北京大学数学科学学院 23-24(2) 高等数学B（二）期末试题参考答案

姓名______________________ **学号**______________________ **共 9 道大题**

1.(10分) 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{10^n}$$

的收敛域。

参考答案:

（1）（5 分） 当 $\mathbf{-1 < x < 1}$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{(n+1)^3}}{10^{n+1}}}{\frac{|x|^{n^3}}{10^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{3n^2+3n+1}}{10} = 0 < 1$$

因此，按 **达朗贝尔判别法** ，在此时，此级数绝对收敛， 推出它收敛。

（2）（2 分） 当 $|\mathbf{x}| = \mathbf{1}$ 时，

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x|^{n^3}}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{10^n}$$

在此时，此级数绝对收敛， 推出它收敛。

（3）（2 分） 当 $|\mathbf{x}| > \mathbf{1}$ 时，

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\frac{|x|^{(n+1)^3}}{10^{n+1}}}{\frac{|x|^{n^3}}{10^n}} = \lim_{n\to\infty} \frac{|x|^{3n^2+3n+1}}{10} = +\infty$$

因此，按 **达朗贝尔判别法** ，在此时，此级数发散。

（4）（1 分） 所以，级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{10^n}$ 的收敛域是 $[\,-\mathbf{1}\,,\,\mathbf{1}\,]$.

2.(10分) 在 $(\,-1,\,1\,)$ 上展开函数 $arctan\ x + \frac{1}{2}\ \ln\frac{1+x}{1-x}$ 为幂级数。

参考答案:

（1）（3分） 幂函数在收敛区间内可以逐项求积分。因此， 当 $x \in (-1,1)$ 时，

$$arctan\ x = \int_0^x \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k}dx = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

（2）（3分） 幂函数在收敛区间内可以逐项求积分。因此，当 $x \in (-1,1)$ 时，

$$\ln(1+x) = \int_0^x \frac{1}{1+x}\,dx = \int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^n\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

（3）（2分） 在上式，把 x 代入 $-x$ 得

$$\ln(1-x) = -\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$-\ln(1-x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

$$\frac{1}{2}\ \ln\ \frac{1+x}{1-x} = \frac{1}{2}\,(\,\ln(1+x) - \ln(1-x)\,) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{2k+1}}{2k+1}$$

（4）（2分） 从（1）和（3）得: 当 $x \in (-1,1)$ 时，

$$arctan\,x \;+\; \frac{1}{2}\,\ln\,\frac{1\;+\;x}{1\;-\;x} \;=\; \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n+1}x^{4n+1}$$

3.(10分) 求瑕积分 $\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1\,-\,x}}\;\;dx$ 的值。 （本题可用 B 函数和 Γ 函数。）

参考答案:

（1）（3分）

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\,dx \;=\; \int_0^1 x^{\frac{5}{2}}(1-x)^{-\frac{1}{2}}\,dx \;=\; B\,(\,\frac{7}{2}\,,\,\frac{1}{2}\,) \;=\; \frac{\Gamma(\frac{7}{2})\;\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(4)}$$

（2）（3分）

$$\Gamma(\frac{7}{2}) \;=\; \frac{5}{2}\,\frac{3}{2}\,\;\frac{1}{2}\,\Gamma(\frac{1}{2}) \;=\; \frac{15}{8}\,\Gamma(\frac{1}{2})$$

（3）（2分）

$$\Gamma(\frac{1}{2}) \;=\; \sqrt{\pi}$$

（4）（1分）

$$\Gamma(4) \;=\; 3! \;=\; 6$$

（5）（1分） 结合（1）（2）（3）（4）得

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\,dx \;=\; \frac{\Gamma(\frac{7}{2})\;\Gamma(\frac{1}{2})}{\Gamma(4)} \;=\; \frac{\frac{15}{8}\sqrt{\pi}\;\sqrt{\pi}}{6} \;=\; \frac{5}{16}\,\pi$$

4.(10分) 判别级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n)}{n\;+\;\frac{1}{n}}\,(\,1\;+\;\frac{1}{n}\,)^n$$

的敛散性。

参考答案:

