3. 曲线积分

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2025.3.29

1 两类曲线积分的计算

1.1 第一型曲线积分: 弧微元

定义 1.1. 设函数 $f(x,y,z)$ 在分段光滑的曲线 L 上有定义. 将 L 任意分割为 n 段, 第 i 段的弧长记为 Δs_i, 且在第 i 段上任取点 (ξ_i,η_i,ζ_i). 令 $\lambda \equiv \max_{1\le i\le n} \Delta s_i$. 若极限

$$\lim_{\lambda\to 0_+} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta s_i \tag{1}$$

存在且无关分割方法或取点方法, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 沿曲线 L 的**第一型曲线积分**, 记作

$$\int_L f(x,y,z)\,\mathrm{d}s. \tag{2}$$

例题 1.1 (对弧微元直接积分)**.** 计算第一型曲线积分 $I=\int_L (x+y)\,\mathrm{d}s$, 其中 L 是以 $O(0,0),A(1,0),B(0,1)$ 为顶点的三角形围线.

定理 1.1 (换元到坐标变量)**.** 设平面曲线 L 由函数 $y=y(x), a\le x\le b$ 给出, 其中 $y=y(x)$ 在 $[a,b]$ 上有连续导数. 又假定函数 $f(x,y)$ 在 L 上连续, 则

$$\int_L f(x,y)\,\mathrm{d}s = \int_a^b f(x,y(x))\sqrt{1+(y'(x))^2}\,\mathrm{d}x. \tag{3}$$

例题 1.2 (换元到坐标变量)**.** 计算第一型曲线积分 $I=\int_L y^2\,\mathrm{d}s$, 其中 $L: y=\mathrm{e}^x, 0\le x\le 1$.

定理 1.2 (换元到参数方程变量)**.** 设 (空间) 曲线 L 的参数方程是

$$\begin{cases} x=x(t), \\ y=y(t), \qquad \alpha\le t\le\beta, \\ z=z(t), \end{cases} \tag{4}$$

并假定 $x(t),y(t),z(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导数. 又假定函数 $f(x,y,z)$ 在 L 上连续, 则

$$\int_L f\,\mathrm{d}s = \int_\alpha^\beta f(x(t),y(t),z(t))\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t \tag{5}$$

例题 1.3 (参数方程: 平面曲线)**.** 设 E 是椭圆 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+\frac{y^2}{4}=1, -1\le x\le 1, -2\le y\le 2\}$. 计算第一型曲线积分 $I=\int_E |xy|\,\mathrm{d}s$.

例题 1.4 (参数方程: 空间曲线)**.** 计算第一型曲线积分 $I=\int_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为一段螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, 0\le t\le 2\pi$.

1.2 第二型曲线积分: 向量值的投影

定义 1.2. 设 L 是从点 A 到 B 的一条有向分段光滑曲线, 向量值函数 $\mathbf{F}(x,y,z)=P(x,y,z)\mathbf{e}_1+Q(x,y,z)\mathbf{e}_2+R(x,y,z)\mathbf{e}_3$ 在 L 上有定义. 按 L 的方向顺序将 L 分割为 n 个有向曲线段 $A_{i-1}A_i$, 弧长记为 Δs_i. 在 $A_{i-1}A_i$ 上任取一点 (ξ_i,η_i,ζ_i). 令 $\lambda\equiv\max_{1\le i\le n}\Delta s_i$. 若极限

$$\begin{aligned}&\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\mathbf{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\overrightarrow{A_{i-1}A_i}\\ =&\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n}\left(P(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta x_i+Q(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta y_i+R(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta z_i\right)\end{aligned}\tag{6}$$

存在且无关分割方法或取点方法, 则称此极限为向量函数 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 沿曲线 L 从点 A 到 B 的**第二型曲线积分**, 记作

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z\tag{7}$$

或

$$\int_L \mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}.\tag{8}$$

- 两类曲线积分可由方向余弦

$$(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)=\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s},\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\right)\tag{9}$$

关联起来:

$$\int_L P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y+R\,\mathrm{d}z=\int_L(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}s.\tag{10}$$

例题 1.5 (对弧微元直接积分)**.** 设 $R>0$. 计算曲线积分 $I=\int_L x^2\,\mathrm{d}x-xy\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为从点 $A(R,0)$ 到点 $B(0,R)$ 的圆弧 $x^2+y^2=R^2$ (逆时针方向).

