讲义答案合集

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

1 二重积分

1.1 二重可积性

例题 1.1.1 (二重积分的中值定理)**.** 计算

$$\lim_{\rho\to 0_+}\frac{1}{\rho^2}\iint_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1.1}$$

其中 $f(x,y)$ 为二元连续函数.

解答. 记 $D_\rho\equiv\{(x,y):x^2+y^2\le\rho^2\}$. 根据积分中值定理, 存在点 $(x_\rho,y_\rho)\in D_\rho$

$$\iint_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\rho^2 f(x_\rho,y_\rho). \tag{1.2}$$

所以,

$$\lim_{\rho\to 0_+}\frac{1}{\rho^2}\iint_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{\rho\to 0_+}\frac{\pi\rho^2 f(x_\rho,y_\rho)}{\rho^2}=\pi f(0,0). \tag{1.3}$$

1.2 重积分与累次积分

1.2.1 积分次序的选择

例题 1.2.1 ("扫描" 的方向与积分次序)**.** 设 D 是由直线 $x=\frac{p}{2}$ 和抛物线 $y^2=2px$ 包围的区域, 且 $p>0$, 计算二重积分

$$I=\iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1.4}$$

解答. 记 D_0 为 D 上半平面内的部分, 对应的二重积分为 I_0. 由对称性 $I=2I_0$, 这里

$$\begin{aligned}
I_0&=\int_0^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}} xy^2\,\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{\frac{p}{2}}\left(\frac{1}{3}xy^3\right)_{y=0}^{y=2px}\mathrm{d}x\\
&=\frac{(2p)^{\frac{3}{2}}}{3}\int_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{(2p)^{\frac{3}{2}}}{3}\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right)_{x=0}^{x=\frac{p}{2}}\\
&=\frac{p^5}{42}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

所以, $I=\frac{p^5}{21}$.

例题 1.2.2 (运算简繁的区别)**.** 设 D 是由直线 $y=0,y=2,y=x,y=x+2$ 所围成的 $\mathbb{R}^2$ 中有界闭区域. 求二重积分

$$\iint_D\left(\frac{1}{2}x-y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1.6}$$

解答. 我们展示两种积分次序的选择, 以示难易之别.

1. “横向扫描”: 先对 y 积分 (较为繁琐):

$$\begin{aligned}
I &= \int_{-2}^{0} \mathrm{d}x \int_{0}^{x+2} \left(\frac{1}{2}x - y\right) \mathrm{d}y + \int_{0}^{2} \mathrm{d}x \int_{x}^{2} \left(\frac{1}{2}x - y\right) \mathrm{d}y \\
&= \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=0}^{y=x+2} \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Big|_{y=x}^{y=2} \mathrm{d}x \\
&= \int_{-2}^{0} (-x-2)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} (x-2)\,\mathrm{d}x \\
&= \left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{x=-2}^{x=0} + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Big|_{x=0}^{x=2} \\
&= -4;
\end{aligned} \tag{1.7}$$

2. “纵向扫描”: 先对 x 积分 (较为简便):

$$\begin{aligned}
I &= \int_{0}^{2} \mathrm{d}y \int_{y-2}^{y} \left(\frac{1}{2}x - y\right) \mathrm{d}x \\
&= \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{4}x^2 - xy\right)\Big|_{x=y-2}^{x=y} \mathrm{d}y \\
&= \int_{0}^{2} (-y-1)\,\mathrm{d}y \\
&= \left(-\frac{1}{2}y^2 - y\right)\Big|_{y=0}^{y=2} \\
&= -4.
\end{aligned} \tag{1.8}$$

例题 1.2.3 (可积性的区别)**.** 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $y=2, x=0$ 围成的区域. 计算二重积分

$$I = \iint_D \sin\left(y^3\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1.9}$$

解答. 由已知,

$$I = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^{y^2} \sin\left(y^3\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 y^2 \sin\left(y^3\right) \mathrm{d}y = \frac{1-\cos 8}{3}. \tag{1.10}$$

1.2.2 简单的积分区域

例题 1.2.4 (矩形区域上的二重积分)**.** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.11}$$

解答. 考虑二重积分 $I \equiv \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{d}y\,(f(x)-f(y))^2$, 则

$$
\begin{aligned}
&0 \le I \\
&= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{d}y - 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y + \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b f^2(y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2, \qquad (1.12)
\end{aligned}
$$

所以 $\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 成立.

例题 1.2.5 (直角三角形区域上的二重积分)**.** 计算累次积分

$$
I = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y. \qquad (1.13)
$$

解答. 记 $D = \{(x,y)|0 \le x \le y \le \pi\}$, 则

$$
I = \iint_D \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{d}y \int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin y\,\mathrm{d}y = 2. \qquad (1.14)
$$

例题 1.2.6 (可分离变量的二重积分)**.** 设函数 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的正值连续函数, 且最小值为 m, 最大值为 M. 证明:

$$
1 \le \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right) \le \frac{(m+M)^2}{4mM}. \qquad (1.15)
$$

解答. 题设不等式中, 两定积分的乘积事实上等于矩形区域 $D \equiv [0,1]\times[0,1]$ 上的二重积分 $I \equiv \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

1. 一方面,

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \frac{1}{2}\left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\ge \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 1; \qquad (1.16)
\end{aligned}
$$

2. 另一方面, 若对原题直接运用基本不等式

$$
\begin{aligned}
I &= \left(\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{mM}}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{\sqrt{mM}}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \\
&\le \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{mM}}{f(x)} + \frac{f(x)}{\sqrt{mM}}\right)^2 \mathrm{d}x, \qquad (1.17)
\end{aligned}
$$

则由于 $f(x) \in \left[\sqrt{\frac{m}{M}}, \sqrt{\frac{M}{m}}\right]$, 我们有

$$I \leq \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}}\right)^2 \mathrm{d}x = \frac{(m+M)^2}{4mM}. \tag{1.18}$$

注记 1.1. 一个失败的尝试:

$$\begin{aligned}
2I + 2 &= \iint_D \left(\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}} + \sqrt{\frac{f(y)}{f(x)}}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\leq \iint_D \left(\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}}\right)^2 \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{(m+M)^2}{mM},
\end{aligned} \tag{1.19}$$

于是,

$$I \leq \frac{m^2+M^2}{2mM}. \tag{1.20}$$

但

$$\frac{(m+M)^2}{4mM} \leq \frac{m^2+M^2}{2mM}. \tag{1.21}$$

失败的原因在于放缩过松, 我们不宜将 x, y 两个自由度在同一步骤放缩到常数.

1.2.3 复杂的积分区域

例题 1.2.7 (从边界条件确定积分限)**.** 两个半径为 a 的圆柱体, 其轴线相互垂直且交于一点 O. 求两圆柱体公共部分 (古称**牟合方盖**) 的体积.

解答. 图1给出了牟合方盖 (第一卦限) 内的几何示意图. 其中, 圆柱面 $x^2+z^2=a^2$ 与 $y^2+z^2=1$ 相交, 其在 xOz 和 yOz 面上的截口曲线均为圆弧, 而在 xOy 及任意与之平行的平面上的截口曲线为正方形.

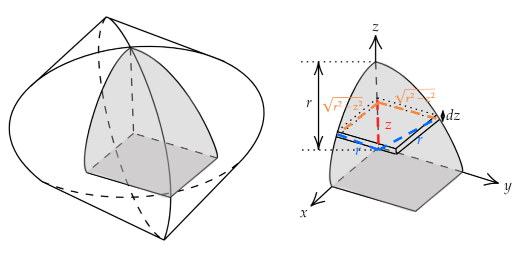

Figure 1: 牟合方盖示意图

考虑高度 $z \in [0,a]$, 截面积 $\sigma(z) = \sqrt{a^2-z^2}\cdot\sqrt{a^2-z^2} = a^2-z^2$. 所以

$$V = 8\int_0^a \sigma(z)\,\mathrm{d}z = \frac{16}{3}a^3. \tag{1.22}$$

例题 1.2.8 (分段积分). 计算二重积分

$$I = \iint_D \left|x - y^2\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1.23}$$

其中 $D = [0,1] \times [-1,1]$.

解答. 记 $D_1 = \{(x,y) \in D | x > y^2\}$, $D_2 \subset D$ 为 D_1 的补集. 此时,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{D_1} (x - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{y^2}^{1} (x - y^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}y^4 - y^2 + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{15}, \qquad (1.24) \\
I_2 &= \iint_{D_2} (y^2 - x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{0}^{y^2} (y^2 - x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}y^4\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{5}, \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

于是 $I = I_1 + I_2 = \frac{11}{15}$.

1.3 极坐标系下的二重积分

例题 1.3.1 (被积函数适宜极坐标代换). 计算二重积分

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \\
D &= \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}. \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

解答. 极坐标系下, 积分区域 $D \mapsto D' \equiv \left\{(\rho,\theta) | 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$. 此时

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{D'} \rho \ln\left(1 + \rho^2\right) \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^1 \rho \ln\left(1 + \rho^2\right) \mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\rho^2 \ln\left(1 + \rho^2\right) - \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \rho^2\right)\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1} \\
&= \frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1). \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

例题 1.3.2 (积分区域适宜极坐标代换). 计算曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与 $x^2 + y^2 = 3z$ 所

围的空间区域在 $z \geq 0$ 部分的体积.

解答. 两曲面交于平面 $z=1$ 上的曲线 $x^2+y^2=3$. 记 $D \equiv \{(x,y)|x^2+y^2 \leq 3\}$, 则所求体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left(\sqrt{4-x^2-y^2}-\frac{1}{3}(x^2+y^2)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{4-\rho^2}-\frac{1}{3}\rho^2\right)\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{3}(4-\rho^2)^{\frac{3}{2}}-\frac{1}{12}\rho^4\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{3}} \\ &= \frac{19\pi}{6}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

例题 1.3.3 (复杂的积分区域)**.** 计算二重积分 $I=\iint_D (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 由两个圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2-2x+y^2=0$ 的公共部分在第一象限内的区域.

解答. 两圆弧在第一象限交于 (极坐标) 点 $\rho=1, \theta=\frac{\pi}{3}$. 由几何关系,

$$D=\left\{(\rho,\theta)\middle|0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \rho \leq 1\right\} \cup \left\{(\rho,\theta)\middle|\frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta\right\} \equiv D_1 \cup D_2. \tag{1.29}$$

于是,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^2\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{\pi}{9}, \end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{8}{3}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{16}{9}-\sqrt{3}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

所以 $I=I_1+I_2=\frac{\pi+16}{9}-\sqrt{3}$.

作业题

作业 1.1. 计算积分 $I=\iint_D (x+y+xy)^2\,\mathrm{d}\sigma$, 其中 $D=\{(x,y) \in \mathbb{R}^2|x^2+y^2 \leq 1\}$.

解答. 作极坐标变换 $(x,y)\mapsto(\rho,\theta)$, 则 D 的边界曲线方程为 $\rho=1, 0\le\theta\le 2\pi$. 于是,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\,(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+\rho^2\cos\theta\sin\theta)^2\\
&= \int_0^1 \rho^3\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\left(1+\rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta+2\cos\theta\sin\theta+2\rho\cos^2\theta\sin\theta+2\rho\cos\theta\sin^2\theta\right)\\
&= \int_0^1\left(2\pi\rho^3+\frac{\pi}{4}\rho^5\right)\mathrm{d}\rho\\
&= \frac{13}{24}\pi.
\end{aligned}\tag{1.32}$$

作业 1.2. 计算积分 $I=\iint_D\left(\frac{3x^2\sin y}{y}+2\mathrm{e}^{x^2}\right)\mathrm{d}\sigma$, 其中 D 由 $y=x, y=x^3$ 围成.

解答. 由已知,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1\mathrm{d}x\int_{x^3}^{x}2\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}y\\
&= \int_0^1 2(x-x^3)\mathrm{e}^{x^2}\,\mathrm{d}x\\
&= \mathrm{e}-2;
\end{aligned}\tag{1.33}$$

$$\begin{aligned}
I_2 &= \int_0^1\mathrm{d}y\int_y^{y^{\frac{1}{3}}}\frac{3x^2\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\\
&= \int_0^1(1-y^2)\sin y\,\mathrm{d}y\\
&= 3-2\sin 1-2\cos 1.
\end{aligned}\tag{1.34}$$

所以,

$$I=I_1+I_2=\mathrm{e}-2(\sin 1+\cos 1)+1.\tag{1.35}$$

2 高维空间的重积分

2.1 三重积分的计算

2.1.1 直角坐标系

例题 2.1.1 (地位对等的变量)**.** 设 V 是由平面 $x=0, y=0, z=0, x+y+z=1$ 所围成的四面体. 求三重积分 $\iiint_V\frac{1}{(1+x+y+z)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$.

解答. 由于 x,y,z 地位均等, 不同的积分次序对应的难易程度是相当的. 我们以 “先二重积分、后一维积分” 的 “平面夹层法” 为例. 对给定的 $0\le z_0\le 1$, 平面 $z=z_0$ 将与

V 相交于平面闭区域 $D_{z_0}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x+y\le 1-z_0,x\ge 0,y\ge 0\}$. 于是,

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1 \mathrm{d}z\iint_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x+y+z)^2}\\
&=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}x\int_0^{1-z-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y+z)^2}\\
&=\int_0^1\mathrm{d}z\int_0^{1-z}\left(\frac{1}{1+x+z}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\left(\frac{1}{2}z-\ln(1+z)+\ln 2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}z\\
&=\frac{3}{4}-\ln 2.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

例题 2.1.2 (积分次序: 几何视角)**.** 计算三重积分 $I=\iiint_V xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 V 是曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x,x=1,z=0$ 所围的区域.

解答. 为了避免分段积分, 我们选择 "曲顶柱体法". 注意到 V 在 xOy 平面上的投影为 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le y\le x\le 1\}$, 且对 D 内给定的一点 (x,y), 区域 V 将满足 $0\le z\le xy$. 于是,

$$\begin{aligned}
I&=\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{xy}xy^2z^3\,\mathrm{d}z\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}xy^2z^3\,\mathrm{d}z\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{4}x^5y^6\,\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\frac{1}{28}x^{12}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{364}.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

例题 2.1.3 (积分次序: 代数视角)**.** 计算三重积分 $I=\iiint_\Omega(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是平面 $x+y+z=1$ 和三个坐标平面围成的四面体.

解答. 闭区域 Ω 在 yOz 平面上的投影 $D_{(y,z)}=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2|y+z\le 1,y\ge 0,z\ge 0\}$. 对任给的 $(y,z)\in D_{(y,z)}$, 区域 Ω 将满足 $0\le x\le 1-y-z$. 于是,

$$\begin{aligned}
I&=\iint_{D_{(y,z)}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\int_0^{1-y-z}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\iint_{D_{(y,z)}}(1-y)(1-y-z)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&=\int_0^1(1-y)\,\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(1-y-z)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1(1-y)\left(1-\mathrm{e}^{-(1-y)^2}\right)\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{4\mathrm{e}}.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

2.1.2 柱坐标系与球坐标系

例题 2.1.4 (柱坐标变换)**.** 计算三重积分

$$I = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}V, \tag{2.4}$$

其中 $\Omega : 0 \le z \le x^2 + y^2 \le 1$.

解答. 作柱坐标变换, 则 $\Omega \mapsto \Omega' \equiv \{(\rho,\theta,z)|0 \le z \le \rho^2 \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. 于是,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\sqrt{z}}^1 (z^2 + \rho^2 \sin^2\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}z^2(1-z) + \frac{1}{4}(1-z^2)\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \pi \int_0^1 \left(z^2(1-z) + \frac{1}{4}(1-z^2)\right)\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

例题 2.1.5 (球坐标变换)**.** 设 $R > 0$. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是两个球 $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz \le 0$ 围成的区域.

解答. 作球坐标变换, 则 $\Omega \mapsto \Omega' \equiv \Omega_1' \cup \Omega_2'$, 其中:

$$\Omega_1' : 0 \le \phi \le \frac{\pi}{3}, 0 \le \rho \le R, 0 \le \theta \le 2\pi; \tag{2.6}$$

$$\Omega_2' : \frac{\pi}{3} \le \phi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le 2R\cos\phi, 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{2.7}$$

于是,

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi\left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\phi\,\mathrm{d}\phi \int_0^R (\rho^2\cos^2\phi)\rho^2\,\mathrm{d}\rho + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\,\mathrm{d}\phi \int_0^{2R\cos\phi} (\rho^2\cos^2\phi)\rho^2\,\mathrm{d}\rho\right) \\
&= \pi R^5\left(\frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\phi\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi + \frac{64}{5}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\cos^7\phi\,\mathrm{d}\phi\right) \\
&= \frac{59\pi R^5}{480}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2 重积分的物理意义

2.2.1 曲面的表面积

例题 2.2.1 (平面闭区域的面积)**.** 设 $a > 0$, 计算曲线 $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2), x^2+y^2 \ge a^2$ 所围区域的面积 S.

解答. 作极坐标变换, 则曲线方程为 $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta, \rho \ge a$. 根据对称性, 我们求其在第一象限的部分

$$D \equiv \left\{(\rho,\theta)|0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}, a \le \rho \le a\sqrt{2\cos 2\theta}\right\} \tag{2.9}$$

的面积 $\sigma(D)$, 则 $S=4\sigma(D)$. 由于

$$\begin{aligned}\sigma(D)&=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\int_0^{\frac{\pi}{6}}\mathrm{d}\theta\int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}}\rho\,\mathrm{d}\rho\\&=a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\cos 2\theta-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\theta\\&=\left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right)a^2,\end{aligned}\tag{2.10}$$

则 $S=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)a^2$.

例题 2.2.2 (空间曲面的表面积)**.** 设 $a>0$, 计算曲面 $az=xy$ 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 以内的部分的表面积 S.

解答. 我们考虑其在第一象限内的部分 Σ, 则 $S=4\sigma(\Sigma)$. 对 Σ 在 xOy 平面上的投影 D 作极坐标变换, 得 $D\mapsto D'\equiv\left\{(\rho,\theta)|0\le\rho\le a,0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$. 对于曲面 $z=\frac{xy}{a}$, 我们有 $z_x=\frac{y}{a},z_y=\frac{x}{a}$. 所以,

$$\begin{aligned}\sigma(\Sigma)&=\iint_D\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\iint_{D'}\rho\sqrt{1+\frac{\rho^2}{a^2}}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\&=\frac{\pi a^2}{6}(2\sqrt{2}-1),\end{aligned}\tag{2.11}$$

从而 $S=\frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

2.2.2 几何体的体积

例题 2.2.3 (直角坐标系)**.** 计算曲面 $z=x+y,z=xy,x+y=1,x=0,y=0$ 围成的几何体的体积.

解答. 所围几何体 Ω 在 xOy 平面上的投影 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x+y\le 1,x\ge 0,y\ge 0\}$. 且对给定的 $(x,y)\in D$, 我们有 $xy\le z\le x+y$. 所以,

$$\begin{aligned}V&=\iint_D\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{xy}^{x+y}\mathrm{d}z\\&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x+y-xy)\,\mathrm{d}y\\&=\frac{1}{2}\int_0^1\left(-x^3+x^2-x+1\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{7}{24}.\end{aligned}\tag{2.12}$$

例题 2.2.4 (柱坐标系与球坐标系)**.** 计算曲面 $x^2+y^2+z^2=2az,x^2+y^2\le z^2$ 所围区域的体积.

解答. 我们同时展示柱坐标变换与球坐标变换的计算方法.

