人工智能的数学基础

华东师范大学 数学科学学院 黎芳(教授) 2019年11月13日

Chapter 10 隐马尔可夫模型（hidden Markov model, HMM）

Table of Contents

Chapter 10 隐马尔可夫模型（hidden Markov model, HMM） 1
10.1 隐马尔可夫模型的基本概念 1
10.1.1 隐马尔可夫模型的定义 1
10.1.2 观测序列的生成过程 3
10.1.3 隐马尔可夫模型的3个基本问题 3
10.2 概率计算算法 4
10.2.1 直接计算算法 4
10.2.2 前向算法 4
10.2.3 后向算法 6
10.2.4 一些概率与期望的计算 6
10.3 学习算法 7
10.3.1 监督学习方法 7
10.3.2 Baum-Welch算法 8
10.3.3 Baum-Welch模型参数估计公式 9
10.4 预测算法 10
10.4.1 近似算法 10
10.4.2 维特比算法 10

10.1 隐马尔可夫模型的基本概念

10.1.1 隐马尔可夫模型的定义

定义10.1（隐马尔可夫模型） 隐马尔可夫模型是关于时序的概率模型，描述由一个隐藏的马尔可夫链随机生成不可观测的状态随机序列，再由各个状态生成一个观测而产生观测随机序列的过程．隐藏的马尔可夫链随机生成的状态的序列称为状态序列(state sequence)： 每个状态生成一个观测， 而由此产生的观测的随机序列， 称为观测序列(observation sequence)． 序列的每一个位置又可以看作是一个时刻．

隐马尔可夫模型由初始概率分布、状态转移概率分布以及观测概率分布确定．隐马尔可夫模型的形式定义如下：

设Q是所有可能的状态的集合， V是所有可能的观测的集合

$$Q=\{q_1,q_2,\cdots,q_N\},\quad V=\{v_1,v_2,\cdots,v_M\}$$

I是长度为T的状态序列， O是对应的观测序列．

$$I=(i_1,i_2,\cdots,i_T),\quad O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$$

$\lambda=(A,B,\pi)$称为隐马尔可夫模型的三要素.

A是状态转移概率矩阵：$A=[a_{ij}]_{N\times N}$

$$a_{ij}=P(i_{t+1}=q_j|i_t=q_i),\quad i=1,2,\cdots,N;j=1,2,\cdots,N$$

是在时刻t处于状态q_i的条件下在时刻$t+1$转移到状态q_j的概率.

B是观测概率矩阵：$B=[b_j(k)]_{N\times M}$

$$b_j(k)=P(o_t=v_k|i_t=q_j),\quad k=1,2,\cdots,M;j=1,2,\cdots,N$$

是在时刻t处于状态q_j的条件下生成观测v_k的概率.

π是初始状态概率向量：$\pi=(\pi_i)$

$$\pi_i=P(i_1=q_i),\quad i=1,2,\cdots,N$$

是时刻$t=1$处于状态q_i的概率.

从定义可知，隐马尔可夫模型作了两个基本假设：

(1)齐次马尔可夫性假设，即假设隐藏的马尔可夫链在任意时刻t的状态只依赖于其前一时刻的状态，与其他时刻的状态及观测无关，也与时刻t无关

$$P(i_t|i_{t-1},o_{t-1},\cdots,i_1,o_1)=P(i_t|i_{t-1}),\quad t=1,2,\cdots,T$$

(2)观测独立性假设，即假设任意时刻的观测只依赖于该时刻的马尔可夫链的状态，与其他观测及状态无关.

$$P(o_t|i_T,o_T,i_{T-1},o_{T-1},\cdots,i_{t+1},o_{t+1},i_{t-1},o_{t-1},\cdots,i_1,o)=P(o_t|i_t)$$

例 **10.1** （盒子和球模型） 假设有 4 个盒子，每个盒子里都装有红白两种颜色的球，盒子里的红白球数由表 10.1 列出.

