【专题】无穷和 I: 理论

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2025.6.7

1 无穷级数的审敛法

定义 1.1 (收敛序列与 Cauchy 序列)**.** 给定 (无穷) 实序列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

1. 若存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得对任给的 $\epsilon > 0$ 都存在对应的 $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ 满足 $|a_k - A| < \epsilon\,(\forall k \geq N)$, 则称序列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为**收敛序列** (convergent sequence), 且以 A 为其**极限**. 记作 $\lim_{k\to\infty} a_k = A$;

2. 若存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任给的 $i, j \geq N$ 都满足 $|a_i - a_j| < \epsilon$, 则称序列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 **Cauchy 序列** (Cauchy sequence).

定理 1.1 (Cauchy 收敛准则)**.** 无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的充要条件是: 对任给的 $\epsilon > 0$ 都存在对应的 $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ 满足

$$|S_{n+p} - S_n| \equiv \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \epsilon\,(\forall n \geq N, p \geq 1) \tag{1}$$

例题 1.1 (调和级数的发散性)**.** 证明: 调和级数 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ 发散.

1.1 常数项级数

1.1.1 正项级数的比较审敛

定理 1.2 (比较审敛法)**.** 设两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的一般项满足 $u_n \leq v_n$. 则

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛蕴涵了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散蕴涵了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

定理 1.3 (比较审敛法: 极限形式)**.** 给定两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 记 $h \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ (可以为有限数或 $+\infty$). 则

1. 若 $0 \leq h < +\infty$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛蕴涵了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;

2. 若 $0 < h \leq +\infty$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散蕴涵了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例题 1.2 (以等比级数为比较基准)**.** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 的敛散性.

注记 1.1. 对 $a_1 \neq 0$ 及 $q > 0$ $(q \neq 1)$, 我们根据部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^k = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 讨论等比级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^k$ 的敛散性:

1. 若 $0 < q < 1$, 则级数收敛到 $S \equiv S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$;

2. 若 $q > 1$, 则级数发散.

例题 1.3 (以 p-级数为比较基准)**.** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)$ 的敛散性.

注记 1.2. 对 $p>0$, 我们根据 p 的取值, 讨论 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

1. 若 $0<p<1$, 则由其与调和级数之间的比较审敛, 得到发散性;
2. 若 $p>1$, 基于和式的重排与部分和有界定理可证, 级数收敛.

注记 1.3. 根据级数项的形式, 提炼出增长/衰减的 "主要部分", 作为比较或放缩的依据. 许多复杂问题中, 不等式放缩的方向是从量级估计所得的猜想中得到启发的.

练习 1.1 (比较审敛与放缩法)**.** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)}$ 的敛散性.

> **定理 1.4** (d'Alembert 审敛法: 以等比级数为基准)**.** 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $l=\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}$, 则 $l<1$ 蕴涵级数收敛, $l>1$ 蕴涵级数发散.

> **定理 1.5** (Cauchy 审敛法: 以等比级数为基准)**.** 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $l=\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{u_n}$, 则 $l<1$ 蕴涵级数收敛, $l>1$ 蕴涵级数发散.

例题 1.4 (基于等比级数的比较审敛法)**.** 讨论级数

$$\sqrt{2}+\sqrt{2-\sqrt{2}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}+\cdots \tag{2}$$

的敛散性.

> **定理 1.6** (Raabe 审敛法: 以 p-级数为基准)**.** 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $R=\lim_{n\to\infty}n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}}-1\right)$, 则 $R>1$ 蕴涵级数收敛, $R<1$ 蕴涵级数发散.

> **定理 1.7** (对数审敛法: 以 p-级数为基准)**.** 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 满足 $r=\lim_{n\to\infty}\frac{\ln\frac{1}{u_n}}{\ln n}$, 则 $r>1$ 蕴涵级数收敛, $r\le 1$ 蕴涵级数发散.
>
> - 并非课本定理, 应用时需要基于比较审敛法做简单的证明.

例题 1.5 (基于 p-级数的比较审敛法)**.** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+p}}$ (其中 $p>\frac{3}{2}$) 的敛散性.

注记 1.4. 在级数的前面添加或删除有限个项, 不改变级数的敛散性.

注记 1.5. p-级数的衰减相较于等比级数要 "慢", 是更为 "精细"、"温和" 的比较基准.