1. 柱坐标变换下,
$$\Omega' = \left\{(\rho,\theta,z)\middle|0\le\theta\le 2\pi, 0\le\rho\le a, \rho\le z\le a+\sqrt{a^2-\rho^2}\right\}. \tag{2.13}$$
于是,
$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_0^a \rho\,\mathrm{d}\rho\int_\rho^{a+\sqrt{a^2-\rho^2}}\mathrm{d}z \\ &= 2\pi\int_0^a\left(a\rho+\rho\sqrt{a^2-\rho^2}-\rho^2\right)\mathrm{d}\rho \\ &= \pi a^3. \end{aligned} \tag{2.14}$$

2. 球坐标变换下,
$$\Omega'' = \left\{(\rho,\phi,\theta)\middle|0\le\theta\le 2\pi, 0\le\phi\le\frac{\pi}{4}, 0\le\rho\le 2a\cos\phi\right\}. \tag{2.15}$$
于是,
$$\begin{aligned} V &= 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\int_0^{2a\cos\phi}\rho^2\,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{16\pi a^3}{3}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin\phi\cos^3\phi\,\mathrm{d}\phi \\ &= \pi a^3. \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.3 变量代换的一般理论

例题 2.3.1 (椭球坐标系)**.** 设 r 是正实数, $f:(-r,r)\to\mathbb{R}$ 连续, $f(0)=0$, f 在 0 点可导, 对于每个 $t>0$, 定义
$$V(t) = \left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3\middle|x^2+16y^2+\frac{z^2}{25}\le t^2\right\}, \tag{2.17}$$
证明
$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^5}\iiint_{V(t)} f\left(x^2+16y^2+\frac{z^2}{25}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \pi f'(0). \tag{2.18}$$

解答. 作代换
$$\begin{cases} x=\rho\sin\phi\cos\theta, \\ y=\frac{1}{4}\rho\sin\phi\sin\theta, \\ z=5\rho\cos\phi, \end{cases} \tag{2.19}$$
则其 Jacobian 行列式 $\det\{J\}=\frac{5}{4}\rho^2\sin\phi$. 此时, $V(t)\mapsto V'(t)\equiv\{(\rho,\phi,\theta)|0\le\rho\le$

$t, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. 于是,

$$\iiint_{V(t)} f\left(x^2+16y^2+\frac{z^2}{25}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \frac{5}{4}\iiint_{V(t)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\int_0^t \rho^2 f(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho$$
$$= 5\pi\int_0^t \rho^2 f(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho. \tag{2.20}$$

由 l'Hôpital 法则及导数的定义可知,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^5}\iiint_{V(t)} f\left(x^2+16y^2+\frac{z^2}{25}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \frac{5\pi}{t^5}\int_0^t \rho^2 f(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho\\ &= \frac{\pi f(t^2)}{t^2}\\ &= \pi f'(0).\end{aligned} \tag{2.21}$$

例题 2.3.2 (变量代换与化简)**.** 计算二重积分 $I = \iint_D \left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由四条曲线 $xy=1, xy=9, y=x, y=4x$ 在第一象限围成的区域.

解答. 作代换

$$\begin{cases} u = xy,\\ v = \frac{y}{x}, \end{cases} \tag{2.22}$$

则其 Jacobian 行列式

$$\det\left\{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\} = \begin{vmatrix} \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}}\\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \frac{1}{2v}. \tag{2.23}$$

此时, $D \mapsto D' \equiv \{(u,v)|1\le u\le 9, 1\le v\le 4\}$. 于是,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'}(\sqrt{u}+\sqrt{v})\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{2v}\\ &= \frac{1}{2}\int_1^9\mathrm{d}u\int_1^4\left(u^{\frac{1}{2}}v^{-1}+v^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{2}\int_1^9\left(2u^{\frac{1}{2}}\ln 2+2\right)\mathrm{d}u\\ &= 8+\frac{52}{3}\ln 2. \end{aligned} \tag{2.24}$$

作业题

作业 2.1. 计算积分 $I = \iiint_\Omega \frac{(x+y+z)^2\sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)}\,\mathrm{d}V$, 其中 $\mathrm{d}V$ 即 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, Ω 是由曲面 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}, z=\sqrt{3(1+x^2+y^2)}, x^2+y^2=1$ 所围成的区域.

解答. 作柱坐标变换, 则 $\Omega \mapsto \Omega' \equiv \{(\rho,\theta,z)|0\le\rho\le 1, 0\le\theta\le 2\pi, \sqrt{1+\rho^2}\le z\le$

$\sqrt{3(1+\rho^2)}\}$. 被积函数

$$u=\frac{(x+y+z)^2\sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)}=\frac{(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+z)^2\sqrt{1+\rho^2}}{(\rho^2+z^2)(1+\rho^2+z^2)}. \tag{2.25}$$

于是,

$$\begin{aligned}I&=\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\sqrt{1+\rho^2}}^{\sqrt{3(1+\rho^2)}}\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{(\rho^2+z^2)(1+\rho^2+z^2)}\,\mathrm{d}z\int_0^{2\pi}(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+z)^2\,\mathrm{d}\theta\\&=2\pi\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_{\sqrt{1+\rho^2}}^{\sqrt{3(1+\rho^2)}}\frac{\sqrt{1+\rho^2}}{1+\rho^2+z^2}\,\mathrm{d}z\\&=2\pi\int_0^1\rho\,\mathrm{d}\rho\int_1^{\sqrt{3}}\frac{\mathrm{d}t}{1+t^2}\\&=\frac{\pi^2}{12}.\end{aligned} \tag{2.26}$$

3 曲线积分

3.1 两类曲线积分的计算

3.1.1 I 类曲线积分: 弧微元

例题 3.1.1 (对弧微元直接积分)**.** 计算 I 类曲线积分 $I=\int_L(x+y)\,\mathrm{d}s$, 其中 L 是以 $O(0,0),A(1,0),B(0,1)$ 为顶点的三角形围线.

解答. 我们分段计算,

$$\begin{aligned}I&=\int_{OA}s\,\mathrm{d}s+\int_{AB}\left(1-\frac{s}{\sqrt{2}}+\frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}s+\int_{BO}s\,\mathrm{d}s\\&=2\int_0^1 s\,\mathrm{d}s+\int_0^{\sqrt{2}}\mathrm{d}s\\&=1+\sqrt{2}.\end{aligned} \tag{3.1}$$

例题 3.1.2 (换元到坐标变量)**.** 计算 I 类曲线积分 $I=\int_L y^2\,\mathrm{d}s$, 其中 $L:y=\mathrm{e}^x,0\le x\le 1$.

解答. 由弧微分关系 $\mathrm{d}s=\sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x=\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$. 所以,

$$I=\int_0^1\mathrm{e}^{2x}\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{3}\left((1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}}-2\sqrt{2}\right). \tag{3.2}$$

例题 3.1.3 (参数方程: 平面曲线)**.** 设 E 是椭圆 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+\frac{y^2}{4}=1,-1\le x\le 1,-2\le y\le 2\}$. 计算第一型曲线积分 $I=\int_E|xy|\,\mathrm{d}s$.

解答. 曲线 E 的参数方程为 $(x,y)=(cos\theta,2\sin\theta), 0\le\theta\le 2\pi$. 根据对称性,

$$
\begin{aligned}
I &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos\theta\sqrt{4\cos^2\theta+\sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\
&= 2\int_0^{\pi}\sqrt{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cos\phi}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi \\
&= \frac{8}{9}\left(\left(\frac{5}{2}+\frac{3}{2}\cos\phi\right)^{\frac{3}{2}}\right)_{\phi=\pi}^{\phi=0} \\
&= \frac{56}{9}.
\end{aligned} \tag{3.3}
$$

例题 3.1.4 (参数方程: 空间曲线)**.** 计算第一型曲线积分 $I=\int_L (x^2+y^2+z^2)\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为一段螺旋线 $x=a\cos t, y=a\sin t, z=bt, 0\le t\le 2\pi$.

解答. 由已知, $x'(t)=a\cos t, y'(t)=-a\sin t, z'(t)=b$. 所以,

$$
I=\int_0^{2\pi}\left(a^2+b^2t^2\right)\sqrt{a^2+b^2}\,\mathrm{d}t=\frac{2\pi}{3}\left(3a^2+4\pi^2b^2\right)\sqrt{a^2+b^2}. \tag{3.4}
$$

3.1.2 II 类曲线积分: 向量值的投影

例题 3.1.5 (对弧微元直接积分)**.** 设 $R>0$. 计算曲线积分 $I=\int_L x^2\,\mathrm{d}x-xy\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为从点 $A(R,0)$ 到点 $B(0,R)$ 的圆弧 $x^2+y^2=R^2$ (逆时针方向).

解答. 给定弧长 $0\le s\le\frac{\pi}{2}R$, 则 $x=R\cos\frac{s}{R}, y=R\sin\frac{s}{R}$. 于是,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}R}\left(-R^2\sin\frac{s}{R}\cos^2\frac{s}{R}-R^2\sin^2\frac{s}{R}\cos\frac{s}{R}\right)\mathrm{d}s \\
&= -\frac{2}{3}R^3.
\end{aligned} \tag{3.5}
$$

例题 3.1.6 (参数方程: 平面曲线)**.** 计算曲线积分 $I=\int_L (x^2-2xy)\,\mathrm{d}x+(y^2-2xy)\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为抛物线 $y=x^2, -1\le x\le 1$ (沿 x 轴正方向).

解答. 由已知,

$$
\begin{aligned}
I &= \int_{-1}^{1}\left((x^2-2x^4)+2x(x^4-2x^3)\right)\mathrm{d}x \\
&= 2\int_0^1 (x^2-4x^4)\,\mathrm{d}x \\
&= -\frac{14}{15}.
\end{aligned} \tag{3.6}
$$

例题 3.1.7 (参数方程: 空间曲线)**.** 设 $a>0$. 计算曲线积分 $I=\oint_L y^2\,\mathrm{d}x+z^2\,\mathrm{d}y+x^2\,\mathrm{d}z$, 其中 L 为 *Viviani* 曲线

$$
\begin{cases}
x^2+y^2+z^2=a^2, \\
x^2+y^2=ax
\end{cases} \tag{3.7}
$$

在 $z\ge 0$ 处的分支. 从 Ox 轴的无穷远处 $(x>a)$ 看去, 取逆时针方向为正方向.

解答. 在球坐标系下, Viviani 曲线由球面 $\rho = a$ 与圆柱面 $\rho^2 \sin\phi = a^2\cos\theta$ 相交而得. 所以, 它的 $z \geq 0$ 分支的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos^2\theta, \\ y = a\cos\theta\sin\theta, \quad \theta \in \left[-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right]. \\ z = a\sin\theta, \end{cases} \tag{3.8}$$

于是,

$$\begin{aligned} I &= a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\cos^3\theta\sin^3\theta + \sin^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \cos^5\theta\right) \mathrm{d}\theta \\ &= a^3 \left(\frac{1}{8}\cos 2\theta - \frac{1}{24}\cos^3 2\theta - \frac{1}{4}\theta + \frac{3}{16}\sin 2\theta + \frac{1}{5}\sin^5\theta - \frac{2}{3}\sin^3\theta + \sin\theta\right)\Bigg|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi a^3}{4}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.2 Green 公式及其应用

3.2.1 对 Green 公式的理解

例题 3.2.1 (检查成立条件)**.** 计算曲线积分

$$I = \oint_{L^+} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}, \tag{3.10}$$

其中曲线 L 分别为:

1. 单位圆在第一象限部分所围成的弓形;
2. 单位圆.

解答. 记 $P(x,y) \equiv \frac{y}{x^2+y^2}, Q(x,y) \equiv -\frac{x}{x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2+y^2)^2}. \tag{3.11}$$

在单位圆面 D 内, $P(x,y)$ 与 $Q(x,y)$ 在除点 $(0,0)$ 外的任意一点均具有连续的一阶偏导数.

1. 在曲线 L_1 所围成的弓形 D_1 内, P 与 Q 均具有连续的一阶偏导数. 所以, 我们可以直接应用 Green 公式:

$$I_1 = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0. \tag{3.12}$$

2. 由于单位圆面 D_2 内含有奇点 $(0,0)$, 在应用 Green 公式时应注意将该点排除在外. 我们演示这类问题的两种解法.

(a) 直接完成曲线积分. 注意到 L_2 具有参数方程 $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$. 所以

$$I_2=\int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta=-2\pi. \tag{3.13}$$

(b) 挖洞法. 任取顺时针方向的闭曲线 $L_R^-: x^2+y^2=r^2$, 其中 $0<r<1$, 由 L_r 与 L_2 围成的平面环形闭区域记为 D_R. 此时 P,Q 在 D_r 上具有连续一阶偏导数, 于是

$$I_2+\oint_{L_r^-}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint_{D_r}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0, \tag{3.14}$$

所以,

$$I_2=-\oint_{L_r^-}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_{2\pi}^{0}\frac{(-r^2\sin^2\theta-r^2\cos^2\theta)}{r^2}\,\mathrm{d}\theta=-2\pi. \tag{3.15}$$

这里挖洞法与直接曲线积分的难易程度完全等同. 但这种思想方法对处理复杂外围曲线的积分而言将非常有益, 在接下来的例题中会频繁应用.

例题 3.2.2 (等价形式: 散度定理)**.** 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上存在连续的一阶偏导数, 边界曲线 $L\equiv\partial D$ 分段光滑. 记 $\mathbf{n}$ 为曲线 L 的外法线方向的单位向量. 证明二维平面上的散度定理

$$\oint_{L^+}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s\equiv\oint_{L^+}P(x,y)\cos(\mathbf{n},x)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\cos(\mathbf{n},y)\,\mathrm{d}y=\iint_D\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3.16}$$

成立. 其中, $\mathbf{F}(x,y)\equiv(P(x,y),Q(x,y))$ 的散度 (divergence) 定义为

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y)\equiv\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{3.17}$$

解答. 记正方向上的单位切向量 $\mathbf{t}=(\cos\alpha,\cos\beta)$. 由几何关系, 外法线上的单位向量

$$\mathbf{n}=(\cos(\mathbf{n},x),\cos(\mathbf{n},y))=(\cos\beta,-\cos\alpha). \tag{3.18}$$

于是,

$$\begin{aligned}\oint_{L^+}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s&=\oint_{L^+}(-Q(x,y)\cos\alpha+P(x,y)\cos\beta)\,\mathrm{d}s\\&=\oint_{L^+}-Q(x,y)\,\mathrm{d}x+P(x,y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{3.19}$$

则由 Green 公式,

$$\oint_{L^+}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s=\iint_D\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3.20}$$

例题 3.2.3 (等价形式: 第二 Green 恒等式)**.** 设 $u(x,y),v(x,y)$ 在有界闭区域 D 上具有

连续的二阶偏导数, 边界曲线 $L^+ = \partial D$. 证明平面上的第二 *Green* 恒等式

$$\iint_D \begin{vmatrix} \nabla^2 u & \nabla^2 v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{L^+} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}s, \tag{3.21}$$

其中, $\frac{\partial}{\partial n}$ 为沿曲线 L 的外法线方向的的导数, 而 *Laplacian* 算符

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{3.22}$$

解答. L^+ 的单位切向量 $\mathbf{t} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 所对应的外法线单位向量 $\mathbf{n} = (\cos\beta, -\cos\alpha)$. 于是, 由 Green 公式,

$$\begin{aligned}
\oint_{L^+} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}s &= \oint_{L^+} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha \right) v - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\beta - \frac{\partial v}{\partial y}\cos\alpha \right) u \right) \mathrm{d}s \\
&= \oint_{L^+} \left(\frac{\partial v}{\partial y}u - \frac{\partial u}{\partial y}v \right) \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial u}{\partial x}v - \frac{\partial v}{\partial x}u \right) \mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}v - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}u \right) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2}u - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}v \right) \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \begin{vmatrix} \nabla^2 u & \nabla^2 v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

3.2.2 用 Green 公式计算第二型曲线积分

例题 3.2.4 (挖洞法)**.** 设 $E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$, 取逆时针方向为正方向. 计算第二型曲线积分

$$I = \oint_E \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}. \tag{3.24}$$

解答. 记 $P(x,y) \equiv -\frac{y}{x^2+y^2}, Q(x,y) \equiv \frac{x}{x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \tag{3.25}$$

其中 P, Q 在 E 围成的平面闭区域 D 内除 $(0,0)$ 外的任意一点具有一阶连续偏导数. 对 $0 < r < 1$, 作顺时针方向的闭曲线

$$L_r = \{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = r^2 \}, \tag{3.26}$$

则我们对 L_r 与 E 围成的平面闭区域 D_r 应用 Green 公式,

$$\iint_{D_r} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{E+L_r} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y, \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
0 &= I + I_r \\
&= I + \int_{2\pi}^{0} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= I - 2\pi,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

所以 $I=2\pi$.

例题 3.2.5 (挖洞法; 边界曲线的构造)**.** 计算曲线积分

$$I=\oint_\Gamma\left(\frac{y^2+y+4x^2}{4x^2+y^2}+\sin\left(x^2\right)\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{4x^2-x+y^2}{4x^2+y^2}+\sin\left(y^2\right)\right)\mathrm{d}y, \tag{3.29}$$

其中, Γ 是 $x^2+y^2=9(y\geq 0)$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1(y\leq 0)$ 所组成的闭曲线的逆时针方向.

解答. 记

$$P_1(x,y)\equiv\frac{y^2+y+4x^2}{4x^2+y^2}+\sin\left(x^2\right), \tag{3.30}$$

$$Q_1(x,y)\equiv\frac{4x^2-x+y^2}{4x^2+y^2}+\sin\left(y^2\right), \tag{3.31}$$

二者在 Γ 所围成的闭区域 D_Γ 内除 $(0,0)$ 外的一切点均具有一阶连续偏导数. 注意到

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}=\frac{4x^2-y^2}{(4x^2+y^2)^2}, \tag{3.32}$$

则若作逆时针方向的闭曲线 $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|4x^2+y^2=1\}$, 我们对 Γ,E 所围成的平面闭区域 D 应用 Green 公式,

$$\begin{aligned}I&=\oint_{E^+}\left(1+y+\sin\left(x^2\right)\right)\mathrm{d}x+\left(1-x+\sin\left(y^2\right)\right)\mathrm{d}y\\&=\iint_{4x^2+y^2\leq 1}-2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-\pi.\end{aligned} \tag{3.33}$$

例题 3.2.6 (挖洞法; 重积分的中值估计)**.** 计算曲线积分

$$I=\oint_L\frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}\left((x\sin x+y\cos x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}y\right), \tag{3.34}$$

其中 L 是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的逆时针方向.

解答. 记

$$P_1(x,y)\equiv\frac{\mathrm{e}^y(x\sin x+y\cos x)}{x^2+y^2}, \tag{3.35}$$

$$Q_1(x,y)\equiv\frac{\mathrm{e}^y(y\sin x-x\cos x)}{x^2+y^2}, \tag{3.36}$$

于是

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}=\mathrm{e}^y\left(\frac{x\sin x+y\cos x}{x^2+y^2}+\frac{(x^2-y^2)\cos x-2xy\sin x}{(x^2+y^2)^2}\right). \tag{3.37}$$

对任给的 $0<r<1$, 作逆时针方向的闭曲线

$$L_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=r^2\}, \tag{3.38}$$

则我们对 L_r 与 L 围成的平面闭区域 D 应用 Green 公式,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D 0 \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y + \oint_{L_r^+} P_1 \, \mathrm{d}x + Q_1 \, \mathrm{d}y \\ &\equiv \frac{1}{r^2} \oint_{L_r^+} P_2 \, \mathrm{d}x + Q_2 \, \mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{3.39}$$

其中,

$$P_2(x, y) = \mathrm{e}^y (x \sin x + y \cos x), \tag{3.40}$$

$$Q_2(x, y) = \mathrm{e}^y (y \sin x - x \cos x) \tag{3.41}$$

满足

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y} = -2\mathrm{e}^y \cos x. \tag{3.42}$$

于是, 根据二重积分中值定理, 存在点 $(x_r, y_r) \in D_r : \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \le r^2\}$, 使得

$$I = -2\frac{1}{r^2} \iint_{D_r} \mathrm{e}^y \cos x \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y = -2\pi \mathrm{e}^{y_r} \cos x_r. \tag{3.43}$$

由于 I 不依赖于 r 的取值, 我们令 $r \to 0_+$, 即得 $I = -2\pi$.

3.3 第二型曲线积分的路径无关性

3.3.1 路径无关性的充要条件

例题 3.3.1 (积分路径的重新选择)**.** 设 n 是正整数, 从点 $(0, 0)$ 到点 $(n\pi, 0)$ 的有向曲线 $L_n = \{(t, |\sin t|) | 0 \le t \le n\pi\}$. 计算出下面的第二型曲线积分在 $n \to \infty$ 下的极限

$$\lim_{n \to \infty} \int_{L_n} \mathrm{e}^{y^2 - x^2} \cos(2xy) \, \mathrm{d}x + \mathrm{e}^{y^2 - x^2} \sin(2xy) \, \mathrm{d}y. \tag{3.44}$$

提示: 你能在推导极限值时不使用 Gaussian 积分 (其本质是广义积分) 的计算结果吗?

