北京大学数学科学学院期中试题参考答案

2024 - 2025学年第 1 学期

考试科目 高等数学B1

姓　　名 ____________　　**学　　号** ________________

本试题共 8 道大题，满分 100 分

1.(10分) 求序列极限

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2024 + \sin(e^n)} \quad .$$

参考答案:

（1）（3分）

$$2023 \le 2024 + \sin(e^n) \le 2025$$

$$\sqrt[n]{2023} \le \sqrt[n]{2024 + \sin(e^n)} \le \sqrt[n]{2025}$$

（2）（4分）

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2023} = 1 \ , \qquad \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2025} = 1$$

（3）（3分） 用夹逼定理可以得到

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2024 + \sin(e^n)} = 1$$

2.(10分) 求函数极限

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1+2\sin^2 x}{cos(2x)} \right)^{\csc^2 x} \quad .$$

参考答案:

（1）（3分）

$$L = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1+2\sin^2 x}{cos(2x)} \right)^{\csc^2 x} = \lim_{x\to 0} \left(\frac{1+2\sin^2 x}{1-2\sin^2 x} \right)^{\csc^2 x} = \lim_{x\to 0} \left(1 + \frac{4\sin^2 x}{1-2\sin^2 x} \right)^{\csc^2 x}$$

(2)（3分） 做变量代换

$$t = \frac{1-2\sin^2 x}{4\sin^2 x}$$

推出

$$t\ (4\sin^2 x) = 1 - 2\sin^2 x$$

$$(4t+2)\sin^2 x = 1$$

$$4t+2 = \frac{1}{\sin^2 x} = \csc^2 x$$

(3)（4分） 把上面（2）代入上面（1）得到

$$L = \lim_{t\to+\infty} (1+\frac{1}{t})^{4t+2} = \left(\lim_{t\to+\infty} (1+\frac{1}{t})^t \right)^4 \left(1 + \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \right)^2 = e^4 (1+0)^2$$

$$= e^4$$

3.(10分) 设 $(-1, 1)$ 上的函数

$$f(x) = \int_0^{\arcsin x} \frac{dt}{\sqrt{1 + (sin\, t)^2}} \quad .$$

求 $f(x)$ 的 2 价导函数 $f''(x)$.

参考答案:

（1）（6分） 用变上限定积分的导函数和链式法则得

$$f'(x) = \frac{1}{\sqrt{1 + (\sin(\arcsin x))^2}} \; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \; \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^4}} = (1-x^4)^{-\frac{1}{2}}$$

（2）（4分） 用链式法则得

$$f''(x) = (1-x^4)^{-\frac{3}{2}} \left(-\frac{1}{2}\right)(-4x^3) = 2x^3 (1-x^4)^{-\frac{3}{2}}$$

4.(10分) 求序列极限

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n^k k} \right) .$$

参考答案: 注意到

$$\frac{k}{n} - \frac{1}{n^k k} \in \left[\frac{k-1}{n}, \frac{k}{n} \right], \quad k = 1, \cdots, n$$

用 Riemann 的极限是定积分得到:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n^k k} \right)$$

$$= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \cos\left(\frac{k}{n} - \frac{1}{n^k k} \right) \frac{1}{n}$$

$$= \int_0^1 \cos x \, dx = \sin x \,|_0^1 = \sin 1$$

5.(15分) 求不定积分

$$\int \frac{4x^2 + 4x - 11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} \, dx .$$

参考答案:

(1) (6分) 用待定系数系数法得

$$\frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} = \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} - \frac{\frac{1}{4}}{2x+3} + \frac{\frac{3}{4}}{2x-5}$$

(2) (9分)

$$\int \frac{4x^2+4x-11}{(2x-1)(2x+3)(2x-5)} \, dx = \int \frac{\frac{1}{2}}{2x-1} \, dx - \int \frac{\frac{1}{4}}{2x+3} \, dx + \int \frac{\frac{3}{4}}{2x-5} \, dx$$

$$= \frac{1}{4} \ln \left| x - \frac{1}{2} \right| - \frac{1}{8} \ln \left| x + \frac{3}{2} \right| + \frac{3}{8} \ln \left| x - \frac{5}{2} \right| + C_1$$

$$= \frac{1}{8} \ln \left| \frac{(2x-1)^2(2x-5)^3}{2x+3} \right| + C$$

其中C 为任意常数.

