = S \cup R$ $\qquad$ S = Steiner

$S \cap R = \emptyset$ $\qquad$ R = required

Vrem să găsim un arbore de cost min care conectează toate nodurile din R și opt noduri din S.

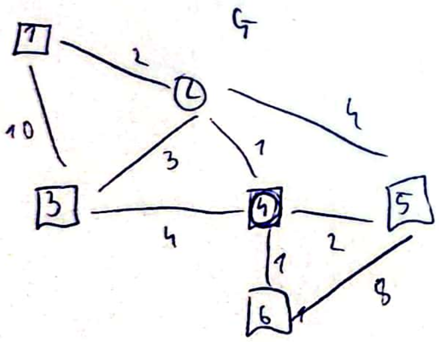
Este suf să cons pb MST pe dist care sunt metrici.



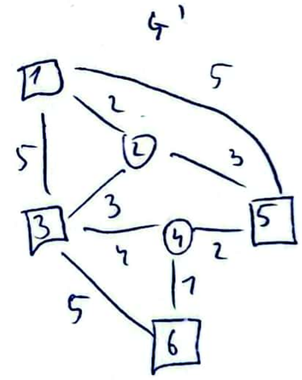
$d : X \times X \to \mathbb{R}_+$

1. $d(a, a) = 0 \quad (\forall)\, a \in X$
2. $d(a, b) = d(b, a) \quad (\forall)\, a, b \in X$
3. $d(a, b) + d(b, c) \geq d(a, c) \quad (\forall)\, a, b, c \in X$

Ex

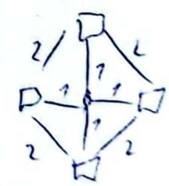


$\rightsquigarrow$



În G' $c(v_i, v_j)$ este drumul de cost min între v_i și v_j.

G' este metrică



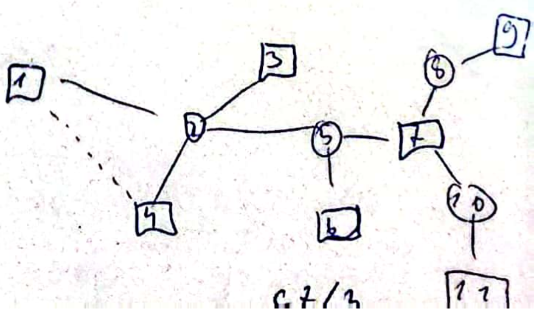
Alg 2 - APROX:

Facem MST pe nodurile R

DEM Fie o sol OPT a MST, constr un tur Euler al acestei sol

Cost(tur Euler) = $2 \cdot$ OPT

$\boxed{1}$ ~~2~~ $\boxed{4}$ 2 5 $\boxed{6}$ 5 ...

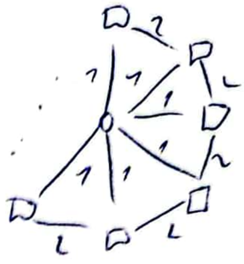


Tur Euler scurtcircuitat:

- cost $\leq 2 \cdot$ OPT
- are nodurile din R

$\left\{\begin{array}{l} OPT = n \\ ALG = 2n-2 \end{array}\right.$

→ asimtotic 2-APROX, dar nu atinge



PAE - CURS 8

Pb Prob rucsacului
se dau n ob $a_1, \ldots, a_n$ — weight / profit și o capacitate B; să se det profitul maxim pt capac B.

Dinamică;

p - profitul celui mai profitabil ob

$P = \max_{i=1} \text{profit}(a_i)$

nP - profit max pe care-l putem obț.