练习 1.2 (Cauchy 审敛法)**.** 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2-n}$ 的敛散性.

1.1.2 绝对收敛的任意项级数

> **定义 1.2** (绝对收敛)**.** 若 (正项) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则称 (任意项) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ (必然也收敛) 是**绝对收敛** (absolutely convergent) 的.
>
> - 绝对收敛级数的和具有重排不变性 (permutation invariance), 改变各项的排列次序不影响和的值.

例题 1.6 (绝对收敛级数)**.** 证明: $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

1.1.3 条件收敛的任意项级数

定义 1.3 (条件收敛)**.** 若 (正项) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散但 (任意项) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**条件收敛** (conditionally convergent) 的.

定理 1.8 (Dirichilet-Abel 审敛法)**.** 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$.

1. (Dirichlet 审敛法) 若序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 序列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛;
2. (Abel 审敛法) 若序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调且有界, 序列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

例题 1.7 (Dirichlet-Abel 审敛法)**.** 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n)}{n+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的敛散性.

注记 1.6. 因子 $\sin(n\theta)$ 作为有界函数显然并不影响一般项的增长 “量级”, 但根据其它因子的 “量级估计” 结果, 我们将需要在下述两个方向的不等式中选择一个进行放缩:

$$\frac{1-\cos(2n\theta)}{2}\equiv\sin^2(n\theta)\leq|\sin(n\theta)|\leq 1. \tag{3}$$

注记 1.7. Dirichlet-Abel 审敛法的难点是涉及和式的那个级数 b_n. 常用的选择包括:

- (Dirichlet 审敛) 符号级数 $b_n\equiv(-1)^n$, 三角级数 $b_n\equiv\sin(n\theta)$;
- (Abel 审敛) $b_n\equiv\frac{(-1)^n}{n^p}$ 或 $b_n\equiv\frac{\sin(n\theta)}{n^p}$ (其中, $p>0$).

练习 1.3 (绝对收敛与条件收敛)**.** 设常数 $p>0$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n^p}$ 的敛散性 (绝对收敛、条件收敛).

1.2 函数项级数

1.2.1 函数序列的收敛性

定义 1.4 (函数序列: 点收敛)**.** 给定 D 上的函数序列 $S\equiv\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 我们称 S 在点 x_0 处**收敛** (convergent), 若 $\lim_{n\to\infty}f_n(x_0)$ 存在. 全体收敛点 x_0 构成的集合 X 称为该序列的**收敛域** (convergence domain). 在收敛域 X 中, 序列 S 定义了一个函数 $f(x)\equiv\lim_{n\to\infty}f_n(x)$, 称为**极限函数** (limit function).

- 根据极限函数的定义, 对任意给定的 $\epsilon>0$, 都存在 $N\equiv N(x;\epsilon)\in\mathbb{N}_+$, 使得 $|f_n(x)-f(x)|<\epsilon$ 对任意 $n\geq N$ 及 $x\in X$ 成立.

定义 1.5 (函数序列: 一致收敛). 特别地, 若收敛序列定义中的临界下标 $N \equiv N(\epsilon)$ 不依赖于 x, 则称序列 S 在收敛域 X 上**一致收敛** (uniformly converge) 到极限函数 $f(x)$, 记作 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)\,(n \to \infty)$.

- 收敛速度可由 $N(\epsilon) \equiv \sup_{x\in X} N(\epsilon; x)$ 对 X 内所有点作 "统一的" 控制.

例题 1.8 (函数序列的一致收敛性). 讨论函数序列 $f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}$, $n = 1, 2, \cdots$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

1.2.2 函数项级数的逐点收敛

例题 1.9 (点审敛). 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{1+\sin^{2n} x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

练习 1.4 (点审敛). 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x+2n}$ 的收敛域, 绝对收敛点 x 的全体, 条件收敛点 x 的全体.

1.2.3 函数项级数的一致收敛

定理 1.9 (强级数审敛法). 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一般项满足 $|u_n(x)| \le a_n\,(\forall x \in X, n \in \mathbb{N}_+)$, 且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (称为强级数) 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛.

