1. 二重积分

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2025.3.9

1 二重可积性

定义 1.1 (二重积分的定义)**.** 设 $z = f(x,y)$ 为定义在有界闭区域 D 上的函数. 若对 D 的任意分割 $D = \cup_{i=1}^n D_i$ 及任意选择的 $(x_i, y_i) \in D_i$, 当 $\lambda \equiv \max_{1\le i\le n} d(D_i) \to 0$ 时, 和数

$$S_n \equiv \sum_{i=1}^{n} f(x_i, y_i)\Delta\sigma_i \tag{1}$$

存在 (无关分割方式的) 极限 I, 则称该极限 I 为函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上的**二重积分** (double integral), 记作 $\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

- 函数 $f(x,y)$ 称为**被积函数** (integrand), 区域 D 称为**积分区域** (integral area).
- 实际应用中, 被积函数往往代表某种 "密度" (单位面积下的某物理量), 而二重积分则是在无限小面积元 "网格" 上的**加权和**.

定理 1.1 (二重可积性的充分条件)**.** 有界闭区域上连续的二元函数是可积的.

定理 1.2 (二重积分的中值定理)**.** 设二元函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 则存在点 $(x_0, y_0) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \sigma(D) f(x_0, y_0), \tag{2}$$

其中, $\sigma(D)$ 为区域 D 的面积.

- 加权版本: 设函数 $f(x,y)$ 在有界闭区域 D 上连续, 函数 $g(x,y)$ 在 D 上非负, 且 $g(x,y)$ 与 $f(x,y)g(x,y)$ 均二重可积. 则存在点 $(x_0, y_0) \in D$, 使得

$$\iint_D f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = f(x_0,y_0)\iint_D g(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

例题 1.1 (二重积分的中值定理)**.** 计算

$$\lim_{\rho\to 0_+} \frac{1}{\rho^2}\iint_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{4}$$

其中 $f(x,y)$ 为二元连续函数.

2 重积分与累次积分

定理 2.1 (二重积分化为累次积分)**.** 设函数 $f(x,y)$ 在闭区域 D 上连续, 其中 D 由直线 $x=a, x=b$ 及两条连续曲线 $y=\varphi_1(x), y=\varphi_2(x)$ 围成. 这里 $a<b$ 且 $\varphi_1(x)<\varphi_2(x), a\le x\le b$. 则

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{5}$$

- 根据具体问题, 选择易于计算的面元分割方案.

2.1 积分次序的选择

例题 2.1 (“扫描” 的方向与积分次序)**.** 设 D 是由直线 $x=\frac{p}{2}$ 和抛物线 $y^2=2px$ 包围的区域, 且 $p>0$, 计算二重积分

$$\iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{6}$$

注记 2.1. 两种 “扫描” 方向及其对应的积分次序:

- 横向扫描: 与 y 轴平行的直线扫过 x 轴, 积分次序为先 x 后 y;
- 纵向扫描: 与 x 轴平行的直线扫过 y 轴, 积分次序为先 y 后 x;
- 扫描线平行于 “内层变量” 的轴, 沿 “外层变量”(垂直地) 扫描, 线与区域的交点构成了内层变量的积分限.

例题 2.2 (运算简繁的区别)**.** 设 D 是由直线 $y=0, y=2, y=x, y=x+2$ 所围成的 $\mathbb{R}^2$ 中有界闭区域. 求二重积分

$$\iint_D\left(\frac{1}{2}x-y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{7}$$

注记 2.2. 几何角度看, 积分次序影响扫描线的走向. 在选择次序时应考虑到 D 的形状.

例题 2.3 (可积性的区别)**.** 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $y=2, x=0$ 围成的区域. 计算二重积分

$$I=\iint_D \sin\left(y^3\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{8}$$

注记 2.3. 代数角度看, 积分次序影响被积函数的内层 (含参) 可积性.

2.2 简单的积分区域

例题 2.4 (矩形区域上的二重积分)**.** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2\le(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{9}$$

注记 2.4. 矩形区域 $D \equiv [a,b] \times [c,d]$ 上的二重积分

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{10}$$

例题 2.5 (直角三角形区域上的二重积分)**.** 计算累次积分

$$I = \int_0^\pi \mathrm{d}x \int_x^\pi \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y. \tag{11}$$

注记 2.5. 直角三角形区域 $D \equiv \{(x,y)|0 \le y \le x \le a\}$ 上的二重积分, 成立 (用于交换积分次序的) *Dirichlet* 公式:

$$\int_0^a \mathrm{d}x \int_0^x f(x,y)\,\mathrm{d}y = \int_0^a \mathrm{d}y \int_y^a f(x,y)\,\mathrm{d}x \tag{12}$$

例题 2.6 (可分离变量的二重积分)**.** 设函数 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的正值连续函数, 且最小值为 m, 最大值为 M. 证明:

$$1 \le \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right) \le \frac{(m+M)^2}{4mM}. \tag{13}$$

注记 2.6. 矩形区域 $D \equiv [a,b] \times [c,d]$ 上, 被积函数 $z = f(x)g(y)$ 的二重积分

$$\iint_D z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y\right) \tag{14}$$

为两个单变量定积分的乘积, 这是变量之间某种 “独立性” 的体现.

2.3 复杂的积分区域

例题 2.7 (从边界条件确定积分限)**.** 两个半径为 a 的圆柱体, 其轴线相互垂直且交于一点 O. 求两圆柱体公共部分 (古称**牟合方盖**) 的体积.

