

北京大学 23/24 学年第 2 学期

高数 B 期末试题

2024.06.16

1. (10 分) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{10^n} \quad (1)$$

的收敛域

2. (10 分) 在 $(-1, 1)$ 上展开函数

$$\arctan x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \quad (2)$$

为幂级数

3. (10 分) 求瑕积分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}} dx \quad (3)$$

的值。(本题可用 B 函数和 Γ 函数。)

4. (10 分) 判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n + \frac{1}{n}} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n \quad (4)$$

的敛散性。

5. (10 分) 设 E 为实数。

- (a) (5 分) 求出所有的实数 E 使得

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} \right) dx \quad (5)$$

收敛。

- (b) (5 分) 求出所有的实数 E 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{(Ex)^n}{n!} e^{-x} \right) dx \quad (6)$$

收敛。(本小题可用 Γ 函数。)

6. (10 分) 对于每个 $x \in [0, 1]$, $n = 1, 2, \dots$, 定义

$$f_1(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4} dt, \quad f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) dt \quad (7)$$

证明

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) \quad (8)$$

在 $[0, 1]$ 上一致收敛。

7. (15 分) 设 b 是实数。

(a) (5 分) 证明含参变量 b 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} x \cos(2bx) dx \quad (9)$$

在 $(-\infty, +\infty)$ 上一致收敛。

(b) (10 分) 证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2} \sin(2bx) dx = e^{-b^2} \int_0^b e^{-t^2} dt \quad (10)$$

8. (15 分)

(a) (10 分) 设 $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数, $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi]$ 上等于 e^x 。

求出 $f(x)$ 的傅里叶级数, 并且求出 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = \pi$ 处的和。

(b) (5 分) 求出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \quad (11)$$

的和。

9. (10 分) 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 每项 $a_n > 0$, T 是序列 $\{a_n\}$ 中最大项。对于每个实数 $x > 0$, 定义 $L(x)$ 是序列 $\{a_n\}$ 中大于 x 的项的个数。

(a) (2 分) 证明 0 是 $L(x)$ 的瑕点。

(b) (8 分) 证明: 瑕积分 $\int_0^T L(x) dx$ 收敛, 并且

$$\int_0^T L(x) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \quad (12)$$