УНИВЕРСИТЕТ ИТМО
Факультет программной инженерии и компьютерной техники
Дисциплина «Дискретная математика»

Курсовая работа
Часть 1
Вариант 18

Студент
Гаврилин Олег Сергеевич
P3130

Преподаватель
Поляков Владимир Иванович

Санкт-Петербург, 2023 г.

Функция $f(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ принимает значение 1 при $2 \leq |x_1x_2 - x_3x_4x_5| \leq 4$ и неопределенное значение при $|x_1x_2 - x_3x_4x_5| = 1$.

Таблица истинности

№	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_1x_2	$x_3x_4x_5$	x_1x_2	$x_3x_4x_5$	f
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	0	1	0	1	0	1	d
2	0	0	0	1	0	0	2	0	2	1
3	0	0	0	1	1	0	3	0	3	1
4	0	0	1	0	0	0	4	0	4	1
5	0	0	1	0	1	0	5	0	5	0
6	0	0	1	1	0	0	6	0	6	0
7	0	0	1	1	1	0	7	0	7	0
8	0	1	0	0	0	1	0	1	0	d
9	0	1	0	0	1	1	1	1	1	0
10	0	1	0	1	0	1	2	1	2	d
11	0	1	0	1	1	1	3	1	3	1
12	0	1	1	0	0	1	4	1	4	1
13	0	1	1	0	1	1	5	1	5	1
14	0	1	1	1	0	1	6	1	6	0
15	0	1	1	1	1	1	7	1	7	0
16	1	0	0	0	0	2	0	2	0	1
17	1	0	0	0	1	2	1	2	1	d
18	1	0	0	1	0	2	2	2	2	0
19	1	0	0	1	1	2	3	2	3	d
20	1	0	1	0	0	2	4	2	4	1
21	1	0	1	0	1	2	5	2	5	1
22	1	0	1	1	0	2	6	2	6	1
23	1	0	1	1	1	2	7	2	7	0
24	1	1	0	0	0	3	0	3	0	1
25	1	1	0	0	1	3	1	3	1	1
26	1	1	0	1	0	3	2	3	2	d
27	1	1	0	1	1	3	3	3	3	0
28	1	1	1	0	0	3	4	3	4	d
29	1	1	1	0	1	3	5	3	5	1
30	1	1	1	1	0	3	6	3	6	1
31	1	1	1	1	1	3	7	3	7	1

Аналитический вид

Каноническая ДНФ:

$$
\begin{aligned}
f = {} & \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,\overline{x_5} \lor \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,x_4\,x_5 \lor \overline{x_1}\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \lor \overline{x_1}\,x_2\,\overline{x_3}\,x_4\,x_5 \lor \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \lor \overline{x_1}\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5 \lor \\
& \lor x_1\,\overline{x_2}\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \lor x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \lor x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5 \lor x_1\,\overline{x_2}\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \lor x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \lor x_1\,x_2\,\overline{x_3}\,\overline{x_4}\,x_5 \lor \\
& \lor x_1\,x_2\,x_3\,\overline{x_4}\,x_5 \lor x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,\overline{x_5} \lor x_1\,x_2\,x_3\,x_4\,x_5
\end{aligned}
$$

Каноническая КНФ:

$$
\begin{aligned}
f = {} & (x_1 \lor x_2 \lor x_3 \lor x_4 \lor x_5)\,(x_1 \lor x_2 \lor \overline{x_3} \lor x_4 \lor \overline{x_5})\,(x_1 \lor x_2 \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4} \lor x_5)\,(x_1 \lor x_2 \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4} \lor \overline{x_5}) \\
& (x_1 \lor \overline{x_2} \lor x_3 \lor x_4 \lor \overline{x_5})\,(x_1 \lor \overline{x_2} \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4} \lor x_5)\,(x_1 \lor \overline{x_2} \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4} \lor \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \lor x_2 \lor x_3 \lor \overline{x_4} \lor x_5) \\
& (\overline{x_1} \lor x_2 \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4} \lor \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \lor \overline{x_2} \lor x_3 \lor \overline{x_4} \lor \overline{x_5})
\end{aligned}
$$