注记 2.7. 某几何体, 高度为 $z = h$ 处的横截面积 $\sigma(h)$ 可由二重积分计算得到. 进一步地, 若 $0 \le h \le H$, 则该几何体的体积可由公式

$$V(H) = \int_0^H \sigma(h)\,\mathrm{d}h \tag{15}$$

得到, 古称**祖□原理**.

注记 2.8. 比起积分区域的全貌, 更重要的往往是积分区域的**边界**, 这决定了各层变量的积分限.

例题 2.8 (分段积分)**.** 计算二重积分

$$I = \iint_D \left|x - y^2\right|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{16}$$

其中 $D = [0,1] \times [-1,1]$.

3 极坐标系下的二重积分

定理 3.1.

$$\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iint_{D'} f(\rho\cos\theta, \rho\sin\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta, \tag{17}$$

其中, $D' \equiv \{(\rho,\theta)|(\rho\cos\theta,\rho\sin\theta)\in D\}$.

- 若被积函数或积分区域在极坐标系下处理更简便, 则可以考虑极坐标代换.
- 面元对应关系 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \rho\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta$, 因子 ρ 体现了坐标变换对 "面积尺度" 造成的影响.

例题 3.1 (被积函数适宜极坐标代换)**.** 计算二重积分

$$\begin{aligned} I &= \iint_D \ln\left(1+x^2+y^2\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \\ D &= \{(x,y)|x^2+y^2\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}. \end{aligned} \tag{18}$$

例题 3.2 (积分区域适宜极坐标代换)**.** 计算曲面 $x^2+y^2+z^2=4$ 与 $x^2+y^2=3z$ 所围的空间区域在 $z\ge 0$ 部分的体积.

注记 3.1. 某几何体, 由上底面 $\Sigma_1 : z = f_1(x,y)$ 与下底面 $\Sigma_2 : z = f_2(x,y)$ 围成 $(f_1 \ge f_2)$, 这两个底面在 xOy 平面上有完全重合的投影 D. 该几何体的体积可由两个曲顶柱体体积作差

$$V = \iint_D \left(f_1(x,y) - f_2(x,y)\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{19}$$

得到.

例题 3.3 (复杂的积分区域)**.** 计算二重积分

$$I = \iint_D (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{20}$$

其中 D 是两个圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2-2x+y^2=0$ 的公共部分在第一象限内的区域.

Snacks

Gauss 积分 [Math]

定积分

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x \tag{21}$$

称为 **Gauss 积分**, 在概率论、量子力学等诸多数学物理领域应用广泛.

两边平方并作极坐标代换, 可以计算该积分的值:

$$
\begin{aligned}
I^2 &= \left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-y^2}\,\mathrm{d}y\right) \\
&= \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^{+\infty} \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{e}^{-\rho^2}\,\mathrm{d}\theta \\
&= \pi,
\end{aligned} \tag{22}
$$

于是 $I = \sqrt{\pi}$.

几何意义上, 我们可以将二维空间上的积分 $I^2 = \iint_{\mathbb{R}^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$ 理解为曲面 $z = \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}$ 与 xOy 平面围成的几何体的体积. 根据祖[illegible]原理, 高度为 $z = \mathrm{e}^{-R^2}$ 处的横截面积为 πR^2, 于是

$$
I^2 = \int_0^1 \mathrm{d}z\,\pi R^2(z) = -\pi \int_0^1 \ln z\,\mathrm{d}z = \pi. \tag{23}
$$

进一步地, 我们可以对变量 x 作线性变换, 得到广义 Gauss 积分

$$
I(a,b,c) \equiv \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-ax^2+bx+c}\,\mathrm{d}x = \sqrt{\frac{\pi}{a}}\exp\left\{\frac{b^2}{4a}+c\right\}. \tag{24}
$$

其中, $a > 0$.

用 Monte Carlo 算法计算二重积分 [Comp]

设随机变量 X 在平面有界闭区域 D 内均匀分布. 对于某二重可积函数 $f(x,y)$, 容易给出其数学期望 (或平均值) 的数值估计:

$$
\frac{1}{\sigma_D}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \simeq \frac{1}{N_D}\sum_{i=1}^{N_D} f(x_i,y_i), \tag{25}
$$

其中, $\{(x_i,y_i)\}_{i=1}^{N_D}$ 为在区域 D 内 (等概率地) 随机抽样得到的一系列样本点. 于是, 二重积分的数值估计可由区域面积与函数均值的乘积得到.

1. 若 D 为矩形区域 $[a,b]\times[c,d]$, 则抽样非常简单: $x \sim \mathcal{U}[a,b], y \sim \mathcal{U}[c,d]$;
2. 若 D 并非矩形区域, 我们可以用一个外切矩形 R“包裹” 住区域 D, 并做 R 内的均匀抽样. 记 N_R 个样本点中有 N_D 个落在区域 D, 我们只挑选那些落在了区域 D 内的点作均值:

$$
\frac{1}{\sigma_D}\iint_D f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \simeq \frac{1}{N_D}\sum_{(x,y)\in D} f(x,y). \tag{26}
$$

所需的样本总量 N_R 可根据你需要的估计点个数 N_D 以及公式 $\frac{\sigma(D)}{\sigma(R)} \simeq \frac{N_D}{N_R}$ 近似给出.