перед лекцией Антон Александрович спросил шарим ли мы за производную от функции нескольких переменных наши познания его не устроили и он скинул запись своей лекции и попросил посмотреть кусочек

§ Немного производных

Опр. Пусть $f:\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ и

$f(x) = \alpha(x)\cdot\|x-x_0\|^N$ в $\mathring{U}(x_0)$

1. Если $\alpha(x)$ огр в $\mathring{U}(x_0)$, то говорят, что f — O большое от $\|x-x_0\|^N$ при $x\to x_0$

   $f(x)=\underline{O}(\|x-x_0\|^N)_{x\to x_0}$

2. Если $\alpha(x)\xrightarrow[x\to x_0]{}0$, то говорят, что f — o малое от $\|x-x_0\|^N$ при $x\to x_0$

   $f(x)=\bar{o}(\|x-x_0\|^N)_{x\to x_0}$

Опр. Пусть $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^n$, x_0 — внутренняя для E

говорят, что f — дифференцируема в x_0,

если $\exists A\in L(\mathbb{R}^m,\mathbb{R}^n)$: $f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+\bar{o}(\|h\|)$ при $h\to 0$

A — называется производной f в т. x_0 $\quad f'(x_0)=A$

Ah — дифференциал f в т. x_0 посчитанный на h $\quad df(x_0,h)=Ah$

Замечание: $id_x:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$

$id_x(x_0+h)-id_x(x_0)=x_0+h-x_0=h \Rightarrow d\,id_x(x_0,h)=h=dx$

таким образом $df(x_0,h)=A\,dx(x_0,h)$

Лемма: $\exists f$ - дифференцируемо в т. x_0 $\Rightarrow$ f - непрерывно в т. x_0

Доказательство:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+\overline{o}(\|h\|)$$

$$\|f(x_0+h)-f(x_0)\|=\|Ah+\overline{o}(\|h\|)\|\leq \underbrace{\|Ah\|+\|\alpha(h)\|\cdot\|h\|}_{\xrightarrow{\text{при } h\to 0}\, 0}$$

Опр. $\exists f: \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$, x - внутреняя для E

производная f по вектору e называется

$$\frac{\partial f}{\partial e}=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+he)-f(x_0)}{h}$$

здесь h это число! а $e\in\mathbb{R}^m$

Если $|e|=1$, то $\frac{\partial f}{\partial e}$ - производная по направлению

Опр. Частные производные отображения это производные по направлениям $e_i=(0,\dots,1,0,\dots)$

это так называемые базисные орты

на i-ом месте 1, остальные нули

обозначение: $\frac{\partial f}{\partial x_i}=\frac{\partial f}{\partial e_i}$

Пример: $f(x,y)=x^y$

$$f'_x=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{(x+\Delta x)^y-x^y}{\Delta x}\ominus$$

$h=\Delta x$

$e=(1,0)$

$$\ominus\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^y\left(\left(1+\frac{\Delta x}{x}\right)^y-1\right)}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{x^y\cdot y\cdot\frac{\Delta x}{x}}{\Delta x}=y\cdot x^{y-1}$$

применили эквивалент

частная производная по x

аналогично можно показать, что $f'_y=x^y\cdot\ln x$

Теорема: Если f — дифференцируема в т. x_0, то $\forall$ вектора e $\exists$ $\frac{\partial f}{\partial e}$

Доказательство:

$$f(x_0+h)-f(x_0)=Ah+\bar{o}(\|h\|),\quad h\to 0$$

$$\text{Ј } h=te \Rightarrow f(x_0+te)-f(x_0)=A(te)+\bar{o}(\|te\|) \,\Big|\,:t$$

$$\frac{f(x_0+te)-f(x_0)}{t}=Ae+\bar{o}(\|e\|)$$

Заключение: производная по вектору e дифференцируемой функции f с производной A равна

$$\frac{\partial f}{\partial e}=Ae$$

Замечание: В качестве e возьмём e_i (базисные орты)

$$Ae_i=\frac{\partial f}{\partial x_i}$$

Attention: $f: \mathbb{R}^m \supset E \to \mathbb{R}^n$

$$f=\begin{cases} y_1=f_1(x_1,\dots,x_m)\\ \vdots\\ y_n=f_n(x_1,\dots,x_m)\end{cases}\qquad \frac{\partial f}{\partial x_i}=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_i}\\ \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_i}\end{pmatrix}$$

Итого в стандартном базисе получаем:

$$T_A=\begin{pmatrix}\frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_m}\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_m}\end{pmatrix}$$ — матрица Якоби