参考答案

1. (15分=5× 3)判断下列级数敛散性:

(1) $\sum_{n=3}^{\infty}\frac{2}{n\ln\sqrt[2]{n}}$; 【来自教材222 页例题7, 原题为$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{1}{n\ln n}$】

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)}$;【来自教材217 页例题3, 原题为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$】

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cdot 3^n}{5^n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)$. 【来自教材207-208 页例题1、例题2及209-210页的讨论, 原题为$\sum_{n=1}^{\infty}aq^{n-1}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2^{n-1}}+\frac{1}{3^{n-1}}\right)$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$等】

解. (1) $u_n=\frac{2}{n\ln\sqrt[2]{n}}=\frac{4}{n\ln n}$,

据积分判敛法, $\int_3^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x\ln x}$发散导致$\sum_{n=3}^{\infty}\frac{4}{n\ln n}$发散, 所以, $\sum_{n=3}^{\infty}u_n$ 发散.

(2) $u_n=\frac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)}$, 因为$\lim_{n\to\infty}u_n/n^{-\frac{9}{5}}=\frac{3}{2}$, 而$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\frac{9}{5}}}$收敛, 所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n$收敛.

(3) 首先, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\cdot 3^n}{5^n}=\sum_{n=1}^{\infty}4\left(\frac{3}{5}\right)^n$收敛.

其次, $\frac{1}{n}-\frac{1}{n+2}=\frac{2}{n(n+2)}$, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2}{n(n+2)}$收敛导致 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)$收敛.

故$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{4\cdot 3^n}{5^n}-\frac{1}{n}+\frac{1}{n+2}\right)$ 收敛. □

2. (10分)讨论函数序列$f_n(x)=\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}$, $n=1,2,\cdots$ 在$x\in(0,+\infty)$的一致收敛性.【此题来自教材242页例题4, 原题为$f_n(x)=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{x}$】

解. 由于$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)=1$,

所以极限函数$f(x)=\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}=1,\quad\forall x\in(0,+\infty)$.

但是对于$x_n=\sqrt[4]{n}$, $n=1,2,\cdots$,

$|f_n(x_n)-f(x_n)|=1-\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}}\ \to\ 1-e^{-1}\neq 0,\quad(n\to\infty)$.

所以, $f_n(x)$在$(0,+\infty)$不一致收敛. □

3. (15分）求幂级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$的收敛半径、收敛域、和函数.

【该题是教材269页例题5原题】

解. $a_n=\frac{(-1)^n}{n},\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|=1$, 所以收敛半径为$R=1$.

因为$x=1$时级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}$, 据交错级数*Leibniz* 判敛法知其收敛;

$x=-1$是级数为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$发散. 所以, 幂级数的收敛域为$(-1,1]$.

令$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n,\quad x\in(-1,1]$,

则$f(0)=0,\quad f'(x)=-\sum_{n=1}^{\infty}(-x)^{n-1}=\frac{-1}{1+x},\quad x\in(-1,1)$.

$$f'(x)=\frac{-1}{1+x}\quad\Rightarrow\quad f(x)-f(0)=\int_0^x\frac{-1}{1+t}\,\mathrm{d}t=-\ln(1+x),\quad x\in(-1,1].$$

所以幂级数的和函数为$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n=-\ln(1+x),\quad x\in(-1,1]$. □

4. (10分)求函数$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$于$x=1$处的泰勒展开式, 并计算$f^{(2022)}(1),\ f^{(2023)}(1)$的值. 【此题来自教材279页例题3, 原题为$f(x)=\frac{1}{(x-1)(x+3)}$ 于$x=2$ 处.】

解. $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}=\frac{1}{(x-1)^2-4}=-\frac{1}{4}\ \frac{1}{1-\left(\frac{x-1}{2}\right)^2}$

$$=-\frac{1}{4}\ \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{x-1}{2}\right)^{2n}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{-1}{4^{n+1}}(x-1)^{2n},\quad |x-1|<1\ \text{ 或者 }\ |x-1|\leqslant 1.$$

因为$a_{2022}(x-1)^{2022}=\frac{-1}{4^{1011+1}}(x-1)^{2022},\quad a_{2022}=-\frac{1}{4^{1012}}$.

而$a_{2022}=\frac{f^{(2022)}(1)}{2022!}$, 所以, $f^{(2022)}(1)=-\frac{2022!}{4^{1012}}$.

因为$a_{2023}(x-1)^{2023}=0$, 所以, $f^{(2023)}(1)=0$. □

5. (10分)讨论无穷积分$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\arctan x\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

【本题来自教材290页例题5, 原题为$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 】

解. 首先判断$\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$的敛散性.

因为$\frac{1}{\sqrt{x}}$于$[1,+\infty)$单调下降并趋于零, $\left|\int_1^A \sin x\,\mathrm{d}x\right| \leqslant 2,\quad \forall A>1$,

所以据*Dirichlet*判敛法, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$收敛.

其次, 由于$\arctan x$于$[1,+\infty)$单调有界, 据*Abel*判敛法, $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\arctan x\,\mathrm{d}x$收敛. □

6. (10分)讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin^n x}{1+\sin^{2n}x},\quad x\in(-\infty,+\infty)$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

【该题来自教材227页例题5, 原题为$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a^n}{1+a^{2n}}$】

解. 记$u_n(x)=\frac{\sin^n x}{1+\sin^{2n}x}$, 则当$x=k\pi+\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$时,

$u_n(k\pi+\frac{\pi}{2})=\frac{(-1)^{kn}}{2}\nrightarrow 0,\quad (n\to\infty)$, 所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(k\pi+\frac{\pi}{2})$发散.

