8. 函数的幂级数展开

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2025.5.11

1 幂级数的审敛

定义 1.1 (幂级数的定义)**.** 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x - x_0)^n \tag{1}$$

的函数项级数称为**幂级数** (power series), 其中, 常数 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为幂级数的**系数** (coefficients).

- 存在非负值 $0 \le R \le +\infty$, 使得幂级数在 $|x| < R$ 时绝对收敛、在 $|x| > R$ 时发散 (但 $|x| = R$ 的敛散性未知). 我们称 R 为**收敛半径** (convergent radius). 这时, 幂级数的收敛域为 $(-R, R)$ 及其端点的并 (若检验后发现在该端点处级数收敛).

例题 1.1 (收敛域的计算)**.** 求下列幂级数的收敛域:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} n! \left(\frac{x-2}{n}\right)^n$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n^3}}{10^n}$.

2 幂级数展开与和函数计算

定理 2.1 (内闭一致性)**.** 设幂级数 $S(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$. 则

1. 对任意正数 $b < R$, 幂级数 $S(x)$ 在闭区间 $[-b, b]$ 上一致收敛;
2. 若 $S(x)$ 在右端点 $x = +R$ 处收敛, 则它在 $[0, R]$ 上一致收敛;
3. 若 $S(x)$ 在左端点 $x = -R$ 处收敛, 则它在 $[-R, 0]$ 上一致收敛;

定理 2.2 (逐项积分与逐项求导)**.** 设幂级数 $S(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$. 则

1. $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内的任一闭区间上可积, 且可逐项积分:
$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}; \tag{2}$$
2. $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可导, 且可逐项求导:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{3}$$

例题 2.1 (幂级数展开: 加法)**.** 在 $(-1,1)$ 上展开函数

$$f(x)=\arctan x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \tag{4}$$

为幂级数.

注记 2.1. 在收敛区间 $(-1,1)$ 上, 等比级数存在求和公式 $\frac{1}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}x^n$. 通过逐项积分或逐项求导, 将幂级数展开或和函数计算 (可以看成 "互为逆运算") 向等比级数转化. 比较简洁的解题过程书写诀窍是, 和实际演算顺序相反.

例题 2.2 (幂级数展开: 乘法)**.** 求函数

$$f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}} \tag{5}$$

在 $x=0$ 处的幂级数展开式, 并指出此幂级数的收敛域.

注记 2.2. 幂级数在 $(-R,R)$ 上绝对收敛, 所以可以对两个收敛的幂级数作乘法运算.

例题 2.3 (和函数的计算)**.** 求幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n$ 的收敛区间, 以及此幂级数的和函数.

3 Taylor 级数

定理 3.1 (幂级数展开的唯一性)**.** 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 收敛到 $f(x)$, 则 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 被唯一地确定为

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),n\in\mathbb{N}, \tag{6}$$

此时, 该级数称为函数 $f(x)$ 的 **Taylor 级数** (Taylor series).

- 反之, 对一个任意阶可导的函数 $f(x)\in\mathcal{C}^{\infty}$, 若它的 Taylor 级数恰好收敛到这个函数, 则称其可展开为幂级数, 记作 $f(x)\in\mathcal{C}^{\omega}$.

定理 3.2 (两组 Taylor 级数)**.** 一般地, 成立如下的 Taylor 级数公式:

- 指数函数: 对 $-\infty<x+\infty$,

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}; \tag{7}$$

- 三角函数: 可由复变指数的 Euler 公式: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 导出;
- 幂函数: 对 $-1<x<+\infty$,

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \tag{8}$$

例题 3.1 (初等函数的 Taylor 展开)**.** 求函数 $f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3}$ 于 $x=1$ 处的 Taylor 展开式, 并计算 $f^{(2022)}(1), f^{(2023)}(1)$ 的值.

例题 3.2 (变限积分的 Taylor 展开)**.** 在 $[0,+\infty)$ 上, 将函数

$$f(x)=\int_0^x \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t \tag{9}$$

展开成幂级数.

例题 3.3 (Taylor 展开: 常数项级数和的计算)**.** 在 $[-1,1]$ 上, 将函数

$$f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2} \tag{10}$$

展开成幂级数, 并据此计算级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!}$ 的和.

