

北京大学数学科学学院期中试题参考答案

2022 - 2023 学年第 1 学期

考试科目 高等数学B1

姓 名 \_\_\_\_\_ 学 号 \_\_\_\_\_

本试题共 6 道大题，满分 100 分

1.(20分)

(1) (6分) . 求出序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2 + \cos n}$$

(2) (7分) . 求出序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \sin \left( \frac{k}{n} - \frac{1}{2(n^k)} \right)$$

(3) (7分) . 求出函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} (1 + \tan^2 x)^{\frac{1}{\sin^2 x}}$$

(注：在解本小题中，不可直接引用期中考试范围之外的洛必达法则和高阶泰勒公式。)

**2.(20分)**

**(1) (6分)** . 设  $x > 0$  . 求出函数

$$f(x) = x^{\sqrt{x}}$$

的导函数  $f'(x)$  .

**(2) (7分)** . 设  $x < 1$  . 求出函数

$$g(x) = \int_0^{\sin x} \frac{dt}{\sqrt{1-t^3}}$$

的导函数  $g'(x)$  .

**(3) (7分)** . 设  $x \neq \pm 1$  . 求出函数

$$h(x) = \frac{1}{x^2 - 1}$$

4 阶导函数  $h^{(4)}(x)$  .

4.(15分) 设  $K$  是由曲线弧  $y = e^x$  ( $0 \leq x \leq 1$ ) 及直线  $x = 0$ ,  $x = 1$ ,  $y = 0$  所围成的曲边梯形绕  $x$  轴旋转一周而成的旋转体。 求出  $K$  的侧面积。

5.(10分) 设  $a$  为正实数,  $b$  为正实数,  $c$  为正实数,  $f(x)$  是  $(-\infty, +\infty)$  上的连续函数,

$$f(0) = -a, \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = b, \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = c.$$

证明  $f(x)$  在  $(-\infty, +\infty)$  上至少有两个不同的实数根  $r_1$ ,  $r_2$ ,  $r_1 \neq r_2$  .

6.(20分) 设

$$A(r) = \int_0^{2\pi} \ln(1 - 2r \cos x + r^2) dx .$$

(1) (12分). 证明: 对于  $r \in (-1, 1)$ , 有  $2A(r) = A(r^2)$  .

(2) (4分). 证明:  $A(r)$  在  $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$  上为有界函数 .

(3) (4分). 对于任意  $r \in (-1, 1)$ , 从上面 (1) 和 (2) 出发推算出  $A(r)$  的值。

(注: 本题要求写出详细过程。)