北京大学数学科学学院期末试题
2023 - 2024学年第2学期

1. (15分=5× 3)判断下列级数敛散性:

   (1) $\sum\limits_{n=3}^{\infty} \dfrac{2}{n \ln \sqrt[2]{n}}$;

   (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)}$;

   (3) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left(\dfrac{4 \cdot 3^n}{5^n} - \dfrac{1}{n} + \dfrac{1}{n+2} \right)$.

2. (10分)讨论函数序列$f_n(x) = \left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}$, $n = 1, 2, \cdots$ 在$x \in (0, +\infty)$的一致收敛性.

3. (15分）求幂级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$的收敛半径、收敛域、和函数.

4. (10分)求函数$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$于$x=1$处的泰勒展开式, 并计算$f^{(2022)}(1)$, $f^{(2023)}(1)$的值.

5. (10分)讨论无穷积分$\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \arctan x \,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

6. (10分)讨论级数$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{1+\sin^{2n} x}, \quad x \in (-\infty, +\infty)$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

7. (20分)设2π周期函数$f(x)$在$[-\pi,\pi]$上的表达式为$f(x)=x^2$, 求$f(x)$所对应的Fourier级数及其和函数, 并给出级数$\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的值.

8. (10分)证明和计算下列各题:

(1) 证明$I(t)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于$t\in[0,+\infty)$一致收敛;

(2) 证明$I(t)=\int_0^{+\infty} e^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$在$(0,+\infty)$的任何闭子区间上可导, 即在$(0,+\infty)$可导;

(3)求出函数$I(t)$, $\quad t\in(0,+\infty)$.

(4) 计算$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$的值;