北京大学 24/25 学年第 1 学期

高数 B 期末试题

1. （10 分）求函数极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{2\cos\sqrt{|x|}-2+|x|}{x^2} \tag{1}$$

2. （10 分）设 $\mathbb{R}^3$ 中平面 P 的方程是 $2x+y-3z=0$，平面 Q 的方程是 $x+2y-z-2=0$，直线 $L=P\cap Q$ 是 P 与 Q 的交线。求与 L 相切的、以远点 $(0,0,0)$ 为中心的球面方程。

3. 下面二元函数的极限存在吗？如果存在，求出极限值。如果不存在，写出理由。

   (a)　（5 分）

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{xy}{x^2+(\tan y)^2} \tag{2}$$

   (b)　（5 分）

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\left(\frac{xy}{e^x-1}+\sin y\right)\sin\frac{1}{x^2+y^2} \tag{3}$$

4. （10 分）设二元函数 $z=z(x,y)$ 是由方程

$$F(x,y,z)=z^3+x^2z-2y^3=0 \tag{4}$$

   所确定的隐函数。求函数 $z(x,y)$ 在点 $(1,1)$ 处最大的方向导数。

5. （15 分）求二元函数

$$f(x,y)=x^{\sqrt{y}} \tag{5}$$

   在点 $(1,1)$ 处的二阶泰勒多项式及带 Peano 余项的泰勒公式。

6. （15 分）设 $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ 定义为

$$f(x,y)=x^2+2xy\sin(x+y)-y^2 \tag{6}$$

   证明：存在 $\mathbb{R}^2$ 中点 $(0,0)$ 的开邻域 D 和 D 上连续可微的可逆变换 $x=x(u,v)$，$y=y(u,v)$，$(u,v)\in D$ 使得 $x(0,0)=0$，$y(0,0)=0$，并且对于任意 $(u,v)\in D$ 有

$$f(x(u,v),y(u,v))=u^2-v^2 \tag{7}$$

7. （15 分）求在欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中从原点到曲面

$$(x-y)^2-z^2=4 \tag{8}$$

   上的点的最短距离。

8. （15 分）设 $f(x)$ 是 $[-1,1]$ 上的黎曼可积函数，A 是实数，$\lim_{x\to 0}f(x)=A$。证明序列极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{1}\frac{nf(x)}{1+n^2x^2}dx=\pi A \tag{9}$$

（注：在本题的条件中没有假设 $f(x)$ 在 $[-1,1]$ 上连续。）