5. 多元函数微分学

SDS 高数小班课 (2024 秋)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2024-12-21

1 二元极限的定义与计算

定义 1.1 (二元极限的 ϵ-δ 语言)**.** 给定函数 $f(P) \equiv f(x,y)$ 与点 $P_0(x_0,y_0)$, 并假设其在去心邻域 $U(P_0)/\{P_0\}$ 上有定义. 若存在 A, 使得: 对于任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使得 $|f(P) - A| < \epsilon$ 对一切 $0 < |PP_0| \equiv \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2} < \delta$ 的点 $P(x,y)$ 成立, 则我们说函数 $f(x,y)$ 在点 P 处是**收敛** (convergent) 的, A 为其**极限** (limit). 记作 $\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = A$.

- 二元极限若存在, 则必须**独立于趋近方向**. 这常用于反证法证明某二元极限不存在

例题 1.1 (计算二元极限: 等价无穷小代换)**.** 计算

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{24\cos\sqrt{x^2+y^2} - 24 + 12(x^2+y^2)}{\tan^4\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{1}$$

例题 1.2 (计算二元极限: 放缩)**.** 计算

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+\sin y)\cos\frac{1}{|x|+|y|}. \tag{2}$$

例题 1.3 (证明二元极限不存在). 证明极限

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x\sin y}{\sin^2 x+\sin^2 y} \tag{3}$$

不存在.

2 多元函数微分的计算

2.1 偏导数与全微分

定义 2.1 (偏导数、全微分). n 元函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 关于自变量 x_k 的**偏导数** (partial deriavtive) 定义为

$$\frac{\partial f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_k} \equiv \lim_{\delta\to 0} \frac{f(x_1,\cdots,x_k+\delta,\cdots,x_n)-f(x_1,\cdots,x_k,\cdots,x_n)}{\delta}; \tag{4}$$

而其**全微分** (total differential), 若存在, 定义为函数增量的线性近似

$$\mathrm{d}f(x_1,\cdots,x_n) \equiv \sum_{k=1}^{n} A_k\,\mathrm{d}x_k, \tag{5}$$

$$\Delta f(x_1,\cdots,x_n) = \mathrm{d}f(x_1,\cdots,x_n) + o\left(\sqrt{\sum_{k=1}^{n}(\Delta x_k)^2}\right). \tag{6}$$

定理 2.1 (偏导数与全微分的关系). 若函数 f 在点 $(x_1,\cdots,x_n)$ 处可微, 则其在该点处的偏导数一定存在, 且

$$\mathrm{d}f(x_1,\cdots,x_n) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\partial f(x_1,\cdots,x_n)}{\partial x_k}\,\mathrm{d}x_k. \tag{7}$$

例题 2.1 (全微分与偏导数的定义). 定义三元函数 $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ 为

$$f(x,y,z)=\begin{cases}\frac{xyz}{x^2+y^2+z^2}, & (x,y,z)\neq(0,0,0),\\ 0, & (x,y,z)=(0,0,0).\end{cases} \tag{8}$$

1. 计算出 f 在点 $(0,0,0)$ 处的三个偏导数 $f_x(0,0,0), f_y(0,0,0), f_z(0,0,0)$;
2. 三元函数 f 在点 $(0,0,0)$ 处可微吗? 证明你的结论.

例题 2.2 (全微分的形式不变性). 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 和 $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 都有连续的二阶导函数. 对于任意 $x\in\mathbb{R}, y\in\mathbb{R}$, 当 $x\neq 0$ 时, 定义

$$h(x,y)=xg\left(\frac{y}{x}\right)+f\left(\frac{y}{x}\right), \tag{9}$$

计算 $x^2h_{xx}(x,y)+2xyh_{xy}(x,y)+y^2h_{yy}(x,y)$.

例题 2.3 (偏微分方程与变量代换)**.** 给定方程

$$x^2\frac{\partial z}{\partial x}+y^2\frac{\partial z}{\partial y}=z^2, \tag{10}$$

作变量代换

$$x=t,\, y=\frac{t}{\sqrt{1+tu}},\, z=\frac{t}{1+tW}, \tag{11}$$

证明:

$$\frac{\partial W}{\partial t}=0. \tag{12}$$

2.2 梯度、方向导数

定义 2.2 (梯度)**.** 函数 $f(x_1,\cdots,x_n)$ 的**梯度** (gradient) 定义为

$$\boldsymbol{\nabla} f\equiv\left(\frac{\partial f}{\partial x_1},\cdots,\frac{\partial f}{\partial x_n}\right). \tag{13}$$

定理 2.2. 梯度的方向为函数值上升最快的方向, 反方向为下降最快的方向.