$A(i,j)$ = greutatea min a unei submulț din $a_1, \ldots, a_i$ cu profitul j.

$$A(i,j) = \begin{cases} \min(A(i-1, j - \text{profit}(a_i)), A(i-1, j)) \\ \end{cases}$$

$OPT = \max_j$ a.î. $A(n,j) \le B$

$O(n^2 P)$

$(1-\varepsilon)$-aprox pt Knapsack și are timp de rulare p in n și $\frac{1}{\varepsilon}$

FPTAS - fully polynomial time aproximation scheme

PTAS - polynomial time aprox scheme timp de rulare poli doar in n

ALG:

$k = \frac{\varepsilon P}{n}$

partea întreagă inf

Def $\text{profit}'(a_i) = \left\lfloor \frac{\text{profit}(a_i)}{k} \right\rfloor$

Fol prog din și rez pb pe profit'

$$n \cdot \frac{nP}{k} = n \cdot \frac{nP}{\varepsilon P} \cdot n = \frac{n^3}{\varepsilon} = n^3 \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$ ← FPTAS

fie O = OPT knapsack

$profit(O) - k\,profit'(O) \le n k$

$k\,profit'(O) \ge profit(O) - nk$

$profit(S) \ge k\,profit'(O) \ge profit(O) - nk = profit(O) - n\frac{\varepsilon P}{n}$

$\left.\begin{array}{l} profit(S) > profit(O) - \varepsilon P \\ profit(O) \ge P \end{array}\right\} \Rightarrow$

$\Rightarrow \quad profit(S) > (1-\varepsilon)\,profit(O)$

Alg fixed parameter

D) O pb se num FPT (fixed param tractable) de admite un alg exact cu timp de rulare $f(k) \cdot p(n)$, unde

- p - polinom
- f - fct arbitrară (exponențială)
- k - param independent de input

Ex

Ex de posibili param:

- val fct obiectiv
- diametrul unui gf
- alfabetul
- produl max...

un alg fixed param pt VC.

D) Se dă k și un gf $G = (V, E)$, are G un VC de mări $\le k$?

S1) ver toate submult V' cu $|V'| = k$, $V' \subset V$ de sunt VC

compl $O(n^k)$ ← nu este FPT

S2) ALG ($G = (V, E)$, k)

de $k = 0$ și $G \ne \emptyset$ ⇒ NU

de $G = \emptyset$ ⇒ DA

altfel aleg o muchie $(a, b) \in E$ $\begin{cases} ALG(G \setminus \{a\}, k-1) \\ ALG(G \setminus \{b\}, k-1) \end{cases}$

$T(n, k) = 2T(n, k-1) + n = O^*(2^k)$

$= O(n \cdot 2^k)$

CURS 9 - PAE

Alg FPT

$f(k)\, p(n)$

k - param ind de datele de intrare

f - fct oarecare

p - polinomial

n - mărimea inputului

Kernelizare

$(I, k) \rightsquigarrow (I', k')$ timp poli

$|I'| \le f(k)$

$k' \le k$

Ex Kernel pt pb VC

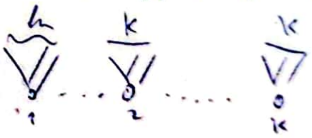
1) un kernel de mărime $k(k+1)$

Regula 1: de $(\exists)\ v \in V$ cu ~~grad~~ $d(v) > k \rightsquigarrow (G \setminus \{v\}, k-1)$

Regula 2: de $(\exists)\ v \in V$ cu $d(v) = 0 \rightsquigarrow (G \setminus \{v\}, k)$

kernel de măr max $k(k+1)$

$V(G) < k(k+1)$



max

altfel $|C| \ge k+1$

Th Un kernel $\Leftrightarrow$ alg FPT

$\Rightarrow$ $|I'| \le f(k)$, putem face exhaustive search

$\Leftarrow$ $f(k)\, n^c$, 2 cazuri

I $f(k) < n \Rightarrow$ timp de rulare $< n^{c+1}$

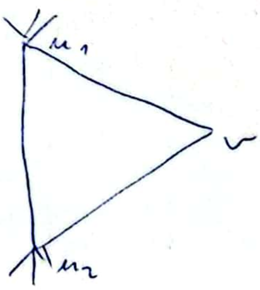
kernel $\to$ bit 0/1 YES/NO

II $f(k) \ge n \Rightarrow$ def kernelului

Regula 3: de $(\exists)\ v \in V$ cu $d(v) = 1 \overset{(u,v)\in E}{\rightsquigarrow} (G \setminus \{v\}, k-1)$