Минимизация булевой функции методом Квайна–Мак-Класки

Кубы различной размерности и простые импликанты

$K^0(f)$		
m_2	00010	✓
m_4	00100	✓
m_{16}	10000	✓
m_1	00001	✓
m_8	01000	✓
m_3	00011	✓
m_{12}	01100	✓
m_{20}	10100	✓
m_{24}	11000	✓
m_{10}	01010	✓
m_{17}	10001	✓
m_{11}	01011	✓
m_{13}	01101	✓
m_{21}	10101	✓
m_{22}	10110	✓
m_{25}	11001	✓
m_{19}	10011	✓
m_{26}	11010	✓
m_{28}	11100	✓
m_{29}	11101	✓
m_{30}	11110	✓
m_{31}	11111	✓

$K^1(f)$		
m_2-m_3	0001X	✓
m_1-m_3	000X1	✓
m_8-m_{10}	010X0	✓
m_8-m_{12}	01X00	✓
m_2-m_{10}	0X010	✓
m_4-m_{12}	0X100	✓
m_{16}-m_{17}	1000X	✓
m_{16}-m_{20}	10X00	✓
m_{16}-m_{24}	1X000	✓
m_1-m_{17}	X0001	✓
m_4-m_{20}	X0100	✓
m_8-m_{24}	X1000	✓
m_{10}-m_{11}	0101X	✓
m_{12}-m_{13}	0110X	✓
m_3-m_{11}	0X011	✓
m_{17}-m_{19}	100X1	✓
m_{20}-m_{21}	1010X	✓
m_{20}-m_{22}	101X0	✓
m_{17}-m_{21}	10X01	✓
m_{24}-m_{25}	1100X	✓
m_{24}-m_{26}	110X0	✓
m_{24}-m_{28}	11X00	✓
m_{17}-m_{25}	1X001	✓
m_{20}-m_{28}	1X100	✓
m_3-m_{19}	X0011	✓
m_{10}-m_{26}	X1010	✓
m_{12}-m_{28}	X1100	✓
m_{28}-m_{29}	1110X	✓
m_{28}-m_{30}	111X0	✓
m_{25}-m_{29}	11X01	✓
m_{26}-m_{30}	11X10	✓
m_{21}-m_{29}	1X101	✓
m_{22}-m_{30}	1X110	✓
m_{13}-m_{29}	X1101	✓
m_{30}-m_{31}	1111X	✓
m_{29}-m_{31}	111X1	✓

$K^2(f)$		
m_2-m_3-m_{10}-m_{11}	0X01X	
m_{16}-m_{17}-m_{20}-m_{21}	10X0X	✓
m_{16}-m_{17}-m_{24}-m_{25}	1X00X	✓
m_{16}-m_{20}-m_{24}-m_{28}	1XX00	✓
m_1-m_3-m_{17}-m_{19}	X00X1	
m_8-m_{10}-m_{24}-m_{26}	X10X0	
m_8-m_{12}-m_{24}-m_{28}	X1X00	
m_4-m_{12}-m_{20}-m_{28}	XX100	
m_{24}-m_{25}-m_{28}-m_{29}	11X0X	✓
m_{24}-m_{26}-m_{28}-m_{30}	11XX0	
m_{20}-m_{21}-m_{28}-m_{29}	1X10X	✓
m_{20}-m_{22}-m_{28}-m_{30}	1X1X0	
m_{17}-m_{21}-m_{25}-m_{29}	1XX01	✓
m_{12}-m_{13}-m_{28}-m_{29}	X110X	
m_{28}-m_{29}-m_{30}-m_{31}	111XX	

$K^3(f)$	
m_{16}-m_{17}-m_{20}-m_{21}-m_{24}-m_{25}-m_{28}-m_{29}	1XX0X

$Z(f)$
0X01X
X00X1
X10X0
X1X00
XX100
11XX0
1X1X0
X110X
111XX
1XX0X

Таблица импликант

Вычеркнем строки, соответствующие существенным импликантам (это те, которые покрывают вершины, не покрытые другими импликантами), а также столбцы, соответствующие вершинам, покрываемым существенными импликантами. Затем вычеркнем импликанты, не покрывающие ни одной вершины.