表10.1各盒子的红白球数

盒子	1	2	3	4
红球数	5	3	6	8
白球数	5	7	4	2

按照下面的方法抽球，产生一个球的颜色的观测序列：

- 开始， 从4个盒子里以等概率随机选取1个盒子， 从这个盒子里随机抽出1个球， 记录其颜色后， 放回；
- 然后，从当前盒子随机转移到下一个盒子， 规则是：如果当前盒子是盒子1, 那么下一盒子一定是盒子2, 如果当前是盒子2或3, 那么分别以概率0.4和0.6转移到左边或右边的盒子，如果当前是盒子4, 那么各以 0.5 的概率停留在盒子 4或转移到盒子3；

- 确定转移的盒子后，再从这个盒子里随机抽出1个球， 记录其 颜色， 放回；
- 如此下去， 重复进行5次， 得到一个球的颜色的观测序列；

$O=\{$红，红，白，白，红$\}$

盒子对应状态，状态集合是： $Q=\{$盒子1, 盒子2, 盒子3, 盒子4$\}, N=4$.

球的颜色对应观测，观测集合是：$V=\{$红, 白$\}, M=2$.

T = 5

初始概率分布为：$\pi=(0.25,0.25,0.25,0.25)^{\mathrm{T}}$

状态转移概率分布为：
$$A=\left[\begin{array}{cccc}0 & 1 & 0 & 0 \\ 0.4 & 0 & 0.6 & 0 \\ 0 & 0.4 & 0 & 0.6 \\ 0 & 0 & 0.5 & 0.5\end{array}\right]$$

观测概率分布为：
$$B=\left[\begin{array}{cc}0.5 & 0.5 \\ 0.3 & 0.7 \\ 0.6 & 0.4 \\ 0.8 & 0.2\end{array}\right]$$

10.1.2 观测序列的生成过程

算法10.1 （观测序列的生成）

输入：隐马尔可夫模型$\lambda=(A, B, \pi)$，观测序列长度T

输出：观测序列$O=(o_1, o_2, \cdots, o_T)$

- (1) 按照初始状态分布π产生状态i_1.
- (2) 令$t=1$.
- (3) 按照状态i_t的观测概率分布$b_{i_t}(k)$生成o_t.
- (4) 按照状态i_t的状态转移概率分布$a_{i_t i_{t+1}}$产生状态i_{t+1}， $i_{t+1}=1,2, \cdots, N$.
- (5) 令$t=t+1$; 如果$t<T$转步(3); 否则停止.

10.1.3 隐马尔可夫模型的3个基本问题

(1) 概率计算问题． 给定模型$\lambda=(A, B, \pi)$和观测序列$O=(o_1, o_2, \cdots, o_T)$， 计算在模型$\lambda$下观测序列O出现的概率$P(O|\lambda)$.

(2) 学习问题. 已知观测序列, 估计模型参数$\lambda=(A, B, \pi)$，使得在该模型下观测序列概率$P(O|\lambda)$最大． 即用极大似然估计的方法估计参数．

(3) 预测问题, 也称为解码（decoding）问题. 已知模型 $\lambda=(A,B,\pi)$ 和观测序列 $O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$， 求对给定观测序列条件概率 $P(I|O)$ 最大的状态序列 $I=(i_1,i_2,\cdots,i_T)$. 即给定观测序列， 求最有可能的对应的状态序列.

10.2 概率计算算法

10.2.1 直接计算法

状态序列 $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_T\}$ 的概率是:

$P(I|\lambda)=\pi_{i_1}a_{i_1i_2}a_{i_2i_3}\cdots a_{i_{r-1}i_r}$

对固定的状态序列 $I=\{i_1,i_2,\cdots,i_T\}$，观测序列 $O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$ 的概率是:

$P(O|I,\lambda)=b_{i_1}(o_1)b_{i_2}(o_2)\cdots b_{i_T}(o_T)$

O和 I 同时出现的联合概率为:

$P(O,I|\lambda)=P(O|I,\lambda)P(I|\lambda)=\pi_{i_1}b_{i_1}(o_1)a_{i_1i_2}b_{i_2}(o_2)\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_T}(o_T)$

$P(O|\lambda)=\sum_I P(O|I,\lambda)P(I|\lambda)=\sum_{i_1,i_2,\cdots,i_T}\pi_{i_1}b_{i_1}(o_1)a_{i_1i_2}(o_2)\cdots a_{i_{T-1}i_T}b_{i_T}(o_T)$

但是，利用上述公式计算量很大，是 $O(TN^T)$ 阶的，这种算法不可行.