（1）（1分）

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+\frac{1}{n}} \;=\; \mathbf{0}$$

（2）（2分）对于 $n \geq 1$， 有

$$1 \;\leq\; n(n+1)$$

推出

$$1 \;\geq\; \frac{1}{n(n+1)} \;=\; \frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}$$

推出

$$n+1+\frac{1}{n+1} \;\geq\; n+\frac{1}{n} \quad > \quad 0$$

推出

$$\frac{1}{n+1+\frac{1}{n+1}} \;\leq\; \frac{1}{n+\frac{1}{n}}$$

所以对于 $n \geq 1$， $\frac{1}{n+\frac{1}{n}}$ **单调下降** 。

（3）（2分）

$$|\;\sin 2+\sin 4+\cdots+\sin(2n)\;|$$

$$=\;\frac{1}{\sin 1}\;|\;\sin 1\sin 2+\sin 1\sin 4+\cdots+\sin 1\sin(2n)\;|$$

$$=\;\frac{1}{2\sin 1}\;|\cos 1-\cos 3+\cos 3-\cos 5+\cdots+\cos(2n-1)-\cos(2n+1)\,|$$

$$= \frac{1}{2\sin 1} \ |\cos 1 - \cos(2n+1)\,| \quad \le \quad \frac{1}{\sin 1}$$

有界.

（4）（2分） 根据 **狄利克雷判别法**，由（1）（2）（3）推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n+\frac{1}{n}}$$

收敛 。

（5）（1分）对于 $n \ge 1$， $(1+\frac{1}{n})^n$ **单调有界** （小于 e)。 （高等数学A(一）中事实。）

（6）（2分） 根据 **阿贝尔判别法**，由（4）和（5）推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n \ + \ \frac{1}{n}} \,(\,1 \ + \ \frac{1}{n})^n$$

收敛 。

5.(10分) 设 E 为实数。

（1）（5分）求出所有的实数 E 使得 $\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(E\,x)^n}{n!} \ \ e^{-x} \right) \ dx$ 收敛。

（2 ）（5分） 求出所有的实数 E 使得 $\sum_{n=0}^{\infty} \ \int_0^{+\infty} \left(\frac{(E\,x)^n}{n!} \ \ e^{-x} \right) dx$ 收敛。 （本小题可用 Γ 函数。）

参考答案:

（1）（5分）对于 任何 实数 E 和 x， 有

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(Ex)^n}{n!} \ = \ e^{Ex}$$

因此

$$\int_0^{+\infty} \ \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(E\,x)^n}{n!} \ \ e^{-x} \right) dx \ = \ \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(E\,x)^n}{n!} \right) \ e^{-x} \ \ dx$$

$$= \int_0^{+\infty} \ e^{Ex} \ \ e^{-x} \ dx \ = \int_0^{+\infty} \ e^{(E-1)x} \ dx$$

收敛 充要条件 是

$$\mathbf{E - 1 \ < \ 0}$$

即

$$\mathbf{E \ < \ 1}$$

（2）（5分）对于 任何 整数 $n \ge 0$, 任何 实数 E， 有

$$\int_0^{+\infty} \left(\frac{(Ex)^n}{n!} \ \ e^{-x} \right) dx \ = \ E^n \ \frac{1}{n!} \int_0^{+\infty} x^n \ e^{-x} \ dx \ = \ E^n \ \frac{1}{n!} \Gamma(n+1) \ = \ E^n \ \frac{1}{n!} n! \ = \ \mathbf{E^n}$$

因此

$$\sum_{n=0}^{\infty} \ \int_0^{+\infty} \left(\frac{(E\,x)^n}{n!} \ \ e^{-x} \right) dx \ = \ \sum_{0}^{\infty} \ \mathbf{E^n}$$

收敛 充要条件 是

$$\mathbf{-1 < \ E \ < \ 1}$$

6.(10分) 对于每个 $x \in [\,0\,,\,1\,]$, $n \ = \ 1, \, 2, \, \cdots$, 定义

$$f_1(x) \ = \ \int_0^x \sqrt{1+t^{\mathbf{4}}} \ dt \quad , \qquad f_{n+1}(x) \ = \ \int_0^x \ f_n(t) \ dt$$