$|V(G)| \le |E(G)| \Rightarrow |V(G)| \le k^2$

Regula 4: dacă $(\exists)\ v \in V$ cu $d(v) = 2$, luăm celelalte 2 noduri $(u_1, u_2) \rightsquigarrow (G \setminus \{u_1, u_2, v\}, k-2)$

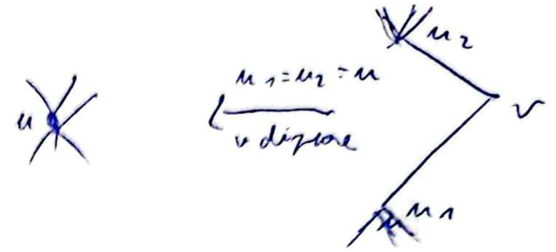


Regula 5: comprimăm u_1, u_2 in v

$\Rightarrow (G \setminus \{u_1, u_2, v\} \cup \{u\}, k-1)$

$|V(G)| \leq \frac{2|E(G)|}{3} \leq \frac{2k^2}{3}$

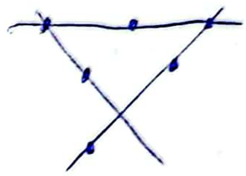
$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E(G)|$



2) Se dau n pct în plan și un nr k, să se decidă de pct să acopere cele n pct cu k drepte.

Regula 1: de avem mai mult de k pct col, în să tragem linie

pct col sunt din mulț. X



$\Rightarrow (I \setminus X, k-1)$

kernel de k^2

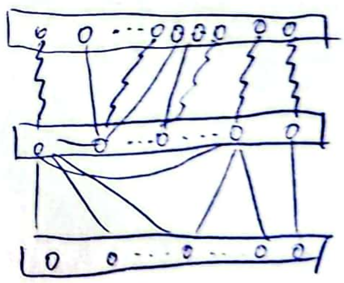
de după reg 1 nr de pct $\geq k^2$ -> răsp nu

3) Crown decomposition pe un graf

$V = C \cup H \cup B$

C - noduri independente (nu au muchii între ele)

- nu am muchie între nodurile din C și B
- între H și C (∃) un cuplaj care cont. toate nodurile din H



$G \Rightarrow (G \setminus \{C \cup H\}$

$\overset{\shortparallel}{B}$

Th fie un graf G și un nr k, at 1 din cele 3 de mai jos este adev:

a) ~~nr vertices~~ $|V(G)| \leq 3k$ => kernel

b) G are un cuplaj de min $k+1$ => nu are VC

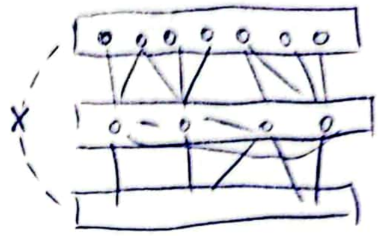
c) (∃) crown decomposition => reducție

CURS 10 - DAE

Crown decomposition

c - noduri independente

cuplajul dintre c și H o să acopere tot H



Lemă: Fie G un graf și k un întreg. Atunci avem una din următoarele cazuri:

a) G are un cuplaj de mărime $k+1$

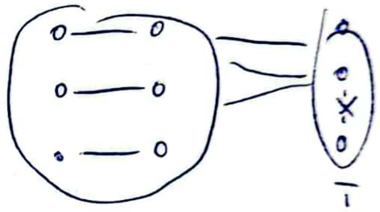
b) G are un Crown Decomposition

c) G are $\leq 3k$ noduri

Dem Cazul 1: Alegem un cuplaj maximal în G. Not cu X capetele acestor muchii $I = V(G) \setminus X$

Cuplajul ales $\leq k$ muchii, altfel suntem în cazul a).

I este o mulț ind

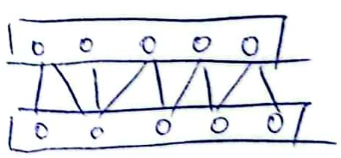


Th Teorema lui König

Într-un graf bipartit vc minim = cuplajul maxim

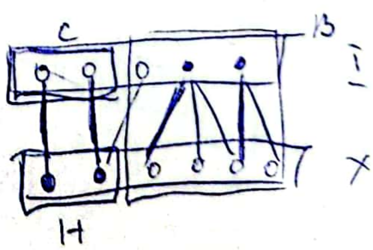
Constr un graf bipartit în care avem nodurile X într-o parte și nodurile I în cealaltă parte.