定理 1.3 (换元到参数方程变量)**.** 设空间曲线 L 的方程为

$$\begin{cases}x=x(t),\\ y=y(t),\qquad \alpha\le t\le\beta,\\ z=z(t),\end{cases}\tag{11}$$

并假定 $x(t),y(t),z(t)$ 在 $[\alpha,\beta]$ 上有连续的导数. 又假定 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 的各个分量均在 L 上连续, 则

$$\int_L\mathbf{F}(\mathbf{r})\cdot\mathrm{d}\mathbf{r}=\int_\alpha^\beta\left(P(\mathbf{r}(t))x'(t)+Q(\mathbf{r}(t))y'(t)+R(\mathbf{r}(t))z'(t)\right)\mathrm{d}t.\tag{12}$$

例题 1.6 (参数方程: 平面曲线)**.** 计算曲线积分 $I = \int_L (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为抛物线 $y = x^2, -1 \le x \le 1$ (沿 x 轴正方向).

例题 1.7 (参数方程: 空间曲线)**.** 设 $a > 0$. 计算曲线积分 $I = \oint_L y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z$, 其中 L 为 *Viviani* 曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases} \tag{13}$$

在 $z \ge 0$ 处的分支. 从 Ox 轴的无穷远处 $(x > a)$ 看去, 取逆时针方向为正方向.

注记 1.1. 由一般式方程 (曲面方程的联立式) 给出的曲线, 可以 (在适当的坐标系下) 通过消元法给出单变量参数方程.

注记 1.2. 内积的对称性并不直观, 所以, 在计算第二型曲线积分时务必慎用对称性.

注记 1.3. 三角函数的多项式, 其积分

$$I_{m,n}(\theta) \equiv \int \cos^m\theta \sin^n\theta\,\mathrm{d}\theta \tag{14}$$

的计算技巧整理如下:

1. m, n 中的任何偶数因子, 都可由二倍角公式实现 (迭代的) **降幂升角**;

2. 若 $m = 2p+1, n = 2q+1$ 均为奇数, 根据一类换元积分法, 可以吸收一个 $\cos\theta$ 或 $\sin\theta$, **化为多项式积分**:

$$\int \cos^{2p+1}\theta \sin^{2q+1}\theta\,\mathrm{d}\theta = \int (1-s^2)^p s^{2q+1}\,\mathrm{d}s = -\int c^{2p+1}(1-c^2)^q\,\mathrm{d}c. \tag{15}$$

2 Green 公式及其应用

定义 2.1 (平面闭区域边界曲线的正方向)**.** 设平面闭区域 D 的边界 $\partial D \equiv L$ 由一段或几段**简单闭曲线**组成. 我们定义其**正方向** L^+ 是指: 沿该方向行进时, 区域 D 总位于左侧.

- 平面上的一条**简单闭曲线**是一个映射 $\varphi : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}^2$ 的像, 其中 φ 在 $[\alpha, \beta]$ 上连续、在 (α, β) 上可逆, 且 $\varphi(\alpha) = \varphi(\beta)$. 简单闭曲线的几何意义是首尾相连且其余处不自交.

定理 2.1 (Green 公式)**.** 设函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上有连续的一阶偏导数, $L \equiv \partial D$ 分段光滑, 则成立公式

$$\oint_{L^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{16}$$

- Green 公式揭示了平面闭区域上的二重积分与正向边界曲线上的第二型曲线积分之间存在的联系. 以边界积分来代替重积分, 这从数学角度看像是定积分运算在高维空间下的推广.

2.1 对 Green 公式的理解

例题 2.1 (检查成立条件)**.** 计算曲线积分

$$I = \oint_{L^+} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}, \tag{17}$$

其中曲线 L 分别为:

1. 单位圆在第一象限部分所围成的弓形;
2. 单位圆.

注记 2.1. 若向量值函数 $\mathbf{F}(x,y) = (P(x,y), Q(x,y))$ 在有界闭区域 D 上 (假设存在连续的一阶偏导数) 满足偏微分关系 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$, 则 D 内任意的环路积分 (circuit integral) 为零: $\oint_L P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$. **在遇到环路积分问题时, 先按 Green 公式中的二重积分被积函数 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ 是一个有益的习惯**.