证明 $\sum\limits_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[\,0\,,\,1\,]$ 上一致收敛。

参考答案:

（1）（2分） 对于每个 $x\in[\,0\,,\,1\,]$, 有

$$|\,\mathbf{f_1(x)}\,| \;=\; |\int_0^x \sqrt{1+t^4}\;dt\;| \;\le\; \int_0^x |\sqrt{1+t^4}\,|\;dt \;\le\; \int_0^x \sqrt{1+1}\;dt \;=\; \mathbf{\sqrt{2}\;x}$$

（2）（5分） 假设 对于每个 $x\in[\,0\,,\,1\,]$, 有

$$|\,f_n(x)\,| \;\le\; \frac{1}{n!}\sqrt{2}\,x^n$$

则

$$|\,f_{n+1}(x)\,| \;=\; |\int_0^x f_n(t)\;dt\,| \;\le\; \int_0^x |\,f_n(t)\,|\;dt \;\le\; \int_0^x \frac{1}{n!}\sqrt{2}\;t^n\;dt \;=\; \frac{1}{(n+1)!}\sqrt{2}\,x^{n+1}$$

根据 **归纳法**， 对于每个 $n=1,2,\cdots$， 有

$$|\,\mathbf{f_n(x)}\,| \;\le\; \frac{1}{n!}\sqrt{2}\,x^n \;\le\; \mathbf{\frac{1}{n!}\sqrt{2}}$$

（3）（3分） 用 **M-判别法**， 上面（2）和 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}\sqrt{2} \;=\; (\,e\,-\,1\,)\sqrt{2}$ **收敛** 推出

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$$

在 $[\,0\,,\,1\,]$ 上**一致** 收敛。

7.(15分) 设 b 是实数。

（1）（5分） 证明 含参变量 b 的无穷积分 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,x\,\cos(2bx)\;dx$ 在 $(\,-\infty,\,+\infty\,)$ 上一致收敛。

（2）（10分） 证明

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\sin(2bx)\;dx \;=\; e^{-b^2}\int_0^b e^{t^2}\;dt$$

参考答案:

（1）（5分）

$$|\;\mathbf{e^{-x^2}\;x\;\cos(2bx)}\;| \;\le\; \mathbf{e^{-x^2}\,x}$$

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}x\;dx \;=\; -\frac{1}{2}\,e^{-x^2}|_0^{+\infty} \;=\; \frac{1}{2}$ **收敛**， 推出 含参变量 b 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,x\,\cos(2bx)\,dx$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上 **一致** 收敛。

（2）（10分）

（2.1）（2分）令

$$y \;=\; y(b) \;=\; \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,\sin(2bx)\,dx$$

$$|-\mathbf{e^{-x^2}}\sin(\mathbf{2bx})| \;\le\; e^{-x^2}$$

$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\,dx$ **收敛**， 推出 $\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\sin(2bx)\,dx$ **收敛**。

（2.2）（4分） （1）和（2.1）推出 **对** b **求导与无穷积分 可以交换次序**

$$\frac{\mathbf{dy}}{\mathbf{d\,b}} \ = \ \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ 2\,x\ \cos(2bx)\,dx \ = \ - \int_0^{+\infty} \cos(2bx)\ d\left(e^{-x^2}\right)$$

$$= \ - \ e^{-x^2}\cos(2bx)|_{x=0}^{+\infty} \ + \ \int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ (\ -2b\sin(2bx)\ )\,dx \ = \ \mathbf{1} \ - \ \mathbf{2\,b\,y}$$

（2.3）（4分）

$$y' \ + \ 2b\,y \ = \ 1$$

推出

$$(e^{b^2}\ y)' \ = e^{b^2}\ y' \ + \ e^{b^2}\ 2b\,y \ = \ e^{b^2}(y' \ + \ 2b\,y\ ) \ = \ e^{b^2}\ 1 \ = \ e^{b^2}$$

推出

$$\mathbf{e^{b^2}y(b)} \ - \ \mathbf{e^{b^2}y(0)} \ = \ \int_{\mathbf{0}}^{\mathbf{b}} \mathbf{e^{t^2}\ dt}$$

