【专题】方程、不等式与函数

SDS 高数小班课 (2024 秋)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2024-12-29

1 函数的性质

1.1 连续性

定义 1.1 (连续函数)**.** 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 处满足 $\lim_{x\to x_0} = f(x_0)$, 则 $f(x)$ 在点 x_0 处是**连续的** (continuous).

定理 1.1 (连续函数的基本性质)**.** 设 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 则其满足

- 有界定理: $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上有界, 且其上界、下界必然都可以取到;
- 介值定理: 对每个开区间 $(\alpha,\beta)\subset[a,b]$, 函数可以取到介于 $f(\alpha)$ 与 $f(\beta)$ 之间的所有值.

例题 1.1 (介值定理)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 实数 $t_1,t_2>0$, 则至少有一点 $\xi\in[a,b]$, 使得 $t_1f(a)+t_2f(b)=(t_1+t_2)f(\xi)$.

1.2 单调性、极值与最值

定理 1.2 (一元函数的单调性)**.** 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增的充要条件是 $f'(x)\geq 0$ 对任意 $x\in(a,b)$ 成立.

定理 1.3 (一元函数的 Fermat 极值定理)**.** 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导. 若 x_0 为 $f(x)$ 的一个极值点, 则 $f'(x_0)=0$. 即: 极值点必然是稳定点.

- 此为极值点的**一阶必要条件**. 随后, 通过分析 $f(x)$ 在各区间上的单调性, 即可从稳定点中找出极值点.
- 综合比较极值点与不可导点、区间端点处的函数值, 即可给出最值.

例题 1.2 (一元函数的最值)**.** 求函数 $f(x)=(\sin x)^{\frac{2}{3}}+(\cos x)^{\frac{2}{3}}$ 在闭区间 $\left[-\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2}\right]$ 上的最小值, 并指明所有最小值点.

定理 1.4 (多元函数的极值充分条件)**.** n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 处取极大值的充分条件为:

- $\mathrm{d}f(P_0)=0$;
- 当 $\sum_{i=1}^n |\mathrm{d}x_i|\neq 0$ 时, $\mathrm{d}^2f(P_0)<0$.

极小值的条件可类推.

例题 1.3 (多元函数的非约束极值)**.** 求函数 $f(x,y)=2x^3-3x^2-6xy(x-y-1)$ 在 $\mathbb{R}^2$ 上的所有极值点.

定理 1.5 (Lagrange 乘子法)**.** 函数 $z = f(P) \equiv f(x_1, \cdots, x_n)$ 在约束条件 $\phi_i(P) = 0(i = 1, \cdots, m, m < n)$ 下的极值问题, 等价于 **Lagrange 函数**

$$\mathcal{L}(P; \boldsymbol{\lambda}) \equiv f(P) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i(P) \tag{1}$$

的非约束极值问题.

例题 1.4 (多元函数的约束极值)**.** 设空间 $\mathbb{R}^3$ 中的平面 $K: x + 2y + 3z = 6$ 与 x 轴, y 轴, z 轴分别交于点 A, B, C. $\mathbb{R}^3$ 中一个动点 H 与平面 K 保持恒定的距离 1, H 在平面 K 上的垂直投影记为 M. 假设 M 是在以 A, B, C 为顶点的三角形 ΔABC 之中, M 到三条边 BC, CA, AB 的距离分别记为 p, q, r.

1. 求出三角形 ΔABC 的面积;
2. 用 p, q, r 表示以 A, B, C, H 为四个顶点的四面体的表面积 $S(p, q, r)$;
3. 写出变量 p, q, r 必须满足的约束条件;
4. 求出以 p, q, r 为变量的函数 $S(p, q, r)$ 的条件极值的稳定点.

1.3 曲面理论

定理 1.6 (曲面的法向量)**.** 曲面 $F(x, y, z) = 0$ 在点 (x_0, y_0, z_0) 处的一个法向量 (垂直于所有切向量) 为 $(F_x, F_y, F_z)\big|_{(x_0, y_0, z_0)}$.

例题 1.5 (曲面的切平面)**.** 设欧氏空间 $\mathbb{R}^3$ 中平面 T 的方程是 $2x - y + 3z = 6$. 平面 T 与 x 轴、y 轴、z 轴的交点依次记为 A, B, C. 以原点 $(0, 0, 0)$ 为中心, 与平面 T 相切的球面记为 S.

1. 求三角形 ΔABC 的面积;
2. 求平面 T 与球面 S 相切点的坐标.

