# 2022-2023 学年第 2 学期高等数学 B 期中参考解答

ccfrog

---

1. 求方程 $(xy - x^3y^3)\,\mathrm{d}x + (1+x^2)\,\mathrm{d}y = 0$ 满足条件 $y(0) = 1$ 的解. (10 分)

**解答** 注意到, 原方程等价于 Bernoulli 方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + \frac{x}{1+x^2}y = \frac{x^3}{1+x^2}y^3.$$

作代换 $z = y^{-2}$, 得到关于 $z = z(x)$ 的初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{2x}{1+x^2}z = -\frac{2x^3}{1+x^2}, \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

作代换 $z(x) \equiv u(x)(1+x^2)$, 代入得 $u'(x)(1+x^2) = -\frac{2x^3}{1+x^2}$. 于是,

$$u(x) = -\int^x \frac{2x^3\,\mathrm{d}x}{(1+x^2)^2} = -\ln\bigl(1+x^2\bigr) - \frac{1}{1+x^2} + C.$$

从而得到通解 $z(x) = -(1+x^2)\ln(1+x^2) - 1 + C(1+x^2)$. 代入初值条件 $z(0) = 1$, 解得 $C = 2$. 所以 $z(x) = 2x^2 - (1+x^2)\ln(1+x^2) + 1$, 即原方程的隐函数解为

$$y^2\left(2x^2 - (1+x^2)\ln\bigl(1+x^2\bigr) + 1\right) = 1.$$

2. 求方程 $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0\,(x > 0)$ 满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 1$ 的解. (10 分)

**解答** 作代换 $t = \ln x$, 即 $x = \mathrm{e}^t$ 于是

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{e}^{-2t}. \end{aligned}$$

代入原方程, 得

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4.$$

这是一个常系数齐次线性方程, 通解为 $y(t) = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{2t}$, 于是

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x^2. \tag{1}$$

代入初值条件, 有

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ 2C_1 + C_2 = 1, \end{cases}$$

解得 $C_1 = 1, C_2 = -1$. 从而所求的解为

$$y = (1 - \ln x)x^2.$$

3. 求方程 $y'' + y' - 2y = x + \mathrm{e}^x + \sin x$ 的满足条件 $y(0) = -\frac{7}{20}, y'(0) = \frac{38}{15}$ 的解. (10 分)

**解答**

1. 原方程的齐次部分 $y'' + y' - 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 其特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$. 于是, 齐次部分的通解为

$$y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x}.$$

2. 设原方程的一个特解为 $y^* = C_1(x)\mathrm{e}^x + C_2(x)\mathrm{e}^{-2x}$. 于是

$$(y^*)' = C_1(x)\mathrm{e}^x - 2C_2(x)\mathrm{e}^{-2x} + \left(C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x}\right).$$

令

$$C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x} = 0, \tag{2}$$

再次求导, 得

$$(y^*)'' = C_1(x)\mathrm{e}^x + 4C_2(x)\mathrm{e}^{-2x} + C_1'(x)\mathrm{e}^x - 2C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x}.$$

代入原方程得

$$x + \mathrm{e}^x + \sin x = C_1'(x)\mathrm{e}^x - 2C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x}. \tag{3}$$

联立 (2) (3) 两式, 解得

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}(x + \mathrm{e}^x + \sin x), \\ C_2'(x) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}(x + \mathrm{e}^x + \sin x). \end{cases}$$

所以, 符合条件的一组特解构造如下:

$$\begin{aligned}
C_1(x) &= \frac{1}{3}\left(x - \mathrm{e}^{-x}\left(x+1+\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)\right)\right),\\
C_2(x) &= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}(2\sin x-\cos x)\right)\right),\\
y^* &= C_1(x)\mathrm{e}^{x} + C_2(x)\mathrm{e}^{-2x}\\
&= -\frac{1}{2}x-\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\mathrm{e}^{x}\left(x-\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{10}(3\sin x+\cos x).
\end{aligned}$$

综上, 原微分方程的通解为 $y = C_1\mathrm{e}^{x} + C_2\mathrm{e}^{-2x} + y^*$. 代入初值条件, 有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{9},\\ C_1 - 2C_2 = \frac{28}{9}, \end{cases}$$