例题 1.10 (强级数: 递推函数序列). 对于每个 $x \in [0, 1], n = 1, 2, \cdots$, 定义

$$f_1(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t,\ \ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t, \tag{4}$$

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

练习 1.5 (强级数: 内闭一致性). 设 $\alpha, \beta > 0$, 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha}\mathrm{e}^{-n^{\beta}x}$ 在 $(0, +\infty)$ 的任意闭子区间 $[r, +\infty)$ 上一致收敛 $(r > 0)$.

定理 1.10 (Dirichlet-Abel 审敛法). 考虑函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$.

1. (Dirichlet 审敛法) 若函数序列 $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 上一致收敛到 0 且对任意给定的 $x \in X$ 都对 n 单调, 函数序列 $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和序列在 X 上一致有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 收敛;
2. (Abel 审敛法) 若函数序列 $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 上一致有界且对任意给定的 $x \in X$ 都对 n 单调, 函数序列 $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 X 上一致收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ 收敛.

例题 1.11 (Dirichlet 级数). 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

2 广义积分与含参积分的审敛法

2.1 广义积分的审敛

定义 2.1 (无穷积分)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 且对任意 $A>a$, 函数 $f(x)$ 在 $[a,A]$ 上可积. 若 $\lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则称**无穷积分**

$$\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{A\to\infty}\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

收敛; 否则发散.

定义 2.2 (瑕积分)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $(a,b]$ 上有定义, 且 $f(x)$ 在任意区间 $[a+\epsilon,b]\subset(a,b]$ 上可积, 但 $x\to a_+$ 时 $f(x)$ 无界. 此时, 称 a 为函数 $f(x)$ 的**瑕点**. 若 $\lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 存在, 则称**瑕积分**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{a+\epsilon}^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

收敛; 否则发散.

2.1.1 非负函数的比较审敛法

定理 2.1 (比较审敛法)**.** 给定函数 $f(x),g(x)$.

1. (无穷积分) 假设它们在 $[a,+\infty)$ 上有定义, 且当 $x\geq X\geq a$ 时, 有 $0\leq f(x)\leq g(x)$. 则 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛蕴涵 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散蕴涵 $\int_a^{+\infty} g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

2. (瑕积分) 假设它们在 $(a,b]$ 上有定义且均以 a 为瑕点, 且当 $x\in(a,c)\subset(a,b]$ 时, 有 $0\leq f(x)\leq g(x)$. 则 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛蕴涵 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 发散蕴涵 $\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ 发散.

例题 2.1 (以 x^{-p} 为比较对象)**.** 讨论无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ (其中 $p>0$) 的敛散性:

注记 2.1. 对常数 $p>0$ 与 (常义) 积分限 $0<c<+\infty$, 一个熟知的基本事实是:

1. 无穷积分 $\int_c^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 在 $p>1$ 时收敛, 在 $0<p\leq 1$ 时发散;

2. 瑕积分 $\int_0^c \frac{\mathrm{d}x}{x^p}$ 在 $0<p<1$ 时收敛, 在 $p\geq 1$ 时发散.

因此, $\frac{1}{x^p}$ 是审敛中常用的比较对象.

注记 2.2. 与正项级数的比较审敛法类似, 我们也可以写出并应用广义积分的比较审敛法的极限形式, 这对增长 "量级" 的分析与放缩的方向具有指导作用.

注记 2.3. 注意检查被积函数的所有瑕点, 这些瑕点和无穷远点处的积分敛散性需要逐个讨论.

2.1.2 乘积函数的 Dirichlet-Abel 审敛法

定理 2.2 (无穷积分的 Dirichilet-Abel 审敛法)**.** 考虑无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

1. (Dirichlet 审敛法) 若积分 $\int_a^A f(x)\,\mathrm{d}x$ 有界 (其中 $A \geq a$ 任意给定), 函数 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调且当 $x \to +\infty$ 时收敛到 0, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.
2. (Abel 审敛法) 若无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 函数 $g(x)$ 在 $[a,+\infty)$ 上单调有界, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

定理 2.3 (瑕积分的 Dirichlet-Abel 审敛法)**.** 考虑以 a 为瑕点的瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

1. (Dirichlet 审敛法) 若积分 $\int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 有界 (其中 $a < c \leq b$ 任意给定), 函数 $g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调且当 $x \to a$ 时收敛到 0, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.
2. (Abel 审敛法) 若瑕积分 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 函数 $g(x)$ 在 $(a,b]$ 上单调有界, 则瑕积分 $\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛.