Простые импликанты	0-кубы														
	0 0 0 1 0	0 0 0 1 1	0 0 1 0 0	0 1 0 1 1	0 1 1 0 0	0 1 1 0 1	1 0 0 0 0	1 0 1 0 0	1 0 1 0 1	1 0 1 1 0	1 1 0 0 0	1 1 0 0 1	1 1 1 0 1	1 1 1 1 0	1 1 1 1 1
	2	3	4	11	12	13	16	20	21	22	24	25	29	30	31
~~0X01X~~	X	X		X											
~~X00X1~~		X													
~~X10X0~~											X				
~~X1X00~~					X						X				
~~XX100~~			X		X			X							
~~11XX0~~											X			X	
~~1X1X0~~								X		X				X	
~~X110X~~					X	X							X		
~~111XX~~													X	X	X
~~1XX0X~~							X	X	X		X	X	X		

Ядро покрытия:

$$T = \begin{Bmatrix} 0X01X \\ XX100 \\ X110X \\ 1XX0X \\ 1X1X0 \\ 111XX \end{Bmatrix}$$

Вся таблица вычеркнулась, следовательно ядро покрытия является минимальным покрытием

Рассмотрим следующее минимальное покрытие:

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 0X01X \\ XX100 \\ X110X \\ 1XX0X \\ 1X1X0 \\ 111XX \end{Bmatrix}$$

$$S^a = 17$$
$$S^b = 23$$

Этому покрытию соответствует следующая МДНФ:

$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_2\,x_3\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_3\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,x_3$$

Минимизация булевой функции на картах Карно

Определение МДНФ

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00		d	1	1
01	1			
11	1	1		
10	d		1	d

$x_1 = 1$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	1	d	d	
01	1	1		1
11	d	1	1	1
10	1	1		d

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 0X01X \\ XX100 \\ X110X \\ 1XX0X \\ 1X1X0 \\ 111XX \end{Bmatrix}$$

$$S^a = 17$$
$$S^b = 23$$

$$f = \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_2\,x_3\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_3\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,x_3$$

Определение МКНФ

$x_1 = 0$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00	0	d		
01		0	0	0
11			0	0
10	d	0		d

$x_1 = 1$

$x_2x_3 \backslash x_4x_5$	00	01	11	10
00		d	d	0
01			0	
11	d			
10			0	d

$$C_{\min} = \begin{Bmatrix} 0X00X \\ 0X11X \\ 1X01X \\ 00X01 \\ 10X11 \end{Bmatrix}$$

$$S^a = 17$$
$$S^b = 22$$

$$f = (x_1 \vee x_3 \vee x_4)\,(x_1 \vee \overline{x_3} \vee \overline{x_4})\,(\overline{x_1} \vee x_3 \vee \overline{x_4})\,(x_1 \vee x_2 \vee x_4 \vee \overline{x_5})\,(\overline{x_1} \vee x_2 \vee \overline{x_4} \vee \overline{x_5})$$

Преобразование минимальных форм булевой функции

Факторизация и декомпозиция МДНФ

$f = \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4 \vee x_3\,\overline{x_4}\,\overline{x_5} \vee x_2\,x_3\,\overline{x_4} \vee x_1\,\overline{x_4} \vee x_1\,x_3\,\overline{x_5} \vee x_1\,x_2\,x_3 \qquad S_Q = 23 \quad \tau = 2$

$f = x_1\,\overline{x_4} \vee x_3\,(x_1 \vee \overline{x_4})\,(x_2 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4 \qquad S_Q = 15 \quad \tau = 3$

$\varphi = \overline{x_1}\,x_4$

$\overline{\varphi} = x_1 \vee \overline{x_4}$

$f = x_1\,\overline{x_4} \vee x_3\,\overline{\varphi}\,(x_2 \vee \overline{x_5}) \vee \varphi\,\overline{x_3} \qquad S_Q = 15 \quad \tau = 4$

Декомпозиция нецелесообразна

$f = x_1\,\overline{x_4} \vee x_3\,(x_1 \vee \overline{x_4})\,(x_2 \vee \overline{x_5}) \vee \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4 \qquad S_Q = 15 \quad \tau = 3$