例题 1.6 (二次曲面)**.** 设 r 是正实数, $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | \sqrt{x^2 + y^2} < r\}$, $f: D \to \mathbb{R}, f \in \mathcal{C}^3(D), f(0, 0) = 0$, f 在点 $(0, 0)$ 处的一阶全微分 $\mathrm{d}f\,(0, 0) = 0$, E, F, G 都是常数, f 在点 $(0, 0)$ 处的二阶微分

$$\mathrm{d}^2 f\,(0, 0) = E(\Delta x)^2 + 2F \Delta x \Delta y + G(\Delta y)^2. \tag{2}$$

1. 证明: 存在 D 上的两个函数 $a: D \to \mathbb{R}, b: D \to \mathbb{R}$ 使得任取 $(x, y) \in D$ 有

$$f(x, y) = xa(x, y) + yb(x, y),\ a(0, 0) = 0,\ b(0, 0) = 0. \tag{3}$$

2. 如果 $E > 0, EG - F^2 < 0$, 则在 $\mathbb{R}^3$ 中点 $(0, 0, 0)$ 的充分小邻域中, 曲面 $z = f(x, y)$ 充分近似于哪类二次曲面? 画出此类二次曲面的草图. 从此类二次曲面的几何形

状来判断是否存在 $\mathbb{R}^2$ 中点 $(0,0)$ 的充分小邻域 D_1, 存在 D_1 上的一对一的 $\mathcal{C}^1$ 变量变换 $x=x(u,v), y=y(u,v)$, 使得

$$f(x(u,v),y(u,v))=u^2-v^2. \tag{4}$$

2 方程、方程组与函数

2.1 方程实根的存在性

定理 2.1 (零点定理: 介值定理的特例)**.** 设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 且 $f(a)f(b)<0$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f(\xi)=0$.

定理 2.2 (Rolle 定理)**.** 设函数 $y=f(x)$ 在闭区间 $[a,b]$ 上连续, 在开区间 (a,b) 上可导, 且 $f(a)=f(b)$, 则存在 $\xi\in(a,b)$ 使得 $f'(\xi)=0$.

- 通过构造适当的辅助函数, 可以由 Rolle 定理出发推导出 **Lagrange 中值定理**与 **Cauchy 中值定理**.

例题 2.1 (中值的存在性: Lagrange 定理)**.** 任给 $x\in\mathbb{R}$, 存在 $\theta(x)\in(0,1)$, 满足方程

$$\arctan x=\frac{x}{1+(\theta(x))^2x^2}. \tag{5}$$

注记 2.1. 中值条件 $\xi\in(a,b)$ 可以等价地写为: 存在 $\theta\in(0,1)$, 使得 $\xi\equiv\theta b+(1-\theta)a$.

例题 2.2 (相异中值)**.** 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(0)=0, f(1)=1$. 证明:

1. 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f(\xi)=1-\xi$;
2. 存在两个不同的点 $\eta,\zeta\in(0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta)=1$.

注记 2.2. 中值位于开区间上, 这产生了 "不等关系", 从而可以应用于区间的**包含**或**分割**, 找出**彼此相异**的中值.

1. 若有 $\zeta\in(a,\xi)$, 则 $\zeta\neq\xi$;
2. 若有 $\zeta_1\in(a,\xi), \zeta_2\in(\xi,b)$, 则 $\zeta_1\neq\zeta_2$.

例题 2.3 (相异中值; 归纳构造)**.** 设函数 $P(x)$ 在区间 $[0,1]$ 上连续, $P(0)=0, P(1)=1$, $P(x)$ 在开区间 $(0,1)$ 内可导, 并且在每点处导数 $P'(x)$ 都为正数. 任意取定正实数 A, 正实数 B, 正整数 n. 证明: 在开区间 $(0,1)$ 内存在严格递增的 $n+1$ 个实数 $\theta_0,\theta_1,\cdots,\theta_n$, 使得:

$$(A+B)^n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{P'(\theta_k)}\frac{n!}{k!(n-k)!}A^{n-k}B^k \tag{6}$$

并且

$$0<\theta_0<\cdots<\theta_n<1. \tag{7}$$

2.2 方程与一元隐函数

定理 2.3 (一元隐函数存在定理)**.** 设二元函数 $F(x,y)$ 满足下述三个条件:

1. 在点 (x_0,y_0) 的邻域内有定义;
2. 偏导数 $\frac{\partial F}{\partial x}$ 与 $\frac{\partial F}{\partial y}$ 在点 (x_0,y_0) 的邻域内连续;
3. 偏导数 $\left.\frac{\partial F}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)} \neq 0$.

则存在一个邻域 $U_\delta(x_0) \equiv (x_0-\delta, x_0+\delta)$, 在该邻域上可以唯一地定义隐函数 $y=f(x)$, 满足如下两个属性:

1. 几何属性: 曲线 $y=f(x)$ 过点 (x_0,y_0), 且始终位于平面点 (x_0,y_0) 的一个邻域内;
2. 光滑属性: 函数 $y=f(x)$ 在邻域 $U_\delta(x_0)$ 上可导.

- 当 $F(x,y)=0$ 满足隐函数定理时, 根据全微分 $\mathrm{d}F(x,y)=0$ 即可解得隐函数求导公式
$$\left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right|_{(x_0,y_0)} = -\frac{F_x(x_0,y_0)}{F_y(x_0,y_0)}. \tag{8}$$

例题 2.4 (隐函数求导法则)**.** 设二元函数 $z=z(x,y)$ 是由方程 $F(x,y,z)=z^3+z\mathrm{e}^x+y=0$ 所确定的隐函数. 求 $z=z(x,y)$ 的函数值在点 $(0,2)$ 处下降最快的方向上的单位向量.