6.(15分) 设 T 是由曲线弧

$$y = \frac{\ln x}{\sqrt{\pi}} \quad (1 \le x \le 2) ,$$

与直线 $x = 2$ ， 直线 $y = 0$ 所围成的曲边三角形， A 是 T 绕 x 轴旋转一周而形成的旋转体。 求 A 的 体积。

参考答案:

（1）(5分) 用旋转体的体积公式得到 A 的体积等于

$$\int_1^2 \pi \left(\frac{\ln x}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dx$$

（2）(10分) 用分部积分计算

$$\int_1^2 \pi \left(\frac{\ln x}{\sqrt{\pi}} \right)^2 dx = \int_1^2 (\ln x)^2\, dx = x(\ln x)^2 \,\Big|_1^2 - \int_1^2 x\ 2(\ln x)\ \frac{1}{x}\, dx$$

$$= 2\,(\ln 2)^2 - \int_1^2 2\ \ln x\, dx = 2\,(\ln 2)^2 - 2\,(x\ \ln x \,\Big|_1^2 - \int_1^2 x\,\frac{1}{x}\, dx\,)$$

$$= 2\,(\ln 2)^2 - 4\ \ln 2 + 2$$

所以 A 的体积等于 $2\,(\ln 2)^2 - 4\ \ln 2 + 2$.

7.(15分) 证明 方程

$$x^{18} + x^{12} - \cos x = 0$$

在实数集合中解的个数是 2 .

参考答案:

设 $\mathbb{R}$ 是实数集合，

$$f(x) = x^{18} + x^{12} - \cos x$$

（1）（3分） 当 $x \in \mathbb{R} - [-1, 1]$ 时，

$$|x| > 1, \qquad f(x) \geq 2 - \cos x > 0$$

所以

$$f(x) = 0 \text{ 在 } \mathbb{R} - [-1, 1] \text{ 中没有解}$$

（2）（4分） 当 $x \in [0, 1]$ 时， $f(x)$ 是 连续函数。

$$f(0) = -1 < 0, \qquad f(1) = 2 - cos\, 1 > 0$$

根据连续函数“介值定理”得到

$$f(x) = 0 \text{ 在 } [0, 1] \text{ 中解的个数 } \geq 1$$

（3）（3分） 当 $x \in [0, 1]$ 时， $|x|$ 和 $-\cos x$ 都是严格 递增函数，因此 $f(x)$ 也是严格 递增函数，所以

$$f(x) = 0 \text{ 在 } [0, 1] \text{ 中解的个数 } \leq 1$$

（4）（2分） 结合上面（2）（3）得到

$$f(x) = 0 \text{ 在 } [0, 1] \text{ 中解的个数 } = 1$$

（5）（2分） $f(x) = f(-x)$ 和上面（4）一起推出

$$f(x) = 0 \text{ 在 } [-1, 0] \text{ 中解的个数 } = 1$$

（6）（1分） 结合上面（1）（4）（5）得到

$$f(x) = 0 \text{ 在实数集合 } \mathbb{R} \text{ 中解的个数 } = 2$$

8.(15分) 设 $\mathbb{R}$ 是实数集合， $D = [0, 1]$， $A : D \to \mathbb{R}$ 连续， $B : D \to \mathbb{R}$ 连续，对于每个 $x \in D$ 有

$$0 \leq A(x) \leq 1 \quad .$$

对于每个连续函数 $f : D \to \mathbb{R}$ ， 定义连续函数 $Tf : D \to \mathbb{R}$ 为

$$(Tf)(x) = B(x) + \int_0^x A(t)\, f(t)\, dt \quad .$$

证明 $Tf = f$ 至多有一个连续函数解，即：如果 $f\,,\, g:\ D \to \mathbb{R}$ 连续， $Tf = f,\ Tg = g$ ， 则 $f = g : D \to \mathbb{R}$.