当$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$时, $\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=\left|\frac{\sin^{n+1}x}{1+\sin^{2n+2}x}\ \frac{1+\sin^{2n}x}{\sin^n x}\right|=|\sin x|\ \frac{1+\sin^{2n}x}{1+\sin^{2n+2}x}$,

由于$|\sin x|<1 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\sin^{2n+2}x=\lim_{n\to\infty}\sin^{2n}x=0 \quad\Rightarrow\quad \lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}}{u_n}\right|=|\sin x|<1$,

所以$\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$绝对收敛.

综上, 级数在$x=k\pi+\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$时发散;

在$x\neq k\pi+\frac{\pi}{2},\quad k\in\mathbb{Z}$时绝对收敛; 没有条件收敛之处. □

7. (20分)设2π周期函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的表达式为$f(x)=x^2$, 求$f(x)$ 所对应的Fourier级数及其和函数, 并给出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的值.

【该题来自教材336页例题4, 只增加了最后一个级数求值.】

解. 因为$f(x)$是偶函数, 所以$b_n=0,\quad n=1,2,\cdots$.

$a_0=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\dfrac{2\pi^2}{3}$.

$a_n=\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2\ \cos nx\,\mathrm{d}x=\dfrac{1}{n\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^2\ \mathrm{d}\sin nx=\dfrac{1}{n\pi}x^2\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\dfrac{2}{n\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\ \sin nx\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{2}{n^2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x\ \mathrm{d}\cos nx=\dfrac{2}{n^2\pi}\ x\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi}-\dfrac{2}{n^2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\cos nx\,\mathrm{d}x$

$=\dfrac{2}{n^2\pi}\ 2\pi\cos n\pi=\dfrac{(-1)^n4}{n^2},\quad n=1,2,3,\cdots$.

所以, $f(x)\ \sim\ \dfrac{\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n4}{n^2}\cos nx$.

由于$f(x)=x^2$在$[-\pi\pi]$分段单调且连续,

所以$x^2=\dfrac{\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n4}{n^2}\cos nx,\quad x\in[-\pi,\pi]$.

在上式中令$x=\pi$, 则得$\pi^2=\dfrac{\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{4}{n^2}\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{\pi^2}{6}$.

令$x=\pi$, 则得$0=\dfrac{\pi^2}{3}+\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n4}{n^2},\quad\Rightarrow\quad\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{(-1)^n}{n^2}=-\dfrac{\pi^2}{12}$.

最后, 根据$Parseval$等式,

$\dfrac{1}{\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,\mathrm{d}x=2\left(\dfrac{\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{16}{n^4},\qquad\dfrac{2\pi^4}{5}=\dfrac{2\pi^2}{9}+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{16}{n^4}$,

$\dfrac{8\pi^2}{45}=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{16}{n^4},\qquad\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{1}{n^4}=\dfrac{\pi^2}{90}$. $\square$

8. (10分)证明和计算下列各题:

(1) 证明$I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于$t\in[0,+\infty)$一致收敛;

(2) 证明$I(t)=\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$在$(0,+\infty)$的任何闭子区间上可导, 即在$(0,+\infty)$可导;

(3)求出函数$I(t)$, $t\in(0,+\infty)$.

(4) 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$的值;

【本题是教材310页例题5原题.】

解. (1) 因为$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$收敛, 亦即关于$t\in[0,+\infty)$一致收敛;
e^{-xt}关于x单调递减, 关于$t\in[0,+\infty)$一致有界（$0\leqslant e^{-xt}\leqslant 1$）.
所以据一致$Abel$判敛法, $\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于$t\in[0,+\infty)$一致收敛.

(2) 对任意的$[c,d]\subset(0,+\infty)$, $f(x,t)=e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\in C\left((0,+\infty)\times[c,d]\right)$,
$\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}=e^{-xt}\sin x\in C\left((0,+\infty)\times[c,d]\right)$.
同时$\left|\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\right|=\left|e^{-xt}\sin x\right|\leqslant e^{-cx},\quad t\in[c,d],x\in(0,+\infty)$.
$\Rightarrow\quad\int_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x$ 关于$t\in[c,d]$一致收敛.
所以, $I(t)\in D[c,d]$. 由$[c,d]$的任意性, $I(t)\in D(0,+\infty)$.

(3)由(2)知, $I'(t)=\int_0^{+\infty}\frac{\partial f(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x=-\int_0^{+\infty}e^{-tx}\sin x\,\mathrm{d}x$
$=\frac{e^{-tx}}{1+t^2}(t\sin x+\cos x)\Big|_0^{+\infty}=-\frac{1}{1+t^2},\quad t\in(0,+\infty)$.
所以, $I(t)=-\arctan t+c,\quad t\in(0,+\infty)$.
又因为$\left|\frac{\sin x}{x}\right|<1$
$\Rightarrow\quad|I(t)|=\left|\int_0^{+\infty}e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x\right|\leqslant\int_0^{+\infty}e^{-xt}\,\mathrm{d}x=-\frac{e^{-xt}}{t}\Big|_{x=0}^{x=+\infty}=\frac{1}{t},\ t\in(0,+\infty)$.
$\Rightarrow\quad\lim\limits_{t\to+\infty}I(t)=0$.
所以$c=\frac{\pi}{2}$, 即$I(t)=-\arctan t+\frac{\pi}{2},\quad t\in(0,+\infty)$.

(4) 进一步, $f(x,t)$关于$(x,t)\in(0,+\infty)\times[0,+\infty)$ 连续导致$I(t)\in C[0,+\infty)$,
从而$I(0)=\lim\limits_{t\to0+}I(t)=\frac{\pi}{2}$. 即$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}$.