Apl Th lui König pe graful alăturat



Cazul I: dc în vc (?) noduri din mulț X,
nodurile din X marcate sunt în H
nodurile rel de acestea C
restul în B

(caz b))



Cazul II: doar nodurile din I sunt în vc

$\Rightarrow$ toate din I sunt în vc

$|I| \leq k$
$|X| \leq 2k$
(de la cum form cuplajul)

$\Big\}$ $|G| \leq 3k \Rightarrow$ caz c)

2. Pb: se dă un graf $G=(V,E)$ și un nr k, se poate colora G cu $|V(G)|-k$ culori

Ex $k = 2 \to$ NU

$k = 1 \to$ DA

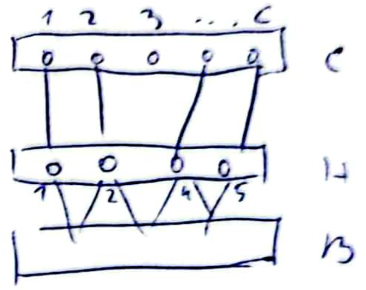
Crown Decomposition pe gf complement $\bar{G}$ cu seria de $|C|$ culori.

nodurile din C repr o clică în G

în graful original muchiile dintre C și H

nu ($\exists$), deci le putem da aceeași colorare

Pt nodurile din H nu fol nu fol culori suplimentare



a) $(G, k) \rightsquigarrow (G \setminus \{C \cup H\}, k - |C|)$ reducție

b) DA

c) kernel $\to$ exhaustive search

3. VC - Branching

alegem o muchie și facem branching pe capete $\Rightarrow O^*(2^k)$

În general putem avea $b(k)$ branchuri $\Rightarrow O^*(b(k)^k)$

Alg VC

Pt fiecare nod cu grad ≥ 3 facem branching astfel:

- punem v în VC sau punem vecinii lui v în VC

$T(k) = T(k-1) + T(k-3)$

$= 1,41^k$

4. Se dă un graf G și un nr k, se pot termina toate Δ din G ștergând cel mult k muchii

căutăm un Δ

facem branching pe cele 3 muchii:

$$(G, k) < \begin{cases} (G \setminus \{a,b\}, k-1) \\ (G \setminus \{b,c\}, k-1) \\ (G \setminus \{a,c\}, k-1) \end{cases}$$

Mat examen:

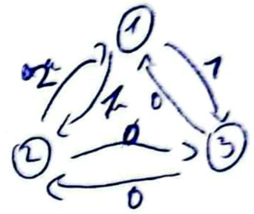
1. dem de NP-completitudine (o pb): Sipser Introduction to the Th of Computation (10 de pb NP-hard)

Ex Shortest Common Superstring (SCS)

Se dau n șiruri $s_1, \dots, s_n$, să se găs cel mai scurt șir s care conține ca subșiruri toate șirurile $s_1, \dots, s_n$

1. a a b
2. b a a
3. b b c

{ b a a b b c ⟶



Reducție de la TSP-Path

TSP-Path este TSP fără ciclu | SCS <=> TSP

<= de pot rez TSP-PATH în timp poli pot rez SCS tot în timp poli

red { noduri: sunt stringurile
{ muchia: partea comună

max TSP-PATH ne dă șirul min

$|S| \rightsquigarrow |s_1| + \dots + |s_n| - \text{MAX-TSP-PATH}$

$2\ 1\ 3 \to s_2 s_1 s_3$

MAX TSP = 3

6 = 9 - 3

red în ambele sensuri SCS <=> TSP PATH

=> Există un SCS de mărime ...

Există un TSP de mărime ...

