

北京大学数学科学学院期末试题
2022 - 2023学年第2学期

1. (15分= 5×3)判断下列级数敛散性:

(1) $\sum_{n=3}^{\infty} \frac{2}{n \ln \sqrt[2]{n}};$

(2) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt[5]{n} + 1}{(\sqrt[4]{n} + n)(\sqrt[3]{n} + n)};$

(3) $\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{4 \cdot 3^n}{5^n} - \frac{1}{n} + \frac{1}{n+2} \right).$

2. (10分)讨论函数序列 $f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}$, $n = 1, 2, \dots$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 的一致收敛性.

3. (15分) 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} x^n$ 的收敛半径、收敛域、和函数.

4. (10分) 求函数 $f(x) = \frac{1}{x^2 - 2x - 3}$ 于 $x = 1$ 处的泰勒展开式, 并计算 $f^{(2022)}(1)$, $f^{(2023)}(1)$ 的值.

5. (10分)讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \arctan x \, dx$ 的敛散性.

6. (10分)讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{1 + \sin^{2n} x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

7. (20分) 设 2π 周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为 $f(x) = x^2$, 求 $f(x)$ 所对应的 Fourier 级数及其和函数, 并给出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 的值.

8. (10分)证明和计算下列各题:

- (1) 证明 $I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin x}{x} dx$ 关于 $t \in [0, +\infty)$ 一致收敛;
- (2) 证明 $I(t) = \int_0^{+\infty} e^{-xt} \frac{\sin x}{x} dx$ 在 $(0, +\infty)$ 的任何闭子区间上可导, 即在 $(0, +\infty)$ 可导;
- (3) 求出函数 $I(t)$, $t \in (0, +\infty)$.
- (4) 计算 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$ 的值;