

2024-2025 学年第 1 学期高等数学 B 参考解答

ccfrog

1. 求函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \sqrt{|x|} - 2 + |x|}{x^2}.$$

(10 分)

解答 由泰勒公式 $\cos t = 1 - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{24}t^4 + o(t^4)$. 令 $t \equiv \sqrt{|x|}$, 得

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2 \cos \sqrt{|x|} - 2 + |x|}{x^2} &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{2 \cos t - 2 + t^2}{t^4} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{12}t^4 + o(t^4)}{t^4} \\ &= \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

2. 设 \mathbb{R}^3 中平面 P 的方程是 $2x + y - 3z = 0$, 平面 Q 的方程是 $x + 2y - z - 2 = 0$, 直线 $L = P \cap Q$ 是 P 与 Q 的交线. 求与 L 相切的、以原点 $(0,0,0)$ 为中心的球面的方程.

(10 分)

解答 平面 P 的一个法向量为 $\mathbf{p} = (2, 1, -3)$, 平面 Q 的一个法向量为 $\mathbf{q} = (1, 2, -1)$. 于是, 直线 L 的一个方向向量为 $\mathbf{l} = \mathbf{p} \times \mathbf{q} = (5, -1, 3)$. 同时, 容易验证点 $(1, 1, 1)$ 在直线 L 上. 因此, 可以写出 L 的参数方程

$$\begin{cases} x = 1 + 5t, \\ y = 1 - t, \\ z = 1 + 3t. \end{cases}$$

设球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2 (R > 0)$ 与直线 L 相切于点 $M(1 + 5t, 1 - t, 1 + 3t)$. 由几何关系 $OM \perp \mathbf{l}$, 即 $5(1 + 5t) - (1 - t) + 3(1 + 3t) = 0$, 解得 $t = -\frac{1}{5}$. 于是, 切点 $M(0, \frac{6}{5}, \frac{2}{5})$, 从而 $R^2 = \frac{8}{5}$.

所以, 符合题意的球面方程为 $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{8}{5}$.

3. 下面二元函数的极限存在吗? 如果存在, 求出极限值. 如果不存在, 写出理由.

(10 分)

(a)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + (\tan y)^2}.$$

(5 分)

(b)

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{e^x - 1} + \sin y \right) \sin \frac{1}{x^2 + y^2}.$$

(5 分)

解答(a) 当 $y = kx$ 时,

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + (\tan y)^2} &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{kx^2}{x^2 + (\tan kx)^2} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{k}{1 + \left(\frac{\tan kx}{x}\right)^2} \\ &= \frac{k}{1 + k^2}, \end{aligned}$$

而这是一个依赖于 k 的值. 因此, 该极限一旦存在则与 (x, y) 的趋近方向有关, 所以不存在.

(b) 注意到

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left| \left(\frac{xy}{e^x - 1} + \sin y \right) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} \right| \\ &\leq \left| \frac{xy}{e^x - 1} + \sin y \right| \\ &\leq \left| \frac{xy}{e^x - 1} \right| + |\sin y|, \end{aligned}$$

而

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} |\sin y| &= 0, \\ \lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left| \frac{xy}{e^x - 1} \right| &= 1 \cdot \lim_{y \rightarrow 0} |y| \\ &= 0, \end{aligned}$$

所以, 由夹逼定理,

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \left(\frac{xy}{e^x - 1} + \sin y \right) \sin \frac{1}{x^2 + y^2} = 0.$$

4. 设二元函数 $z = z(x, y)$ 是由方程

$$F(x, y, z) = z^3 + x^2z - 2y^3 = 0$$

所确定的隐函数. 求函数 $z(x, y)$ 在点 $(1, 1)$ 处最大的方向导数.