把

$$y(\ \mathbf{0}\ ) \ = \ \int_0^{+\infty} 0\ \ dx \ = \ \mathbf{0}$$

代入上式得

$$e^{b^2}\ y(b) \ = \ \int_0^b e^{t^2}\ dt$$

推出

$$y(b) \ = \ e^{-b^2}\int_0^b e^{t^2}\ dt$$

即

$$\int_0^{+\infty} e^{-x^2}\ \sin(2bx)\,dx \ = \ e^{-b^2}\int_0^b e^{t^2}\ dt$$

8.(15分)

（1）(10分） 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数， $f(x)$ 在 $(\ -\ \pi\ ,\ \pi\ ]$ 上等于 e^x . 求出 $f(x)$ 的傅里叶级数， 并且求出 $f(x)$ 的傅里叶级数在 $x = \ \pi$ 处的和。

（2）(5分） 求出级数 $\sum\limits_{n=\,1}^{\infty} \frac{1}{1\,+\,n^{\mathbf{2}}}$ 的和。

参考答案:

（1）(10分）

（1.1）（1分）

$$\mathbf{a_0} \ = \ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\ dx \ = \ \frac{1}{\pi}\ (\ e^{\pi} - e^{-\pi}\ )$$

（1.2）（3分） 当 $n>0$ 时，用 **分部积分** 法求出

$$a_n \ = \ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\ \cos\ nx\ dx \ = \ \frac{1}{\pi}\ \frac{\cos nx \ + \ n\ \sin nx}{1+n^2}\ e^x\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \ (-1)^n\ \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi\ (1+n^2)}$$

（1.3）（3分） 当 $n>0$ 时，用 **分部积分** 法求出

$$b_n \ = \ \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^x\ \sin\ nx\ dx \ = \ \frac{1}{\pi}\ \frac{\sin nx \ - \ n\ \cos nx}{1+n^2}\ e^x\Big|_{-\pi}^{\pi}$$

$$= \ (-1)^{n-1}\ \frac{n\ (e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi\ (1+n^2)}$$

（1.4）（1分） $f(x)$ 的傅里叶级数是

$$\frac{1}{2\pi}\left(e^{\pi}-e^{-\pi} \right) \quad + \quad \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ (-1)^n \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi\,(1+n^2)} \cos\, nx \ + \ (-1)^{n-1}\frac{n\,(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi\,(1+n^2)} \sin\, nx \ \right)$$

（1.5）（2分） $f(x)$ 在 $[-\pi,\,\pi]$ 上**分段连续、分段单调** 。因此，根据 **狄利克雷** 定理得：
在 $x=\ \pi$ 处， $f(x)$ 的傅里叶级数的 和 是

$$\mathbf{\frac{1}{2}}(\,\mathbf{e}^{-\pi}+\,\mathbf{e}^{\pi})$$

（2）（5分）上面（1.4）和（1.5）推出

$$\frac{1}{2}(\,e^{-\pi}+\,e^{\pi})$$

$$= \ \frac{1}{2\pi}\left(e^{\pi}-e^{-\pi} \right) \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}\left(\ (-1)^n \frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi\,(1+n^2)} \cos\, n\,\pi \ + \ (-1)^{n-1}\frac{n\,(e^{\pi}-e^{-\pi})}{\pi\,(1+n^2)} \sin\, n\,\pi \ \right)$$

$$= \ \frac{1}{2\pi}\left(e^{\pi}-e^{-\pi} \right) \ + \ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{e^{\pi}-e^{-\pi}}{\pi\,(1+n^2)}$$

推出

$$\sum_{\mathbf{n=1}}^{\infty}\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{1+n^2}} \ = \ \left(\ \frac{1}{2}\left(e^{\pi}+e^{-\pi} \right) \ - \ \frac{1}{2\pi}\left(e^{\pi}-e^{-\pi} \right) \ \right)\frac{\pi}{e^{\pi}-e^{-\pi}}$$

$$= \ \frac{\pi\ \left(\mathbf{e}^{\pi}+\mathbf{e}^{-\pi}\right)}{\mathbf{2}\ \left(\mathbf{e}^{\pi}-\mathbf{e}^{-\pi}\,\right)} \ - \ \mathbf{\frac{1}{2}}$$