例题 2.2 (等价形式: 散度定理)**.** 设函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上存在连续的一阶偏导数, 边界曲线 $L \equiv \partial D$ 分段光滑. 记 $\mathbf{n}$ 为曲线 L 的外法线方向的单位向量. *证明二维平面上的散度定理*

$$\oint_{L^+} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s \equiv \oint_{L^+} P(x,y)\cos(\mathbf{n},x)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\cos(\mathbf{n},y)\,\mathrm{d}y = \iint_D \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{18}$$

成立. 其中, $\mathbf{F}(x,y) \equiv (P(x,y), Q(x,y))$ 的散度 (divergence) 定义为

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y) \equiv \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{19}$$

注记 2.2. 对于正方向的切向单位向量 $\mathbf{t} = (\cos\theta, \sin\theta)$, 其由外法线 $\mathbf{n} \equiv (\cos\phi, \sin\phi)$ 逆时针旋转 $\frac{\pi}{2}$ 得到. 所以 $\theta = \phi + \frac{\pi}{2}$, 进而得到 $\mathbf{n} = (\sin\theta, -\cos\theta)$. 换回方向余弦的二元表示法, 对于 $\mathbf{t} = (\cos\alpha, \cos\beta)$, 我们有 $\mathbf{n} = (\cos\beta, -\cos\alpha)$.

注记 2.3. 将 $\mathbf{F}(x,y)$ 看作是某流体的速度场, 则 $\Phi \equiv \oint_{L^+} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s$ 代表该流体通过闭曲线 L 的流量 (单位时间内通过的流体的总面积). Green 公式 (的等价形式) 表明, 流量 Φ 等于 L 所围的平面闭区域 D 上的散度函数 $\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y)$ 的累积效应.

例题 2.3 (等价形式: 第二 Green 恒等式)**.** 设 $u(x,y), v(x,y)$ 在有界闭区域 D 上具有连续的二阶偏导数, 边界曲线 $L^+ = \partial D$. *证明平面上的第二 Green 恒等式*

$$\iint_D \begin{vmatrix} \nabla^2 u & \nabla^2 v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{L^+} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}s, \tag{20}$$

其中, $\frac{\partial}{\partial n}$ 为沿曲线 L 的外法线方向的的导数, 而 *Laplacian* 算符

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{21}$$

注记 2.4. 令 $v \equiv 1$, 则我们复现了课本例题所证明的定理

$$\oint_{L^+} \frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s = \iint_D \nabla^2 u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{22}$$

注记 2.5. 可见, 证明关于平面闭区域 D 及其边界曲线 L 之间的积分恒等式, 一般思路为: 从边界曲线积分入手, 根据切向与法向之间的几何关系, 应用 Green 公式转化到闭区域上的二重积分. 作为练习, 可试证平面上的第一 *Green* 恒等式

$$\iint_D \nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -\iint_D v\nabla^2 u \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \oint_{L^+} v\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s. \tag{23}$$

2.2 用 Green 公式计算第二型曲线积分

例题 2.4 (挖洞法)**.** 设 $E = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| x^2+\frac{y^2}{4}=1\right\}$, 取逆时针方向为正方向. 计算第二型曲线积分

$$I = \oint_E \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}. \tag{24}$$

注记 2.6. 设某平面闭区域 D 以 L^+ 为边界曲线, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 内除有限个点 $\{P_k\}_{k=1}^n$ 外均存在一阶连续偏导数. 我们在点 P_k 的邻域内作逆时针方向的闭曲线 $\{L_k^+\}_{k=1}^n$ 以 "挖去" 包含了这些 "性质不好的点" 的无限小区域 $D' \equiv \cup_{k=1}^n D_k$. 随后对平面闭区域区域 D/D' 应用 Green 公式, 即可得到 "挖洞法" 的一般公式:

$$\oint_{L^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_{D/D'}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \sum_{k=1}^n \oint_{L_k^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \tag{25}$$

- 若 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D/D' 上处处成立, 则上述公式简化为

$$\oint_{L^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \sum_{k=1}^n \oint_{L_k^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y. \tag{26}$$

- 由于辅助曲线 L_k^+ 的任意性, 我们应尽可能使曲线积分的直接计算变得简便, 例如本题可以作圆, 下一题作椭圆.

例题 2.5 (挖洞法; 边界曲线的构造)**.** 计算曲线积分

$$I = \oint_\Gamma \left(\frac{y^2+y+4x^2}{4x^2+y^2}+\sin(x^2)\right)\mathrm{d}x + \left(\frac{4x^2-x+y^2}{4x^2+y^2}+\sin(y^2)\right)\mathrm{d}y, \tag{27}$$

其中, Γ 是 $x^2+y^2=9(y\geq 0)$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1(y\leq 0)$ 所组成的闭曲线的逆时针方向.