参考答案**一**:

（1） 设 $f, g : D \to \mathbb{R}$ 连续，

$$Tf = f,\ \ Tg = g$$

令

$$\mathbf{h} = \mathbf{f} - \mathbf{g} : D \to \mathbb{R}$$

则

$$h(x) = f(x) - g(x) = (Tf)(x) - (Tg)(x)$$
$$= B(x) + \int_0^x A(t)f(t)dt - B(x) - \int_0^x A(t)g(t)dt$$
$$= \int_0^x A(t)(f(t)-g(t))dt = \int_0^x A(t)\mathbf{h(t)}dt$$

（2） 对于任意给定的 $a \in D$，定义 $\mathbf{M_a}$ 为连续函数|h|在 $[0,a]$ 上的最大值 。

因为 h 在 $[0,a]$ 上连续，所有 存在

$$x_a \in [0,a]$$

（ x_a 与 a 有关）使得对于每个 $\mathbf{t} \in [\mathbf{0},\mathbf{a}]$ 有

$$|h(t)| \leq \mathbf{M_a} = |\mathbf{h(x_a)}|$$

（3） 再用条件 对于每个 $t \in D=[0,1]$ 有

$$0 \leq A(t) \leq 1$$

推出

$$|A(t)||h(t)| \leq |h(t)| \leq M_a$$

（4） 用（2）中 $M_a = h(x_a)$, 在（1）中等式中取 $\mathbf{x=x_a}$, 再用（3）得到

$$M_a = |h(x_a)| = \int_0^{x_a} A(t)h(t)\ dt$$

$$\leq \int_0^{x_a} |A(t)||h(t)|dt \leq x_a M_a$$

$$(\mathbf{1} - \mathbf{x_a})\ \mathbf{M_a} \leq \mathbf{0}$$

（5） 对于每个

$$a \in [\mathbf{0},\mathbf{1})$$
$$x_a \in [0,a]$$

推出

$$0 \leq x_a \leq a < 1$$
$$\mathbf{1} - \mathbf{x_a} > 0$$

（6） 上面（4）和（5）一起推出

$$\mathbf{M_a} \leq \mathbf{0}$$

（7） 把（6）代入（2）中的不等式得到： 对于 每个 $a \in [\mathbf{0},\mathbf{1})$, 对于任意 $x \in [0,a]$ 有

$$|h(x)| \leq M_a \leq \mathbf{0}$$

（8） 又因为 Ma≥0，

Ma = 0

(9) 所以 h(x) 恒等于0，即 Tf = f 至多一个连续函数解

参考答案二：

(1) 设 f 和 g 是两个连续解，令 h = f - g ,则

$\int_0^x A(t)h(t)dt$，任意x∈[0,1].

(2) 因 h 连续，所以|h(x)|是 x 的连续函数，故在闭区间[0,1]上存在最大值--记为 M.则

$|h(x)| \leq \int_0^x |A(t)||h(t)|dt \leq \int_0^x |h(t)|dt \leq Mx$.

(3) 所以 $\int |h(t)|dt \leq \int Mtdt = M(x^2/2)$

$|h(x)| \leq \int_0^x |h(t)|dt \leq M(x^2/2)$

（4）以此类推，可以用数学归纳法证明：

$$|h(x)| \leq M(x^n / n!)$$

对任意 n 成立。当 $n \to +\infty$，$(x^n / n!) \to 0$，所以 $|h(x)| = 0$.

(5）所以h(x)恒等于0，即Tf = f至多一个连续函数解