Snacks

常微分方程的幂级数解法 [Math]

在收敛域内, 幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 唯一地确定了一个和函数 $S(x)$, 且当 $\{u_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 满足特定 (较为温和的) 条件时 $S(x)$ 也具有良好的分析性质 (例如连续、可积、可导等). 幂级数为我们定义函数、进行微积分运算提供了一个全新的形式. 例如, 级数

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} \tag{11}$$

在 $(-\infty,+\infty)$ 上收敛, 可以作为指数函数 $y=\mathrm{e}^x$ 的级数定义. 对其逐项求导 (容易验证它符合逐项求导的要求), 有

$$y'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{nx^{n-1}}{n!}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{x^m}{m!}=y(x). \tag{12}$$

结合零次幂项 (代入 $x=0$ 到级数终) 的值, 得到指数函数的初值问题定义:

$$\begin{cases}0=y'(x)-y(x),\\ y(0)=1.\end{cases} \tag{13}$$

若引入幂级数 $y=\sum_{n=0}^{\infty}c_nx^n$, 则常微分方程的初值问题就转化为关于 (未知的) 系数序列 $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ 的递推问题. 以二阶线性齐次微分方程

$$\begin{cases}0=y''+p(x)y'+q(x)y,\\ y(0)=y_0, y'(0)=y_1\end{cases} \tag{14}$$

为例, 通过逐项求导, 可以得到下述的 *Frobenius* 递推式:

$$\begin{cases} 0 = c_{n+2}(n+2)(n+1) + \sum_{k=0}^{n} (a_{n-k}c_{k+1}(k+1) + b_{n-k}c_k), \\ c_0 = y_0, c_1 = y_1, \end{cases} \tag{15}$$

其中, 级数展开式 $p(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, q(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$. 当然, 这只是形式解, 因为我们尚未审敛. 一般地, 存在如下结论: 级数解的收敛半径 R_c 与系数的幂级数的收敛半径 R_a, R_b 满足 $R_c \geq \min\{R_a, R_b\}$.

以下是两个应用级数解研究微分方程的例子.

1. 研究无法给出初等解的微分方程. 例如误差函数

$$\mathrm{erf}(x) \equiv \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-t^2} \, \mathrm{d}t \tag{16}$$

可由下述初值问题

$$\begin{cases} 0 = y'' + 2xy', \\ y(0) = \frac{1}{2}, y'(0) = \sqrt{\pi} \end{cases} \tag{17}$$

定义, 但该问题不存在初等解法. 好在, 它存在级数解

$$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{n!(2n+1)}, \tag{18}$$

且在全体实数域 $\mathbb{R}$ 上收敛.

2. 研究解的边界或渐近行为. 这在数学物理定解问题中应用广泛, 因为现实世界中, 所研究的物理系统 (由控制该系统行为的微分方程来刻画) 总存在一定的边界条件. 典型的例子是 "我们不关心无穷远处的性质/无穷远处定义为势能零点", 于是自然地导出边界条件 $y(+\infty) = 0$. 级数解对研究这类边界问题将是十分有益的. 以 *Hermite* 方程

$$0 = y'' - 2xy' + \lambda y \tag{19}$$

为例, 若级数解 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 满足边界条件 $\lim_{x\to\infty} y(x)\mathrm{e}^{-x^2} = 0$, 则其 Frobenius 递推式

$$c_{n+2} = \frac{2n - \lambda}{(n+2)(n+1)} c_n \tag{20}$$

必须使得无穷级数 $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ 退化为有限项的多项式, 否则注意到

$$c_{n+2} \simeq \frac{1}{n+2} c_n \;\Rightarrow\; c_{2l+2} \simeq \frac{c_{2l}}{2l+2} \;\Rightarrow\; y \simeq c_0 \mathrm{e}^{x^2} + c_1 x \mathrm{e}^{x^2} \tag{21}$$

在乘以 e^{-x^2} 后不满足边界条件. 这对 λ 的取值产生了要求: 存在 $n \in \mathbb{N}$, 使得 $\lambda = 2n$ (从此处开始级数被截断). 在我们的例子中, 边界条件导致了某些参数取值的离散化 (或说量子化), 这种思想事实上也指导了早期量子力学理论的建立.