10.2.2 前向算法

定义**10.2** （前向概率） 给定隐马尔可夫模型 λ,定义到时刻t部分观测序列为 $o_1,o_2,\cdots,o_t$，且状态为 q_i 的概率为前向概率，记作

$$\alpha_t(i)=P(o_1,o_2,\cdots,o_t,i_t=q_i|\lambda)$$

算法**10.2** （观测序列概率的前向算法）

输入：隐马尔可夫模型 λ，观测序列O

输出：观测序列概率 $P(O|\lambda)$

(1) 初值

$$\alpha_1(i)=\pi_ib_i(o_1),\quad i=1,2,\cdots,N$$

(2) 递推 $t=1,2,\cdots,T-1$

$$\alpha_{t+1}(i)=\left[\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(j)a_{ji}\right]b_i(o_{t+1}),\quad i=1,2,\cdots,N$$

(3) 终止

$$P(O|\lambda) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_T(i)$$

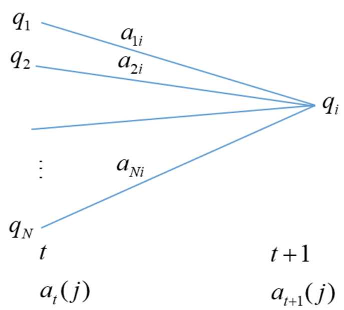

图10.1 前向概率的递推公式

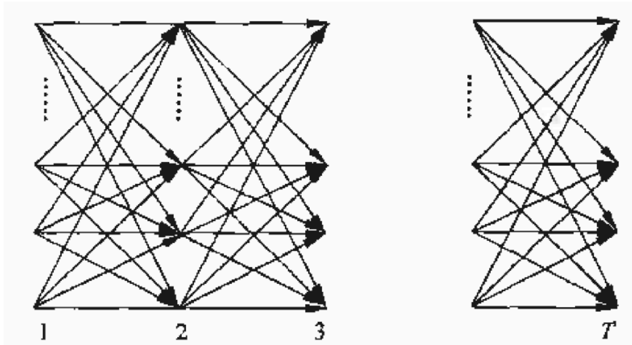

图 10.2　观测序列路径结构

例**10.2** 考虑盒子和球模型$\lambda = (A, B, \pi)$，状态集合$Q = \{1, 2, 3\}$,观测集合$V = \{红,白\}$,

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \pi = (0.2, 0.4, 0.4)^{\mathrm{T}}$$

设$T = 3$，$Q = (红, 白, 红)$，试用前向算法计算$P(O|\lambda)$.

解：(1)计算初值

$$\alpha_1(1) = \pi_1 b_1(o_1) = 0.10$$
$$\alpha_1(2) = \pi_2 b_2(o_1) = 0.16$$
$$\alpha_1(3) = \pi_3 b_3(o_1) = 0.28$$

(2) 递推计算

$$\alpha_2(1) = \left[\sum_{i=1}^{3} \alpha_1(i) a_{i1}\right] b_1(o_2) = 0.154 \times 0.5 = 0.077$$

$$\alpha_2(2) = \left[\sum_{i=1}^{3} \alpha_1(i) a_{i2}\right] b_2(o_2) = 0.184 \times 0.6 = 0.1104$$

$$\alpha_2(3) = \left[\sum_{i=1}^{3} \alpha_1(i) q_{13}\right] b_3(o_2) = 0.202 \times 0.3 = 0.0606$$

$$\alpha_3(1) = \left[\sum_{i=1}^{3} \alpha_2(i) a_{i1}\right] b_1(o_3) = 0.04187$$

$$\alpha_3(2) = \left[\sum_{i=1}^{3} \alpha_2(i) a_{i2}\right] b_2(o_3) = 0.03551$$

$$\alpha_3(3) = \left[\sum_{i=1}^{3} \alpha_2(i) a_{i3}\right] b_3(o_3) = 0.05284$$

(3) 终止

$$P(O|\lambda)=\sum_{i=1}^{3}\alpha_3(i)=0.13022$$

10.2.3 后向算法

定义10.3（后向概率） 给定隐马尔可夫模型λ,定义在时刻t状态为q_i的条件下，从$t+1$到T的部分观测序列为$O_{t+1},O_{t+2},\cdots,O_T$的概率为后向概率，记作

$$\beta_t(i)=P(o_{t+1},o_{t+2},\cdots,o_T|i_t=q_i,\lambda)$$

算法**10.3** （观测序列概率的后向算法）

输入：隐马尔可夫模型λ,观测序列O

输出：观测序列概率$P(O|\lambda)$

(1) $\beta_T(i)=1,\quad i=1,2,\cdots,N$

(2) $\beta_t(i)=\sum_{j=1}^{N}a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j),\quad i=1,2,\cdots,N,t=T-1,T-2,\cdots,1$