解答. 记 $P(x, y) = \mathrm{e}^{y^2 - x^2} \cos(2xy), Q(x, y) = \mathrm{e}^{y^2 - x^2} \sin(2xy)$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2\mathrm{e}^{y^2 - x^2} (y \cos(2xy) - x \sin(2xy)). \tag{3.45}$$

根据第一象限区域的单连通性, 曲线积分

$$I_n \equiv \int_{L_n} \mathrm{e}^{y^2 - x^2} \cos(2xy) \, \mathrm{d}x + \mathrm{e}^{y^2 - x^2} \sin(2xy) \, \mathrm{d}y \tag{3.46}$$

与积分路径无关. 于是, 我们可以重新选择积分路径为 $X \equiv \{(x, 0) | 0 \le x \le n\pi\}$, 得到

$$I_n = \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-x^2} \, \mathrm{d}x. \tag{3.47}$$

为计算 I_n 及 $\lim_{n \to \infty} I_n$, 我们考察 $I_n^2 = \iint_{[0, n\pi] \times [0, n\pi]} \mathrm{e}^{-(x^2 + y^2)} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$. 根据二重积分的

保号性, 容易知道

$$\iint_{x^2+y^2\le n^2\pi^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le I_n^2 \le \iint_{x^2+y^2\le(\sqrt{2}n)^2\pi^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{3.48}$$

也即

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-n^2\pi^2}\right) \le I_n^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2n^2\pi^2}\right). \tag{3.49}$$

根据夹逼定理, 令 $n\to\infty$, 即得所求极限 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

例题 3.3.2 (全微分的配凑)**.** 计算曲线积分

$$I=\int_L \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y, \tag{3.50}$$

其中 $L=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-\pi)^2=\frac{1}{4}, y\ge\pi\right\}$, 取顺时针方向.

解答. 曲线 L 的起点为 $(1,\pi)$, 终点为 $(2,\pi)$. 记 $P(x,y)=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}, Q(x,y)=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$. 于是, 由偏微分关系

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x} \tag{3.51}$$

可知, 存在可微函数 $u(x,y)$ 满足全微分关系 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$. 将函数 $Q(x,y)$ 对变量 y 作积分, 可知

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\phi(x)+\int\frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y \\ &=\phi(x)+\int\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y \\ &=\phi(x)+y\sin\frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

再由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\phi'(x)-\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}=P(x,y) \tag{3.53}$$

可解得 $\phi(x)=x+C$. 于是, $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 的一个原函数为

$$u(x,y)=x+y\sin\frac{y}{x}, \tag{3.54}$$

则所求曲线积分 $I=u(2,\pi)-u(1,\pi)=1+\pi$.

3.3.2 原函数理论

例题 3.3.3 (原函数的连续性)**.** 1. 设 $D=\mathbb{R}^2-\{(x,0)|x\ge 0\}$. 写出一个函数 $T: D\to\mathbb{R}$ 满足 T 在 D 中每点可微, 并且

$$\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial T}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}; \tag{3.55}$$

2. 设 $\Omega=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, 证明: 不存在函数 $U:\Omega\to\mathbb{R}$ 满足 U 在 Ω 中每点可微, 并

且

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{3.56}$$

解答. 1. 我们验证

$$T(x,y) = \begin{cases} \pi - \arctan\left(\frac{x}{y}\right), & y > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & y = 0, \\ -\arctan\left(\frac{x}{y}\right), & y < 0 \end{cases} \tag{3.57}$$

符合要求. 首先, 对一切 $(x, y > 0)$ 的点和 $(x, y < 0)$ 的点, $T(x,y)$ 显然总是可微的, 其偏导数为

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{3.58}$$

其次, 注意到 $T(x,0_+) = T(x,0_-) = \frac{\pi}{2} = T(x,0)$, 则 $T(x,y)$ 在点 $(x,0)$ 处连续. 更进一步地, 注意到对任意 $x_0 < 0$ 有

$$\begin{aligned}
\lim_{(x,y)\to(x_0,0_+)} \frac{\pi - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{\pi}{2} - \frac{y}{x_0}}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(x_0,0_+)} \frac{\frac{y}{x} - \frac{y}{x_0} + o\left(\frac{y^2}{x^2}\right)}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} \\
&= \frac{1}{x_0^2} \lim_{(x,y)\to(x_0,0_+)} \frac{(x_0-x)y + o(y^2)}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} \\
&= 0,
\end{aligned} \tag{3.59}$$

则对 $y > 0$, 下述等式

$$\begin{aligned}
T(x,y) &= T(x_0,0) + 0(x-x_0) + \frac{1}{x_0}(y-0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}\right) \\
&= T(x_0,0) \\
&+ \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{(x,y)=(x_0,0)} (x-x_0) + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{(x,y)=(x_0,0)} (y-0) \\
&+ o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}\right)
\end{aligned} \tag{3.60}$$

表明 $T(x,y)$ 在 $y \geq 0$ 时都可微, 且偏导数均满足 (3.58). 对 $y \leq 0$ 同理可证.

2. 假设存在 U 符合题设. 此时, 由于 Ω 是单连通区域, 其内的任意一条简单闭曲线 L 都将满足

$$I = \oint_{L^+} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0. \tag{3.61}$$

但若我们取 L 为单位圆圆周, 容易计算得到 $I = 2\pi$, 这就构成了矛盾.

4 曲面积分

4.1 两类曲面积分的计算

4.1.1 第一型曲面积分: 面积微元

例题 4.1.1 (对面积微元直接积分)**.** 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 证明:

$$\iint_S f(x+y+z)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{3}\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{4.1}$$

其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

解答. 令 $\xi=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$, 则 $-1\le\xi\le 1$. 且对给定的微元 $\mathrm{d}\xi$, 动平面 $x+y+z=\sqrt{3}\xi\mapsto\sqrt{3}(\xi+\mathrm{d}\xi)$ 截球面所得薄球壳的面积

$$\mathrm{d}S = 2\pi\sqrt{1-d^2(\xi)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-d^2(\xi)}} = 2\pi\,\mathrm{d}\xi\,, \tag{4.2}$$

其中,

$$d(\xi)=\frac{\left|\sqrt{3}\xi\right|}{\sqrt{3}}=|\xi| \tag{4.3}$$

为原点 O 到平面 $x+y+z=\sqrt{3}\xi$ 的距离. 于是, 根据第一型曲面积分的定义,

$$\iint_S f(x+y+z)\,\mathrm{d}S = \int_{-1}^{1} f(\sqrt{3}\xi)2\pi\,\mathrm{d}\xi = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{3}\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.4}$$

例题 4.1.2 (投影到坐标平面)**.** 计算曲面积分

$$I=\iint_S \left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\mathrm{d}S, \tag{4.5}$$

其中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 截下部分.

解答. 曲面 S 在 xOy 平面上的投影为 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\le 1\}$, 且满足方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, 从而

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{4.6}$$

于是,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2}\int_0^1 \rho^5\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\left(1+\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{3\sqrt{2}\pi}{8}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

例题 4.1.3 (参数方程)**.** 计算曲面积分 $I=\iint_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为螺旋面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v, 0\le u\le a, 0\le v\le 2\pi$.

解答. 由已知, $J_{xy}=u, J_{yz}=\sin v, J_{zx}=\cos v$. 于是,

$$\begin{aligned}I&=\int_0^a \mathrm{d}u\int_0^{2\pi}\sqrt{J_{xy}^2+J_{yz}^2+J_{zx}^2}v\,\mathrm{d}v\\&=\int_0^{2\pi}v\,\mathrm{d}v\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{\pi^2}{2}\left(\ln\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}+\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\arctan a}\\&=\pi^2\left(\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)+a\sqrt{1+a^2}\right).\end{aligned}\tag{4.8}$$

4.1.2 第二型曲面积分: 有向面积的投影

例题 4.1.4 (第二型曲面积分的计算)**.** 设 $R>r>0$. 计算曲面积分

$$I=\iint_S (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\tag{4.9}$$

其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx$ 所截曲面在 $z\geq 0$ 的部分的外侧.

解答. S 的单位法向量 $\mathbf{n}=\left(\frac{x-R}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right)$. 所以,

$$\begin{aligned}I&=\iint_S\left((y-z)\frac{x-R}{R}+(z-x)\frac{y}{R}-(x-y)\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}S\\&=\iint_{(x-r)^2+y^2\leq r^2}(z-y)\frac{R}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\pi r^2R-\iint_{(x-r)^2+y^2\leq r^2}\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2-(x-R)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\pi r^2R.\end{aligned}\tag{4.10}$$

其中, 根据对称性,

$$\iint_{(x-r)^2+y^2\leq r^2}\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2-(x-R)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.\tag{4.11}$$

4.2 Gauss 公式及其应用

例题 4.2.1 (用 Gauss 公式计算第二型曲面积分)**.** 设 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2|x^2+2y^2\leq z\leq 3-2x^2-y^2\},\tag{4.12}$$

S^- 是 V 的边界曲面的内侧. 计算第二型曲面积分

$$I=\oiint_{S^-}(x^2+y\sin z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-(2y+z\cos x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(-2xz+x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\tag{4.13}$$

解答. 记

$$P=x^2+y\sin z, Q=-2y-z\cos x, R=-2xz+x\sin y.\tag{4.14}$$

则由 Gauss 公式 (注意积分曲面 S^- 是内侧),

$$\begin{aligned} I &= -\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 2\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{4.15}$$

注意到区域 V 在 xOy 平面上的投影为 $x^2+y^2 \le 1$, 故

$$\begin{aligned} I &= 2\iint_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{x^2+2y^2}^{3-2x^2-y^2} \mathrm{d}z \\ &= 6\iint_{x^2+y^2\le 1} (1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 6\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 (1-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho \\ &= 3\pi. \end{aligned} \tag{4.16}$$

例题 4.2.2 (Gauss 公式; 增补曲面)**.** 计算曲面积分

$$I = \iint_{S^+} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{4.17}$$

其中, S 为圆锥面 $x^2+y^2=z^2(0 \le z \le h)$ 的外侧.

解答. 记 Σ^+ 为平面 $z=h$ 在 $x^2+y^2 \le h^2$ 的部分的上侧. 由 Gauss 公式,

$$I + \iint_{\Sigma^+} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_V 2(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{4.18}$$

其中,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^+} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= h^2 \iint_{x^2+y^2\le h^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \pi h^4, \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V 2(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= 2\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^z \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + z)\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_0^h z^3\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{2}h^4. \end{aligned} \tag{4.20}$$

所以 $I = -\frac{\pi}{2}h^4$.

例题 4.2.3 (Gauss 公式; 挖去奇点)**.** 设参数 $a,b,c>0$. 计算曲面积分

$$I = \oint\!\!\!\oint_{S^+} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.21}$$

其中, S^+ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

解答. 记

$$P=\frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}},\ Q=\frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}},\ R=\frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}},\tag{4.22}$$

则不难验证 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$. 作曲面 $\Sigma^+:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon^2\}$ (取外侧), 其中 $\varepsilon\to 0_+$ 以确保其在球面 S^+ 的内部. 由 Gauss 公式

$$0=I-\oiint_{\Sigma^+}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}},\tag{4.23}$$

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{\Sigma^+}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint_{ax^2+by^2+cz^2\le\varepsilon^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\&=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}.\end{aligned}\tag{4.24}$$

4.3 Stokes 公式及其应用

例题 4.3.1 (用 Stokes 公式计算第二型曲线积分)**.** 设 L 为空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\x+z=1\end{cases}$, 其正方向为自 z 轴正向看下来的逆时针方向. 计算积分

$$I=\oint_{L^+}(y-z+\sin^2x)\,\mathrm{d}x+(z-x+\sin^2y)\,\mathrm{d}y+(x-y+\sin^2z)\,\mathrm{d}z.\tag{4.25}$$

解答. 记 $P=y-z+\sin^2x, Q=z-x+\sin^2y, R=x-y+\sin^2z$, 则

$$\boldsymbol{\nabla}\times(P,Q,R)=-2(\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_z).\tag{4.26}$$

取 S^+ 为 L 所围闭曲面 (实为平面 $x+z=1$ 被 $x^2+y^2=1$ 所截部分) 的上侧, 其单位法向量 $\mathbf{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned}I&=-2\iint_{S^+}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-2\sqrt{2}\iint_S\mathrm{d}S\\&=-4\iint_{x^2+y^2\le1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-4\pi.\end{aligned}\tag{4.27}$$

5 一阶常微分方程

5.1 线性方程

5.1.1 各类方程的求解方法

例题 5.1.1 (齐次情形)**.** 某质点 m 在运动时所受的空气阻力正比于速率: $f=-kv(k>0)$. 设该质点的初速度为 $v_0(>0)$, 计算其于 t 时刻的运动速度 $v=v(t)$.

解答. 根据 Newton 运动方程, 容易写出初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kv=0,\\ v(0)=v_0.\end{cases} \tag{5.1}$$

其中, 通解

$$v(t)=\exp\left\{-\int^t(-k)\,\mathrm{d}\tau\right\}=C\mathrm{e}^{-kt}. \tag{5.2}$$

代入 $v(0)=v_0$, 解得 $C=v_0$. 于是, 符合题意的特解 $v(t)=v_0\mathrm{e}^{-kt}$.

例题 5.1.2 (非齐次情形)**.** 设 $x>0$. 求解初值问题

$$\begin{cases}x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=\sin x,\\ y(\pi)=\frac{1}{\pi}.\end{cases} \tag{5.3}$$

解答. 首先, 求解齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=0$, 得其通解

$$y=\exp\left\{-\int^x\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t\right\}=C_1x^{-2}. \tag{5.4}$$

为求解非齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=\sin x$, 令 $y(x)=u(x)x^{-2}$, 代入得 $u'(x)x^{-1}=\sin x$. 于是,

$$u(x)=\int^x t\sin t\,\mathrm{d}t=\sin x-x\cos x+C, \tag{5.5}$$

从而得到通解 $y=\frac{1}{x^2}(\sin x-x\cos x+C)$. 代入初值条件 $y(\pi)=\frac{1}{\pi}$, 解得 $C=0$. 所以,

$$y=\frac{1}{x^2}(\sin x-x\cos x). \tag{5.6}$$

例题 5.1.3 (Bernoulli 方程)**.** 求解初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=y^2(\cos x-\sin x),\\ y(0)=1.\end{cases} \tag{5.7}$$

解答. 令 $z\equiv y^{-1}$, 则初值问题化为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z=\sin x-\cos x,\\ z(0)=1.\end{cases} \tag{5.8}$$

作代换 $z(x) \equiv u(x)\mathrm{e}^x$, 代入得 $u'(x)\mathrm{e}^x = \sin x - \cos x$. 于是,

$$u(x) = \int^x \mathrm{e}^{-t}(\sin t - \cos t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + C, \tag{5.9}$$

从而得到通解 $z(x) = -\sin x + C\mathrm{e}^x$. 代入初值条件 $z(0) = 1$, 解得 $C = 1$. 所以 $z = -\sin x + \mathrm{e}^x$, 即

$$y(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x - \sin x}. \tag{5.10}$$

5.1.2 应用类问题

例题 5.1.4 (切线的几何关系)**.** 设曲线 $y = y(x)\,(x > 0)$ 经过点 $(1, 2)$, 该曲线上任意一点 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

1. 求 $y(x)$;
2. 求函数 $f(x) = \int_1^x y(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值.

解答. 给定点 $P(x_0, y_0)$ 后, 其到 y 轴的距离为 x_0, 切线 $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ 在 y 轴上的截距为 $y_0 - y'(x_0)x_0$. 于是, 曲线 $y = y(x)$ 的方程将由初值问题

$$\begin{cases} x = y - y'(x)x, \\ y(1) = 2 \end{cases} \tag{5.11}$$

给定.

1. 对 $x > 0$, 方程 (5.11) 等价于

$$y'(x) - \frac{1}{x}y = -1. \tag{5.12}$$

   求解齐次方程 $y' - \frac{1}{x}y = 0$, 得其通解 $y = C_1 x$. 为求解非齐次方程 $y' - \frac{1}{x}y = -1$, 令 $y(x) = u(x)x$, 代入得 $u'(x)x = -1$. 于是,

$$u(x) = -\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x + C, \tag{5.13}$$

   从而得到通解 $y(x) = -x\ln x + Cx$. 代入初值条件 $y(1) = 2$, 解得 $C = 2$. 所以

$$y(x) = x(2 - \ln x). \tag{5.14}$$

2. 由 (1) 得

$$f(x) = \int_1^x t(2 - \ln t)\,\mathrm{d}t = \left(t^2\left(\frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{4}\right)\right)\Bigg|_{t=1}^{t=x} = \frac{5}{4}(x^2 - 1) - \frac{1}{2}x^2\ln x. \tag{5.15}$$

   令 $f'(x) = x(2 - \ln x) = 0$, 解得 $x = \mathrm{e}^2$. 当 $x > \mathrm{e}^2$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $0 < x < \mathrm{e}^2$ 时, $f'(x) > 0$. 所以, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值为

$$f(\mathrm{e}^2) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^4 - 5\right). \tag{5.16}$$

例题 5.1.5 (周期解)**.** $P(x),Q(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上以 $T>0$ 为周期的函数. 若 $\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$, 证明: 一阶线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 存在唯一的以 T 为周期的解.

解答. 记 $F(x)\equiv\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t, G(x)\equiv\int_0^x Q(t)\mathrm{e}^{\int_0^t P(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t$. 于是, 方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解为

$$y(x)=\left(\int_0^x Q(t)\mathrm{e}^{\int_0^t P(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t+C\right)\exp\left\{-\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t\right\}=(G(x)+C)\mathrm{e}^{-F(x)}. \tag{5.17}$$

1. 首先由一个必要条件 $y(0)=y(T)=C$, 解得

$$C=\frac{G(T)}{\mathrm{e}^{F(T)}-1}, \tag{5.18}$$

于是, 原方程存在唯一解

$$y^*(x)=\left(G(x)+\frac{G(T)}{\mathrm{e}^{F(T)}-1}\right)\mathrm{e}^{-F(x)} \tag{5.19}$$

2. 下面证明: y^* 的确是以 T 为周期的周期函数. 为此, 注意到

$$\begin{aligned}F(x+T)&=\int_0^{x+T}P(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}P(t)\,\mathrm{d}t\\&=F(T)+F(x), &(5.20)\\G(x+T)&=\int_0^{x+T}Q(t)\mathrm{e}^{\int_0^t P(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^T Q(t)\mathrm{e}^{\int_0^t P(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}Q(t)\mathrm{e}^{\int_0^t P(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\\&=G(T)+\int_0^x Q(u)\mathrm{e}^{\int_0^{u+T}P(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}u\\&=G(T)+G(x)\mathrm{e}^{F(T)}. &(5.21)\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}y^*(x+T)&=\left(G(x+T)+\frac{G(T)}{\mathrm{e}^{F(T)}-1}\right)\mathrm{e}^{-F(x+T)}\\&=\left(G(x)\mathrm{e}^{F(T)}+\frac{G(T)\mathrm{e}^{F(T)}}{\mathrm{e}^{F(T)}-1}\right)\mathrm{e}^{-F(T)-F(x)}\\&=\left(G(x)+\frac{G(T)}{\mathrm{e}^{F(T)}-1}\right)\mathrm{e}^{-F(x)}\\&=y^*(x). &(5.22)\end{aligned}$$

5.2 其它解法 (I): 变量分离

5.2.1 各类方程的求解方法

例题 5.2.1 (变量分离)**.** 求下面常微分方程的所有解: $y' = xy + 3x + 2y + 6$.

解答. 原方程等价于 $y' = (x+2)(y+3)$.

1. 奇解 $y(x) \equiv -3$.
2. 若 $y(x) \neq 0$, 则可以将方程分离变量为 $\frac{\mathrm{d}y}{y+3} = (x+2)\,\mathrm{d}x$. 此时, 通积分

$$\int^y \frac{\mathrm{d}t}{t+3} = \int^x (x+2)\,\mathrm{d}t, \tag{5.23}$$

从而得到通解 $y(x) = C\exp\left\{\frac{1}{2}x^2 + 2x\right\} - 3$, 其中, $C = 0$ 的情形对应奇解.

于是, 原方程的所有解均可写为函数族

$$y(x) = C\exp\left\{\frac{1}{2}x^2 + 2x\right\} - 3. \tag{5.24}$$

例题 5.2.2 (线性代换)**.** 求下面常微分方程的所有解: $y' = (8x + 2y + 1)^2$.

解答. 作代换 $z(x) \equiv 8x + 2y(x) + 1$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 8 + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 代入原方程, 得到 $\frac{\mathrm{d}z}{2\mathrm{d}x} - 4 = z^2$, 即

$$\frac{\mathrm{d}z}{z^2+4} = 2\,\mathrm{d}x\,. \tag{5.25}$$

于是, 原方程具有通积分 $\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}z = 2x + C_1$, 即

$$\arctan\left(4x + y + \frac{1}{2}\right) - 4x = C. \tag{5.26}$$

这里 $C \equiv 2C_1$. 特别地, 本题不需要考虑奇解.