(注：本小题对（1.4）用帕斯瓦尔等式也可以。）

9.(10分) 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛，每项 $a_n > 0$， T 是序列 $\{a_n\}$ 中最大项。 对于每个实数 $x>0$，定义 $L(x)$ 是序列 $\{a_n\}$ 中 大于 x 的项的个数。

（1）（2分） 证明 0 是 $L(x)$ 的瑕点。

（2）（8分） 证明：瑕积分 $\int_0^T L(x)dx$ 收敛， 并且

$$\int_0^T L(x)\,dx \ = \ \sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

参考答案:

（1）（2分）

$$\lim_{n\to\infty} a_n \ = \ \mathbf{0}$$

$$\mathbf{a_n} \ > \ \mathbf{0}$$

推出存在子序列

$$a_{p_1} > a_{p_2} > a_{p_3} > \cdots > a_{p_k} > \cdots$$

$$\lim_{k\to\infty} a_{p_k} \ = \ 0$$

因此，根据 $\mathbf{L(x)}$ **的定义**， 有

$$\mathbf{L}(\,\mathbf{a_{p_k}}\,) \ \geq \ k-1 \ \to \ +\infty$$

又

$$\lim_{\mathbf{k\to\infty}} \mathbf{a_{p_k}} \ = \ \mathbf{0}$$

所以 当 $x\to 0+0$ 时， $L(x)$ **无界**，即 0 是 $L(x)$ 的 瑕点。

（2）（8分）

（2.1）（4分） 为了简明表达 $L(x)$， **重新排列** 序列 $\{a_n\}$ 为 **单调下降** 序列 $\{b_n\}$， 写为

当 $0 \le n < n_1$ 时， $b_n = b_0$,

当 $n_1 \le n < n_2$ 时， $b_n = b_{n_1}$,

……

当 $n_k \le n < n_{k+1}$ 时， $b_n = b_{n_k}$,

……

其中

$$
\begin{gathered}
T = b_0 > b_{n_1} > \cdots > b_{n_k} > b_{n_{k+1}} > \cdots \\
0 < n_1 < \cdots < n_k < n_{k+1} < \cdots
\end{gathered}
$$

所以

当 $x \ge T$ 时， $L(x) = 0$,

当 $b_{n_1} \le x < b_0$ 时， $L(x) = n_1$,

当 $b_{n_2} \le x < b_{n_1}$ 时， $L(x) = n_2$,

当 $b_{n_3} \le x < b_{n_2}$ 时， $L(x) = n_3$,

……

当 $b_{n_k} \le n < b_{n_{k-1}}$ 时， $L(x) = n_k$,

……

（2.2）（3分）

$$
\int_0^T L(x)\,dx
$$

$$
= n_1 (b_0 - b_{n_1}) + n_2 (b_{n_1} - b_{n_2}) + n_3 (b_{n_2} - b_{n_3}) + \cdots + n_k (b_{n_{k-1}} - b_{n_k}) + \cdots
$$

$$
= n_1 b_0 + (n_2 - n_1) b_{n_1} + (n_3 - n_2) b_{n_2} + (n_3 - n_2) b_{n_2} + \cdots + (n_{k+1} - n_k) b_{n_k} + \cdots
$$

$$
= (b_0 + \cdots + b_{n_1 - 1}) + (b_{n_1} + \cdots + b_{n_2 - 1}) + \cdots (b_{n_k} + \cdots + b_{n_{k+1} - 1}) + \cdots
$$

$$
= \sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty} \mathbf{b_n}
$$

（2.3）（1分） 因为 **收敛的 正项** 级数 $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ 在 **重新排列** 后 **和不改变**， 所以

$$
\sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty} \mathbf{b_n} = \sum_{\mathbf{n=0}}^{\infty} \mathbf{a_n}
$$

代入（2.2）得到：

$$
\int_0^T L(x)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n
$$

收敛。