(3) $P(O|\lambda)=\sum_{i=1}^{N}\pi_i b_i(o_1)\beta_1(i)$

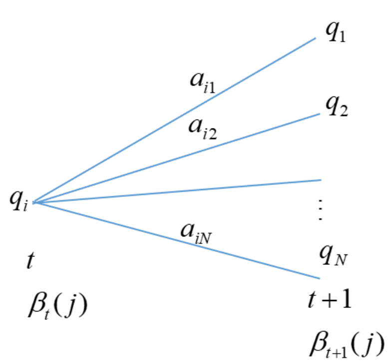

图10.3 后向概率的递推公式

10.2.4 一些概率与期望的计算

利用前向概率和后向概率，可以得到关于单个状态和两个状态概率的计算公式

1. 给定模型λ和观测O, 在时刻t处于状态q_i 的概率, 记

$\gamma_t(i)=P(i_t=q_i|O,\lambda)$

$$\gamma_t(i) = P(i_t = q_i|O,\lambda) = \frac{P(i_t = q_i, O|\lambda)}{P(O|\lambda)}$$

$$\alpha_t(i)\beta_t(i) = P(i_t = q_i, O|\lambda)$$

$$\gamma_t(i) = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(O|\lambda)} = \frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(j)\beta_t(j)}$$

2. 给定模型λ和观测O, 在时刻t处于状态q_i， 且在时刻$t+1$处于状态q_j的概率．记

$$\xi_t(i,j) = P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j|O,\lambda)$$

$$\xi_t(i,j) = \frac{P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O|\lambda)}{P(O|\lambda)} = \frac{P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O|\lambda)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O|\lambda)}$$

$$P(i_t = q_i, i_{t+1} = q_j, O|\lambda) = \alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)$$

$$\xi_t(i,j) = \frac{\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)}{\sum_{i=1}^{N}\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(i)a_{ij}b_j(o_{t+1})\beta_{t+1}(j)}$$

3. 将$\gamma_t(i)$和$\xi_t(i,j)$对各个时刻t求和，可以得到一些有用的期望值

(1)在观测O下状态i出现的期望值:$\sum_{i=1}^{T}\gamma_t(i)$

(2)在观刻O下由状态i转移的期望值: $\sum_{i=1}^{T-1}\gamma_t(i)$

(3)观测0下由状态i转移到状态j的期望值: $\sum_{t=1}^{T-1}\xi_t(i,j)$

10.3 学习算法

10.3.1 监督学习方法

假设已给训练数据包含S个长度相同的观测序列和对应的状态序列$\{(O_1,I_1),(O_2,I_2),\cdots,(O_S,I_S)\}$，那么可以利用极大似然估计法来估计隐马尔可夫模型的参数．具体方法如下．

1. 转移概率a_{ij}的估计

设样本中时刻t处于状态i，时刻$t+1$转移到状态j的频数为A_{ij}，那么状态转移概率a_{ij}的估计是

$$\hat{a}_{ij} = \frac{A_{ij}}{\sum_{j=1}^{N} A_{ij}}, \quad i = 1, 2, \cdots, N : j = 1, 2, \cdots, N$$

2. 观测概率$b_j(k)$的估计

设样本中状态为j并观测为k的频数是B_{jk}，那么状态为j观测为k的概率$b_j(k)$的估计是

$$\hat{b}_j(k) = \frac{B_{jk}}{\sum_{k=1}^{M} B_{jk}}, \quad j = 1, 2, \cdots, N; k = 1, 2, \cdots, M$$

3. 初始状态概率π_i的估计为$\hat{\pi}_i$为S个样本中初始状态q_i的频率。

10.3.2 Baum-Welch算法

假设给定训练数据只包含S个长度为T的观测序列$\{O_1, O_2, \cdots, O_S\}$而没有对应的状态序列，目标是学习隐马尔可夫模型$\lambda = (A, B, \pi)$的参数．我们将观测序列数据看作观测数据O，状态序列数据看作不可观测的隐数据I，那么隐马尔可夫模型事实上是一个含有隐变量的概率模型

$$P(O|\lambda) = \sum_{I} P(O|I, \lambda)P(I|\lambda)$$

它的参数学习可以由EM算法实现。

1.确定完全数据的对数似然函数$\log P(O, I|\lambda)$

2.EM算法的E步：求Q函数

$$Q(\lambda, \bar{\lambda}) = \sum_{I} \log P(O, I|\lambda)P(O, I|\bar{\lambda})$$