例题 5.2.3 (齐次代换)**.** 求下面常微分方程的所有解: $xy' + y = 2\sqrt{xy}$.

解答. 1. 若 $x \neq 0$, 作代换 $u(x) \equiv \frac{y(x)}{x}$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u$. 代入原方程, 得到 $x\left(x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\right) + xu = 2x\sqrt{u}$, 即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2(\sqrt{u} - u)}{x}. \tag{5.27}$$

(a) 当 $u \neq 1$ 时, 上述方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{2(\sqrt{u} - u)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \tag{5.28}$$

其通积分为 $-\ln|1 - \sqrt{u}| = \ln|x| + C_1$, 即:

$$x - \sqrt{xy} = C. \tag{5.29}$$

这里 $C \equiv \pm\exp\{-C_1\} \neq 0$.

(b) 当 $u = 1$ 时, 对应的特解为 $y = x$, 对应于通积分 (5.29) 取 $C = 0$ 的情形.

2. 特解 $x \equiv 0$ 对应于通积分 (5.29) 取 $C = 0$ 的情形.

综上, 原方程的通积分为 $x - \sqrt{xy} = C$, 其中 C 为任意常数.

例题 5.2.4 (线性分式代换: 线性相关)**.** 求下面常微分方程的所有解: $y' = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$.

解答. 作代换 $z \equiv 2x + y$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 代入原方程, 得到 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2 + \frac{z+1}{2z-3}$, 即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{5(z-1)}{2z-3}. \tag{5.30}$$

1. 当 $z \neq 1$ 时, 上述方程化为
$$\frac{(2z-3)\,\mathrm{d}z}{5(z-1)} = \mathrm{d}x\,, \tag{5.31}$$
其通积分为 $\frac{2}{5}z - 5\ln|z-1| = x + C_1$, 即
$$2x + y - 1 = C\mathrm{e}^{2y-x}, \tag{5.32}$$
这里 $C \equiv \pm\mathrm{e}^{-5C_1} \neq 0$.

2. 奇解 $z \equiv 1$ (即 $y = 1 - 2x$) 对应于通积分中取 $C = 0$ 的情形.

综上, 原方程的通积分为 $2x + y - 1 = C\mathrm{e}^{2y-x}$, 其中 C 为任意常数.

例题 5.2.5 (线性分式代换: 线性无关)**.** 求下面常微分方程的所有解: $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

解答. 注意到
$$\frac{y+2}{x+y-1} = \frac{0(x-3)+1(y+2)}{1(x-3)+1(y+2)}. \tag{5.33}$$
作代换 $(u, v) \equiv (x-3, y+2)$. 代入原方程, 得到
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2v^2}{(u+v)^2}. \tag{5.34}$$

1. 若 $u \neq 0$, 作代换 $z \equiv \frac{v}{u}$, 则 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} + z$. 代入原方程, 得到如下的变量分离形式
$$-\frac{(1+z)^2\,\mathrm{d}z}{z(1+z^2)} = \frac{\mathrm{d}u}{u}, \tag{5.35}$$
其通积分为 $-\ln|z| - 2\arctan z = \ln|u| + C_1$, 即
$$(y+2)\exp\left\{2\arctan\frac{y+2}{x-3}\right\} = C. \tag{5.36}$$
这里 $C = \pm\mathrm{e}^{-C_1} \neq 0$.

2. 奇解 $u \equiv 0$ (即 $y \equiv -2$) 对应于通积分中取 $C = 0$ 的情形.

综上, 原方程的通积分为 $(y+2)\exp\left\{2\arctan\frac{y+2}{x-3}\right\} = C$, 其中 C 为任意常数.

5.2.2 应用类问题

例题 5.2.6 (切线的几何关系)**.** 假设平面直角坐标系第一象限中有一条曲线

$$L = \{(x, y(x)) | x \geq 0\}, \tag{5.37}$$

其中 $y(0) = 1$, $y(x)$ 是严格递减的、正的可导函数. 任取 L 上一点 M, L 在 M 点的切线交 x 轴于点 A. 假定从 M 到 A 的直线段的长度恒为 1. 求出 $y = y(x)$ 所满足的一阶常微分方程, 并且解出这个方程的初值问题 $y(0) = 1$.

解答. 过点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. 所以, 点 $A\left(x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}, 0\right)$. 由已知, $y = y(x)$ 满足常微分方程

$$1 = y^2 + \frac{y^2}{(y')^2}, \tag{5.38}$$

对于 $y > 0$ 且 $y' < 0$, 得到可分离变量的一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}, \tag{5.39}$$

其通积分为

$$\begin{aligned} -x + C &= \int^y \frac{\sqrt{1 - t^2}}{t} \, \mathrm{d}t \\ &= \int^{\sqrt{1 - y^2}} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1}\right)\right) \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{1 - y^2} + \ln \frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

代入初值条件 $y(0) = 1$, 解得 $C = 0$. 所以, 该初值问题的隐函数解为

$$x + \sqrt{1 - y^2} + \ln \frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}} = 0. \tag{5.41}$$

例题 5.2.7 (简单的变限积分方程)**.** 求出所有的可导函数 $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 满足

$$f(x) = \int_0^1 \left(f(tx) + \frac{1}{f(tx)} \frac{1 + (f(tx))^2}{1 + t^2 x^2}\right) \mathrm{d}t. \tag{5.42}$$

解答. 令 $u \equiv tx$. 由已知,

$$x f(x) = \int_0^x \left(f(u) + \frac{1}{f(u)} \frac{1 + (f(u))^2}{1 + u^2}\right) \mathrm{d}u, \tag{5.43}$$

两边取对 x 的导数, 并令 $y \equiv f(x)$, 得到一阶微分方程

$$x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y} \frac{1 + y^2}{1 + x^2}, \tag{5.44}$$

其具有变量分离形式

$$\frac{y\,\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)},\tag{5.45}$$

其通积分为

$$\frac{1}{2}\ln\bigl(1+y^2\bigr)=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\bigl(1+x^2\bigr)+C_1,\tag{5.46}$$

即

$$(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2,\tag{5.47}$$

这里 $C\equiv \mathrm{e}^{2C_1}>0$.

5.3 其它解法 (II): 恰当微分

例题 5.3.1 (恰当微分方程)**.** 求下面常微分方程的所有解: $(1+x\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x+(-1+\sqrt{x^2+y^2})y\,\mathrm{d}y=0$.

解答. 记 $P(x,y)\equiv 1+x\sqrt{x^2+y^2}, Q(x,y)\equiv(-1+\sqrt{x^2+y^2})y$. 于是,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\tag{5.48}$$

则原方程为恰当微分方程, 存在可微函数 $u(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$. 将函数 $P(x,y)$ 对变量 x 作积分, 可知

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\phi(y)+\int\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\\&=\phi(y)+x+\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}\tag{5.49}$$

再由

$$Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}=\phi'(y)+y\sqrt{x^2+y^2}\tag{5.50}$$

可知, 取 $\phi(y)=-\frac{1}{2}y^2$ 符合要求. 所以, 原方程的通积分为

$$x-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=C,\tag{5.51}$$

其中, C 为任意常数.

例题 5.3.2 (积分因子)**.** 求下面常微分方程的所有解: $(x^2+y)\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0$.

解答. 记 $M(x,y)\equiv x^2+y, N(x,y)\equiv -x$. 于是

$$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=-2.\tag{5.52}$$

此时, $F(x)\equiv\frac{1}{N}(N_x-M_y)=\frac{2}{x}$ 是一个只含 x 的函数. 于是, 原方程存在一个只含 x 的

积分因子 $\mu(x)$, 满足

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu(x) + N(x,y)\mu'(x) \\ &= -2\mu(x) - x\mu'(x),\end{aligned} \tag{5.53}$$

解得一个积分因子

$$\mu(x) = \exp\left\{-\int^x \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{x^2}. \tag{5.54}$$

若 $x \neq 0$, 则原方程两边同乘 $\frac{1}{x^2}$, 即得到恰当微分方程

$$0 = \left(1 + \frac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(x - \frac{y}{x}\right), \tag{5.55}$$

从而解出通积分为

$$x - \frac{y}{x} = C, \tag{5.56}$$

其中 C 为任意常数.

6 高阶常微分方程

6.1 降阶方法

6.1.1 各类方程的求解方法

例题 6.1.1 (不含 y 的二阶方程)**.** 求下面常微分方程的所有解: $(y')^2 = x^2 y''$.

解答. 作代换 $z \equiv y'$, 则原方程化为 $z^2 = x^2 z'$.

1. 若 $z \equiv 0$, 则给出特解 $y \equiv C$. 其中 C 为任意常数.
2. 若 $z \neq 0$, 得到分离变量形式

   $$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}z}{z^2}, \tag{6.1}$$

   其通积分为 $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C_1$, 即

   $$z = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{C_1 x + 1}, \tag{6.2}$$

   其中 C_1 为任意常数.

   (a) 对于 $C_1 = 0$, 则给出特解 $y = \frac{1}{2}x^2 + C$, 其中 C 为任意常数.

   (b) 对于 $C_1 \neq 0$, 给出通解

   $$y = \frac{x}{C_1} - \frac{\ln|C_1 x + 1|}{C_1^2} + C_2, \tag{6.3}$$

   其中 C_2 为任意常数.

例题 6.1.2 (不显含 x 的二阶方程)**.** 求下面常微分方程的所有解: $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

解答. 作代换 $p \equiv y'$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 原方程化为

$$p^2 + 2py\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 0. \tag{6.4}$$

1. 若 $p \equiv 0$, 则给出特解 $y \equiv C$, 其中 C 为任意常数.
2. 若 $p \neq 0$, 得到分离变量形式
$$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}y}{2y}, \tag{6.5}$$
其通积分为 $\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + C_1''$, 即
$$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{C_1'}{\sqrt{y}}, \tag{6.6}$$
其中 $C_1' = \pm\frac{1}{2}\mathrm{e}^{C_1''} \neq 0$. 而 $C_1' = 0$ 的情形恰好对应特解 $y \equiv C$.

于是, 原方程的通解为

$$y = C_1(x + C_2)^{\frac{2}{3}}, \tag{6.7}$$

其中 $C_1 = \left(\frac{3}{2}C_1'\right)^{\frac{2}{3}}, C_2$ 均取任意常数.

6.1.2 应用类问题

例题 6.1.3 (简单的常数限积分方程)**.** 求出所有的可导函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 满足

$$f'(x) = xf(x) + x\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.8}$$

解答. 容易知道 $f'(0) = 0$. 当 $x \neq 0$ 时, 原方程等价于

$$\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f'(x)}{x} - f(x). \tag{6.9}$$

两边取导数, 得到

$$0 = -\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)f'(x) + \frac{1}{x}f''(x), \tag{6.10}$$

于是, 函数 $f(x)$ 必为二阶微分方程

$$0 = y'' - \left(x + \frac{1}{x}\right)y' \tag{6.11}$$

的解. 作代换 $z \equiv y'$, 得到特解 $z \equiv 0$ (即 $y \equiv C$) 或变量分离形式的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\,, \tag{6.12}$$

其通积分为 $\ln|z| = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + C_1'$ (其中 C_1' 为任意常数), 即

$$z = C_1 x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}, \tag{6.13}$$

其中 $C_1 \equiv \pm \mathrm{e}^{C_1'} \neq 0$, 而 $C_1 = 0$ 的情形对应 $z \equiv 0$. 此时,

$$y = \int^x z(t)\,\mathrm{d}t = C_1\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + C_2\right), \tag{6.14}$$

其中 C_2 为任意常数. 此时, 条件 $f'(0) = 0$ 必然满足, 而由原方程知

$$\begin{aligned} C_1 x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} &= xC_1\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + C_2\right) + x\int_0^1 C_1 t\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} + C_2\right)\mathrm{d}t \\ &= C_1 x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + C_1 x\left(\frac{3}{2}C_2 + (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1)\right), \end{aligned} \tag{6.15}$$

从而

$$C_2 = -\frac{2}{3}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1). \tag{6.16}$$

所以, 所有符合原方程的函数

$$f(x) = C\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - \frac{2}{3}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1)\right). \tag{6.17}$$

6.2 二阶常系数线性方程

例题 6.2.1 (待定系数法求特解)**.** 求二阶常微分方程 $y'' + 4y = \sin 3x$ 的通解.

解答. 1. 原方程的齐次部分 $y'' + 4y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + 4 = 0$, 其特征根 $\lambda = \pm 2\mathrm{i}$. 于是, 齐次部分的通解 $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$.

2. 设原方程的一个特解 $y^* = A\cos 3x + B\sin 3x$, 代入得

$$-5A\cos 3x - 5B\sin 3x = \sin 3x, \tag{6.18}$$

解得 $A = 0, B = -\frac{1}{5}$. 故 $y^* = -\frac{1}{5}\sin 3x$.

综上, 原方程的通解为

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{1}{5}\sin 3x. \tag{6.19}$$

例题 6.2.2 (常数变易法)**.** 求方程 $y'' + y' - 2y = x + \mathrm{e}^x + \sin x$ 的满足条件 $y(0) = -\frac{7}{20}, y'(0) = \frac{38}{15}$ 的解.

解答. 1. 原方程的齐次部分 $y'' + y' - 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 其特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$. 于是, 齐次部分的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-2x}. \tag{6.20}$$

2. 设原方程的一个特解为 $y^* = C_1(x)\mathrm{e}^x + C_2(x)\mathrm{e}^{-2x}$. 于是

$$(y^*)' = C_1(x)\mathrm{e}^x - 2C_2(x)\mathrm{e}^{-2x} + \left(C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x}\right). \tag{6.21}$$

令

$$C_1'(x)\mathrm{e}^x + C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x} = 0, \tag{6.22}$$

再次求导, 得

$$(y^*)'' = C_1(x)\mathrm{e}^x + 4C_2(x)\mathrm{e}^{-2x} + C_1'(x)\mathrm{e}^x - 2C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x}. \tag{6.23}$$

代入原方程得

$$x + \mathrm{e}^x + \sin x = C_1'(x)\mathrm{e}^x - 2C_2'(x)\mathrm{e}^{-2x}. \tag{6.24}$$

联立 (6.22) (6.24) 两式, 解得

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-x}(x + \mathrm{e}^x + \sin x), \\ C_2'(x) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2x}(x + \mathrm{e}^x + \sin x). \end{cases} \tag{6.25}$$

所以, 符合条件的一组特解构造如下:

$$C_1(x) = \frac{1}{3}\left(x - \mathrm{e}^{-x}\left(x + 1 + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\right)\right), \tag{6.26}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\mathrm{e}^{3x} + \mathrm{e}^{2x}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x)\right)\right), \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned} y^* &= C_1(x)\mathrm{e}^x + C_2(x)\mathrm{e}^{-2x} \\ &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^x\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{10}(3\sin x + \cos x). \end{aligned} \tag{6.28}$$

综上, 原微分方程的通解为 $y = C_1\mathrm{e}^x + C_2\mathrm{e}^{-2x} + y^*$. 代入初值条件, 有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{9}, \\ C_1 - 2C_2 = \frac{28}{9}, \end{cases} \tag{6.29}$$

解得 $C_1 = \frac{10}{9}, C_2 = -1$. 从而所求的解为

$$y = \frac{10}{9}\mathrm{e}^x - \mathrm{e}^{-2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}\mathrm{e}^x\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{10}(3\sin x + \cos x). \tag{6.30}$$

例题 6.2.3 (Euler 方程)**.** 求方程 $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0\,(x > 0)$ 满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 1$ 的解.

解答. 作代换 $t = \ln x$, 即 $x = \mathrm{e}^t$ 于是

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}, \tag{6.31}$$

$$\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathrm{e}^{-t}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}x} = \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{e}^{-2t}. \tag{6.32}$$

代入原方程, 得
$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4. \tag{6.33}$$
这是一个常系数齐次线性方程, 通解为 $y(t) = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{2t}$, 即
$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x^2. \tag{6.34}$$
代入初值条件, 有
$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ 2C_1 + C_2 = 1, \end{cases} \tag{6.35}$$
解得 $C_1 = 1, C_2 = -1$. 从而所求的解为
$$y = (1 - \ln x)x^2. \tag{6.36}$$

6.3 解的结构

6.3.1 初值问题解的存在唯一性

例题 6.3.1 (Lipschitz 条件的证明)**.** 设 D 是平面上的凸区域, 二元函数 $f(x, y)$ 在 D 上存在有界偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$. 证明: $f(x, y)$ 在 D 上满足 Lipschitz 条件. (凸区域的定义: 对任意 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in D$ 及 $\lambda \in \mathbb{R}$, 都有 $\lambda\mathbf{r}_1 + (1-\lambda)\mathbf{r}_2 \in D$.)

解答. 不失一般性, 假设 $y_1 \leq y_2$. 任取两点 $(x_0, y_1), (x_0, y_2) \in D$, 令 $\phi(y) \equiv f(x_0, y)$, 其中 $y_1 \leq y \leq y_2$. 则 $\phi(y)$ 在区间 $[y_1, y_2]$ 上可导. 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\lambda \in (0, 1)$, 即 $y_\lambda \equiv \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$, 使得
$$|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| = |\phi(y_1) - \phi(y_2)| = |\phi'(y_\lambda)||y_1 - y_2|. \tag{6.37}$$
由于 D 是凸区域, 所以 $(x_0, y_\lambda) \in D$. 根据 f_y 的有界性, 存在常数 $L \geq 0$, 使得
$$|\phi'(y_\lambda)| = \left|\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)=(x_0,y_\lambda)}\right| \leq L. \tag{6.38}$$
于是, Lipschitz 条件
$$|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| \leq L|y_1 - y_2| \tag{6.39}$$
成立, Lipschitz 常数即为 $|f_y|$ 的上界 L.

例题 6.3.2 (Picard 序列)**.** 求出一阶常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = x + y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的 Picard 序列的前两项 y_1, y_2.

解答. 令 $y_0(x) \equiv 0$. 于是,
$$y_1(x) = 0 + \int_0^x \left(t + (y_0(t))^2\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2, \tag{6.40}$$
$$y_2(x) = 0 + \int_0^x \left(t + (y_1(t))^2\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5. \tag{6.41}$$

例题 6.3.3 (一阶初值问题解的唯一性)**.** 二元函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上满足 Lipschitz 条件 (Lipschitz 常数为 L), 一元函数 $\phi(x),\psi(x)$ 为微分方程 $y'=f(x,y)$ 的两个解. 任给 $(x_0,y_0)\in D$, 证明:

$$|\phi(x)-\psi(x)|\le \mathrm{e}^{L|x-x_0|}|\phi(x_0)-\psi(x_0)|. \tag{6.42}$$

特别地, 初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 至多存在一个解.

解答. 函数 $\phi(x),\psi(x)$ 同时也将是积分方程 $y(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(t,y(t))\,\mathrm{d}t$ 的解, 即

$$\phi(x)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^x f(t,\phi(t))\,\mathrm{d}t, \tag{6.43}$$

$$\psi(x)=\psi(x_0)+\int_{x_0}^x f(t,\psi(t))\,\mathrm{d}t. \tag{6.44}$$

将 (6.43) (6.44) 两式相减, 得

$$\begin{aligned} |\phi(x)-\psi(x)| &= \left|\phi(x_0)-\psi(x_0)+\int_{x_0}^x (f(t,\phi(t))-f(t,\psi(t)))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le |\phi(x_0)-\psi(x_0)|+\left|\int_{x_0}^x (f(t,\phi(t))-f(t,\psi(t)))\,\mathrm{d}t\right| \\ &\le |\phi(x_0)-\psi(x_0)|+\int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)} |f(t,\phi(t))-f(t,\psi(t))|\,\mathrm{d}t \\ &\le |\phi(x_0)-\psi(x_0)|+L\int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)} |\phi(t)-\psi(t)|\,\mathrm{d}t. \end{aligned} \tag{6.45}$$

(6.45) 是一个 “自洽” 的不等式.