(10 分)

解答 由已知,

$$F_x = 2xz, F_y = -6y^2, F_z = 3z^2 + x^2,$$

从而

$$\begin{aligned}\left. \frac{\partial z}{\partial x} \right|_{(1,1)} &= - \left. \frac{F_x}{F_z} \right|_{(1,1)} = -\frac{1}{2}, \\ \left. \frac{\partial z}{\partial y} \right|_{(1,1)} &= - \left. \frac{F_y}{F_z} \right|_{(1,1)} = \frac{3}{2}.\end{aligned}$$

对于 \mathbb{R}^2 上从点 $(1, 1)$ 出发的方向余弦 $\mathbf{n} \equiv (\cos \alpha, \sin \alpha)$, 函数 $z = z(x, y)$ 的方向导数

$$\partial_{\mathbf{n}} z = \mathbf{n} \cdot \nabla z = |\nabla z| \cos \langle \mathbf{n}, \nabla z \rangle \leq |\nabla z| = \frac{\sqrt{10}}{2},$$

等号成立当且仅当 $\langle \mathbf{n}, \nabla z \rangle = 0$, 即 $\mathbf{n} = \left(-\frac{1}{\sqrt{10}}, \frac{3}{\sqrt{10}}\right)$. 所以, 所求的最大方向导数为 $\frac{\sqrt{10}}{2}$.

5. 求二元函数

$$f(x, y) = x^{\sqrt{y}}$$

在点 $(1, 1)$ 处的二阶泰勒多项式及带佩亚诺余项的泰勒公式.

(15 分)

解答 由已知,

$$\begin{cases} f_x(1, 1) = \sqrt{y} x^{\sqrt{y}-1} \Big|_{(1,1)} = 1, \\ f_y(1, 1) = \frac{\ln x}{2\sqrt{y}} x^{\sqrt{y}} \Big|_{(1,1)} = 0; \end{cases}$$

进一步地,

$$\begin{cases} f_{xx}(1, 1) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{(1+\delta)^0 - 1}{\delta} = 0, \\ f_{xy}(1, 1) = \frac{1+\sqrt{y} \ln x}{2\sqrt{y}} x^{\sqrt{y}-1} \Big|_{(1,1)} = \frac{1}{2}, \\ f_{yy}(1, 1) = \frac{\sqrt{y} \ln x - 1}{4y^{\frac{3}{2}}} x^{\sqrt{y}} \ln x \Big|_{(1,1)} = 0. \end{cases}$$

记 $\rho \equiv \sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2}$, 则所求的二阶泰勒公式为

$$f(x, y) = 1 + (x-1) + \frac{1}{2}(x-1)(y-1) + o(\rho^2).$$

6. 设 $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ 定义为

$$f(x, y) = x^2 + 2xy \sin(x+y) - y^2.$$

证明: 存在 \mathbb{R}^2 中点 $(0, 0)$ 的开邻域 D 和 D 上连续可微的可逆变换 $x = x(u, v), y = y(u, v), (u, v) \in D$ 使得 $x(0, 0) = 0, y(0, 0) = 0$, 并且对于任意 $(u, v) \in D$ 有

$$f(x(u, v), y(u, v)) = u^2 - v^2.$$

(15 分)

解答 变换

$$\begin{cases} u = x + y \sin(x+y), \\ v = y \sqrt{1 + \sin^2(x+y)} \end{cases}$$

符合题设要求 $f(x, y) \equiv u^2 - v^2$. 我们下面证明 $(u, v) \mapsto (x, y)$ 是连续可微的可逆变换. 为此, 注意到

$$du = (1 + y \cos(x+y)) dx + (\sin(x+y) + y \cos(x+y)) dy,$$

$$dv = \frac{y \sin(x+y) \cos(x+y)}{\sqrt{1 + \sin^2(x+y)}} dx + \left(\sqrt{1 + \sin^2(x+y)} + \frac{y \sin(x+y) \cos(x+y)}{\sqrt{1 + \sin^2(x+y)}} \right) dy,$$

则在点 $(0, 0)$ 处成立 $(du, dv) = (dx, dy)$, 于是其雅可比矩阵为

$$\begin{pmatrix} x_u & x_v \\ y_u & y_v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

则 $x = x(u, v), y = y(u, v)$ 在点 $(0, 0)$ 的一个开邻域 D 内定义了一个连续可微变换, 且由于其雅可比行列式 $J = 1 \neq 0$, 该变换也是可逆的.