Факторизация и декомпозиция МКНФ

$f = (x_1 \lor x_3 \lor x_4)\ (x_1 \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4})\ (\overline{x_1} \lor x_3 \lor \overline{x_4})\ (x_1 \lor x_2 \lor x_4 \lor \overline{x_5})\ (\overline{x_1} \lor x_2 \lor \overline{x_4} \lor \overline{x_5}) \quad S_Q = 22 \quad \tau = 2$

Декомпозиция невозможна

$f = (x_3\ (x_2 \lor \overline{x_5}) \lor (x_1 \lor x_4)\ (\overline{x_1} \lor \overline{x_4}))\ (x_1 \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4}) \quad S_Q = 17 \quad \tau = 4$

Синтез комбинационных схем

Будем анализировать схемы на следующих наборах аргументов:

$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 0, x_5 = 0]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 1, x_4 = 0, x_5 = 1]) = 0$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 0]) = 1$$
$$f([x_1 = 0, x_2 = 0, x_3 = 0, x_4 = 1, x_5 = 1]) = 1$$

Булев базис

Схема по упрощенной МДНФ:

$$f = x_1\,\overline{x_4} \lor x_3\ (x_1 \lor \overline{x_4})\ (x_2 \lor \overline{x_5}) \lor \overline{x_1}\,\overline{x_3}\,x_4 \quad (S_Q = 15, \tau = 3)$$

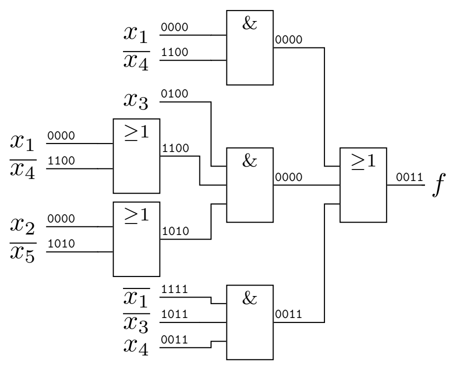
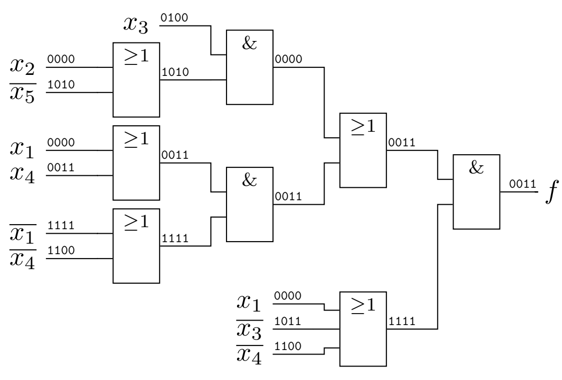


Схема по упрощенной МКНФ:

$$f = (x_3\ (x_2 \lor \overline{x_5}) \lor (x_1 \lor x_4)\ (\overline{x_1} \lor \overline{x_4}))\ (x_1 \lor \overline{x_3} \lor \overline{x_4}) \quad (S_Q = 17, \tau = 4)$$



Сокращенный булев базис (И, НЕ)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_1\,\overline{x_4}}\;\overline{x_3\,\overline{\varphi}\,\overline{\overline{x_2}\,x_5}}\;\overline{\varphi\,\overline{x_3}}} \quad (S_Q = 20, \tau = 6)$$