1. 我们首先证明: 由 (6.45) 可以导出关于 $n\in\mathbb{N}$ 的不等式

$$|\phi(x)-\psi(x)|\le|\phi(x_0)-\psi(x_0)|\left(\sum_{k=0}^n \frac{L^k|x-x_0|^k}{k!}\right)+\frac{L^{n+1}}{n!}I_n(x), \tag{6.46}$$

$$I_n(x)\equiv\int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)} |\phi(t)-\psi(t)||x-t|^n\,\mathrm{d}t. \tag{6.47}$$

为此, 应用数学归纳法. $n=0$ 时, (6.46) 即为 (6.45); 假设 (6.46) 对 n 成立, 首先由 (6.45) 可得

$$\begin{aligned} I_n &\le \int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)}\left(|\phi(x_0)-\psi(x_0)|+L\int_{\min(x_0,t)}^{\max(x_0,t)}|\phi(s)-\psi(s)|\,\mathrm{d}s\right)|x-t|^n\,\mathrm{d}t \\ &= |\phi(x_0)-\psi(x_0)|\frac{|x-x_0|^{n+1}}{n+1}+\frac{L}{n+1}\int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)}|\phi(s)-\psi(s)||x-s|^{n+1}\,\mathrm{d}s \\ &= |\phi(x_0)-\psi(x_0)|\frac{|x-x_0|^{n+1}}{n+1}+\frac{L}{n+1}I_{n+1}(x), \end{aligned} \tag{6.48}$$

于是,

$$
\begin{aligned}
|\phi(x)-\psi(x)| &\le |\phi(x_0)-\psi(x_0)|\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{L^k|x-x_0|^k}{k!}\right)+\frac{L^{n+1}}{n!}I_n(x)\\
&\le |\phi(x_0)-\psi(x_0)|\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{L^k|x-x_0|^k}{k!}\right)+\frac{L^{n+2}}{(n+1)!}I_{n+1}(x), \qquad (6.49)
\end{aligned}
$$

即命题对 $n+1$ 也成立.

2. 随后, 我们证明 "余项" 收敛, 即

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{L^{n+1}}{n!}I_n(x)\equiv 0. \qquad (6.50)
$$

注意到, $|\phi(t)-\psi(t)|$ 在 x_0,x 组成的闭区间上连续, 于是存在上界 $M\ge 0$. 从而

$$
\begin{aligned}
0\le \frac{L^{n+1}}{n!}I_n(x) &\le \frac{L^{n+1}M}{n!}\int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)}|x-t|^n\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{L^{n+1}M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}. \qquad (6.51)
\end{aligned}
$$

根据夹逼定理即可得证.

3. 最后, 令 $n\to\infty$, 根据 Taylor 公式, 即可得到

$$
\begin{aligned}
|\phi(x)-\psi(x)| &\le |\phi(x_0)-\psi(x_0)|\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{L^k|x-x_0|^k}{k!}\right)\\
&=\mathrm{e}^{L|x-x_0|}|\phi(x_0)-\psi(x_0)|. \qquad (6.52)
\end{aligned}
$$

注记 6.1. 本题待证的核心结论 (6.46) 源于对不等式 (6.45) "递归" 或 "自洽" 结构的思考. 多做两次迭代即可发现一般规律.

例题 6.3.4 (二阶齐次线性初值问题解的唯一性)**.** 设函数 $p(x),q(x),f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 证明: 初值问题

$$
\begin{cases}
0=y''+p(x)y'+q(x)y,\\
y(a)=y'(a)=0
\end{cases} \qquad (6.53)
$$

存在唯一解 $y(x)\equiv 0$. 一般地, 初值问题 $\begin{cases} f(x)=y''+p(x)y'+q(x)y,\\ y(a)=y_0,y'(a)=y_1\end{cases}$ 至多存在一个解.

解答. 显然至少存在平凡解 $y(x)\equiv 0$. 对该问题的解 $y(x)$, 记 $u(x)\equiv (y(x))^2+(y'(x))^2$, 我们下面证明 $u(x)\equiv 0$. 为此, 首先证明: 存在常数 $K>0$, 使得 $u'(x)\le Ku(x)$. 这是

因为:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 2\left(y(x)+y''(x)\right)y'(x) \\
&= 2\left(y(x)-p(x)y'(x)-q(x)y(x)\right)y'(x) \\
&= (1-q(x))y(x)y'(x)+2p(x)(y'(x))^2 \\
&\le (1+|q(x)|)\left((y(x))^2+(y'(x))^2\right)+|p(x)|(y'(x))^2 \\
&\le K\left((y(x))^2+(y'(x))^2\right) \\
&= Ku(x),
\end{aligned} \tag{6.54}
$$

其中, $K \equiv 1+\max_{x\in[a,b]}(|q(x)|, 2|p(x)|)$. 于是, 对函数 $F(x) \equiv u(x)\mathrm{e}^{-Kx}$, 我们有

$$
\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-Kx}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} - Ku(x)\right) \le 0, \tag{6.55}
$$

从而对 $x\in[a,b]$ 有 $F(x) \le F(a) = u(a)\mathrm{e}^{-Ka} = 0$. 进而得到 $F(x) \equiv 0$, 也即 $u(x) \equiv 0$.

6.3.2 二阶齐次线性方程的基解

例题 6.3.5 (基解的 Wronskian 行列式)**.** 设 $p(x), q(x) \in \mathcal{C}[a,b]$. 给定二阶线性齐次方程 $0 = y''+p(x)y'+q(x)y$ 的两个解 $\phi_1(x), \phi_2(x)$, 证明:

$$
W(x;\phi_1,\phi_2) = W(c;\phi_1,\phi_2)\exp\left\{-\int_c^x p(t)\,\mathrm{d}t\right\} \tag{6.56}
$$

对任意 $c\in[a,b]$ 成立.

解答. 我们验证: $W(x;\phi_1,\phi_2)$ 满足微分方程 $W' = -pW$. 这是因为:

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}W(x;\phi_1,\phi_2)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\phi_1(x)\phi_2'(x)-\phi_2(x)\phi_1'(x)\right) \\
&= \phi_1(x)\phi_2''(x)-\phi_2(x)\phi_1''(x) \\
&= \phi_1(x)\left(-p(x)\phi_2''(x)-q(x)\phi_2(x)\right)-\phi_2(x)\left(-p(x)\phi_1''(x)-q(x)\phi_1(x)\right) \\
&= -p(x)W(x;\phi_1,\phi_2).
\end{aligned} \tag{6.57}
$$

所以, 对任意 $c\in[a,b]$, 成立

$$
W(x;\phi_1,\phi_2) = W(c;\phi_1,\phi_2)\exp\left\{-\int_c^x p(t)\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{6.58}
$$

例题 6.3.6 (基解的互化)**.** 设 $p(x), q(x) \in \mathcal{C}[a,b]$, $\phi(x)$ 为二阶线性齐次方程 $0 = y'' + p(x)y'+q(x)y$ 在 $[a,b]$ 上的非平凡解 (非零解), 证明:

$$
\psi(x) = \phi(x)\int^x \frac{1}{(\phi(t))^2}\exp\left\{-\int^t p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \tag{6.59}
$$

为与 $\phi(x)$ 线性无关的另一个解.

解答. 对于基解 $\psi(x), \phi(x)$, 由例题6.3.5, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\psi(x)}{\phi(x)}\right) &= \frac{1}{(\phi(x))^2}W(x;\phi,\psi) \\ &= \frac{1}{(\phi(x))^2}\exp\left\{-\int^x p(t)\,\mathrm{d}t\right\},\end{aligned} \tag{6.60}$$

从而

$$\psi(x) = \phi(x)\int^x \frac{1}{(\phi(t))^2}\exp\left\{-\int^t p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t. \tag{6.61}$$

7 级数的审敛问题

7.1 常数项级数的审敛

7.1.1 Cauchy 收敛准则

例题 7.1.1 (调和级数的发散性)**.** 证明: 调和级数 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ 发散.

解答. 考虑有限子序列的和

$$|S_{n+p} - S_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}. \tag{7.1}$$

当 $p = n$ 时, 有

$$|S_{2n} - S_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{7.2}$$

根据 Cauchy 收敛准则, S_n 发散.

7.1.2 正项级数的比较审敛

例题 7.1.2 (以等比级数为比较基准)**.** 讨论下列级数的敛散性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;
2. p-级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (其中 $p > 0$);

解答.

1. 由于

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdots n}{n \cdot (n-1) \cdots 1} \geq 1, \tag{7.3}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 发散.

2. 若 $0 < p < 1$, 由于 $\frac{1}{n^p} \geq \frac{1}{n}$ 且调和级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散. 若 $p > 1$, 我们通过添加括号, 将原级数重排为 $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$, 其中,

$$\begin{aligned} v_n &\equiv \frac{1}{2^{np}} + \frac{1}{(2^n+1)^p} + \cdots + \frac{1}{(2^{n+1}-1)^p} \\ &< \frac{1}{2^{np}} + \frac{1}{2^{np}} + \cdots + \frac{1}{2^{np}} \\ &= \frac{2^n}{2^{np}} = \frac{1}{2^{(p-1)n}}, \end{aligned} \tag{7.4}$$

而等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^{(p-1)n}}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=0}^{\infty}v_n$ 收敛. 记部分和 $S_k\equiv\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{i^p}, T_n\equiv\sum_{j=0}^{n}v_j$. 对任给的正整数 k, 若取 $n\in\mathbb{N}_+$ 满足 $2^{n+1}-1\geq k$, 则有

$$\begin{aligned}S_k&=\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{k^p}\\&\leq\frac{1}{1^p}+\frac{1}{2^p}+\cdots+\frac{1}{k^p}+\cdots+\frac{1}{(2^{n+1}-1)^p}\\&=T_n.\end{aligned}\tag{7.5}$$

由部分和有界定理, $T_n\leq M$, 从而 $S_k\leq M$. 于是, S_k 收敛.

例题 7.1.3 (以 p-级数为比较基准)**.** 讨论下列级数的敛散性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty}n\left(2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty}\ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

解答. 1. 由已知, 级数的一般项满足

$$u_n\equiv\frac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)}<\frac{3\sqrt[5]{n}+\sqrt[5]{n}}{(0+n)(0+n)}=4n^{-\frac{9}{5}},\tag{7.6}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}4n^{-\frac{9}{5}}$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛.

2. 由已知, 级数的一般项满足

$$\begin{aligned}u_n&\equiv n\left(2\sqrt{n}-\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)\\&=n\left((\sqrt{n}-\sqrt{n-1})-(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})\right)\\&=n\left(\frac{1}{\sqrt{n}+\sqrt{n-1}}-\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right)\\&=\frac{n(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1})}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})}\\&=\frac{2n}{(\sqrt{n}+\sqrt{n-1})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n})(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1})}\\&\geq\frac{n}{4(n+1)^{\frac{3}{2}}}\equiv v_n,\end{aligned}\tag{7.7}$$

而注意到,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_n}{n^{-\frac{1}{2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^{\frac{3}{2}}}{4(n+1)^{\frac{3}{2}}}=\frac{1}{4}>0,\tag{7.8}$$

所以, 根据比较审敛法的极限形式, $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 发散. 进而由比较审敛法, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 也发散.

3. 记 $v_n\equiv\frac{1}{n^2}$, 则级数的一般项 $u_n\equiv\ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_n}{v_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}}=\lim_{n\to\infty}\frac{-\frac{\pi^2}{2n^2}}{\frac{1}{n^2}}=-\frac{\pi^2}{2}>-\infty,\tag{7.9}$$

所以, 根据比较审敛法的极限形式, 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的收敛性, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例题 7.1.4 (基于等比级数的比较审敛法)**.** 讨论下列级数的敛散性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^\alpha}$ (其中 $\alpha > 0, b > 0$);
2. $\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots$;
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2-n}$.

解答. 1. 由已知, 级数的一般项 $u_n \equiv \frac{b^n}{n^\alpha}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} b\left(1+\frac{1}{n}\right)^{\alpha} = b. \tag{7.10}$$

所以, 由 d'Alembert 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 在 $b > 1$ 时收敛, 在 $b < 1$ 时发散. 特别地, 对 $b = 1$, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ 为 p-级数, 故在 $0 < \alpha \le 1$ 时发散、在 $\alpha > 1$ 时收敛.

2. 记 $a_n \equiv \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}$ 满足递推关系

$$\begin{cases} a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}, \\ a_0 = 1 \end{cases} \tag{7.11}$$

于是, 级数的一般项可写为 $u_n = \sqrt{2-a_n}$. 容易证明, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增且有上界, 其极限 $A = 2$. 所以,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2-a_{n+1}}}{\sqrt{2-a_n}} = \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{2-a_{n+1}}{4-a_{n+1}^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sqrt{2+a_{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1. \tag{7.12}$$

由 d'Alembert 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

3. 由已知, 级数的一般项 $u_n \equiv \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2-n}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{\mathrm{e}^2} < 1. \tag{7.13}$$

由 Cauchy 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例题 7.1.5 (基于 p-级数的比较审敛法)**.** 讨论下列级数的敛散性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+p}}$ (其中 $p > \frac{3}{2}$);
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$.

解答. 1. 由已知, 级数的一般项 $u_n \equiv \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+p}}$ 满足

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\mathrm{e}\frac{n^{n+p}}{(n+1)^{n+1+p}} = \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^{p}}, \tag{7.14}$$

此时, d'Alembert 审敛法失效, 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=1$. 考虑 Raabe 审敛法:

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p}-1\right)\\ &= \lim_{x\to 0_+}\frac{\frac{1}{\mathrm{e}}(1+x)^{\frac{1}{x}+p}-1}{x}\\ &= \lim_{x\to 0_+}\left(p+\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\right)\\ &= p-\frac{1}{2}\\ &> 1. \end{aligned} \tag{7.15}$$

所以, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

2. 由已知, 级数的一般项 $u_n\equiv\frac{1}{(\ln\ln n)^{\ln n}}$ 满足

$$\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}=\ln\ln\ln n. \tag{7.16}$$

对一切正整数 $n>N\equiv[\mathrm{e}^{\mathrm{e}^{\mathrm{e}}}]$, 我们有 $\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}>1$, 即: 存在实数 $\alpha>0$ 满足

$$u_n\le\frac{1}{n^{1+\alpha}}\,(\forall n>N). \tag{7.17}$$

而级数 $\sum_{n=N+1}^{\infty}\frac{1}{n^{1+\alpha}}$ 收敛, 所以 $\sum_{n=N+1}^{\infty}u_n$ 收敛, 进而 $\sum_{n=2}^{\infty}u_n$ 收敛.

7.1.3 绝对收敛的任意项级数

例题 7.1.6 (绝对收敛级数)**.** 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

解答. 级数的一般项 $u_n\equiv(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$, 则 $|u_n|=1-\cos\frac{1}{n}$. 于是,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{|u_n|}{\frac{1}{n^2}}=\frac{1}{2}<+\infty, \tag{7.18}$$

从而由比较审敛法的极限形式以及 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 的收敛性, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛.

例题 7.1.7 (和式的重排)**.** 设正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛.

解答. 首先, 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增, 即 $a_1\le a_2\le\cdots\le a_n\cdots$, 则

$$\frac{2n}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n}}\le\frac{2n}{a_{n+1}+a_{n+2}+\cdots+a_{2n}}\le\frac{2n}{a_n+a_n+\cdots+a_n}=\frac{2}{a_n}, \tag{7.19}$$

同理,

$$\frac{2n-1}{a_1+a_2+\cdots+a_{2n-1}}\le\frac{2n-1}{na_n}<\frac{2}{a_n}. \tag{7.20}$$

所以, 根据比较审敛法, 可知级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_1+a_2+\cdots+a_n}$ 收敛. 其次, 若 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 并非单调递增, 我们尝试将其重排为单调递增序列 $a_{\sigma_1}\le a_{\sigma_2}\le\cdots\le a_{\sigma_n}\le\cdots$. 由于 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$

为正项级数, 所以其收敛性蕴涵了绝对收敛性, 其和式具有重排不变性, 即 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_{\sigma_n}}$ 也收敛. 此时, $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{a_{\sigma_1}+a_{\sigma_2}+\cdots+a_{\sigma_n}}$ 也将收敛.

下面证明这种重排一定可行. 为此, 先证明一个引理: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的递减子序列 $a_{k_1}>a_{k_2}>\cdots>a_{k_n}>\cdots(k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots)$ 必为有限序列. 若不然, 对实数 $\epsilon\equiv a_{k_1}$, 无法找到正整数 $N\in\mathbb{N}_+$ 使得 $a_n>a_{k_1}$ 对任意 $n\geq N$ 成立, 因为这不满足 $a_n\to\infty$ (即 $\frac{1}{a_n}\to 0$) 的要求.

于是, 我们的重排方案设计如下: 对序列 $S\equiv\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, 循环往复地挑选 S 中的最小元素 a, 将其剔除出 S、排入 (起初为空的新序列) S'. 由于 S 的任意递减子序列必为有限序列, 则每一轮挑选时我们总能找到一个最小元素, 重排方案就是可行的了.

注记 7.1. 称集合 S 是*良序的* (well-ordered), 如果它的任意非空 (无穷) 子集都存在最小元素. 良序性的充要条件是*不存在递减的无穷子序列*, 证明如下:

- *充分性*: 设其某个非空子集中最长的递减子序列为 $a_{k_1}>a_{k_2}>\cdots a_{k_l},k_1<k_2<\cdots<k_l$. 于是, 对任意 $n>k_l$ 都成立 $a_n\geq a_{k_l}$ (否则, 我们就可以将 a_n 纳入该递减序列中, 违背了最长序列的前提条件). 此时, 该子集存在最小元素 $\min\{a_1,a_2,\cdots,a_{k_l}\}$.
- *必要性*: 若 S 存在递减的无穷子序列 $a_{k_1}>a_{k_2}>\cdots a_{k_n}>\cdots$, 则 S 中将不存在最小元素.

7.1.4 条件收敛的任意项级数

例题 7.1.8 (Abel 变换与级数审敛)**.** 若序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和有界, 序列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n-b_{n+1}|$ 收敛. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

解答. 由已知, 存在 $M>0$, 使得 $|A_n|\equiv|\sum_{k=1}^{n}a_k|\leq M$ 对任意 $n\in\mathbb{N}_+$ 成立. 对任给的正整数 $p\in\mathbb{N}_+$, 由 Abel 变换,

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|&=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(b_k-b_{k+1})A_k+b_{n+p}A_{n+p}\right|\\&\leq\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}||A_k|+|b_{n+1}||A_n|+|b_{n+p}||A_{n+p}|\\&\leq M\left(\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}|+|b_{n+1}||A_n|+|b_{n+p}|\right).\end{aligned}\tag{7.21}$$

任取 $\epsilon>0$. 由 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ 可知, 存在 $N_1\in\mathbb{N}_+$, 使得 $|b_{n+1}|,|b_{n+p}|<\frac{\epsilon}{4M}$ 对任意 $n\geq N_1$ 成立; 由 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n-b_{n+1}|$ 的收敛性可知, 存在 $N_2\in\mathbb{N}_+$, 使得 $\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|b_k-b_{k+1}|<\frac{\epsilon}{2M}$ 对任意 $n\geq N_2$ 成立. 此时, 存在 $N\equiv\max(N_1,N_2)$, 使得对一切 $n\geq N$ 都成立

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|\leq M\left(\frac{\epsilon}{2M}+\frac{\epsilon}{2M}\right)=\epsilon\tag{7.22}$$

成立. 根据 Cauchy 收敛准则, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

例题 7.1.9 (Dirichlet-Abel 审敛法)**.** 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n)}{n+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的敛散性.

解答. 记 $a_n \equiv \sin(2n), b_n \equiv \frac{1}{n+\frac{1}{n}}, c_n \equiv \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, 则原级数的一般项 $u_n = a_n b_n c_n$.

1. 首先证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

   (a) 注意到

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n}\sin(2k) &= \frac{2\sin 1\sum_{k=1}^{n}\sin(2k)}{2\sin 1}\\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n}\left(\cos(2k-1)-\cos(2k+1)\right)}{2\sin 1}\\ &= \frac{\cos 1-\cos(2n+1)}{2\sin 1},\end{aligned} \tag{7.23}$$

   所以, 序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和有界.

   (b) 注意到 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 且

$$\begin{aligned}b_{n+1}^{-1}-b_n^{-1} &= \left(n+1+\frac{1}{n+1}\right)-\left(n+\frac{1}{n}\right)\\ &= 1-\frac{1}{n(n+1)}\\ &\geq 0,\end{aligned} \tag{7.24}$$

   即 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减. 由 Dirichlet-Abel 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

   (c) 注意到 c_n 单调递增且有界 ($<\mathrm{e}$). 由 Dirichlet-Abel 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$ 也即 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

2. 下面证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散. 为此, 注意到

$$|\sin(2n)| \geq \sin^2(2n) = \frac{1-\cos(4n)}{2}, \tag{7.25}$$

   从而

$$|u_n| \geq \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2\left(n+\frac{1}{n}\right)} - \frac{\cos(2n)}{2\left(n+\frac{1}{n}\right)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{7.26}$$

   其中, 由于

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(n+\frac{1}{n}\right)} \geq \frac{1}{n+\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}, \tag{7.27}$$

   则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2\left(n+\frac{1}{n}\right)}$ 发散. 用与 (7.23) 类似的方法, 不难证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{2\left(n+\frac{1}{n}\right)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛. 所以, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散.

