

北京大学 23/24 学年第 2 学期

高数 B 期中试题

2024.04.14

1. (10 分) 设 L 是 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = 1, y \geq 0\}$ 。求第一型曲线积分

$$\int_L (3 + x) ds \quad (1)$$

2. (10 分) 设 E 是

$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + \frac{y^2}{4} = 1\} \quad (2)$$

取逆时针方向。求第二型曲线积分

$$\int_E \frac{-y dx + x dy}{x^2 + y^2} \quad (3)$$

3. (10 分) 设 D 是由直线 $y = 0, y = 2, y = x, y = x + 2$ 所围成的 \mathbb{R}^2 中有界闭区域。求二重积分

$$\iint_D \left(\frac{1}{2}x - y \right) dx dy \quad (4)$$

- (a) (10 分) 设 \mathbb{R}^3 中曲面

$$M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + z^2 = 1, x^2 + y^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\} \quad (5)$$

求第一型曲面积分

$$\iint_M x dS \quad (6)$$

4. (10 分) 求出一阶常微分方程初值问题 $y' = x + y^2, y(0) = 0$ 的皮卡序列的前两项 y_1, y_2

5. (10 分) 求出二阶常微分方程 $y'' - 2y' + y = e^x$ 的通解

6. (10 分) 设 \mathbb{R}^3 中有界闭区域

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 2y^2 \leq z \leq 3 - 2x^2 - y^2\} \quad (7)$$

S^- 是 V 的边界曲面的内侧。求第二型曲面积分

$$\iint_{S^-} (x^2 + y \sin z) dy dz - (2y + z \cos x) dz dx + (-2xz + x \sin y) dx dy \quad (8)$$

7. (15 分) 设 r 是正实数, $f: (-r, r) \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $f(0) = 0$, f 在 0 点可导, 对于每个 $t > 0$, 定义

$$V(t) = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{25} \leq t^2\} \quad (9)$$

证明

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t^5} \iint_{V(t)} f \left(x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{25} \right) dx dy dz = \pi f'(0) \quad (10)$$

8. (15 分) 求出所有的可导函数 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 满足

$$f'(x) = xf(x) + x \int_0^1 tf(t) dt \quad (11)$$