(∃) un SCS de măr |S| <=> (∃) un TSP de mărim $|s_1| + \dots + |s_n| - |S|$

=> fie s un SCS și șirurile $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}$ în ord luată

fie turul $(i_1, \dots, i_n) = \text{overlap}(s_{i_1}, s_{i_2}) + (s_{i_2}, s_{i_3}) + \dots + (s_{i_{n-1}}, s_{i_n})$

<= ~~fie un tur $(i_1, \dots, i_n)$~~ $|s_1| + \dots + |s_n| - |S|$

fie un tur $(i_1, \dots, i_n)$ de cost k', constr șirul $s_{i_1}, s_{i_2}, \dots, s_{i_n}$

$|S| = |s_1| + \dots + s_n - |k'|$ - overlapul

2. alg de aprox - 50%

Steiner, knapsack, TSP pe metrici, VC cu ILP cu ~~lp~~ r

3. fixed parameter - 30%

Ex o factorizare a unui șir este o partiționare a șirului în subșiruri, vrem să găsim o fact cu nr max de șiruri

a|b a|a a   a a|a a a   a|a a|a b

$O(\sqrt{n})$ - aprox

upper bound - nr de corzi = n

luăm șiruri de mări dif: 1, 2, ... k

$1+2+\dots+k = \frac{k(k+1)}{2} \simeq n \Rightarrow k \simeq \sqrt{n}$

PAE - Seminar 1

Complexități

D1 Sp că $f \in O(g)$, dc (∃) $c, n_0 > 0$ a.î. (∀) $n \ge n_0$ av să:

$f(n) \le c \cdot g(n)$

Ex $2^{2n} \notin O(2^n)$

Pp prin abs că $2^{2n} \in O(2^n)$, alegem (∃) c, n_0 a.î. (∀) $n \ge n_0$

$2^{2n} \le c\, 2^n \mid : 2^n \Rightarrow 2^n \le c$ abs

D2 Sp că $f \in \Omega(g)$, dc (∃) $c, n_0 > 0$ a.î. (∀) $n \ge n_0$:

$f(n) \ge c \cdot g(n)$

D3 Sp că $f \in \Theta(g)$, dc (∃) $c_1, c_2, n_0 > 0$ a.î. (∀) $n \ge n_0$:

~~$c_1 f(n) \le f$~~ $c_1 \cdot g(n) \le f(n) \le c_2 \cdot g(n)$

D4 Sp că $f \in o(g)$, dc (∀) $c > 0$ (∃) $n_0 > 0$ a.î. (∀) $n > n_0$ av că:

$f(n) < c \cdot g(n)$

→ mini Ω

D5 Sp că $f \in \omega(g)$, dc (∀) $c > 0$ (∃) $n_0 > 0$ a.î. (∀) $n > n_0$ av că:

$f(n) > c \cdot g(n)$

Ex $n^2 \in o(n^3)$

Pp prin abs că $n^2 \in o(n^3)$, fie c o val stabilită:

$n^2 < c \cdot n^3 \mid : n^2 \qquad 1 < c \cdot n \quad \Big\} \Rightarrow 1 < c \cdot \left(\frac{1}{c} + 1\right)$

~~alegem~~ (∀) $n > \frac{1}{c} + 1 \qquad 1 < 1 + c$ ✓

---

1. $\log_2(n!) \in \Theta(\log_2 n^n)$? $n! \in \Theta(\log_2 n^n)$

rămâne dif $\log_2(n!) \in \Omega(\log_2 n^n) = \Omega(n \log_2 n)$

$\log_2 n! = \log_2 1 + \dots \log_2 n = \log_2 1 + \cancel{\dots \log_2 \frac{n}{2}} + \log_2 \frac{n}{2} + 1 + \dots + \log_2 n$

tăiem prima jum

$\log_2 \frac{n}{2} + \dots \log_2 n > \frac{n}{2} \log_2 \frac{n}{2} = \frac{n}{2}(\log_2 n - \log_2 2) \ge \frac{n \log n}{4}$

PAE - Seminar 2

P_1 Vertex Cover (VC)

Se dă un graf neorientat $G=(V,E)$ și un nr k. Să se decidă de $(\exists)$ o submulț $S \subseteq V$ cu $|S| \leq V$ a.î. $(\forall)(a,b) \in E$, $a \in S$ sau b

P_2 Maximum Independent Set (MIS)

Se dă un graf neor. $G=(V,E)$ și un nr k. Să se decidă de $(\exists)$ o submulț $I \subseteq V$ cu $|I| \geq k$ a.î. $(\forall)$ $a,b \in I \Rightarrow (a,b) \notin E$

$G - VC = MIS$

D Fie $G=(V,E)$ și k o inst a VC, at inst MIS după reducție va fi tot $G=(V,E)$ și $k' = n-k$.