($Q(\lambda, \bar{\lambda}) = \sum_{I} \log P(O, I|\lambda)P(I|O, \bar{\lambda}), \quad P(I|O, \bar{\lambda}) = P(O, I|\bar{\lambda})/P(O|\bar{\lambda})$,去掉了对$\lambda$而言的常数$P(O|\bar{\lambda})$)

$\bar{\lambda}$是隐马尔可夫模型参数的当前估计值，λ是要极大化的隐马尔可夫模型参数．

$$P(O, I|\lambda) = \pi_{i_1} b_{i_1}(o_1) a_{i_1 i_2} b_{i_2}(o_2) \cdots a_{i_{T-1}} b_{i_T}(o_T)$$

$$\begin{aligned} Q(\lambda, \bar{\lambda}) &= \sum_{I} \log \pi_{i1} P(O, I|\bar{\lambda}) \\ &+ \sum_{I} \left(\sum_{t=1}^{T-1} \log a_{i_t i_{t+1}} \right) P(O, I|\bar{\lambda}) + \sum_{I} \left(\sum_{t=1}^{T} \log b_{i_t}(o_t) \right) P(O, I|\bar{\lambda}) \end{aligned} \tag{Q}$$

3. EM算法的M步：极大化Q函数$Q(\lambda, \bar{\lambda})$求模型参数$A, B, \pi$

Q 的第一项 $\sum_I \log \pi_{i1} P(O,I|\overline{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \log \pi_i P\left(O, i_1 = i|\overline{\lambda}\right)$

由 $\sum_{i=1}^N \pi_i = 1$，采用拉格朗日乘数法

$$L = \sum_{i=1}^N \log \pi_i P\left(O, i_1 = i|\overline{\lambda}\right) + \gamma\left(\sum_{i=1}^N \pi_i - 1\right)$$

$$\frac{\partial}{\partial \pi_i}\left[\sum_{i=1}^N \log \pi_i P\left(O, i_1 = i|\overline{\lambda}\right) + \gamma\left(\sum_{i=1}^N \pi_i - 1\right)\right] = 0$$

$$P\left(O, i_1 = i|\overline{\lambda}\right) + \gamma \pi_i = 0$$

$$\gamma = -P(O|\overline{\lambda})$$

$$\pi_i = \frac{P\left(O, i_1 = i|\overline{\lambda}\right)}{P(O|\overline{\lambda})} \qquad \text{(A)}$$

Q 的第二项 $\sum_I \left(\sum_{t=1}^{T-1} \log a_{i_t i_{t+1}}\right) P(O,I|\overline{\lambda}) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T-1} \log a_{ij} P\left(O, i_t = i, i_{t+1} = j|\overline{\lambda}\right)$，由于 $\sum_{j=1}^N a_{ij} = 1$

$$a_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} P\left(O, i_t = i, i_{t+1} = j|\overline{\lambda}\right)}{\sum_{t=1}^{T-1} P\left(O, i_t = i|\overline{\lambda}\right)} \qquad \text{(B)}$$

Q 的第三项 $\sum_I \left(\sum_{t=1}^{T} \log b_{i_t}(o_t)\right) P(O,I|\overline{\lambda}) = \sum_{j=1}^N \sum_{t=1}^{T} \log b_j(o_t) P\left(O, i_t = j|\overline{\lambda}\right)$，由于 $\sum_{k=1}^M b_j(k) = 1$

$$b_j(k) = \frac{\sum_{t=1}^{T} P\left(O, i_t = j|\overline{\lambda}\right) I(o_t = v_k)}{\sum_{t=1}^{T} P\left(O, i_t = j|\overline{\lambda}\right)} \qquad \text{(C)}$$

10.3.3 Baum-Welch模型参数估计公式

算法10.4（Baum-**Welch**算法）

输入： 观测数据 $O = (o_1, o_2, \cdots, o_T)$

输出： 隐马尔可夫模型参数．

(1) 初始化

对 $n = 0$，选取 $a_{ij}^{(0)}, b_j(k)^{(0)}, \pi_i^{(0)}$，得到模型 $\lambda^{(0)} = (A^{(0)}, B^{(0)}, \pi^{(0)})$