例题 7.1.10 (和式的重组)**.** 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 的敛散性.

解答. 我们将原级数的同号项合并, 得到等价的重组级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$, 其中

$$a_n \equiv \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n^2+k}. \tag{7.28}$$

1. 首先, 注意到

$$a_n \le \sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{n^2+0} = \frac{2n+1}{n^2} \le \frac{3}{n}, \tag{7.29}$$

所以, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

2. 其次, 由差分关系可知,

$$\begin{aligned} a_{n+1} - a_n &= \sum_{k=0}^{2n+2} \frac{1}{(n+1)^2+k} - \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{n^2+k} \\ &= \frac{1}{n^2+4n+2} + \frac{1}{n^2+4n+3} - (2n+1)\sum_{k=0}^{2n} \frac{1}{(n^2+k)((n+1)^2+k)} \\ &< \frac{2}{n^2+4n+2} - (2n+1)^2 \frac{1}{n^2(n+1)^2} \\ &< \frac{2}{(n+1)^2} - \frac{4}{(n+1)^2} \\ &< 0, \end{aligned} \tag{7.30}$$

所以, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减.

综上, 由 Dirichlet-Abel 审敛法可知, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n$ 收敛.

7.2 函数项级数的审敛

7.2.1 函数序列的一致收敛性

例题 7.2.1 (函数序列的一致收敛性)**.** 讨论函数序列 $f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}$, $n = 1, 2, \cdots$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解答. 显然, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛到极限函数 $f(x) \equiv 1$. 但若取点列 $x_n \equiv n^{\frac{1}{4}}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = \lim_{n\to\infty} \left| \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} - 1 \right| = 1 - \mathrm{e}^{-1} > 0, \tag{7.31}$$

所以 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

7.2.2 函数项级数的点收敛

例题 7.2.2 (点审敛)**.** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{1+\sin^{2n} x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解答. 1. 若 $x \in K_0 \equiv \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ 绝对收敛.

2. 若 $x \notin K_0$, 则注意到一般项 $u_n \equiv \frac{\sin^n x}{1+\sin^{2n} x}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} |\sin x| \frac{1+\sin^{2n+2} x}{1+\sin^{2n} x} = |\sin x|. \tag{7.32}$$

(a) 若 $x \in K_1 \equiv \left\{\frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z}\right\}$, 原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{nk}}{2}$, 发散.

(b) 若 $x \notin K_1$, 此时 $|\sin x| < 1$, 由 d'Alembert 审敛法可知级数绝对收敛.

综上, 级数在 $x \in K_1$ 时发散, 在 $x \notin K_1$ 时绝对收敛, 无条件收敛之处.

例题 7.2.3 (点审敛)**.** 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{n^x+2n}$ 的收敛域, 绝对收敛点 x 的全体, 条件收敛点 x 的全体.

解答. 1. 若 $x > 1$, 注意到 $\frac{1}{n^x+2n} < \frac{1}{n^x}$. 则由比较审敛法, 原级数绝对收敛.

2. 若 $x \le 1$, 因为 $b_n \equiv (-1)^n$ 的部分和有界, 而 $a_n \equiv \frac{1}{n^x+2n}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 下面我们进一步证明: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 n 充分大时单调递减. 从而由 Dirichlet-Abel 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 条件收敛.

   (a) 对 $x \ge 0$, 结论显然;

   (b) 对 $x < 0$, 令 $y(t) = t^x + 2t$, 则 $y'(t) = xt^{x-1} + 2$. 所以, 只要 $n > \log_{1-x}(-\frac{x}{2})$, 就恒成立 $y'(n) > 0$, 此时 $y(n)$ 单调递增, 进而 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减.

综上, 原级数的收敛域为 $\mathbb{R}$, 全体绝对收敛点构成区间 $(1, +\infty)$, 全体条件收敛点构成区间 $(-\infty, 1]$.

7.2.3 函数项级数的一致收敛

例题 7.2.4 (强级数审敛: 内闭一致收敛)**.** 设 $\alpha > 0$, 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0, +\infty)$ 上并非一致收敛; 但在 $[r, +\infty)$ 上一致收敛 (其中 $r > 0$ 任意给定).

解答. 级数的一般项记为 $u_n(x) \equiv n^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}$.

1. 取点列 $x_n \equiv \frac{1}{n}$, 则注意到 $\lim_{n\to\infty} |u_n(x_n)| = n^{\alpha}\mathrm{e}^{-1} = +\infty$, 即 $u_n(x) \rightrightarrows 0$ 的必要条件不满足. 所以, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

2. 对任给的 $r > 0$, $u_n(x)$ 在区间 $[r, +\infty)$ 上满足

$$|u_n(x)| = n^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx} \le n^{\alpha}\mathrm{e}^{-nr} \equiv a_n \tag{7.33}$$

   且由 d'Alembert 审敛法

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \mathrm{e}^{-r} < 1 \tag{7.34}$$

   可知, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛. 则由强级数审敛法, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[r, +\infty)$ 上一致收敛.

例题 7.2.5 (强级数审敛: 递推方程)**.** 对于每个 $x \in [0, 1], n = 1, 2, \cdots$, 定义

$$f_1(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t,\ \ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t, \tag{7.35}$$

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

解答. 1. 首先, 我们用归纳法证明引理:

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \sqrt{1+t^4}(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t. \tag{7.36}$$

当 $n=1$ 时结论显然. 若结论对 n 成立, 则

$$\begin{aligned} f_{n+1}(x) &= \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^x \mathrm{d}t \int_0^t \sqrt{1+s^4}(t-s)^n\,\mathrm{d}s \\ &= \frac{1}{n!}\int_0^x \sqrt{1+s^4}\,\mathrm{d}s \int_s^x (t-s)^n\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x \sqrt{1+s^4}(x-s)^{n+1}\,\mathrm{d}s, \end{aligned} \tag{7.37}$$

结论对 $n+1$ 也成立.

2. 由引理 (7.36) 可知,

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \sqrt{1+t^4}(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ &\le \frac{\sqrt{2}}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{\sqrt{2}x^n}{n!}, \end{aligned} \tag{7.38}$$

于是, 当 $x\in[0,1]$ 时, $|f_n(x)|\le\frac{\sqrt{2}}{n!}$. 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 显然收敛, 于是, 由强级数审敛法, $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

例题 7.2.6 (Dirichlet 级数)**.** 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

解答. 考虑函数序列 $\left\{b_n(x)\equiv\frac{1}{n^x}\right\}$.

1. 若 $x=0$, 原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 为 (一致) 收敛级数.

2. 若 $x>0$, 则注意到 $b_n(x)$ 在任意取定 x 后对 n 总是单调递减, 且由

$$|b_n(x)| = \frac{1}{n^x} \le 1 \tag{7.39}$$

可知, $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致有界. 所以, 由 Dirichlet-Abel 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n(x)$ 一致收敛.

7.3 收敛级数的性质

例题 7.3.1 (一致收敛与连续性)**.** 证明下列函数的连续性:

1. $f(x)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{(n-x)^2}$, 其中 x 定义在某个不包含整数的闭区间 $[a,b]$ 上;

2. $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x-r_n|}{3^n}$, 其中 $x\in[0,1]$, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $[0,1]$ 上的全体有理数.

解答. 1. 对 $x\in[a,b]$, 若取 $c\equiv\min_{n\in\mathbb{Z}}\{|n-a|,|n-b|\}$, 则 $\frac{1}{(n-x)^2}\le\frac{1}{(n-c)^2}$ 对任意 $n\in\mathbb{Z}$ 成立. 则由强级数判别法, $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上一致收敛, 进而满足连续性.

2. 由已知, $|x-r_n|\le 1$, 故 $\frac{|x-r_n|}{3^n}\le\frac{1}{3^n}$. 由强级数判别法, $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛, 进而满足连续性.

例题 7.3.2 (一致收敛与无穷和极限)**.** 计算极限 $\lim_{x\to0_+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$.

解答. 首先, 我们证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛. 这是因为

$$\left|\frac{1}{2^n n^x}\right|=\frac{1}{2^n n^x}\le\frac{1}{2^n},\tag{7.40}$$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1$ 收敛, 所以原级数一致收敛, 进而

$$\lim_{x\to0_+}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\lim_{x\to0_+}\frac{1}{2^n n^x}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^n}=1.\tag{7.41}$$

例题 7.3.3 (一致收敛序列与可导性)**.** 证明: 函数序列 $f_n(x)=x^2+\frac{1}{n}\sin\!\left(n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)$ 在 $(-\infty,+\infty)$ 内一致收敛, 但 $[\lim_{n\to\infty}f_n(x)]'\ne\lim_{n\to\infty}f_n'(x)$.

解答.

1. 一方面,
$$\left|f_n(x)-x^2\right|=\left|\frac{1}{n}\sin\!\left(n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right|\le\frac{1}{n},\tag{7.42}$$
而 $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$. 所以, $f_n(x)\rightrightarrows x^2$.

2. 另一方面,
$$\left[\lim_{n\to\infty}f_n(x)\right]'=\left(x^2\right)'=2x,\tag{7.43}$$
$$\lim_{n\to\infty}f_n'(x)=\lim_{n\to\infty}\left(2x+\cos\!\left(n\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right)\right)\quad\begin{cases}=2x, & x=k\pi(k\in\mathbb{Z}),\\ \text{不存在}, & x\ne k\pi\end{cases}.\tag{7.44}$$

例题 7.3.4 (一致收敛级数与可导性)**.** 定义函数项级数 $S(x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sin\frac{x}{n!}$. 证明:

1. $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但在区间 $(0,\delta]$ 上一致收敛 (其中 $\delta>0$ 任意给定);
2. $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的导函数.

解答.

1. 取点列 $x_n=n!\frac{\pi}{2}$, 则原级数的一般项 $u_n(x)\equiv\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sin\frac{x}{n!}$ 满足
$$|u_n(x)|=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\ge1>0,\tag{7.45}$$
所以 $u_n(x)\rightrightarrows0$ 不成立, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 不一致收敛. 但对任意给定的 $\delta>0$, 在区间 $|x|\le\delta$ 上成立
$$|u_n(x)|\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{x}{n!}\le\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{\delta}{n!},\tag{7.46}$$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的一般项 $v_n \equiv \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \frac{\delta}{n!}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{v_{n+1}}{v_n} = \frac{1}{n+1} = 0 < 1, \tag{7.47}$$

则由 d'Alembert 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛. 进而由强级数审敛法, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(0,\delta]$ 上一致收敛.

2. (a) 由 d'Alembert 审敛法:

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{1}{n+1} = 0 < 1, \tag{7.48}$$

可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上逐点 (绝对) 收敛.

(b) 对一般项的导函数 $u_n'(x) = \frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \cos\frac{x}{n!}$, 由强级数审敛法:

$$|u_n'(x)| \le \frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{7.49}$$

可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛, 且每一项都显然在 $(0,+\infty)$ 上连续.

所以, $S(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的导函数.

8 函数的幂级数展开

8.1 幂级数的审敛

例题 8.1.1 (收敛域的计算)**.** 求下列幂级数的收敛域:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n!\left(\frac{x-2}{n}\right)^n$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)x^n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{10^n}$.

解答. 1. (a) 考虑 d'Alembert 审敛法:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x-2|\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} = \frac{|x-2|}{\mathrm{e}}. \tag{8.1}$$

于是, 原级数的收敛半径 $R=\mathrm{e}$, 收敛区间为 $2\pm\mathrm{e}$.

(b) 在区间端点处, 级数一般项 (的绝对值) $a_n \equiv n!\left(\frac{\mathrm{e}}{n}\right)^n$ 为单调递增序列:

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n} > 1, \tag{8.2}$$

所以 $\lim_{n\to\infty} a_n \ge a_1 > 0$, 则原级数在 $2\pm\mathrm{e}$ 处发散.

(c) 综上, 原级数的收敛域为 $(2-\mathrm{e}, 2+\mathrm{e})$.

2. (a) 考虑 d'Alembert 审敛法:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = |x|\lim_{n\to\infty}\frac{S_{n+1}}{S_n} = |x|, \tag{8.3}$$

其中, $S_n \equiv 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}$ 为单调递增且发散的序列. 于是, 原级数的收敛半径 $R=1$, 收敛区间为 $(-1,1)$.

(b) 当 $x=\pm 1$ 时, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(\pm 1)^n S_n$ 显然发散, 因为 $S_n \to 0$ 不成立.

(c) 综上, 原级数的收敛域为 $(-1,1)$.

3. (a) 考虑 d'Alembert 审敛法:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}|x|^{3n^2+3n+1} = \begin{cases} 0, & |x|<1, \\ \frac{1}{10}, & |x|=1, \\ +\infty, & |x|>1. \end{cases} \tag{8.4}$$

于是, 原级数的收敛半径 $R=1$, 收敛区间为 $(-1,1)$.

(b) 当 $x=\pm 1$ 时, 我们有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{n^3}}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n} = \frac{1}{9}$. 此时, 原级数绝对收敛.

(c) 综上, 原级数的收敛域为 $[-1,1]$.

8.2 幂级数展开与和函数计算

例题 8.2.1 (幂级数展开: 加法)**.** 在 $(-1,1)$ 上展开函数

$$f(x) = \arctan x + \frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \tag{8.5}$$

为幂级数.

解答. 对 $x\in(-1,1)$, 可以将 $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i x^{2i}$ 逐项积分, 得到

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\sum_{i=0}^{\infty}(-1)^i t^{2i}\right)\mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{(-1)^i}{2i+1}x^{2i+1}; \tag{8.6}$$

同理, 可将 $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{j=0}^{\infty}x^{2j}$ 逐项积分, 得到

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x\left(\sum_{j=0}^{\infty}t^{2j}\right)\mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{x^{2j+1}}{2j+1}. \tag{8.7}$$

所以, 函数 $f(x)$ 的幂级数展开为

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1+(-1)^i}{2i+1}x^{2i+1} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{2}{4n+1}x^{4n+1}. \tag{8.8}$$

例题 8.2.2 (幂级数展开: 乘法)**.** 求函数

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{2} \ln \frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}} \tag{8.9}$$

在 $x=0$ 处的幂级数展开式, 并指出此幂级数的收敛域.

解答. 在 $t \in (0,1)$ 内, 对幂级数 $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{i=0}^{\infty} t^{2i}$ 逐项积分, 得到

$$\frac{1}{2} \ln \frac{1+t}{1-t} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} u^{2i} \,\mathrm{d}u = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{2i+1}. \tag{8.10}$$

此时, 令 $t = \sqrt{|x|}$, 其中 $x \in (-1,1)$, 并两边同乘 $\sqrt{|x|}$, 即得

$$f(x) = \sqrt{|x|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{|x|})^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{2n+1}. \tag{8.11}$$

例题 8.2.3 (和函数的计算)**.** 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n$ 的收敛区间, 以及此幂级数的和函数.

解答. 收敛半径

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)} = 1, \tag{8.12}$$

故收敛区间为 $(-1,1)$. 在收敛区间内, 首先对 $\sum_{n=0}^{\infty} x^{n+2} = \frac{x^2}{1-x}$ 逐项求导, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+2)x^{n+1} = \left(\frac{x^2}{1-x}\right)' = \frac{2x-x^2}{(1-x)^2}; \tag{8.13}$$

再次逐项求导, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)(n+2)x^n = \left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)' = \frac{2}{(1-x)^3}. \tag{8.14}$$

8.3 Taylor 级数

例题 8.3.1 (初等函数的 Taylor 展开)**.** 求函数 $f(x) = \frac{1}{x^2-2x-3}$ 于 $x=1$ 处的 Taylor 展开式, 并计算 $f^{(2022)}(1), f^{(2023)}(1)$ 的值.

解答. 在 $x=1$ 的邻域上, 我们有

$$f(x) = \frac{1}{(x-3)(x+1)} = \frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{x-1}{2}} \frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-1}{2}} = -\frac{1}{4} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-1)^{2n}}{4^n}. \tag{8.15}$$

所以,

$$f^{(2022)}(1) = \left(-\frac{1}{4} \cdot (2n)! \frac{1}{4^n}\right)_{n=1011} = -\frac{2022!}{4^{1012}}, \tag{8.16}$$

$$f^{(2023)}(1) = 0. \tag{8.17}$$

例题 8.3.2 (变限积分的 Taylor 展开)**.** 在 $[0,+\infty)$ 上, 将函数

$$f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{8.18}$$

展开成幂级数.

解答. 在 $[0,+\infty)$ 上, 对幂级数

$$\mathrm{e}^{-x^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-x^2)^n}{n!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}x^{2n} \tag{8.19}$$

逐项求积分, 得到

$$f(x)=\int_0^x\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!}t^{2n}\,\mathrm{d}t=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n!(2n+1)}x^{2n+1}. \tag{8.20}$$

例题 8.3.3 (Taylor 展开: 常数项级数和的计算)**.** 在 $[-1,1]$ 上, 将函数

$$f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2} \tag{8.21}$$

展开成幂级数, 并据此计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$ 的和.

解答. 在 $[-1,1]$ 上, 对幂级数

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}=1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n} \tag{8.22}$$

逐项求积分, 得到

$$\begin{aligned}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)&=\int_0^x\left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right)\mathrm{d}t\\&=x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1};\end{aligned} \tag{8.23}$$

同时, 注意到在 $[-1,1]$ 上有

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n}; \tag{8.24}$$

所以:

$$\begin{aligned}f(x)&=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2}\\&=-1+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!(2n-1)}x^{2n}\\&\equiv-1+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)}x^{2n+2}\end{aligned} \tag{8.25}$$

由此, 记所求级数的和为 S, 则有 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{8}+\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2}$, 解得

$$S=2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{7}{2}-2\sqrt{5}. \tag{8.26}$$

9 广义积分与含参积分 I: 理论

9.1 广义积分的审敛

例题 9.1.1 (无穷积分实例: Γ-函数)**.** 设 $n\in\mathbb{N}$, 计算 $\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$. (暂不讨论敛散性)

解答. 记 $I_n\equiv\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$, 于是

$$\begin{aligned}I_{n+1}&=\int_0^{+\infty}x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=\left(-x^{n+1}\mathrm{e}^{-x}\right)_0^{+\infty}+(n+1)\int_0^{+\infty}x^n\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x\\&=(n+1)I_n,\end{aligned} \tag{9.1}$$

且注意到 $I_0\equiv\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=1$, 所以 $I_n=n!$.

例题 9.1.2 (瑕积分实例: B-函数)**.** 设 $m,n\in\mathbb{N}$, 计算 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x(1-x)}}$. (暂不讨论敛散性)

解答. 作代换 $x\equiv\sin^2\theta$, 则所求积分

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta}{\sin\theta\cos\theta}=\pi. \tag{9.2}$$

9.1.1 非负函数的比较审敛法

例题 9.1.3 (以 x^{-p} 为比较对象)**.** 讨论以下积分的敛散性:

1. $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}$;
2. $\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^p x\cos^q x}$ (其中 $p,q>0$);
3. $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ (其中 $p>0$).

解答. 1. 由于 $x^4-x^2+1=\left(x^2-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}>0$, 所以被积函数 $\frac{x^2}{x^4-x^2+1}$ 在 $[0,+\infty)$ 上不存在瑕点.

对 $x\geq\sqrt{2}>1$, 我们有

$$\frac{x^2}{x^4-x^2+1}<\frac{x^2}{x^4-\frac{1}{2}x^4}=\frac{2}{x^2}, \tag{9.3}$$

而积分 $\int_1^{+\infty}\frac{2}{x^2}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 所以, 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}$ 收敛. 进而, 原积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}=\int_0^1\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1}+\int_1^{+\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{x^4-x^2+1} \tag{9.4}$$

也收敛.

2. 被积函数 $y = \frac{1}{\sin^p x \cos^q x}$ 存在瑕点 $x = 0$ 与 $x = \frac{\pi}{2}$.

   (a) 当 $x \to 0$ 时,

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\sin^p x \cos^q x}}{\frac{1}{x^p}} = 1, \tag{9.5}$$

   所以, 当 $0 < p < 1$ 时, 原积分在 $x = 0$ 处收敛 (因为 $1 < +\infty$); 当 $p \geq 1$ 时, 原积分在 $x = 0$ 处发散 (因为 $1 > 0$).