7. 求在欧氏空间 \mathbb{R}^3 中从原点到曲面

$$(x-y)^2 - z^2 = 4$$

上的点的最短距离.

(15 分)

解答 我们在约束条件 $\Phi: (x-y)^2 - z^2 = 4$ 下, 求解函数 $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ 的条件极小值 f_{\min} , 则最短距离 $d_{\min} = \sqrt{f_{\min}}$.

构造 Lagrange 函数

$$\mathcal{L} = f + \lambda\Phi = x^2 + y^2 + z^2 + \lambda((x-y)^2 - z^2 - 4),$$

求解其稳定点

$$\begin{cases} 0 = \mathcal{L}_x = 2x + 2\lambda(x-y), \\ 0 = \mathcal{L}_y = 2y - 2\lambda(x-y), \\ 0 = \mathcal{L}_z = 2z - 2\lambda z, \\ 0 = \mathcal{L}_\lambda = (x-y)^2 - z^2 - 4 \end{cases}$$

得到

$$(x, y, z, \lambda)^* = \left(1, -1, 0, -\frac{1}{2}\right), \left(-1, 1, 0, -\frac{1}{2}\right),$$

对应的函数值为 $f(1, -1, 0) = f(-1, 1, 0) = 2 = f_{\min}$. 所以, 所求最短距离为 $d_{\min} = \sqrt{2}$.

8. 设 $f(x)$ 是 $[-1, 1]$ 上的黎曼可积函数, A 是实数, $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = A$. 证明序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{-1}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = \pi A.$$

(注: 在本题的条件中没有假设 $f(x)$ 在 $[-1, 1]$ 上连续.)

(15 分)

解答 对给定的 $x \in [-1, 1]$, 记 $\theta_n(x) \equiv \frac{1}{n} \arctan(nx)$, 于是, 由换元积分法,

$$I_n \equiv \int_{-1}^1 \frac{nf(x)}{1+n^2x^2} dx = n \int_{-\frac{1}{n} \arctan n}^{\frac{1}{n} \arctan n} f(\theta) d\theta.$$

由于函数 $f(x)$ 在 $[-\frac{1}{n} \arctan n, \frac{1}{n} \arctan n] \subset [-1, 1]$ 上黎曼可积, 考虑点列 $-\frac{1}{n} \arctan n = \xi_0^{(n)} < \xi_1^{(n)} < \dots < \xi_k^{(n)} < \dots < \xi_m^{(n)} = \frac{1}{n} \arctan n$, 其中 $\Delta_k \equiv \xi_{k+1} - \xi_k = \frac{2}{nm} \arctan n$, 于是

$$\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \lim_{n \rightarrow \infty} 2 \arctan n \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f(\xi_k^{(n)}).$$

下面证明 $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \pi A$. 为此, 任取 $\epsilon > 0$. 此时, 存在 $N \equiv N(\epsilon)$, 使得对一切 $n > N$ 都成立 $\left| 2 \arctan n \cdot f(\xi_k^{(n)}) - \pi A \right| < \epsilon$, 这是因为

$$\lim_{n \rightarrow \infty} 2 \arctan n \cdot f(\xi_k^{(n)}) = 2 \cdot \frac{\pi}{2} \cdot \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \pi A;$$

若 $n > N$, 则

$$\begin{aligned} \left| 2 \arctan n \cdot \frac{1}{m} \sum_{k=1}^m f(\xi_k^{(n)}) - \pi A \right| &\leq \frac{1}{m} \left| 2 \arctan n \cdot f(\xi_k^{(n)}) - \pi A \right| \\ &< \frac{1}{m} \cdot m\epsilon \\ &= \epsilon \end{aligned}$$

对任意 $m \in \mathbb{N}_+$ 成立. 所以, $\lim_{n \rightarrow \infty} I_n = \pi A$.