例题 2.4 (梯度的计算)**.** 求三元函数 $f(x,y,z)=\left(\frac{2x}{z}\right)^y$ 在点 $\left(\frac{1}{2},1,1\right)$ 处下降最快的方向上的单位向量.

定义 2.3 (方向导数)**.** 函数 $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ 在单位向量 $\mathbf{n}\equiv(\cos\theta_1,\cdots,\cos\theta_n)$ 上的**方向导数** (directional derivative) 定义为

$$\partial_{\mathbf{n}} f=\lim_{t\to 0}\frac{f(x_1+t\cos\theta_1,\cdots,x_n+t\cos\theta_n)-f(x_1,\cdots,x_n)}{t}. \tag{14}$$

定理 2.3. 方向导数与梯度满足 $\partial_{\mathbf{n}} f=\mathbf{n}\cdot\boldsymbol{\nabla} f$.

例题 2.5 (方向导数)**.** 设 $a,b>0$, 计算函数

$$z=1-\left(\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\right) \tag{15}$$

在点 $M\left(\frac{a}{\sqrt{2}},\frac{b}{\sqrt{2}}\right)$ 处沿曲线 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 在点 M 处内法线方向的导数.

3 局部 Taylor 公式

定理 3.1 (多元函数的局部 Taylor 公式)**.** n 元函数的 k 阶局部 Taylor 公式, 若存在, 则写为

$$f(x_1^{(2)},\cdots,x_n^{(2)})=\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=1}^{n}\left((x_j^{(2)}-x_j^{(1)})\frac{\partial}{\partial x_j}\right)^i f(x_1^{(1)},\cdots,x_n^{(1)})+o\left(\rho^n\right), \tag{16}$$

其中,

$$\rho\equiv\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(x_j^{(2)}-x_j^{(1)})^2}. \tag{17}$$

例题 3.1 (直接计算)**.** 求函数

$$f(x,y)=\arctan\frac{y}{x} \tag{18}$$

在点 $(2,2)$ 处的二阶 Taylor 多项式.

例题 3.2 (间接计算). 求函数

$$f(x,y) = x\mathrm{e}^{x+y} \tag{19}$$

在点 $(0,0)$ 附近的三阶 Taylor 多项式.

4 多元函数极值问题

4.1 非约束极值

定理 4.1 (多元函数的极值充分条件)**.** n 元函数 $f(P)$ 在点 P_0 处取极大值的充分条件为:

- $\mathrm{d}f(P_0)=0$;
- 当 $\sum_{i=1}^{n}|\mathrm{d}x_i|\neq 0$ 时, $\mathrm{d}^2f(P_0)<0$.

极小值的条件可类推.

例题 4.1 (多元非约束极值)**.** 设 $a,b>0$, 求函数

$$z=xy\sqrt{1-\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2}{b^2}} \tag{20}$$

的极值.

例题 4.2 (多元最值)**.** 设 D 是由直线 $x+y=2\pi$、x 轴和 y 轴所围成的有界闭区域. 求 D 上的二元函数 $f(x,y)=\sin x+\sin y-\sin(x+y)$ 达到最大值的 D 中所有点.

4.2 约束极值

定理 4.2 (Lagrange 乘子法)**.** 函数 $z = f(P) \equiv f(x_1, \cdots, x_n)$ 在约束条件 $\phi_i(P) = 0 (i = 1, \cdots, m, m < n)$ 下的极值问题, 等价于 **Lagrange 函数**

$$\mathcal{L}(P; \boldsymbol{\lambda}) \equiv f(P) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \phi_i(P) \tag{21}$$

的非约束极值问题.

例题 4.3 (多元约束极值)**.** 在给定的半球内作出具有最大体积的内接长方体.

例题 4.4 (约束极值与不等式)**.** 给定正数 $x_1, \cdots, x_n$, 证明**平均值不等式**:

$$\sqrt[n]{\prod_{k=1}^{n} x_k} \le \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} x_k, \tag{22}$$

等号成立当且仅当 $x_1 = \cdots = x_n$.

例题 4.5 (约束最值)**.** 给定正整数 $n \geq 3$, 求出半径为 1 的圆的内接 n 边形所能达到的最大面积.