   (b) 当 $x \to \frac{\pi}{2}$ 时, 同理, 原积分在 $0 < q < 1$ 时收敛、在 $q \geq 1$ 时发散.

   综上, 原积分在 $p, q < 1$ 时收敛, 否则发散.

3. 被积函数 $y = \frac{\ln(1+x)}{x^p}$ 当 $p > 1$ 时存在瑕点 $x = 0$.

   (a) 当 $x \to 0$ 时,

   $$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x^p}}{\frac{1}{x^{p-1}}} = 1, \tag{9.6}$$

   所以, 当 $0 < p < 2$ 时, 原积分在 $x = 0$ 处收敛, 否则发散.

   (b) 当 $x \to +\infty$ 时, 注意到: 若 $p > 1$, 则

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x^p}}{\frac{1}{x^{\frac{1+p}{2}}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{p-1}{2}}} = 0, \tag{9.7}$$

   此时, 原积分在 $x \to +\infty$ 时收敛. 若 $0 < p \leq 1$, 则

   $$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x^p}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty, \tag{9.8}$$

   此时, 原积分在 $x \to +\infty$ 时发散.

   综上, 原积分在 $1 < p < 2$ 时收敛, 否则发散.

9.1.2 乘积函数的 Dirichlet-Abel 审敛法

例题 9.1.4 (无穷积分的 Dirichlet-Abel 审敛法)**.** 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \arctan x \,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解答. 一方面, 函数 $y = \arctan x$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调有界; 另一方面, 积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \,\mathrm{d}x$ 收敛, 这是由于 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $[1, +\infty)$ 上单调且收敛到 0, 且积分 $\int_1^A \sin x \,\mathrm{d}x = \cos A - \cos 1$ 有界. 所以, 由 Dirichlet-Abel 审敛法, 无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \arctan x \,\mathrm{d}x$ 收敛.

例题 9.1.5 (乘积因子的构造)**.** 定义函数 $\theta : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ 为

$$\theta(x) = \int_0^x \sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)} \,\mathrm{d}t, \tag{9.9}$$

证明: 无穷积分 $\int_0^{+\infty} \cos(\theta(x)) \,\mathrm{d}x$ 收敛.

解答. 在 $[0,+\infty)$ 上, $\theta(x)$ 的导函数 $\theta'(x)=\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)}>0$ 单调递增. 我们考虑被积函数

$$f(x)\equiv\cos(\theta(x))=\frac{\cos(\theta(x))\theta'(x)}{\theta'(x)},\tag{9.10}$$

一方面, 积分 $\int_0^A\cos(\theta(x))\theta'(x)\,\mathrm{d}x=\sin(\theta(A))$ 对任给的 $A\geq 0$ 都有界; 另一方面, 函数 $y=\frac{1}{\theta'(x)}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调, 且当 $x\to+\infty$ 时收敛到 0. 则由 Dirichlet-Abel 审敛法, 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\cos(\theta(x))\,\mathrm{d}x$ 收敛.

例题 9.1.6 (Dirichlet 积分)**.** 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性 (绝对收敛、条件收敛或发散).

解答. 当 $x\to+\infty$ 时, 一方面,

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right|\geq\frac{\sin^2 x}{x}=\frac{1-\cos 2x}{x},\tag{9.11}$$

而无穷积分 $\int_c^{+\infty}\frac{1-\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散 (这是因为 $\int_c^{+\infty}\frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散但 $\int_c^{+\infty}\frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛), 所以原积分不绝对收敛. 另一方面, 函数 $y=\frac{1}{x}$ 在 $[c,+\infty)$ 上单调递减且当 $x\to+\infty$ 时收敛到 0, 且积分 $\int_c^A\sin x\,\mathrm{d}x$ (其中 $0<c\leq A<+\infty$) 有界, 则由 Dirichlet-Abel 审敛法, 原积分收敛. 综上, 原积分条件收敛.

9.2 含参常义积分的性质

例题 9.2.1 (含参积分的极限)**.** 计算下列极限:

1. $\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$;
2. $\lim_{y\to 0}\int_0^1\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\,\mathrm{d}x$.

解答. 1. 被积函数 $f(x,n)\equiv\frac{1}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}$ 在 $[0,1]\times[1,+\infty)$ 上连续. 所以,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\int_0^1\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{d}x}{1+\left(1+\frac{x}{n}\right)^n}=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+\mathrm{e}^x}=\ln\frac{2\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}}.\tag{9.12}$$

2. 被积函数在 $y=0$ 处并非二元连续, 不能交换极限运算和积分运算的次序. 事实上,

$$\lim_{y\to 0}\int_0^1\frac{x}{y^2}\mathrm{e}^{-\frac{x^2}{y^2}}\,\mathrm{d}x=\lim_{y\to 0}\frac{1}{2}\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{1}{y^2}}\right)=\frac{1}{2}.\tag{9.13}$$

例题 9.2.2 (积分的构造与对易)**.** 计算积分 $\int_0^1\frac{x^2-x}{\ln x}\,\mathrm{d}x$.

解答. 被积函数 $f(x)$ 存在不定义点 $x=0,1$. 尽管如此, 若补充定义 $f(0)=0,f(1)=1$, 则 $f(x)$ 成为连续函数, 所求为常义积分. 注意到,

$$\frac{x^2-x}{\ln x}=\int_1^2 x^y\,\mathrm{d}y,\tag{9.14}$$

所以,

$$\begin{aligned}\int_0^1 \frac{x^2-x}{\ln x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_1^2 x^y\,\mathrm{d}y \\ &= \int_1^2 \mathrm{d}y \int_0^1 x^y\,\mathrm{d}x \\ &= \int_1^2 \frac{1}{y+1}\,\mathrm{d}y \\ &= \ln\frac{3}{2}. \end{aligned}\tag{9.15}$$

例题 9.2.3 (变限含参积分的导数)**.** 设函数

$$f(x) = \int_0^x \frac{\sin t}{t}(x-t)^{2024}\,\mathrm{d}t,\tag{9.16}$$

计算 $f^{(2025)}(1)$.

解答. 我们用归纳法证明: 对 $f_n(x) \equiv \int_0^x \frac{\sin t}{t}(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t$ 成立

$$f_n^{(n)}(x) = (n-1)!\frac{\sin x}{x}.\tag{9.17}$$

1. $n=1$ 时, 结论显然成立.

2. 若结论对 n 成立, 则

$$\begin{aligned}f_{n+1}^{(n+1)}(x) &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\int_0^x \frac{\sin t}{t}(x-t)^n\,\mathrm{d}t \\ &= n\int_0^x \frac{\sin t}{t}(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\ &= n\cdot(n-1)!\frac{\sin x}{x} \\ &= n!\frac{\sin x}{x}. \end{aligned}\tag{9.18}$$

所以, $f^{(2025)}(1) = 2024!\sin 1$.

9.3 含参广义积分

9.3.1 一致收敛的判别法

例题 9.3.1 (强函数审敛法)**.** 任意取定 $r>0$. 证明: 含参无穷积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy^2}\cos x\,\mathrm{d}x$ 对于 $y\in[r,+\infty)$ 是一致收敛的.

解答. 当 $y\geq r$ 时, 我们有

$$\left|\mathrm{e}^{-xy^2}\cos x\right| \leq \mathrm{e}^{-xy^2} \leq \mathrm{e}^{-r^2x},\tag{9.19}$$

而无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-r^2x}\,\mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2r}\tag{9.20}$$

收敛. 则由强函数审敛法, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy^2}\cos x\,\mathrm{d}x$ 在 $y \in [r,+\infty)$ 上一致收敛.

例题 9.3.2 (Dirichlet-Abel 审敛法)**.** 讨论积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ 在 $\alpha \in [0,+\infty)$ 时的一致收敛性.

解答. 一方面, 积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛 (从而关于 α 一致收敛); 另一方面, 函数 $y=\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 在 $\alpha > 0$ 时单调且一致有界 (因为 $|y| \le 1$). 所以, $I(\alpha)$ 在 $\alpha \in [0,+\infty)$ 时一致收敛.

9.3.2 一致收敛积分的性质

例题 9.3.3 (广义积分号下的常义积分)**.** 设 $0<a<b$, 计算无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x$.

解答. 注意到

$$\frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x} = \int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y, \tag{9.21}$$

且无穷积分 $g(y)=\int_a^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x$ 在区间 $y \in [a,b]$ 上一致收敛 (这是因为关于强函数 $\mathrm{e}^{-xy} \le \mathrm{e}^{-ax}$ 的无穷积分收敛). 所以,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-ax}-\mathrm{e}^{-bx}}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_a^b \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y\\ &= \int_a^b \mathrm{d}y\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}x\\ &= \int_a^b \frac{1}{y}\,\mathrm{d}y\\ &= \ln\frac{b}{a}.\end{aligned} \tag{9.22}$$

例题 9.3.4 (广义积分号下的微分)**.** 设 b 是实数.

1. 证明含参变量 b 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} x\cos(2bx)\,\mathrm{d}x \tag{9.23}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

2. 证明:

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-b^2}\int_0^b \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{9.24}$$

解答. 1. 注意到, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}x\,\mathrm{d}x = \left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\right)_{x=+\infty}^{x=0} = 1$ 收敛, 而

$$\left|\mathrm{e}^{-x^2}x\cos(2bx)\right| \le \mathrm{e}^{-x^2}x, \tag{9.25}$$

则由强函数审敛法知 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}x\cos(2bx)\,\mathrm{d}x$ 对任意 $b \in \mathbb{R}$ 一致收敛.

2. 注意到

$$\mathrm{e}^{-x^2}x\cos(2bx) = \frac{\partial}{\partial b}\Big(\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\Big), \tag{9.26}$$

且无穷积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} x\cos(2bx)\,\mathrm{d}x$ 一致收敛、$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \sin(2bx)\,\mathrm{d}x$ 逐点收敛 (这由 Dirichlet-Abel 审敛法容易得到). 令

$$F(b) \equiv \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} \sin(2bx)\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-b^2} \int_0^b \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t, \tag{9.27}$$

则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F(b)}{\mathrm{d}b} &= 2\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2} x\cos(2bx)\,\mathrm{d}x - \mathrm{e}^{-b^2}\mathrm{e}^{b^2} + 2b\mathrm{e}^{-b^2}\int_0^b \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left(\frac{1}{2} - b\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x\right) - 1 + 2b\mathrm{e}^{-b^2}\int_0^b \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2bF(b).\end{aligned} \tag{9.28}$$

代入初值条件 $F(0) = 0$ 可知, 微分方程 $F'(b) = -2bF(b)$ 存在唯一解 $F(b) \equiv 0$, 此时待证等式成立.

10 广义积分与含参积分 II: 应用

10.1 广义积分的计算: 常义方法

10.1.1 作为常义积分的极限

例题 10.1.1 (用无穷和计算瑕积分)**.** 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 每项 $a_n > 0$, T 是序列 $\{a_n\}$ 中的最大项. 对于每个实数 $x > 0$, 定义 $L(x)$ 是序列 $\{a_n\}$ 中大于 x 的项的个数.

1. 证明: 0 是 $L(x)$ 的瑕点;
2. 证明: 瑕积分 $\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 并且

$$\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{10.1}$$

解答. 将序列 $\{a_n\}$ 重排为单调递减序列 $T = a_{\sigma_1} \geq a_{\sigma_2} \geq \cdots \geq a_{\sigma_n} \geq \cdots$, 其中, $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n, \cdots)$ 是 $(1, 2, \cdots, n, \cdots)$ 的一个排列. 则 $\{a_{\sigma_n}\}$ 成为区间 $[0, T]$ 上递减且收敛到左端点 0 的点列, 而新的 (正项) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma_n}$ 也收敛到 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 的和.

1. 任取 $N \in \mathbb{N}_+$, 此时, 必然存在 $\delta \equiv a_{\sigma_{N+1}} > 0$, 使得 $L(x) > N$ 对一切 $x \in (0, \delta)$ 成立. 所以, $\lim_{x\to 0} L(x) = +\infty$, 则 $x = 0$ 是 $L(x)$ 的瑕点.
2. 注意到 $L(x) = N$ 对任意 $x \in [a_{\sigma_{N+1}}, a_{\sigma_N}]$ 及 $N \in \mathbb{N}_+$ 成立. 现在, 我们任取 $\epsilon \in (0, T)$, 它必然落于 $[0, T]$ 的某个子区间 $[a_{\sigma_{N+1}}, a_{\sigma_N}]$ 内 (其中 $N \equiv N(\epsilon)$). 此

时, 常义积分

$$\begin{aligned}\int_{\epsilon}^{T} L(x)\,\mathrm{d}x &= \int_{\epsilon}^{a_{\sigma_N}} L(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{N-1}\int_{a_{\sigma_{n+1}}}^{a_{\sigma_n}} L(x)\,\mathrm{d}x \\ &= N(a_{\sigma_N}-\epsilon) + \sum_{n=1}^{N-1} n(a_{\sigma_n}-a_{\sigma_{n+1}}).\end{aligned} \tag{10.2}$$

代入区间条件 $a_{\sigma_{N+1}} \le \epsilon \le a_{\sigma_N}$, 得到

$$\sum_{n=1}^{N-1} n(a_{\sigma_n}-a_{\sigma_{n+1}}) \le \int_{\epsilon}^{T} L(x)\,\mathrm{d}x \le \sum_{n=1}^{N} n(a_{\sigma_n}-a_{\sigma_{n+1}}). \tag{10.3}$$

考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{\sigma_n}-a_{\sigma_{n+1}})$, 对其增删括号将不改变其敛散性, 于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{\sigma_n}-a_{\sigma_{n+1}}) &= a_{\sigma_1} + (-1+2)a_{\sigma_2} + \cdots + (-n+1+n)a_{\sigma_n} + \cdots \\ &= a_{\sigma_1} + a_{\sigma_2} + \cdots + a_{\sigma_n} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n}.\end{aligned} \tag{10.4}$$

由于当 $\epsilon \to 0_+$ 时 $N \to \infty$, 于是由夹逼定理,

$$\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{\epsilon}^{T} L(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{10.5}$$

例题 10.1.2 (用常义积分极限计算广义积分)**.** 设 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是单调下降的连续函数 (没有假定 $(0,+\infty)$ 上导函数 $f'(x)$ 的存在), C 和 D 都是实数, $\lim_{x\to 0_+} f(x) = C$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = D$, $0<a<b$. 求出广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x \tag{10.6}$$

的值.

解答. 任取点 $\xi > 0$, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\xi} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_{\xi}^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{10.7}$$

一方面, 瑕积分 $\int_0^{\xi} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{\epsilon}^{\xi} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$, 而

$$\int_{\epsilon}^{\xi} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\epsilon a}^{\xi a} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{\epsilon b}^{\xi b} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u; \tag{10.8}$$

同理, 对无穷积分 $\int_\xi^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\lim_{A\to+\infty}\int_\xi^A\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$, 我们有

$$\int_\xi^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=\int_{\xi a}^{Aa}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_{\xi b}^{Ab}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u. \tag{10.9}$$

于是,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\lim_{\epsilon\to 0_+,A\to+\infty}\left(\int_{\epsilon a}^{Aa}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_{\epsilon b}^{Ab}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right)\\&=\lim_{\epsilon\to 0_+,A\to+\infty}\left(\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t-\int_{Aa}^{Ab}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right).\end{aligned} \tag{10.10}$$

由于 $f(t)$ 单调下降且大于 0, 所以

$$f(\epsilon a)\ln\frac{b}{a}=f(\epsilon a)\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t\le\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t\le f(\epsilon b)\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t=f(\epsilon b)\ln\frac{b}{a}. \tag{10.11}$$

由夹逼定理, $\lim_{\epsilon\to0_+}\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t=C\ln\frac{b}{a}$. 同理, $\lim_{A\to+\infty}\int_{Aa}^{Ab}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u=D\ln\frac{b}{a}$. 所以,

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x=(C-D)\ln\frac{b}{a}. \tag{10.12}$$

注记 10.1. 将积分限 $\int_{\epsilon a}^{Aa}$ 与 $\int_{\epsilon b}^{Ab}$ 交换为 $\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}$ 与 $\int_{Aa}^{Ab}$, 是集散思想的体现: 我们将每个积分都局限在 $x=0$ 或 $x=+\infty$ 二者之一的附近小区间上.

10.1.2 换元积分与分部积分

例题 10.1.3 (换元积分与分部积分)**.** 计算广义积分:

1. 无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}\,\mathrm{d}x$;
2. 瑕积分 $\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

解答. 1.

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty}\frac{\arctan x}{x^3}\,\mathrm{d}x&=-\frac12\int_1^{+\infty}\arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)\\&=-\frac12\left(\frac{\arctan x}{x^2}\right)_1^{+\infty}+\frac12\int_1^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}\\&=\frac{\pi}{8}+\frac12\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2}-\frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{\pi}{8}+\frac12\left(-\frac1x-\arctan x\right)_1^{+\infty}\\&=\frac12;\end{aligned} \tag{10.13}$$

2.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x}}{1+(1-x)} = -2\left(\arctan\sqrt{1-x}\right)_0^1 = \frac{\pi}{2}. \quad (10.14)$$

10.2 广义积分的计算: 参数化方法

10.2.1 含参积分号下的积分法

例题 10.2.1 (含参积分法)**.** 设常数 $\omega > 0$. 计算广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x} \sin(\omega x)\,\mathrm{d}x. \quad (10.15)$$

解答. 注意到,

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x}, \quad (10.16)$$

而广义积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin(\omega x)\,\mathrm{d}x = \frac{\omega}{\omega^2 + y^2} \quad (10.17)$$

对 $y \in (0, +\infty)$ 一致收敛. 所以,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x} \sin(\omega x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \sin(\omega x)\,\mathrm{d}x \int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}y \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy} \sin(\omega x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{\omega}{\omega^2 + y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \arctan\frac{\beta}{\omega} - \arctan\frac{\alpha}{\omega}. \quad (10.18)\end{aligned}$$

10.2.2 含参积分号下的微分法

例题 10.2.2 (含参微分法的迭代)**.** 设 n 是正整数.

1. 任给常数 $a > 0$. 证明: 含参变量 t 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t + x^2)^n}\,\mathrm{d}x \quad (10.19)$$

在 $[a, +\infty)$ 上一致收敛;

2. 对于每个 $t \in (0, +\infty)$, 求出

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t + x^2)^n}\,\mathrm{d}x \quad (10.20)$$

的值.

解答. 1. 当 $t \geq a > 0$ 时, 被积函数对 $x \in [0,+\infty)$ 不存在瑕点. 同时, $\frac{1}{(t+x^2)^n} < \frac{1}{x^{2n}}$. 而无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x^{2n}}$ 收敛. 则由强函数审敛法, $\int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x$ 在 $t \in [a,+\infty)$ 上一致收敛. 进一步地, 积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x + \int_1^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \tag{10.21}$$

也在 $t \in [a,+\infty)$ 上一致收敛.

2. 对 $t > 0$, 记

$$I_n(t) \equiv \int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x. \tag{10.22}$$

被积函数 $g_n(x,t) \equiv \frac{1}{(t+x^2)^n}$ 满足 $\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = \frac{-n}{(t+x^2)^{n+1}}$. 由前, $I_n(t)$ 的一致收敛性对任意 $n \in \mathbb{N}_+$ 都成立, 则 $I(t)$ 在 $(0,+\infty)$ 上可导. 此时, 有

$$\begin{aligned}
I_1(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{t+x^2} = \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\arctan\frac{x}{\sqrt{t}}\right)\Bigg|_{x=0}^{x=+\infty} &&= \frac{\pi}{2t^{\frac{1}{2}}},\\
I_1^{(1)}(t) &= -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{(t+x^2)^2} &&= -\frac{\pi}{4t^{\frac{3}{2}}},\\
&\cdots\\
I_1^{(n-1)}(t) &= (-1)^n(n-1)!I_n(t) &&= (-1)^n\frac{(2n-3)!!\pi}{2^n t^{n-\frac{1}{2}}}.
\end{aligned} \tag{10.23}$$

解得:

$$I_n(t) = \begin{cases} \frac{(2n-3)!!\pi}{(n-1)!2^n t^{n-\frac{1}{2}}}, & n > 1,\\ \frac{\pi}{2\sqrt{t}}, & n = 1. \end{cases} \tag{10.24}$$

例题 10.2.3 (参数的引入)**.** 证明: 广义积分

$$I(\alpha) = \int_0^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{10.25}$$

在 $\alpha \in [-1,1]$ 上连续、在 $\alpha \in (-1,1)$ (的任意闭子区间) 上可导, 并据此计算

$$\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x. \tag{10.26}$$

解答. 记 $g(x,\alpha) \equiv \frac{\ln\left(1-\alpha^2x^2\right)}{x^2\sqrt{1-x^2}}$, 则

$$\frac{\partial g(x,\alpha)}{\partial \alpha} = -\frac{2\alpha}{\sqrt{1-x^2}(1-\alpha^2x^2)}. \tag{10.27}$$

1. 首先考察收敛性.