Arăt că $G=(V,E)$ are un vc de mărime $\leq k$
$\Leftrightarrow G=(V,E)$ are un MIS de mărime $\geq n-k$

$\Rightarrow$ Fie S un vc în G at $V-S$ este MIS

Pp prin red la abs că $V-S$ nu este MIS, ins că $(\exists)$ $a,b \in V-S$ a î $(a,b) \in E$, dar asta ins că a sau $b \in S$ ≠

$\Leftarrow$ Fie i un MIS, at $V-i$ este un vc

Pp prin red la abs că $V-i$ nu este vc, ins că $(\exists)$ $a,b \notin V-i$ ~~a î $(a,b) \notin E \Rightarrow a,b \in I$~~ $= (a,b) \in E$ și deci nu poate fi în i... dar $a,b \in I$

P_1 și P_2 sunt NP complete prin reducție

Arăt că pb clicii este NP completă printr-o reducție de la MIS

$(G,k) \rightsquigarrow (\bar{G}, k)$

P_3 Pb Clicii

3 SAT $\leq_p$ SUBSET SUM

Subset Sum

P4 se dă o mulț S de nr și un nr K, (∃) o submulț de nr din S a căror sumă este K?

$\Phi = (x_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_2) \wedge (\bar{x}_1 \vee x_2 \vee \bar{x}_3) \wedge (\bar{x}_1 \vee \bar{x}_2 \vee x_3)$

n var

m clauze

		n cif				m cif	
	x_1	1	0	0	1	0	0
*	$\bar{x}_1$	1	0	0	0	1	1
*	x_2	0	1	0	1	1	0
	$\bar{x}_2$	0	1	0	1	0	1
*	x_3	0	0	1	0	1	0
	$\bar{x}_3$	0	0	1	0	1	0
*	c_1	0	0	0	1	0	0
*	c_1'	0	0	0	1	0	0
*	c_2	0	0	0	0	1	0
	c_2'	0	0	0	0	1	0
*	c_3	0	0	0	0	0	1
	c_3'	0	0	0	0	0	1
doar 1-uri	K	1	1	1	3	3	3

Φ SAT $\Leftrightarrow$ (∃) subset cu suma K

→ selecție din tabel se bază la boolean

$\Rightarrow$ $x_1 = F$, $x_2 = T$, $x_3 = T$

$111|122 + c_1 + c_1' + c_2 + c_3 = 111|333$

$S = \{$ cele 12 nr $\}$

$S' = \{ *$ nr $\}$ $\quad S' \subset S$

$\Leftarrow$ În S' nu putem avea și x_i și $\bar{x}_i$.

de $x_i \in S' \Rightarrow x_i = T$ else $x_i = F$

LAB PAE

1) SET COVER unde fiecare elem apare în cel mult f mulț, să se găsească o f-APROX.

reducere la ILP:

x_s pt fiecare s

$$x_s = \begin{cases} 1, & \text{dc } s \in S' \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

$$\min \sum_{s \in f} x_s \cdot c(s)$$

$$\sum_{\substack{s \in f \\ e \in s}} x_s \geq 1$$

$$x_s \in \{0, 1\} \xrightarrow{rel} x'_s \in [0, 1]$$

$$x^*_s = \begin{cases} 1, & x'_s > \frac{1}{f} \\ 0, & \text{altfel} \end{cases}$$

alg:

1) fez, ~~macar~~ cum avem max f elem, măcar 1 elem $\geq \frac{1}{f}$

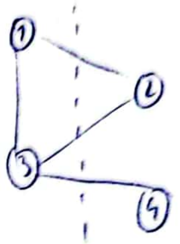
2) $$ALG = \underbrace{\sum_{s \in f} x^*_s \cdot c(s) \leq f \cdot \sum_{s \in f} x'_i \cdot c(s)}_{x^*_s \leq f \cdot x'_s} \leq f \cdot OPT$$

$$\underbrace{OPT_{SC} \geq \sum_{s \in f} x'_s \cdot c(s)}_{\text{limit de ILP}}$$

4) MAX CUT

Se dă un graf neor $G = (V, E)$, să se partiționeze V în 2 mulț. $V = A \cup B$, $A \cap B = \emptyset$, a.î. nr muchiilor dintre A și B să fie max

ALG $\frac{1}{2}$ APROX:



R = 3

$\left.\begin{array}{l} A = \{v_1\} \\ B = \{v_2\} \end{array}\right\} v_1, v_2 \in V$

La fiecare pas luăm un nod arbitrar v_i și-l punem în A dc nr de muchii dintre v_i și B > v_i și A, și invers.

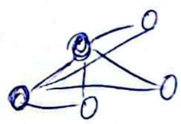
$CUT(v_i)$ = mulț much din tăietură când adăugăm v_i

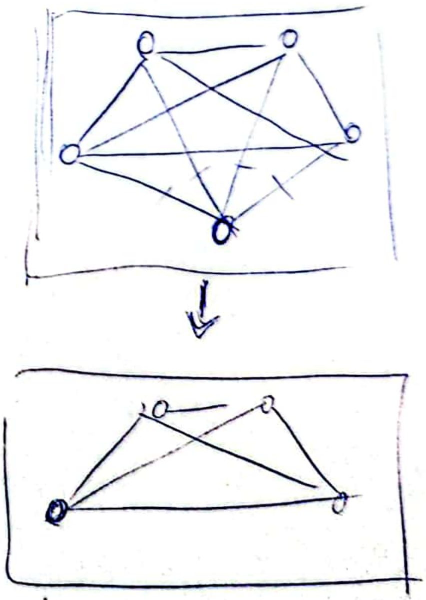
$NOT\text{-}CUT(v_i)$ = ~~mult~~ mult much dintre v_i și nodurile din aceeași m

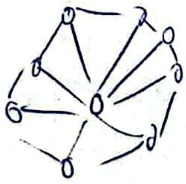
$E = \bigcup_{v_i \in V} CUT(v_i) \cup NOT\text{-}CUT(v_i)$

$|CUT(v_i)| \geq |NOTCUT(v_i)| \Rightarrow |\bigcup_{v_i \in V} CUT(v_i)| \geq |\bigcup_{v_i \in V} NOTCUT(v_i)|$

$|\bigcup_{v_i \in V} CUT(v_i)| \geq \frac{|E|}{2}$







PAE - Lab

Pb o colorare a unui gf neor $G = (V, E)$ este o fct $c : V \to N$ a.î. pt $(\forall)$ $(a, b) \in E$ av $c(a) != c(b)$.

Se dă un gf G despre care știm că este 3-colorabil, să se coloreze cu $O(\sqrt{n})$ culori.

a) pt un graf G cu grad maxim Δ, cum colorăm cu $\Delta + 1$ culori

luăm nodurile oleodar și ne uităm la vecini

b) câte culori poate fi col un gf bipartit? 2 cul.

c) 3-color $\Rightarrow$ de la un nod putem colora toți vecinii

d) $\Delta \leq \sqrt{n} \Rightarrow$ subpct a)

graful original $\Rightarrow$ la un graf cu max $\sqrt{n}$ grad max

---

Alg:

de avem un nod v cu $d(v) > \sqrt{n}$ colorăm $v \cup N(v)$ cu 3 culori și $\Rightarrow G = G \setminus \{v \cup N(v)\}$

altfel avem v cu $d(v) \leq \sqrt{n}$ deci colorăm G cu $\sqrt{n} + 1$ culori

$O(3 \cdot \#\text{pasi } 1 + (\sqrt{n} + 1)) \simeq O(3n)$ sla din vaserami

$\#\text{pasi} \leq \sqrt{n}$