

北京大学 24/25 学年第 1 学期

高数 B 期中试题

1. (10 分) 求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{2024 + \sin(e^n)} \quad (1)$$

2. (10 分) 求函数极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1 + 2 \sin^2 x}{\cos(2x)} \right)^{\csc^2 x} \quad (2)$$

3. (10 分) 设 $(-1, 1)$ 上的函数

$$f(x) = \int_0^{\arcsin x} \frac{dt}{\sqrt{1 + (\sin t)^2}} \quad (3)$$

求 $f(x)$ 的 2 阶导函数 $f''(x)$ 。

4. (10 分) 求序列极限

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \cos \left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n^k k} \right) \quad (4)$$

5. (15 分) 求不定积分

$$\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x - 1)(2x + 3)(2x - 5)} dx \quad (5)$$

6. (15 分) 设 T 是由曲线弧

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{\pi}}, \quad (1 \leq x \leq 2) \quad (6)$$

与直线 $x = 2$, 直线 $y = 0$ 所围成的曲边三角形, A 是 T 绕 x 轴旋转一周而形成的旋转体。求 A 的体积。

7. (15 分) 证明方程

$$x^{18} + x^{12} - \cos x = 0 \quad (7)$$

在实数集合中解的个数是 2。

8. (15 分) 设 \mathbb{R} 是实数集合, $D = [0, 1]$, $A: D \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $B: D \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, 对于每个 $x \in D$ 有

$$0 \leq A(x) \leq 1 \quad (8)$$

对于每个连续函数 $f: D \rightarrow \mathbb{R}$, 定义连续函数 $Tf: D \rightarrow \mathbb{R}$ 为

$$(Tf)(x) = B(x) + \int_0^x A(t)f(t) dt \quad (9)$$

证明 $Tf = f$ 至多有一个连续函数解, 即: 如果 $f, g: D \rightarrow \mathbb{R}$ 连续, $Tf = f$, $Tg = g$, 则 $f = g: D \rightarrow \mathbb{R}$ 。