(2) 递推． 对 $n = 1, 2, \cdots,$

$$a_{ij}^{(n+1)}=\frac{\sum_{t=1}^{T-1}\xi_t(i,j)}{\sum_{t=1}^{T-1}\gamma_t(i)},\quad b_j(k)^{(n+1)}=\frac{\sum_{t=1,o_t=v_k}^{T}\gamma_t(j)}{\sum_{t=1}^{T}\gamma_t(j)},\quad \pi_i^{(n+1)}=\gamma_1(i)$$

(3) 终止，得到模型参数 $\lambda^{(n+1)}=(A^{\{n+1\rangle},B^{(n+1)},\pi^{(n+1)})$.

10.4 预测算法

10.4.1 近似算法

近似算法的想法是，在每个时刻 t 选择在该时刻最有可能出现的状态 i_t^*，从而得到一个状态序列 $I^*=\left(i_1^*,i_2^*,\cdots,i_r^*\right)$，将它作为预测的结果.给定隐马尔可夫模型 λ 和观测序列 O,在时刻 t 处于状态 q_i 的概率 $\gamma_t(i)$ 是

$$\gamma_t(i)=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{P(O|\lambda)}=\frac{\alpha_t(i)\beta_t(i)}{\sum_{j=1}^{N}\alpha_t(j)\beta_t(j)}$$

在每一时刻t最有可能的状态 i_t^* 是 $i_t^*=\arg\max_{1\le i\le N}[\gamma_t(i)],\quad t=1,2,\cdots,T$.

10.4.2 维特比算法

维特比算法实际是用动态规划解隐马尔可夫模型预测问题，即用动态规划 (dynamic programming)求概率最大路径（最优路径）. 这时一条路径对应着一个状态序列.

定义在时刻 t 状态为 i 的所有单个路径 $(i_1,i_2,\cdots,i_t)$ 中概率最大值为

$$\delta_t(i)=\max_{i_1,i_2,\cdots,i_{t-1}}P(i_t=i,i_{t-1},\cdots i_1,o_t,\cdots,o_1|\lambda),\quad i=1,2,\cdots,N$$

由定义可得变量 δ 的递推公式：

$$\begin{aligned}\delta_{t+1}(i)&=\max_{i_1,i_2,\cdots,i_t}P(i_{t+1}=i,i_t,\cdots,i_1,o_{t+1},\cdots,o_1|\lambda)\\&=\max_{1\le j\le N}[\delta_t(j)a_{ji}]b_i(o_{t+1}),\quad i=1,2,\cdots,N;t=1,2,\cdots,T-1\end{aligned}$$

定义在时刻 t 状态为 i 的所有单个路径 $(i_1,i_2,\cdots,i_{t-1},i)$ 中概率最大的路径的第 $t-1$ 个结点为

$$\psi_t(i)=\arg\max_{1\le j\le N}[\delta_{t-1}(j)a_{ji}],\quad i=1,2,\cdots,N$$

算法10.5（维特比算法）

输入：模型 $\lambda=(A,B,\pi)$ 和观测 $O=(o_1,o_2,\cdots,o_T)$

输出：最优路径$I^* = (i_1^*, i_2^*, \cdots, i_T^*)$

(1) 初始化

$$\delta_1(i) = \pi_i b_i(o_1), i = 1, 2, \cdots, N$$
$$\psi_1(i) = 0, i = 1, 2, \cdots, N$$

(2) 递推．对$t = 2, 3, \cdots, T$

$$\delta_t(i) = \max_{1 \le j \le N} [\delta_{t-1}(j) a_{ji}] b_i(o_t), i = 1, 2, \cdots, N$$
$$\psi_t(i) = \arg\max_{1 \le j \le N} [\delta_{t-1}(j) a_{ji}], i = 1, 2, \cdots, N$$

(3) 终止

$$P^* = \max_{1 \le i \le N} \delta_T(i)$$
$$i_T^* = \arg\max_{1 \le i \le N} [\delta_T(i)]$$

4)最优路径回溯．对$t = T-1, T-2, \cdots, 1$

$$i_t^* = \psi_{t+1}(i_{t+1}^*)$$

求得最优路径$I^* = (i_1^*, i_2^*, \cdots, i_T^*)$.

