2024-2025 学年第 2 学期高等数学 B 期中参考解答

ccfrog

1. 计算二重积分 $\iint_D (|x|+y)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是闭圆域: $x^2+y^2 \le a^2$ $(a>0)$. (12 分)

解答 由对称性, $\iint_D |x|y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 作极坐标变换 $(x,y) \mapsto (\rho,\theta)$, 于是 $D \mapsto D' = \{(\rho,\theta)|0 \le \rho \le a, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. 从而

$$\begin{aligned}\iint_D (|x|+y)^2 \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= \iint_D (x^2+y^2) \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^a \rho \,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \rho^2 \,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_0^a \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \\ &= \frac{\pi}{2} a^4.\end{aligned}$$

2. 求由三个圆柱面 $x^2+y^2=R^2, y^2+z^2=R^2, z^2+x^2=R^2$ 所围立体的表面积 $(R>0)$. (12 分)

解答 记这三个圆柱面围成的闭曲面为 S. 在第一卦限, 它们有一个公共点 $P\left(\frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}, \frac{R}{\sqrt{2}}\right)$. 由几何关系, 曲面 S 在第一卦限的部分将被点 P 分割为全等的 6 小块. 其中一小块 S_0 满足方程 $x^2+z^2=R^2$, 在 xOy 平面第一象限上的投影是由圆弧 $x^2+y^2=R^2$、直线 $x=\frac{R}{\sqrt{2}}$ 与 x 正半轴所围成的半弓形 D_0.

作极坐标变换 $(x,y) \mapsto (\rho,\theta)$, 则

$$D_0 \mapsto D_0' = \left\{0 \le \theta \le \frac{\pi}{4}, \frac{R}{\sqrt{2}\cos\theta} \le \rho \le R\right\}.$$

所以,

$$
\begin{aligned}
\sigma(S) &= 48\sigma(S_0) \\
&= 48 \iint_{D_0} \sqrt{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{R^2 - x^2}}\right)^2 + 0^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \\
&= 48 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \mathrm{d}\theta \int_{\frac{R}{\sqrt{2}\cos\theta}}^{R} \frac{R}{\sqrt{R^2 - \rho^2 \cos^2\theta}} \rho \,\mathrm{d}\rho \\
&= 48 \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{R}{\cos^2\theta} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \sin\theta\right) \mathrm{d}\theta \\
&= 24R^2(2 - \sqrt{2}).
\end{aligned}
$$

3. 计算第一型曲线积分 $\int_C (x+y+1)\,\mathrm{d}s$, 其中 C 是以 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形的边界. (12 分)

解答 对线段 AB 上一点 $P(x,y)$, 记 $s \equiv |PA|$, 则 $(x,y) = \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}}, \frac{s}{\sqrt{2}}\right)$. 于是,

$$
\begin{aligned}
\int_C (x+y+1)\,\mathrm{d}s &= \int_0^1 (x+1)\,\mathrm{d}x + \int_0^1 (y+1)\,\mathrm{d}y + \int_0^{\sqrt{2}} 2\,\mathrm{d}s \\
&= 3 + 2\sqrt{2}.
\end{aligned}
$$

4. 计算第二型曲线积分 $I = \oint_C y\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}y + x\,\mathrm{d}z$, 其中 C 为圆周: $x^2+y^2+z^2 = a^2 (a>0), x+y+z=0$, 从 x 轴正向看去, C^+ 为逆时针方向. (14 分)

解答 设 $\{\mathbf{e}_x, \mathbf{e}_y, \mathbf{e}_z\}$ 为空间坐标轴正向上的单位正交基组. 记 $\mathbf{F}(x,y,z) \equiv y\mathbf{e}_x + z\mathbf{e}_y + x\mathbf{e}_z$, 于是

$$
\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & z & x \end{vmatrix} = -(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z).
$$

根据右手定则, C^+ 所围成的 (正向) 圆面 S^+ 的单位法向量 $\mathbf{n} = \frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{e}_x + \mathbf{e}_y + \mathbf{e}_z)$.

由几何关系, S^+ 的半径为 a. 根据 Stokes 公式,

$$\begin{aligned} I &= \iint_S (\boldsymbol{\nabla} \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, \mathrm{d}S \\ &= -\sqrt{3} \iint_S \mathrm{d}S \\ &= -\sqrt{3}\pi a^2. \end{aligned}$$

5. 求第二型曲面积分

$$I = \oiint_{S^+} (x^2 + x) \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z + (y^2 + y) \, \mathrm{d}z \, \mathrm{d}x + (z^2 + z) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y,$$

S^+ 为球面 $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ $(R > 0)$ 的外侧. (14 分)

解答 记 Ω 为球体 $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$. 根据 Gauss 公式,

$$\begin{aligned} I &= \iiint_\Omega ((2x + 1) + (2y + 1) + (2z + 1)) \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ &= 3 \iiint_\Omega \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z \\ &= 4\pi R^3. \end{aligned}$$

6. 求解方程 $xy' - y = (x + y) \ln \frac{x+y}{x}$. (15 分)

解答 由已知, $x \neq 0$, 则原方程等价于

$$y' = \frac{y}{x} + \left(1 + \frac{y}{x}\right) \ln\left(1 + \frac{y}{x}\right).$$

方程右端为齐次式. 作代换 $u(x) \equiv \frac{y(x)}{x}$, 则 $y' = u + xu'$. 代入原方程, 有 $xu' = (1 + u) \ln(1 + u)$.

