

北京大学 23/24 学年第 1 学期

高数 B 期末试题

1. (10 分) 求极限

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x - \int_0^x \sqrt{1+t^2} dt)}{x^3} \quad (1)$$

2. (10 分) 设函数 $f: [0, 7] \rightarrow \mathbb{R}$ 为 $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x - 1$ 。区间 $[a, b]$ 是 $f(x)$ 的严格单调区间, 指的是 $0 \leq a < b \leq 7$ 并且 f 限制在 $[a, b]$ 上是严格单调的。求出 $f(x)$ 的长度为最大的严格单调区间。

3. (10 分) 设欧氏空间 \mathbb{R}^3 中平面 T 的方程是 $2x - y + 3z = 6$ 。平面 T 与 x 轴、 y 轴、 z 轴的交点依次记为 A, B, C 。以原点 $(0, 0, 0)$ 为中心, 与平面 T 相切的球面记为 S 。

(a) (5 分) 求三角形 $\triangle ABC$ 的面积。

(b) (5 分) 求平面 T 与球面 S 相切点的坐标。

4. (10 分) 设二元函数 $z = z(x, y)$ 是由方程 $F(x, y, z) = z^3 + ze^x + y = 0$ 所确定的隐函数。求 $z = z(x, y)$ 的函数值在点 $(0, 2)$ 处下降最快的方向上的单位向量。

5. (10 分) 求二元函数 $f(x, y) = x^y$ 在点 $(1, 1)$ 的二阶泰勒多项式。

6. (10 分) 设 D 是由直线 $x + y = 2\pi$ 、 x 轴和 y 轴所围成的有界闭区域。求 D 上的二元函数 $f(x, y) = \sin x + \sin y - \sin(x + y)$ 达到最大值的 D 中所有点。

7. (10 分)

(a) (2 分) 举例说明: 当 z 是 (x, y) 的函数, 也是 (t, u) 的函数时, x 恒等于 t 推不出 $\frac{\partial z}{\partial x}$ 恒等于 $\frac{\partial z}{\partial t}$ 。

(b) (8 分) 给定方程

$$x^2 \frac{\partial z}{\partial x} + y^2 \frac{\partial z}{\partial y} = z^2, \quad (2)$$

作变量代换

$$x = t, \quad y = \frac{t}{1 + tu}, \quad z = \frac{t}{1 + tW} \quad (3)$$

证明:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = 0 \quad (4)$$

8. (15 分)

(a) (3 分) 证明: 任取 $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$, 有

$$2 \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \int_0^{2x\sqrt{1-x^2}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} \quad (5)$$

(b) (12 分) 证明: 任取 $x \in \left(-\frac{1}{\sqrt[4]{6}}, \frac{1}{\sqrt[4]{6}}\right)$, 有

$$2 \int_0^x \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} = \int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}} \frac{dt}{\sqrt{1-t^4}} \quad (6)$$

9. (15 分) 设函数 $P(x)$ 在闭区间 $[0, 1]$ 上连续, $P(0) = 0$, $P(1) = 1$, $P(x)$ 在开区间 $(0, 1)$ 内可导, 并且在每点处导数 $P'(x)$ 都为正数。任意取定正实数 A , 正实数 B , 正整数 n 。

证明: 在开区间 $(0, 1)$ 内存在严格递增的 $n+1$ 个实数 $\theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ 使得

$$(A+B)^n = \sum_{k=0}^n \frac{1}{P'(\theta_k)} \frac{n!}{k!(n-k)!} A^{n-k} B^k \quad (7)$$

并且

$$0 < \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_n < 1 \quad (8)$$