例题 2.5 (隐函数的存在性)**.** 对任意给定的实数 k, 存在点 0 的开邻域 U,W 与唯一的函数 $y=f(x), x\in U, y\in W$ 满足方程 $\mathrm{e}^{kx}+\mathrm{e}^{ky}-2\mathrm{e}^{x+y}=0$.

2.3 方程 (组) 与多元函数

例题 2.6 (方程与多元隐函数)**.** 设 $F(x,y,z)=x^3+(y^2-1)z^3-xyz$.

1. 证明: 存在 $\mathbb{R}^2$ 中点 $(1,1)$ 的一个邻域 D 以及 D 上的唯一隐函数 $z=z(x,y)$ 满足 $F(x,y,z(x,y))\equiv 0, z(1,1)=1$.
2. 求出在点 $(1,1)$ 处函数 $z(x,y)$ 的值减少最快的方向上的单位向量 E.
3. 设 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x+2y-2z=1$ 的 z 分量为正的法向量记为 N, 向量 $(E,0)$ 是 $\mathbb{R}^3$ 中的向量, 求出 N 和 $(E,0)$ 的夹角余弦.

注记 2.3. 多元隐函数存在定理: 若验证得到 $\left.\frac{\partial F}{\partial z}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} \neq 0$, 则对应的隐函数导数可由方程 $0=\mathrm{d}F(x,y,z)$ 解出:

$$\begin{cases} \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} & = -\frac{F_x(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}, \\ \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0,z_0)} & = -\frac{F_y(x_0,y_0,z_0)}{F_z(x_0,y_0,z_0)}. \end{cases} \tag{9}$$

例题 2.7 (方程组与一元隐函数)**.** 函数 $u=u(x)$ 由方程组

$$\begin{cases} u=F(x,y,z), \\ G(x,y,z)=0, \\ H(x,y,z)=0 \end{cases} \tag{10}$$

定义, 试计算 $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}$.

注记 2.4. 方程组隐函数存在定理: 隐函数导数的存在性与具体形式由方程组 $0=\mathrm{d}F_i\,(i=1,\dots,n)$ 解出:

$$\sum_{j=1}^{m}\frac{\partial F_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j+\sum_{k=1}^{n}\frac{\partial F_i}{\partial y_k}\,\mathrm{d}y_k=0(i=1,\dots,n). \tag{11}$$

3 不等式与函数

3.1 有界性与中值估计

定理 3.1 (Lagrange 中值定理)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi). \tag{12}$$

例题 3.1 (Lagrange 中值)**.** 函数 $y=\arctan x$ 具有 **Lipschitz 连续性**:

$$|\arctan a-\arctan b|\le|a-b|. \tag{13}$$

定理 3.2 (Taylor 中值定理)**.** 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义, 且在包含 x_0 的某区间 (a,b) 内存在 $n+1$ 阶导数. 则对 x_0 附近的任意点 x 都成立

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+R_n, \tag{14}$$

其中, 总存在介于 x_0 与 x 之间的点 ξ, 使得

$$R_n=\frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x-x_0)^{n+1}, \tag{15}$$

这称为 **Lagrange 余项**.

例题 3.2 (Taylor 中值; 有界定理)**.** 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0)=f'(1)$, $|f''(x)|\le1$. 证明: 当 $x\in(0,1)$ 时,

$$|f(x)-f(0)(1-x)-f(1)x|\le\frac{x(1-x)}{2}. \tag{16}$$

例题 3.3 (Taylor 中值; 介值定理)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有二阶连续导数, 证明:

1. 若 $f(0)=0$, 则存在 $\xi\in(-a,a)$, 使得
$$f''(\xi)=\frac{1}{a^2}(f(a)+f(-a)); \tag{17}$$
2. 若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值, 则存在 $\eta\in(-a,a)$, 使得
$$|f''(\eta)|\geq\frac{1}{2a^2}|f(a)-f(-a)|. \tag{18}$$

3.2 单调性与最值估计

例题 3.4 (一元恒等式; 变限积分函数)**.** 任取 $x\in\left(-\frac{1}{\sqrt[4]{6}},\frac{1}{\sqrt[4]{6}}\right)$, 成立
$$2\int_0^x\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}=\int_0^{\frac{2x\sqrt{1-x^4}}{1+x^4}}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^4}}. \tag{19}$$

例题 3.5 (约束最值)**.** 给定正数 $x_1,\cdots,x_n$, 证明**平均值不等式**:
$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^n x_k}\leq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k, \tag{20}$$
等号成立当且仅当 $x_1=\cdots=x_n$.

例题 3.6 (不等式的构造与应用)**.** 给定正整数 $n\geq 3$. 求出半径为 1 的圆的内接 n 边形所能达到的最大面积.