北京大学 23/24 学年第 1 学期

高数 B 期中试题

1. 求序列极限

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{ne}\right)^n. \tag{1}$$

2. 设 $\lfloor x\rfloor$ 是不超过 x 的最大整数, 求函数极限

$$\lim_{x\to+\infty} x\sin\frac{1}{\lfloor x\rfloor}. \tag{2}$$

3. 设 $x>0$, 求函数

$$f(x)=\int_0^{\ln x}\sqrt{1+e^t}\,\mathrm{d}t \tag{3}$$

   的导函数.

4. 求不定积分

$$\int\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)}\,\mathrm{d}x. \tag{4}$$

5. 求欧氏平面直角坐标系中曲线

$$y=\frac{1}{2}x\sqrt{x^2-1}-\frac{1}{2}\ln\left(x+\sqrt{x^2-1}\right) \tag{5}$$

   在 $x=1$ 到 $x=2$ 之间的弧长.

6. 设欧氏空间中 V 是由曲线

$$y=\frac{\ln x}{\sqrt{2\pi}}\quad(1\le x\le 2) \tag{6}$$

   及直线 $x=2$, $y=0$ 所围成的曲边三角形绕 x 轴旋转一周而成的旋转体, 求 V 的体积.

7. 给定正实数 $a_1>0, b_1>0$. 设 $a_1>b_1$, 对于每个正整数 n, 有递归公式

$$a_{n+1}=\frac{a_n+b_n}{2},\quad b_{n+1}=\sqrt{a_nb_n}, \tag{7}$$

   证明 $\lim_{n\to\infty}a_n$ 存在且有限.

8. 本题中每个小题都要求写出证明和计算过程.

   (a) 证明: 当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时, 有 $-1<\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x}<1$;

   (b) 当 $x\in\left(-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right)$ 时, 求函数 $f(x)=\arcsin\left(\frac{4\sin x}{3+\sin^2 x}\right)$ 的导函数 $f'(x)$;

   (c) 证明

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{4\cos^2 x + \sin^2 x}} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{\frac{9}{4}\cos^2 x + 2\sin^2 x}}. \tag{8}$$

9. 设 $f(x)$ 和 $g(x)$ 是 $[0,1]$ 上连续的实值函数, 满足

$$f(0) = g(0), \quad \sin f(1) = \sin g(1), \quad \cos f(1) = \cos g(1), \tag{9}$$

对于每个 $x \in [0,1]$ 有

$$[\cos f(x) + \cos g(x)]^2 + [\sin f(x) + \sin g(x)]^2 \neq 0. \tag{10}$$

证明 $f(1) = g(1)$.