解得 $C_1 = \frac{10}{9}, C_2 = -1$. 从而所求的解为

$$y = \frac{10}{9}\mathrm{e}^{x} - \mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{x}\left(x-\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{10}(3\sin x+\cos x).$$

4. 设 $I(R) = \oint_{x^2+y^2=R^2} \frac{x\mathrm{d}y - y\mathrm{d}x}{(x^2+xy+y^2)^2}$, 证明 $\lim_{R\to+\infty} I(R) = 0$. 其中积分方向为逆时针方向. (10 分)

**解答** 注意到曲线 $x^2+y^2=R^2$ (逆时针方向) 的参数方程为

$$(x,y) = (R\cos\theta, R\sin\theta), \theta : 0 \to 2\pi. \tag{4}$$

于是,

$$I(R) = -\frac{1}{R^2}\int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta\cos\theta)^2}, \tag{5}$$

根据定积分的保号性, 我们有

$$\frac{8}{9}\pi = \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1+\frac{1}{2}\right)^2} \le \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{(1+\sin\theta\cos\theta)^2} \le \int_0^{2\pi} \frac{\mathrm{d}\theta}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 8\pi, \tag{6}$$

所以 $\lim_{R\to+\infty} I(R) = 0$.

5. 设 $L$ 为空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+z=1 \end{cases}$，其正方向为自 $z$ 轴正向看下来的逆时针方向. 计算积分 $I=\oint_L (y-z+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x+(z-x+\sin^2 y)\,\mathrm{d}y+(x-y+\sin^2 z)\,\mathrm{d}z$. (10 分)

**解答** 记 $P=y-z+\sin^2 x, Q=z-x+\sin^2 y, R=x-y+\sin^2 z$, 则

$$\boldsymbol{\nabla}\times(P,Q,R)=-2(\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_z).$$

取 $S^+$ 为 $L$ 所围闭曲面 (实为平面 $x+z=1$ 被 $x^2+y^2=1$ 所截部分) 的上侧, 其单位法向量 $\mathbf{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned} I &= -2\iint_{S^+} \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -2\sqrt{2}\iint_S \mathrm{d}S \\ &= -4\iint_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= -4\pi. \end{aligned}$$

6. 计算积分 $I=\iint_D (x+y+xy)^2\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\le 1\}$. (10 分)

**解答** 作极坐标变换 $(x,y)\mapsto(\rho,\theta)$, 则 $D$ 的边界曲线方程为 $\rho=1, 0\le\theta\le 2\pi$. 于是,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+\rho^2\cos\theta\sin\theta)^2 \\ &= \int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\left(1+\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+2\rho\cos^2\theta\sin\theta+2\rho\cos\theta\sin^2\theta\right) \\ &= \int_0^1\left(2\pi\rho^3+\frac{\pi}{4}\rho^5\right)\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{13}{24}\pi. \end{aligned}$$

7. 计算积分 $I=\iint_D\left(\frac{3x^2\sin y}{y}+2\mathrm{e}^{x^2}\right)\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D$ 由 $y=x, y=x^3$ 围成. (10 分)

**解答** 由已知,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x} 2\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 2(x-x^3)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x \\ &= \mathrm{e}-2; \\ I_2 &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_{y}^{y^{\frac{1}{3}}} \frac{3x^2\sin y}{y}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 (1-y^2)\sin y\,\mathrm{d}y \\ &= 3-2\sin 1-2\cos 1. \end{aligned}$$

所以,

$$I = I_1 + I_2 = \mathrm{e} - 2(\sin 1+\cos 1)+1.$$

8. 计算积分 $I = \iiint_\Omega \frac{(x+y+z)^2\sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)}\,\mathrm{d}V$, 其中 $\mathrm{d}V$ 即 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, $\Omega$ 是由曲面 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}, z=\sqrt{3(1+x^2+y^2)}, x^2+y^2=1$ 所围成的区域. (10 分)

**解答** 作柱坐标变换, 则 $\Omega \mapsto \Omega' \equiv \{(\rho,\theta,z)|0\le\rho\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, \sqrt{1+\rho^2}\le z\le\sqrt{3(1+\rho^2)}\}$. 被积函数

$$u = \frac{(x+y+z)^2\sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)} = \frac{(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+z)^2\sqrt{1+\rho^2}}{(\rho^2+z^2)(1+\rho^2+z^2)}.$$