例题 2.6 (挖洞法; 重积分的中值估计)**.** 计算曲线积分

$$I = \oint_L \frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}\left((x\sin x + y\cos x)\,\mathrm{d}x + (y\sin x - x\cos x)\,\mathrm{d}y\right), \tag{28}$$

其中 L 是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的逆时针方向.

3 第二型曲线积分的路径无关性

3.1 路径无关性的充要条件

定理 3.1 (条件 I)**.** 在区域 D 内任意取定两点 A, B, 曲线积分 $\int_{A\to B} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 在区域 D 内与路径无关的充要条件为: 环路积分 $\oint_{L^+} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = 0$ 对 D 内任意一条简单 (逐段) 光滑闭曲线 L 成立.

- 简言之, "无关路径" 的充要条件为 "周而复始".
- 若路径无关性成立, 则曲线积分的值只取决于 A, B. 此时曲线积分习惯上记为 $\int_A^B P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$.

定义 3.1 (单连通性)**.** 若平面闭区域 D 的任意一条简单闭曲线的内部都包含于 D, 则称 D 为**单连通区域** (simply connected domain); 否则为**复连通区域** (multiply connected domain).

定理 3.2 (条件 II、III)**.** 设 D 是单连通区域, 函数 $P(x,y), Q(x,y)$ 在 D 内有一阶连续偏导数. 则对 D 内任意取定的两点 A, B, 曲线积分 $\int_{A\to B} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 与路径无关的充要条件还可以是:

- 偏导数关系 $\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y}$ 在 D 内处处成立;
- 微分式 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 恰好是某二元函数 $u(x,y)$ 的全微分, 即 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$. 此时, $u(x,y)$ 称为**原函数** (primitive function), 而曲线积分 $\int_{A\to B} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = u(B) - u(A)$ 可以很快速地给出计算.

例题 3.1 (积分路径的重新选择)**.** 设 n 是正整数, 从点 $(0,0)$ 到点 $(n\pi, 0)$ 的有向曲线 $L_n = \{(t, |\sin t|) | 0 \le t \le n\pi\}$. 计算出下面的第二型曲线积分在 $n \to \infty$ 下的极限

$$\lim_{n\to\infty} \int_{L_n} \mathrm{e}^{y^2-x^2} \cos(2xy)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{y^2-x^2} \sin(2xy)\,\mathrm{d}y. \tag{29}$$

提示: 你能在推导极限值时不使用 Gaussian 积分 (其本质是广义积分) 的计算结果吗?

注记 3.1. 保持首先计算 $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$ 的好习惯, 以验证路径无关性是否成立. 若成立, 则可以重新选择有利的积分路径 (一般以 "横平竖直" 的轨迹居多) 来计算曲线积分.

例题 3.2 (全微分的配凑)**.** 计算曲线积分

$$I = \int_L \left(1 - \frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x + \left(\sin\frac{y}{x} + \frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y, \tag{30}$$

其中 $L = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + (y-\pi)^2 = \frac{1}{4}, y \ge \pi\right\}$, 取顺时针方向.

注记 3.2. 若已验证过路径无关性, 则 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 必然存在一个原函数 u. 如果 P 对 x 的积分或 Q 对 y 的积分是可行的, 则计算原函数一般可以由如下两步完成:

1. 作不定积分, 得到 $u(x,y)=\int P(x,y)\,\mathrm{d}x\equiv U(x,y)+\phi(y)$, 注意积分结果 $U(x,y)$ 后面附加的不是 "常数", 而是一个无关积分变量的一元函数 $\phi(y)$;
2. 根据偏微分关系 $\frac{\partial u}{\partial y}=Q(x,y)=\frac{\partial U}{\partial y}+\phi'(y)$, 求解 $\phi'(y)$ 与 $\phi(y)$.

3.2 原函数理论

例题 3.3 (原函数的连续性). 1. 设 $D=\mathbb{R}^2-\{(x,0)|x\geq 0\}$. 写出一个函数 $T:D\to\mathbb{R}$ 满足 T 在 D 中每点可微, 并且

$$\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial T}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2};\tag{31}$$

2. 设 $\Omega=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, 证明: 不存在函数 $U:\Omega\to\mathbb{R}$ 满足 U 在 Ω 中每点可微, 并且

$$\frac{\partial U}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial U}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}.\tag{32}$$

注记 3.3. 在利用原函数理论检验曲线积分的路径无关性时, 除了逐段光滑的基本前提 (条件 I) 以外, 还需要检验至少两点: a) 区域的单连通性; b) 原函数的连续性.