例**10.3** 例10.2的模型$\lambda = (A, B, \pi)$

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \pi = (0.2, 0.4, 0.4)^{\mathrm{T}}$$

已知观测序列 O=(红, 白, 红)，试求最优状态序列，即最优路径$I^* = (i_1^*, i_2^*, i_3^*)$.

解 (1)初始化． 在$t = 1$时，对每一个状态$i, i = 1, 2, 3,$ 求状态为i观测o_1为红球的概率，记此概率为$\delta_1(i)$， 则

$$\delta_1(i) = \pi_i b_i(o_1) = \pi_i b_i(\text{红}), \quad i = 1, 2, 3$$

代入实际数据 $\delta_1(1) = 0.10, \quad \delta_1(2) = 0.16, \quad \delta_1(3) = 0.28$

记$\psi_1(i) = 0, \quad i = 1, 2, 3$

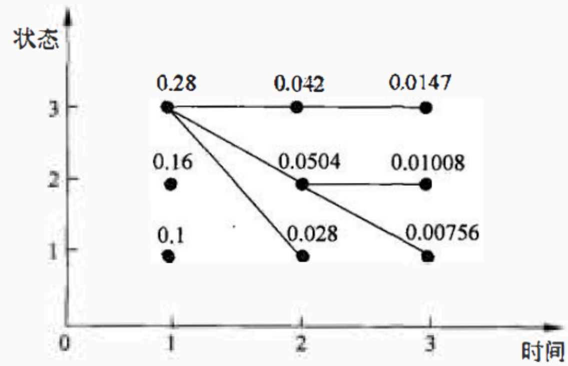

图 10.4 求最优路径

(2)在$t=2$时，对每个状态$i, i=1,2,3,$求在$t=1$时状态为j观测为红并在$t=2$时状态为i观测o_2 为白的路径的最大概率，记此最大概率为$\delta_2(i)$， 则

$$\delta_2(i)=\max_{1\le j\le 3}[\delta_1(j)a_{ji}]b_i(o_2)$$

$$\psi_2(i)=\arg\max_{1\le j\le 3}[\delta_1(j)a_{ji}],\quad i=1,2,3$$

$$\begin{aligned}
\delta_2(1) &= \max_{1\le j\le 3}[\delta_1(j)a_{j1}]b_1(o_2)\\
&= \max_j\{0.10\times 0.5, 0.16\times 0.3, 0.28\times 0.2\}\times 0.5\\
&= 0.028\\
\psi_2(1) &= 3\\
\delta_2(2) &= 0.0504,\quad \psi_2(2)=3\\
\delta_2(3) &= 0.042,\quad \psi_2(3)=3
\end{aligned}$$

$t=3$时

$$\begin{aligned}
\delta_3(i) &= \max_{1\le j\le 3}[\delta_2(j)a_{ji}]b_i(o_3)\\
\psi_3(i) &= \arg\max_{1\le j\le 3}[\delta_2(j)a_{ji}]\\
\delta_3(1) &= 0.00756,\quad \psi_3(1)=2\\
\delta_3(2) &= 0.01008,\quad \psi_3(2)=2\\
\delta_3(3) &= 0.0147,\quad \psi_3(3)=3
\end{aligned}$$

(3) 以P^*表示最优路径的概率

$$P^*=\max_{1\le i\le 3}\delta_3(i)=0.0147$$

$$i_3^*=\arg\max_i[\delta_3(i)]=3$$

(4) 由最优路径的终点i_3^*，逆向找到i_2^*, i_1^*.

$$\begin{aligned}
i_2^* &= \psi_3(i_3^*)=\psi_3(3)=3\\
i_1^* &= \psi_2(i_2^*)=\psi_2(3)=3
\end{aligned}$$

最优状态序列为$I^* = \left(i_1^*, i_2^*, i_3^*\right) = (3,3,3)$.

作业

习题10.1 给定盒子和球组成的马尔可夫模型$\lambda = (A, B, \pi)$，其中，

$$A = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.2 & 0.3 \\ 0.3 & 0.5 & 0.2 \\ 0.2 & 0.3 & 0.5 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0.5 & 0.5 \\ 0.4 & 0.6 \\ 0.7 & 0.3 \end{bmatrix}, \quad \pi = (0.2, 0.4, 0.4)^{\mathrm{T}}$$

设$T = 4$, $O =$(红，白，红，白)，试用后向算法计算$P(O|\lambda)$.