1. 当 $u \neq 0$ 时, 根据变量分离形式

$$\frac{\mathrm{d}u}{(1 + u) \ln(1 + u)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}$$

解得通积分 $\ln|\ln(1+u)| = \ln|x| + C_1$ (C_1 为任意常数), 即

$$\ln\frac{x+y}{x} = Cx,$$

其中, $C \equiv \pm e^{C_1} \neq 0$.

2. 奇解 $u \equiv 0$ 对应通积分中 $C = 0$ 的情形.

综上, 原方程的通积分为 $\ln\frac{x+y}{x} = Cx$ (C 为任意常数).

7. 求微分方程 $y'' + 3y' + 2y = \frac{1}{2+e^x}$ 的通解. (15 分)

解答

1. 齐次部分 $y'' + 3y' + 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + 3\lambda + 2 = 0$, 解得特征根 $\lambda_1 = -1, \lambda_2 = -2$. 所以, 齐次部分的通解

$$y^0 = C_1^0 e^{-x} + C_2^0 e^{-2x},$$

其中, C_1^0, C_2^0 为任意常数.

2. 设原方程存在特解 $y^* = C_1(x)e^{-x} + C_2(x)e^{-2x}$. 根据常数变易法,

$$\begin{cases} C_1'(x)e^{-x} + C_2'(x)e^{-2x} = 0, \\ -C_1'(x)e^{-x} - 2C_2'(x)e^{-2x} = \frac{1}{2+e^x}, \end{cases}$$

解得

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{e^x}{2+e^x}, \\ C_2'(x) = -\frac{e^{2x}}{2+e^x}, \end{cases}$$

从而符合条件的一组待定函数

$$\begin{cases} C_1(x) = \ln(2+e^x), \\ C_2(x) = 2\ln(2+e^x) - e^x. \end{cases}$$

所以, 原方程存在特解

$$y^* = e^{-x}\ln(2+e^x) - e^{-x} + 2e^{-2x}\ln(2+e^x).$$

综上, 原方程的通解

$$\begin{aligned} y &= y^0 + y^* \\ &= e^{-x}\left(C_1 + \ln(2+e^x)\right) + e^{-2x}\left(C_2 + 2\ln(2+e^x)\right), \end{aligned}$$

其中, $(C_1, C_2) \equiv (C_1^0 - 1, C_2^0)$ 为任意常数.

8. 设 $P(x,y), Q(x,y)$ 在全平面 $\mathbb{R}^2$ 上有一阶连续偏导数, 且对以任意点 (x_0,y_0) 为中心, 以任意 $R>0$ 为半径的上半圆 $L: y = y_0 + \sqrt{R^2-(x-x_0)^2}$ 恒有 $\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$. (对曲线的两个方向都成立) 证明: $P(x,y) \equiv 0, \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \equiv 0$, 对任意 $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. (6 分)

解答 记 $(x,y) \equiv (x_0 + R\cos\theta, y_0 + R\sin\theta)$. 由已知,

$$
\begin{aligned}
0 = &\int_L P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y \\
=&R\int_0^{\pi} \left((P(x_0,y_0) + P_x(x_0,y_0)R\cos\theta + P_y(x_0,y_0)R\sin\theta + f(x_0,y_0;R))\,(-\sin\theta) \right. \\
&\left. + \,(Q(x_0,y_0) + Q_x(x_0,y_0)R\cos\theta + Q_y(x_0,y_0)R\sin\theta + g(x_0,y_0;R))\cos\theta \right) \mathrm{d}\theta\,,
\end{aligned}
$$

其中 $f(x_0,y_0;R), g(x_0,y_0;R) = o(R)$. 此时,

$$0 = \frac{\pi}{2}\left(Q_x(x_0,y_0) - P_y(x_0,y_0)\right) - 2(P(x_0,y_0) + f(x_0,y_0;R)).$$

令 $R \to 0_+$, 得

$$P(x_0,y_0) = \frac{\pi}{4}\left(Q_x(x_0,y_0) - P_y(x_0,y_0)\right). \tag{1}$$

于是, 对给定的 L, 若记对应的下半圆为 L', 容易验证 $\int_{L'} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0$, 进而

$$\oint_{L+L'} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y = 0.$$

下面证明 $P(x,y) \equiv 0$. 若不然: 不失一般性, 设存在某点 (x_0,y_0) 满足 $P(x_0,y_0) > 0$. 此时, 由 $P(x,y)$ 的连续性, 存在 $R>0$ 及对应的圆域 $D_R \equiv \{(x,y) | (x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 \le R^2\}$, 使得 $P(x,y) > 0$ 对任意 $(x,y) \in D_R$ 成立. 于是, 由 Green 公式,

$$
\begin{aligned}
\oint_{L+L'} P(x,y)\,\mathrm{d}x + Q(x,y)\,\mathrm{d}y &= \iint_{D_R} \left(Q_x(x,y) - P_y(x,y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{4}{\pi}\iint_{D_R} P(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&> 0,
\end{aligned}
$$

于是导出了矛盾.

所以, $P(x,y) \equiv 0$. 进一步地, 根据等式 (1), 有 $Q_x(x,y) = P_y(x,y) \equiv 0$.