   (a) 若补充定义 $g(0,\alpha) = \lim_{x\to 0_+} g(x,\alpha) = -\alpha^2$, 则 $g(x,\alpha)$ 在点 $x = 0$ 处连续, 从而 $x = 0$ 成为积分 $I(\alpha)$ 的常义点. 对任意 $c \in (0,1)$, 常义积分

$\int_0^c g(x,\alpha)\,\mathrm{d}x$ 自然收敛.

(b) $x=1$ 为 $g(x,\alpha)$ 的瑕点. 对 $|\alpha|<1$, 存在 $0<\delta<1$ 使 $|\alpha|\le 1-\delta$. 此时, 根据强函数审敛法,

$$\left|\frac{\partial g(x,\alpha)}{\partial\alpha}\right| \le \frac{2}{\sqrt{1-x^2}(1-\alpha^2x^2)} \le \frac{2}{\sqrt{1-x^2}(1-\delta^2)}, \tag{10.28}$$

而积分 $\int_0^1 \frac{2\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}(1-\delta^2)} = \frac{2}{1-\delta^2}(\arcsin x)_{x=0}^{x=1} = \frac{\pi}{1-\delta^2}$ 收敛, 所以, $\int_0^1 \frac{\partial g(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x$ 对 $|\alpha|<1$ 一致收敛.

(c) 当 $x\to 1$ 时, 我们考虑含参积分

$$I_c(\alpha) = \int_c^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)\,\mathrm{d}x}{x^2\sqrt{1-x^2}} \tag{10.29}$$

在 $c\to 1^-$ 时的 (上界的) 渐近行为. 首先, 化简其非无穷小部分:

$$|I_c(\alpha)| \le \frac{1}{c^2\sqrt{1+c}}\left|\int_c^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}\right|; \tag{10.30}$$

随后, 注意到 (不失一般性, 假设 $\alpha>0$),

$$\begin{aligned}\int_c^1 \frac{\ln(1+\alpha x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} &= -2\int_c^1 \ln(1+\alpha x)\,\mathrm{d}\sqrt{1-x}\\ &= -2\left(\ln(1+\alpha x)\sqrt{1-x}\right)_c^1 + 2\alpha\int_c^1 \frac{\sqrt{1-x}\,\mathrm{d}x}{1+\alpha x}\\ &= 2\ln(1+\alpha c)\sqrt{1-c} + 4\sqrt{1-c} - 4\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\arctan\sqrt{\frac{\alpha(1-c)}{1-\alpha}},\end{aligned} \tag{10.31}$$

同理,

$$\int_c^1 \frac{\ln(1-\alpha x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} = 2\ln(1-\alpha c)\sqrt{1-c}+4\sqrt{1-c}+2\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\ln\left|\frac{\sqrt{1-c}-\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{\sqrt{1-c}+\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}\right|. \tag{10.32}$$

于是,

$$\begin{aligned}\int_c^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} &= \int_c^1 \frac{\ln(1-\alpha x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}} + \int_c^1 \frac{\ln(1+\alpha x)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}\\ &= 2\ln\left(1-\alpha^2c^2\right)\sqrt{1-c} + 8\sqrt{1-c}\\ &\quad - 4\sqrt{\frac{1-\alpha}{\alpha}}\arctan\sqrt{\frac{\alpha(1-c)}{1-\alpha}}\\ &\quad + 2\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}\ln\left|\frac{\sqrt{1-c}-\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}{\sqrt{1-c}+\sqrt{\frac{1+\alpha}{\alpha}}}\right|,\end{aligned} \tag{10.33}$$

进而

$$
\begin{aligned}
\left|\int_c^1 \frac{\ln(1-\alpha^2x^2)\,\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x}}\right| &\le \big(2\big|\ln\big(1-c^2\big)\big|+8\big)\sqrt{1-c} \\
&+4\sqrt{1-c} \\
&+2\sqrt{2}\ln\frac{\sqrt{2}-\sqrt{1-c}}{\sqrt{2}+\sqrt{1-c}} \\
&\equiv F(c).
\end{aligned} \tag{10.34}
$$

于是, 当 $c\to 1^-$ 时, $|I_c(\alpha)|$ 存在收敛到 0 的上界 $F(c)$, 从而 $I_c(\alpha)$ 一致收敛.

2. 由此, 我们得到, 积分 $I(\alpha)$ 在 $\alpha\in[-1,1]$ 上连续、在 $\alpha\in(-1,1)$ (的任意闭子区间) 上可导. 此时, 由广义积分号下的微分法, 对任意 $|\alpha|<1$ 有

$$
\begin{aligned}
I'(\alpha) &= \int_0^1 \frac{\partial g(x,\alpha)}{\partial\alpha}\,\mathrm{d}x \\
&= -2\alpha\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{1-x^2}(1-\alpha^2x^2)} \\
&= -2\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}\theta}{1-\alpha^2\sin^2\theta} \\
&= 2\alpha\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\alpha^2t^2-(1+t^2)} \\
&= -\frac{\pi\alpha}{\sqrt{1-\alpha^2}},
\end{aligned} \tag{10.35}
$$

则 $I(\alpha)=\pi\sqrt{1-\alpha^2}+C$. 考虑 $I(0)=0$, 解得 $C=-\pi$. 所以 $I(\alpha)=\pi\sqrt{1-\alpha^2}-\pi$.

3. 由 $I(\alpha)$ 的连续性,

$$
\int_0^1 \frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = I(1) = \lim_{\alpha\to1} I(\alpha) = -\pi. \tag{10.36}
$$

例题 10.2.4 (收敛因子法)**.** 证明和计算下列各题:

1. 证明 $I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛;
2. 证明 $I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 的任何闭子区间上可导, 即在 $(0,+\infty)$ 上可导;
3. 求出函数 $I(t)$, $t\in(0,+\infty)$;
4. 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的值.

解答. 记 $g(x,t)\equiv\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin x}{x}$.

1. 当 $x\ge0$ 且 $t\ge0$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $|\mathrm{e}^{-xt}|\le\mathrm{e}^0=1$ (单调且一致有界). 则由 Dirichlet-Abel 审敛法, $I(t)=\int_0^{+\infty}g(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛.

2. 注意到
$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t} = -\mathrm{e}^{-xt}\sin x. \tag{10.37}$$
对任给的 $\delta > 0$, 当 $t \in [\delta, +\infty)$ 时, $|\mathrm{e}^{-xt}\sin x| \le \mathrm{e}^{-\delta x}$, 而无穷积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\delta x}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 则由强函数审敛法, 无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x$ 关于 $t \in [\delta, +\infty)$ 上一致收敛. 再由 $I(t)$ 的收敛性, 得到: $I(t)$ 在 $t \in [\delta, +\infty)$ 上可导.

3. 由含参广义积分的微分法,
$$\begin{aligned} I'(t) &= \int_0^{+\infty} \frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^{+\infty} -\mathrm{e}^{-xt}\sin x\,\mathrm{d}x \\ &= \left(\mathrm{e}^{-xt}\cos x\right)_0^{+\infty} + t\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\cos x\,\mathrm{d}x \\ &= -1 + t\left(\left(\mathrm{e}^{-xt}\sin x\right)_0^{+\infty} + t\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\sin x\,\mathrm{d}x\right) \\ &= -1 - t^2 I'(t), \end{aligned} \tag{10.38}$$
解得
$$I'(t) = -\frac{1}{1+t^2}, \tag{10.39}$$
从而 $I(t) = -\arctan t + C$. 为计算常数 C, 我们注意
$$0 \le |I(t)| \le \int_0^{+\infty} |g(x,t)|\,\mathrm{d}x < \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{t}, \tag{10.40}$$
于是, 由夹逼定理 $\lim_{t\to+\infty} I(t) = 0$, 解得 $C = \frac{\pi}{2}$, 于是
$$I(t) = \frac{\pi}{2} - \arctan t. \tag{10.41}$$

4. 由 $I(t)$ 的一致收敛性可知, 它在 $t \in [0, +\infty)$ 上连续. 所以
$$I(0) = \lim_{t\to 0} I(t) = \frac{\pi}{2}. \tag{10.42}$$

10.3 特殊函数与特殊积分

10.3.1 两个特殊积分

例题 10.3.1 (Gauss 积分的变体)**.** 计算广义积分:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(Ax^2+2Bx+C)}\,\mathrm{d}x$ (常数 A, B, C 满足 $A > 0$ 且 $AC > B^2$);
2. $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$ (常数 α, β 满足 $\alpha > 0$).

解答. 1. 由 $\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\pi}$ 可知,
$$\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-(Ax^2+2Bx+C)}\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{\frac{B^2}{A}-C}\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-A\left(x+\frac{B}{A}\right)^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{A}}\mathrm{e}^{\frac{B^2}{A}-C}. \tag{10.43}$$

2. 当 $x \geq 0$ 时, 由于 $\left|x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\right| \leq x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}$, 则所求积分 $I(\beta)$ 关于 $\beta \in \mathbb{R}$ 逐点收敛, 且 $\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$ 关于 $\beta \in \mathbb{R}$ 一致收敛. 此时, 对广义积分号应用微分法, 有

$$\frac{\mathrm{d}I(\beta)}{\mathrm{d}\beta} = -\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\beta}{2\alpha}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x = -\frac{\beta}{2\alpha}I(\beta), \tag{10.44}$$

求解初值问题

$$\begin{cases} I'(\beta) = -\frac{\beta}{2\alpha}I(\beta), \\ I(\beta = 0) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}. \end{cases} \tag{10.45}$$

即得

$$I(\beta) = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\exp\left(-\frac{\beta^2}{4\alpha}\right). \tag{10.46}$$

例题 10.3.2 (Dirichlet 积分的变体)**.** 计算广义积分:

1. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$;

2. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x$.

解答. 1. 由分部积分法,

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x = \int_0^{+\infty}\sin^2 x\,\mathrm{d}\left(-\frac{1}{x}\right) = \left(\frac{\sin^2 x}{x}\right)_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty}\frac{\sin 2x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}. \tag{10.47}$$

2. 由换元积分法,

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin(x^2)}{x^2}\,\mathrm{d}\left(x^2\right) = \frac{\pi}{4}. \tag{10.48}$$

10.3.2 两个特殊函数

例题 10.3.3 (整值 Γ-函数)**.** 设 E 为实数.

1. 求出所有的实数 E, 使得

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \tag{10.49}$$

收敛;

2. 求出所有的实数 E, 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \tag{10.50}$$

收敛.

解答. 1. 注意到,

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{E-1}\,\mathrm{d}x, \tag{10.51}$$

所以, 使原式收敛的全体实数为 $E<1$.

2. 注意到,

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{E^n}{n!}\Gamma(n+1)=\sum_{n=0}^{\infty}E^n, \tag{10.52}$$

所以, 使原式收敛的全体实数为 $-1<E<1$.

例题 10.3.4 (半整值 Γ-函数)**.** 计算无穷积分 $\int_0^{+\infty}\sqrt{x^3}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

解答.

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{x^3}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x=\Gamma\left(\frac{5}{2}\right)=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3\sqrt{\pi}}{4}. \tag{10.53}$$

例题 10.3.5 (用 B-函数表示广义积分)**.** 计算广义积分:

1. 瑕积分 $\int_0^1\sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\,\mathrm{d}x$;
2. 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4}$ (表达式中允许含 Γ-函数).

解答. 1.

$$\int_0^1\sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\,\mathrm{d}x=\mathrm{B}\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right)=\frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(4)}, \tag{10.54}$$

其中,

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)&&=\sqrt{\pi},\\ \Gamma\left(\frac{7}{2}\right)&=\frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi}&=\frac{15\sqrt{\pi}}{8},\\ \Gamma(4)&=3!&=6.\end{aligned} \tag{10.55}$$

于是,

$$\int_0^1\sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\,\mathrm{d}x=\frac{5\pi}{16}. \tag{10.56}$$

2. 被积函数满足 $0\le\frac{x^2}{1+x^4}\le\frac{1}{2x^2}$, 则无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4}$ 收敛. 此时, 令 $x\equiv\sqrt{\tan\theta}$, 则

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{x^2\,\mathrm{d}x}{1+x^4}&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\tan\theta\cos^2\theta\frac{\mathrm{d}\theta}{2\sqrt{\tan\theta}\cos^2\theta}\\ &=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{\frac{1}{2}}\theta\cos^{-\frac{1}{2}}\theta\,\mathrm{d}\theta\\ &=\frac{1}{4}\mathrm{B}\left(\frac{1}{4},\frac{3}{4}\right)\\ &=\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)\Gamma\left(\frac{5}{4}\right).\end{aligned} \tag{10.57}$$

11 Fourier 分析

11.1 周期函数的 Fourier 级数展开

例题 11.1.1 (Fourier 级数及其和函数)**.** 解答下列问题.

1. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数, $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上等于 e^x. 求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 并且求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=\pi$ 处的和.

2. 求出级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} \tag{11.1}$$
的和.

解答. 考虑 Fourier 级数展开
$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos(nx)+b_n\sin(nx)). \tag{11.2}$$

1. 由已知,
$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{\pi}\left(\mathrm{e}^x\cos(nx)\right)_{-\pi}^{\pi}+\frac{n}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^x\sin(nx)\,\mathrm{d}x\\&=(-1)^n\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{\pi}+\frac{n}{\pi}\left(\mathrm{e}^x\sin(nx)\right)_{-\pi}^{\pi}-\frac{n^2}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathrm{e}^x\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\&=(-1)^n\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{\pi}-n^2a_n,\end{aligned} \tag{11.3}$$
解得
$$a_n=\frac{(-1)^n(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}. \tag{11.4}$$
同理可得
$$b_n=\frac{n(-1)^{n+1}(\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}. \tag{11.5}$$
于是, $f(x)$ 的 Fourier 级数为
$$f(x)\sim\frac{\mathrm{e}^{\pi}-\mathrm{e}^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{1+n^2}\left(\cos(nx)-n\sin(nx)\right)\right). \tag{11.6}$$
由已知, $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上分段连续、分段单调, 则其在 $x=\pi$ 处的 Fourier 级数将收敛到
$$S(\pi)=\frac{f(\pi^+)+f(\pi^-)}{2}=\frac{\mathrm{e}^{\pi}+\mathrm{e}^{-\pi}}{2}. \tag{11.7}$$

2. 在 Fourier 级数中令 $x = \pi$, 有

$$S(\pi) = \frac{e^{\pi} - e^{-\pi}}{\pi}\left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2}\right), \tag{11.8}$$

解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi(e^{\pi} + e^{-\pi})}{2(e^{\pi} - e^{-\pi})} - \frac{1}{2}. \tag{11.9}$$

例题 11.1.2 (奇偶性)**.** 设 2π 周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x) = x^2$, 求 $f(x)$ 所对应的 Fourier 级数及其和函数, 并给出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的值.

解答. 在 $[-\pi,\pi]$ 上, 函数 $f(x) = x^2$ 是偶函数, 不妨设其 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos(nx), \tag{11.10}$$

于是,

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\,dx = \frac{2\pi^2}{3}, \tag{11.11}$$

且对一切 $n > 0$ 有

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x^2\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{1}{n\pi}\left(x^2\sin(nx)\right)_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi} x\sin(nx)\,dx \\ &= \frac{2}{n^2\pi}\left(x\cos(nx)\right)_{-\pi}^{\pi} - \frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,dx \\ &= \frac{4(-1)^n}{n^2}. \end{aligned} \tag{11.12}$$

所以,

$$f(x) \sim \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx). \tag{11.13}$$

由于函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且分段单调, 所以该级数在任一点 $x \in \mathbb{R}$ 处均收敛到 $f(x) = x^2$, 即

$$x^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) \tag{11.14}$$

- 令 $x = \pi$, 有

$$\pi^2 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}. \tag{11.15}$$

- 令 $x = 0$, 有

$$0 = \frac{\pi^2}{3} + 4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} \;\Rightarrow\; \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2} = -\frac{\pi^2}{12}. \tag{11.16}$$

例题 11.1.3 (周期延拓与对称化延拓)**.** 求函数 $f(x)=\frac{\pi-x}{2}$ $(0\le x\le 2\pi)$ 的正弦级数展开, 并给出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 的值.

解答. 我们对函数 $f(x)$ 作奇延拓

$$g(x)=\begin{cases}\frac{\pi-x}{2}, & |x|<2\pi, x\neq 0,\\ 0, & x=0\end{cases} \tag{11.17}$$

与周期延拓, 得到以 2π 为周期的奇函数 $h(x)$. 设 $h(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}b_n\sin(nx)$, 我们有

$$b_n=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{\pi-x}{2}\sin(nx)\,\mathrm{d}x=\frac{1}{n}. \tag{11.18}$$

于是,

$$h(x)\sim\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(nx)}{n}. \tag{11.19}$$

由于 $h(x)$ 分段连续且分段单调, 特别地在点 $x=1$ 处连续, 所以,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}=h(1)=\frac{\pi-1}{2}. \tag{11.20}$$

例题 11.1.4 (Fourier 级数逼近)**.** 解答下列问题.

1. 设 p 是非整数的实数, $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 它在 $[-\pi,\pi)$ 上等于 $\cos(px)$. 求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 及其和函数.
2. 明确写出从上面 (1) 中的 $\cos(px)$ 的 Fourier 展开式推出下面等式的详细推导过程: 当 $t\in\mathbb{R}$, $\frac{t}{\pi}$ 不是整数时, 有

$$\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{t+n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right). \tag{11.21}$$

3. 明确写出从上面 (2) 中 $\frac{1}{\sin t}$ 的展开式推出下面等式的详细推导过程:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}. \tag{11.22}$$

解答. 1. 注意到, $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi)$ 上为偶函数. 不妨设其 Fourier 级数为 $f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\cos(nx)$, 于是,

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(px)\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}(\cos((n+p)x)+\cos((n-p)x))\,\mathrm{d}x\\&=\frac{(-1)^n}{\pi}\frac{2p}{p^2-n^2}\sin(p\pi).\end{aligned} \tag{11.23}$$

所以, $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{\sin(p\pi)}{p\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p(-1)^n \sin(p\pi)}{\pi(p^2-n^2)} \cos(nx), \tag{11.24}$$

其在 $x \in [-\pi, \pi]$ 上分段连续、分段单调. 由 Dirichlet 定理, 和函数为 $\cos(px)$.

2. 在 Fourier 级数展开式

$$\cos(px) = \frac{\sin(p\pi)}{p\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p(-1)^n \sin(p\pi)}{\pi(p^2-n^2)} \cos(nx) \tag{11.25}$$

中, 令 $x=0$, 有

$$1 = \frac{\sin(p\pi)}{p\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p(-1)^n \sin(p\pi)}{\pi(p^2-n^2)}. \tag{11.26}$$

若 $t \equiv p\pi$ 使得 $p = \frac{t}{\pi}$ 不是整数, 则 $t \neq 0$, 此时上式等价于

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{t+n\pi} + \frac{1}{t-n\pi} \right). \tag{11.27}$$

3. 注意到对 $t \in (0, \pi)$ 及 $n > 1$ 有

$$\left| (-1)^n \sin t \left(\frac{1}{t+n\pi} + \frac{1}{t-n\pi} \right) \right| = \frac{2t|\sin t|}{n^2\pi^2 - t^2} \leq \frac{2\pi}{(n^2-1)\pi^2}, \tag{11.28}$$

则由强级数审敛法, (2) 中的展开式对 $t \in (0, \pi)$ 一致收敛, 因此可以逐项积分. 取积分 $\int_0^\pi \mathrm{d}t$, 有

$$\begin{aligned} \pi &= \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^\pi \left(\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi} + \frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^\pi \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t \\ &= 2 \int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{11.29}$$

于是,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}. \tag{11.30}$$

11.2 Parseval 等式

例题 11.2.1 (函数平方的积分)**.** 根据例题11.1.2的结果, 给出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4}$ 的值.

解答. 由 Parseval 等式,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,\mathrm{d}x,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}. \tag{11.31}$$