2024-2025 学年第 1 学期高等数学 B 参考解答

ccfrog

---

1. 求函数极限
$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\sqrt{|x|}-2+|x|}{x^2}.$$
(10 分)

> **解答** 由泰勒公式 $\cos t = 1-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{24}t^4+o(t^4)$. 令 $t\equiv\sqrt{|x|}$, 得
> $$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\sqrt{|x|}-2+|x|}{x^2} &= \lim_{t\to 0^+}\frac{2\cos t-2+t^2}{t^4}\\ &= \lim_{t\to 0^+}\frac{\frac{1}{12}t^4+o(t^4)}{t^4}\\ &= \frac{1}{12}.\end{aligned}$$

2. 设 $\mathbb{R}^3$ 中平面 P 的方程是 $2x+y-3z=0$, 平面 Q 的方程是 $x+2y-z-2=0$, 直线 $L=P\cap Q$ 是 P 与 Q 的交线. 求与 L 相切的、以原点 (0,0,0) 为中心的球面的方程. (10 分)

> **解答** 平面 P 的一个法向量为 $\boldsymbol{p}=(2,1,-3)$, 平面 Q 的一个法向量为 $\boldsymbol{q}=(1,2,-1)$. 于是, 直线 L 的一个方向向量为 $\boldsymbol{l}=\boldsymbol{p}\times\boldsymbol{q}=(5,-1,3)$. 同时, 容易验证点 $(1,1,1)$ 在直线 L 上. 因此, 可以写出 L 的参数方程
> $$\begin{cases}x=1+5t,\\ y=1-t,\\ z=1+3t.\end{cases}$$
> 设球面 $x^2+y^2+z^2=R^2(R>0)$ 与直线 L 相切于点 $M(1+5t,1-t,1+3t)$. 由几何关系 $OM\perp\boldsymbol{l}$, 即 $5(1+5t)-(1-t)+3(1+3t)=0$, 解得 $t=-\frac{1}{5}$. 于是, 切点 $M\left(0,\frac{6}{5},\frac{2}{5}\right)$, 从而 $R^2=\frac{8}{5}$.
> 所以, 符合题意的球面方程为 $x^2+y^2+z^2=\frac{8}{5}$.

3. 下面二元函数的极限存在吗? 如果存在, 求出极限值. 如果不存在, 写出理由. (10 分)

(a)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+(\tan y)^2}.$$

(5 分)

(b)

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{\mathrm{e}^x-1}+\sin y\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}.$$

(5 分)

解答

(a) 当 $y=kx$ 时,

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{x^2+(\tan y)^2} &= \lim_{x\to 0}\frac{kx^2}{x^2+(\tan kx)^2}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{k}{1+\left(\frac{\tan kx}{x}\right)^2}\\ &= \frac{k}{1+k^2},\end{aligned}$$

而这是一个依赖于 k 的值. 因此, 该极限一旦存在则与 (x,y) 的趋近方向有关, 所以不存在.

(b) 注意到

$$\begin{aligned}0 &\le \left|\left(\frac{xy}{\mathrm{e}^x-1}+\sin y\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}\right|\\ &\le \left|\frac{xy}{\mathrm{e}^x-1}+\sin y\right|\\ &\le \left|\frac{xy}{\mathrm{e}^x-1}\right|+|\sin y|,\end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned}\lim_{(x,y)\to(0,0)} |\sin y| &= 0,\\ \lim_{(x,y)\to(0,0)} \left|\frac{xy}{\mathrm{e}^x-1}\right| &= 1\cdot\lim_{y\to 0}|y|\\ &= 0,\end{aligned}$$

所以, 由夹逼定理,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \left(\frac{xy}{\mathrm{e}^x-1}+\sin y\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2}=0.$$

4. 设二元函数 $z = z(x, y)$ 是由方程

$$F(x, y, z) = z^3 + x^2 z - 2y^3 = 0$$

所确定的隐函数. 求函数 $z(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处最大的方向导数. (10 分)