例题 2.2 (Dirichlet 积分)**.** 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性 (绝对收敛、条件收敛或发散).

例题 2.3 (乘积因子的构造)**.** 定义函数 $\theta : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ 为

$$\theta(x) = \int_0^x \sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t, \tag{7}$$

证明: 无穷积分 $\int_0^{+\infty} \cos(\theta(x))\,\mathrm{d}x$ 收敛.

练习 2.1 (Dirichlet-Abel 审敛法)**.** 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\sin x}{\sqrt{x}} \arctan x\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

2.2 含参广义积分的审敛法

定义 2.3 (一致收敛)**.** 给定二元函数 $f(x,y)$.

- (无穷积分) 假设 $g(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 对一切 $y \in Y$ 都收敛. 若对任给的 $\epsilon > 0$ 都存在一个与 y 无关的实数 $N > a$, 使得 $\left|\int_A^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \epsilon$ 对任意 $A > N$ 与 $y \in Y$ 都成立, 则称 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在区间 Y 上**一致收敛**.
- (瑕积分) 假设 $g(y) = \int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ (以 a 为瑕点) 对一切 $y \in Y$ 都收敛. 若对任给的 $\epsilon > 0$ 都存在一个与 y 无关的实数 $\delta_0 > 0$, 使得 $\left|\int_a^{a+\delta} f(x,y)\,\mathrm{d}x\right| < \epsilon$ 对任意 $\delta \in (0,\delta_0)$ 与 $y \in Y$ 都成立, 则称瑕积分 $\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在区间 Y 上**一致收敛**.

定理 2.4 (强函数审敛法)**.** 给定二元函数 $f(x,y)$.

- (无穷积分) 假设当 $y \in Y$ 时, $f(x,y)$ 关于变量 x 在区间 $[a,A]$ 上可积 (其中 $A > a$ 任意给定). 若存在函数 $\phi(x)$, 使得 $|f(x,y)| \leq \phi(x)$ 对任意 $(x,y) \in [a,+\infty) \times Y$ 成立, 且无穷积分 $\int_a^{+\infty} \phi(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则含参积分 $g(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在区间 Y 上一致收敛.
- (瑕积分) 假设 $f(x,y)$ 在区间 $(a,b] \times Y$ 上连续, 且对任意 $y \in Y$, 函数 $f(x,y)$ 都以 a 为瑕点. 若存在 $(a,b]$ 上的连续函数 $\phi(x)$, 使得 $|f(x,y)| \leq \phi(x)$ 对任意 $(x,y) \in (a,b] \times Y$ 成立, 且瑕积分 $\int_a^b \phi(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 则含参积分 $g(y) = \int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在区间 Y 上一致收敛.

例题 2.4 (强函数审敛法)**.** 任意取定 $r > 0$. 证明: 含参无穷积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy^2} \cos x\,\mathrm{d}x$ 对于 $y \in [r,+\infty)$ 是一致收敛的.

注记 2.4. 当 $y = 0$ 时, 显然 $\int_0^{+\infty} \cos x\,\mathrm{d}x$ 不再收敛. 所以, 积分 $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy^2} \cos x\,\mathrm{d}x$ 具有内闭一致性.

定理 2.5 (Dirichlet-Abel 审敛法)**.** 给定二元函数 $f(x,y)$ 和 $g(x,y)$.

- (无穷积分) 若下面任一组条件得到满足, 则无穷积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)g(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 Y 上一致收敛:
  - (Dirichlet 审敛法) 当 $x \to +\infty$ 时, $g(x,y)$ 关于 x 单调且一致收敛到 0, 且积分 $\int_a^A f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 对一切 $A \geq a$ 都关于 $y \in Y$ 一致有界;
  - (Abel 审敛法) 当 $x \to +\infty$ 时, $g(x,y)$ 关于 x 单调且关于 $y \in Y$ 一致有界, 且积分 $\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 Y 上一致收敛.
- (瑕积分) 类似.

例题 2.5 (Dirichlet-Abel 审敛法)**.** 讨论积分 $I(\alpha) = \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ 在 $\alpha \in [0,+\infty)$ 时的一致收敛性.