Snacks

调和函数 [Math]

满足

$$0=\nabla^2 u\equiv\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\tag{33}$$

的二阶可微函数 $u=u(x,y)$ 称为*调和函数* (harmonic function). 这类函数具有许多良好的性质.

- 容易根据 Green 公式证明: 调和函数的充要条件是对任意闭曲线 L 满足 $0=\oint_L\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s$. 这是基于*边界条件* (boundary condition) 给出的定义.
  - 有界闭区域 D 上的调和函数 u 可以单值地由它在边界 $L\equiv\partial D$ 上的值确定. 为了验证这一点, 我们在第一 Green 恒等式 (23) 中令 $v=u$, 得到

    $$\iint_D|\boldsymbol{\nabla}u|^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=-\iint_D u\nabla^2u\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y+\oint_L u\frac{\partial u}{\partial n}\,\mathrm{d}s,\tag{34}$$

    则对于满足边界条件 $u\big|_L=0$ 的调和函数 u, 容易知道 $\boldsymbol{\nabla}u\equiv\mathbf{0}$ 在 D 上恒成立, 则 $\mathrm{d}u=0$, 可知 u 恒为常数.
  - 在 $(x_0,y_0)\in D$ 处的调和函数值 $u(x_0,y_0)$ 具体*如何*由其在边界 L 上的性质计算呢? 我们在第二 Green 恒等式 (20) 中令 $v=\ln r$, 其中

    $$r(x,y)=\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}\tag{35}$$

    为点 (x_0,y_0) 与 L 上一点 (x,y) 之间的距离. 由于 v 在 (x_0,y_0) 处不具有连续二阶偏导数, 我们应用挖洞法, 对 $\varepsilon\to 0_+$ 作圆 $C_\varepsilon\equiv\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|r(x,y)=\varepsilon\}$,

得到

$$\iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_L \left(\frac{\partial \ln r}{\partial n}u - \frac{\partial u}{\partial n}\ln r\right)\mathrm{d}s - \oint_{C_\varepsilon}\left(\frac{\partial \ln r}{\partial n}u - \frac{\partial u}{\partial n}\ln r\right)\mathrm{d}s, \quad (36)$$

则

$$\begin{aligned}\oint_{L^+}\left(\frac{\partial \ln r}{\partial n}u - \frac{\partial u}{\partial n}\ln r\right)\mathrm{d}s &= \frac{1}{\varepsilon^2}\oint_{C_\varepsilon^+} u(x,y)\,((x-x_0)\,\mathrm{d}y - (y-y_0)\,\mathrm{d}x)\\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\iint_{D_\varepsilon}\left(2u + (x-x_0)\frac{\partial u}{\partial x} + (y-y_0)\frac{\partial u}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= 2\pi u(x_0,y_0), \qquad (37)\end{aligned}$$

其中, 最后一步由取 $\varepsilon \to 0_+$ 时的极限并作中值估计得到. 据此, 从边界信息计算调和函数内点值的公式为

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi}\oint_L \begin{vmatrix} \frac{\partial \ln r}{\partial n} & \frac{\partial u}{\partial n} \\ \ln r & u \end{vmatrix}\mathrm{d}s. \quad (38)$$

- 以某内点 (x_0,y_0) 为圆心, $R>0$ 为半径作圆 L_R. 对其应用边界公式 (38), 并注意到由几何关系 $(x-x_0, y-y_0) = (R\cos\beta, -R\cos\alpha)$, 得到 *调和函数的平均值原理* (mean value principle, MVP)

$$u(x_0,y_0) = \frac{1}{2\pi R}\oint_{C_R} u(x,y)\,\mathrm{d}s. \quad (39)$$

  - 进一步地, 可以给出 *最大值原理* (maximum principle, MP) 的推论: 有界闭区域 D 上的调和函数 $u(x,y)$ 若能在某内点取到最值 (不论是最大值还是最小值), 则其只能为常函数. 否则, 以最大值 $u(x_0,y_0)=M$ 为例. 作圆 L_R 并应用平均值原理将导出

$$M = u(x_0,y_0) \le \frac{1}{2\pi R}\cdot 2\pi R M = M, \quad (40)$$

    等号成立当且仅当 $u(x,y)\equiv M$ 对圆 C_R 成立. 由圆的半径 R 的任意性以及 $u(x,y)$ 的连续性, 不难得到 $u(x,y)\equiv M$ 对一切 D 上的点均成立.
  - 既然无法在内点取最值, 则只能在边界上取到了. 对有界闭区域 D, 调和函数 $u(x,y)$ 的最大值必然在边界 $L \equiv \partial D$ 取到.