解答 由已知,

$$F_x = 2xz,\ F_y = -6y^2,\ F_z = 3z^2 + x^2,$$

从而

$$\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(1,1)} = -\left.\frac{F_x}{F_z}\right|_{(1,1)} = -\frac{1}{2},$$
$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(1,1)} = -\left.\frac{F_y}{F_z}\right|_{(1,1)} = \frac{3}{2}.$$

对于 $\mathbb{R}^2$ 上从点 $(1, 1)$ 出发的方向余弦 $\boldsymbol{n} \equiv (\cos\alpha, \sin\alpha)$, 函数 $z = z(x, y)$ 的方向导数

$$\partial_{\boldsymbol{n}} z = \boldsymbol{n} \cdot \boldsymbol{\nabla} z = |\boldsymbol{\nabla} z| \cos\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\nabla} z\rangle \leq |\boldsymbol{\nabla} z| = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

等号成立当且仅当 $\langle \boldsymbol{n}, \boldsymbol{\nabla} z\rangle = 0$, 即 $\boldsymbol{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. 所以, 所求的最大方向导数为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

5. 求二元函数

$$f(x, y) = x^{\sqrt{y}}$$

在点 $(1, 1)$ 处的二阶泰勒多项式及带佩亚诺余项的泰勒公式. (15 分)

解答 由已知,

$$\begin{cases} f_x(1,1) = \left.\sqrt{y} x^{\sqrt{y}-1}\right|_{(1,1)} = 1, \\ f_y(1,1) = \left.\frac{\ln x}{2\sqrt{y}} x^{\sqrt{y}}\right|_{(1,1)} = 0; \end{cases}$$

进一步地,

$$\begin{cases} f_{xx}(1,1) = \lim_{\delta\to 0} \frac{(1+\delta)^0 - 1}{\delta} = 0, \\ f_{xy}(1,1) = \left.\frac{1+\sqrt{y}\ln x}{2\sqrt{y}} x^{\sqrt{y}-1}\right|_{(1,1)} = \frac{1}{2}, \\ f_{yy}(1,1) = \left.\frac{\sqrt{y}\ln x - 1}{4y^{\frac{3}{2}}} x^{\sqrt{y}} \ln x\right|_{(1,1)} = 0. \end{cases}$$

记 $\rho \equiv \sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2}$, 则所求的二阶泰勒公式为

$$f(x,y) = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)(y-1) + o(\rho^2).$$

6. 设 $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x,y) = x^2 + 2xy\sin(x+y) - y^2.$$

证明: 存在 $\mathbb{R}^2$ 中点 $(0,0)$ 的开邻域 D 和 D 上连续可微的可逆变换 $x = x(u,v), y = y(u,v), (u,v) \in D$ 使得 $x(0,0)=0, y(0,0)=0$, 并且对于任意 $(u,v)\in D$ 有

$$f(x(u,v), y(u,v)) = u^2 - v^2.$$

(15 分)

解答 由已知,

$$\begin{cases} f_x(0,0) = 2x + 2y\sin(x+y) + 2xy\cos(x+y)\big|_{(0,0)} = 0, \\ f_y(0,0) = 2x\sin(x+y) + 2xy\cos(x+y) - 2y\big|_{(0,0)} = 0; \end{cases}$$

进一步地,

$$\begin{cases} f_{xx}(0,0) = 2 + 4y\cos(x+y) - 2xy\sin(x+y)\big|_{(0,0)} = 2, \\ f_{xy}(0,0) = 2\sin(x+y) + 2(x+y)\cos(x+y) - 2xy\sin(x+y)\big| = 0, \\ f_{yy}(0,0) = 4x\cos(x+y) - 2xy\sin(x+y) - 2\big|_{(0,0)} = -2. \end{cases}$$

所以, 函数 $f(x,y)$ 在点 $(0,0)$ 处 Hesse 矩阵的行列式

$$\begin{vmatrix} f_{xx}(0,0) & f_{xy}(0,0) \\ f_{yx}(0,0) & f_{yy}(0,0) \end{vmatrix} = -4 \neq 0,$$