于是,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho \int_{\sqrt{1+\rho^2}}^{\sqrt{3(1+\rho^2)}} \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{(\rho^2+z^2)(1+\rho^2+z^2)}\,\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} (\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+z)^2\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho \int_{\sqrt{1+\rho^2}}^{\sqrt{3(1+\rho^2)}} \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{1+\rho^2+z^2}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned}$$

9. 计算积分 $I=\oint_\Gamma\left(\frac{y^2+y+4x^2}{4x^2+y^2}+\sin(x^2)\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{4x^2-x+y^2}{4x^2+y^2}+\sin(y^2)\right)\mathrm{d}y$, 其中, $\Gamma$ 是 $x^2+y^2=9(y\ge 0)$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1(y\le 0)$ 所组成的闭曲线的逆时针方向. (10 分)

**解答** 记

$$P_1(x,y)\equiv\frac{y^2+y+4x^2}{4x^2+y^2}+\sin\bigl(x^2\bigr),$$
$$Q_1(x,y)\equiv\frac{4x^2-x+y^2}{4x^2+y^2}+\sin\bigl(y^2\bigr),$$

二者在 $\Gamma$ 所围成的闭区域 $D_\Gamma$ 内除 $(0,0)$ 外的一切点均具有一阶连续偏导数. 注意到

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}=\frac{4x^2-y^2}{(4x^2+y^2)^2},$$

则若作逆时针方向的闭曲线 $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|4x^2+y^2=1\}$, 我们对 $\Gamma,E$ 所围成的平面闭区域 $D$ 应用 Green 公式,

$$\begin{aligned}I&=\iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\oint_{E^+}\bigl(1+y+\sin\bigl(x^2\bigr)\bigr)\,\mathrm{d}x+\bigl(1-x+\sin\bigl(y^2\bigr)\bigr)\,\mathrm{d}y\\&=\iint_{4x^2+y^2\le 1}-2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-\pi.\end{aligned}$$

10. 设曲面 $S$ 是柱体 $\Omega=\{(x,y,z)|x^2+y^2\le 1,0\le z\le 1\}$ 的表面的外侧 (同时包含上表面、下表面、侧面). 计算下列积分:

1. $I_1=\iint_S(y-z)|x|\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)|y|\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;
2. $I_2=\iint_S(y-z)x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$;
3. $I_3=\iint_S(y-z)x^3\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)y^3\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

**解答**

1. 记 $U,D,F$ 分别为 $S$ 中的上表面、下表面、侧面. 三个曲面的单位法向量分别为

$$\mathbf{n}_U=(0,0,1),\mathbf{n}_D=(0,0,-1),\mathbf{n}_F=\left(\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}},0\right).\tag{7}$$

于是

$$\begin{aligned}
I_U &= \iint_{x^2+y^2\le 1} (x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,\\
I_D &= \iint_{x^2+y^2\le 1} 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0,\\
I_F &= \iint_{0\le z\le 1;\, x^2+y^2=1} \left((y-z)\frac{|x|x}{\sqrt{x^2+y^2}} + (z-x)\frac{|y|y}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\mathrm{d}S\\
&= \int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^1 \mathrm{d}z\,((\sin\theta - z)|\cos\theta|\cos\theta + (z-\cos\theta)|\sin\theta|\sin\theta)\\
&= \int_0^{2\pi}\left(\frac{1}{2}(|\sin\theta|\sin\theta - |\cos\theta|\cos\theta) + (|\cos\theta| - |\sin\theta|)\sin\theta\cos\theta\right)\mathrm{d}\theta\\
&= 0.
\end{aligned}$$

2. 由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned}
I_2 &= \iiint_\Omega 2\,((y-z)x + (z-x)y + (x-y)z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= \iiint_\Omega 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= 0.
\end{aligned} \tag{8}$$

3. 由 Gauss 公式,

$$\begin{aligned}
I_3 &= \iiint_\Omega 3\left((y-z)x^2 + (z-x)y^2 + (x-y)z^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&= 3\iint_{x^2+y^2\le 1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^1 \left((x-y)z^2 + (y^2-x^2)z + xy(x-y)\right)\mathrm{d}z\\
&= 3\iint_{x^2+y^2\le 1}\left(\frac{1}{3}(x-y) + \frac{1}{2}(y^2-x^2) + xy(x-y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&= 0.
\end{aligned} \tag{9}$$