$$\varphi = \overline{x_1}\,x_4$$

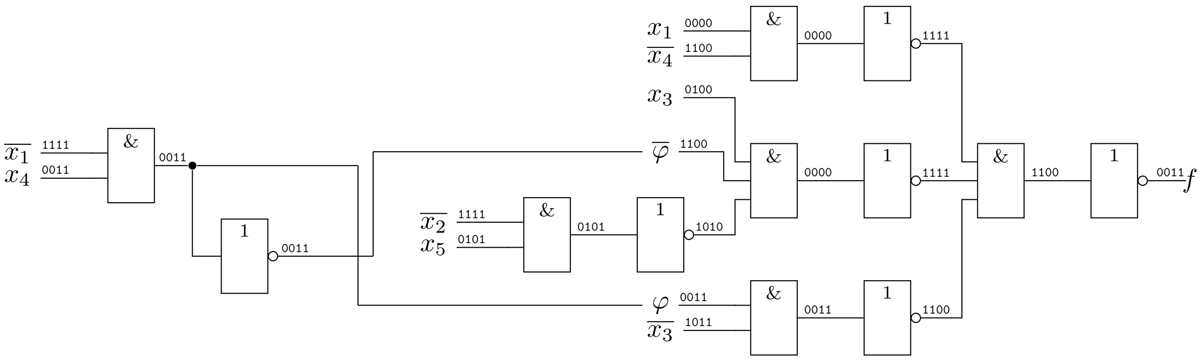
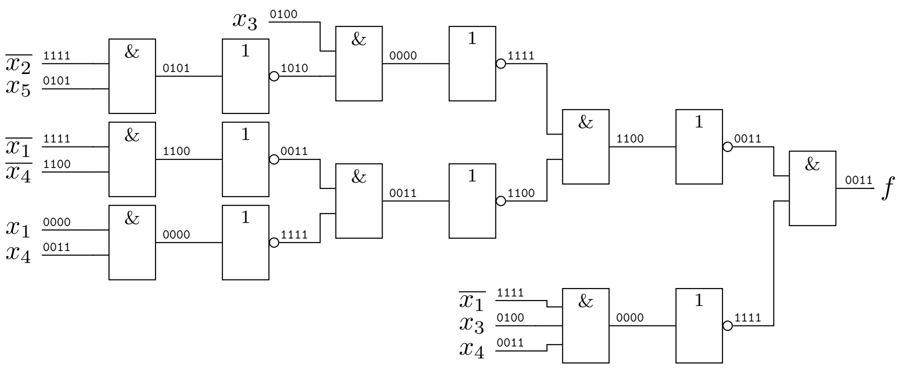


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И, НЕ:

$$f = \overline{\overline{x_3\,\overline{\overline{x_2}\,x_5}}\;\overline{\overline{\overline{x_1}\,\overline{x_4}}\;\overline{x_1\,x_4}}}\;\overline{\overline{x_1}\,x_3\,x_4} \quad (S_Q = 24, \tau = 7)$$



Универсальный базис (И-НЕ, 2 входа)

Схема по упрощенной МДНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{x_1\,\overline{x_4}}\;\overline{\overline{\overline{x_3\,\overline{\overline{\overline{\overline{x_1}\,x_4}\;\overline{\overline{x_2}\,x_5}}}}\;\overline{\overline{x_1}\,\overline{\overline{\overline{x_3}\,x_4}}}}}} \quad (S_Q = 24, \tau = 7)$$

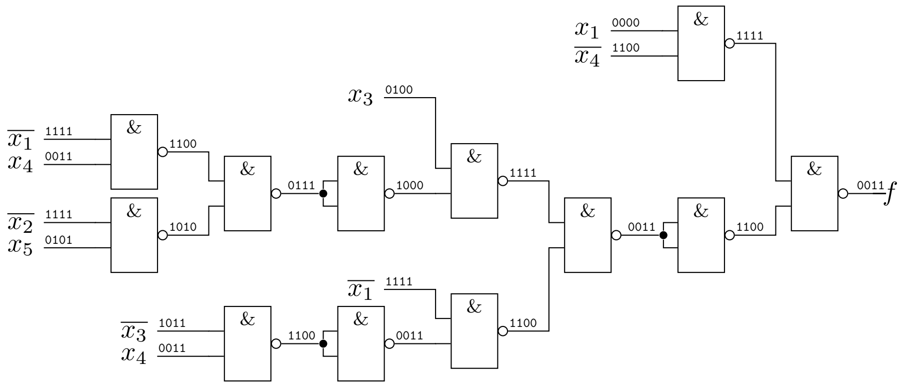


Схема по упрощенной МКНФ в базисе И-НЕ с ограничением на число входов:

$$f = \overline{\overline{\overline{\overline{x_3\,\overline{\overline{x_2}\,x_5}}\;\overline{\overline{\overline{x_1}}\,\overline{\overline{x_4}}\,\overline{x_1\,x_4}}}\;\overline{\overline{x_1}\,\overline{\overline{x_3\,x_4}}}}} \quad (S_Q = 22, \tau = 5)$$