则根据逆函数定理, 存在连续可微的可逆变换 $(u,v) \mapsto (x(u,v), y(u,v))$, 满足

$$f(x(u,v), y(u,v)) = u^2 - v^2.$$

7. 求在欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中从原点到曲面

$$(x-y)^2 - z^2 = 4$$

上的点的最短距离. (15 分)

解答 我们在约束条件 $\Phi : (x-y)^2 - z^2 = 4$ 下, 求解函数 $f(x,y,z) = x^2+y^2+z^2$ 的条件极小值 $f_{\min}$, 则最短距离 $d_{\min} = \sqrt{f_{\min}}$.

构造 Lagrange 函数

$$\mathcal{L} = f + \lambda\Phi = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda\left((x-y)^2 - z^2 - 4\right),$$

求解其稳定点

$$\begin{cases} 0 = \mathcal{L}_x = 2x + 2\lambda(x-y), \\ 0 = \mathcal{L}_y = 2y - 2\lambda(x-y), \\ 0 = \mathcal{L}_z = 2z - 2\lambda z, \\ 0 = \mathcal{L}_\lambda = (x-y)^2 - z^2 - 4 \end{cases}$$

得到

$$(x,y,z,\lambda)^* = \left(1, -1, 0, -\frac{1}{2}\right), \left(-1, 1, 0, -\frac{1}{2}\right),$$

对应的函数值为 $f(1,-1,0) = f(-1,1,0) = 2 = f_{\min}$. 所以, 所求最短距离为 $d_{\min} = \sqrt{2}$.

8. 设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的黎曼可积函数, A 是实数, $\lim_{x\to 0} f(x) = A$. 证明序列极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-1}^{1} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = \pi A.$$

(注: 在本题的条件中没有假设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续.) (15 分)

解答 对给定的 $x \in [-1,1]$, 记 $\theta_n(x) \equiv \frac{1}{n}\arctan(nx)$, 于是, 由换元积分法,

$$I_n \equiv \int_{-1}^{1} \frac{nf(x)}{1+n^2x^2}\,\mathrm{d}x = n\int_{-\frac{1}{n}\arctan n}^{\frac{1}{n}\arctan n} f(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

由于函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{1}{n}\arctan n, \frac{1}{n}\arctan n\right] \subset [-1,1]$ 上黎曼可积, 考虑点列 $-\frac{1}{n}\arctan n = \xi_0^{(n)} < \xi_1^{(n)} < \cdots < \xi_k^{(n)} < \cdots < \xi_m^{(n)} = \frac{1}{n}\arctan n$, 其中 $\Delta_k \equiv \xi_{k+1} - \xi_k = \frac{2}{nm}\arctan n$, 于是

$$\lim_{n\to\infty} I_n = \lim_{n\to\infty} 2\arctan n \lim_{m\to\infty} \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k^{(n)}).$$

下面证明 $\lim_{n\to\infty} I_n = \pi A$. 为此, 任取 $\epsilon > 0$. 此时, 存在 $N \equiv N(n)$, 使得对一切 $n > N$ 都成立 $\left|2\arctan n \cdot f(\xi_k^{(n)}) - \pi A\right| < \epsilon$, 这是因为

$$\lim_{n\to\infty} 2\arctan n \cdot f(\xi_k^{(n)}) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{x\to 0} f(x) = \pi A;$$

若 $n > N$, 则

$$\begin{aligned}\left|2\arctan n \cdot \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m} f(\xi_k^{(n)}) - \pi A\right| &\le \frac{1}{m}\left|2\arctan n \cdot f(\xi_k^{(n)}) - \pi A\right| \\ &< \frac{1}{m} \cdot m\epsilon \\ &= \epsilon\end{aligned}$$

对任意 $m \in \mathbb{N}_+$ 成立. 所以, $\lim_{n\to\infty} I_n = \pi A$.