7. 级数的审敛问题

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2025.4.26

1 常数项级数的审敛

1.1 Cauchy 收敛准则

定义 1.1 (收敛序列与 Cauchy 序列)**.** 给定 (无穷) 实序列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$.

1. 若存在 $A \in \mathbb{R}$, 使得对任给的 $\epsilon > 0$ 都存在对应的 $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ 满足 $|a_k - A| < \epsilon\,(\forall k \geq N)$, 则称序列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为**收敛序列** (convergent sequence), 且以 A 为其**极限**. 记作 $\lim_{k\to\infty} a_k = A$;

2. 若存在 $N \in \mathbb{N}$, 使得对任给的 $i, j \geq N$ 都满足 $|a_i - a_j| < \epsilon$, 则称序列 $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ 为 **Cauchy 序列** (Cauchy sequence).

定理 1.1. 收敛序列必为 Cauchy 序列. 定义在有限维内积空间 (例如 $\mathbb{R}$, 实数序列) 上的 Cauchy 序列必为收敛序列.

- 收敛性是 Cauchy 性的充分非必要条件. 必要性的成立依赖于完备性和维度的有限性.
  - 有理序列 $\left\{(1+k^{-1})^k\right\}_{k=1}^{\infty}$ 是 Cauchy 序列, 但由于极限 $\mathrm{e} \notin \mathbb{Q}$, 故并非收敛序列. 这是因为有理数集并非完备集.
  - 函数序列 $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$, 其中

$$f_k(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < -\frac{1}{k}, \\ \frac{1}{2}(kx+1), & -\frac{1}{k} \leq x < \frac{1}{k}, \\ 1, & \frac{1}{k} < x \leq 1 \end{cases} \tag{1}$$

是定义在 (无限维内积空间) $\mathcal{C}^0[-1,1]$ 上的 Cauchy 序列, 但由于极限

$$f_\infty(x) = \begin{cases} 0, & -1 \leq x < 0, \\ 1, & 0 \leq x < 1 \end{cases} \tag{2}$$

不是 $[-1,1]$ 上的连续函数, 故并非收敛序列. 这是因为在该空间上 “绝对值” (或说, 范数) 的计算涉及无穷和.

定理 1.2 (Cauchy 收敛准则)**.** 无穷级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ 收敛的充要条件是: 对任给的 $\epsilon > 0$ 都存在对应的 $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$ 满足

$$|S_{n+p} - S_n| \equiv \left|\sum_{k=n+1}^{n+p} a_k\right| < \epsilon\,(\forall n \geq N, p \geq 1) \tag{3}$$

例题 1.1 (调和级数的发散性)**.** 证明: 调和级数 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ 发散.

1.2 正项级数的比较审敛

定理 1.3 (比较审敛法)**.** 设两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的一般项满足 $u_n \leq v_n$. 则

1. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛蕴涵了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散蕴涵了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

定理 1.4 (比较审敛法: 极限形式)**.** 给定两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$, 记 $h \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n}$ (可以为有限数或 $+\infty$). 则

1. 若 $0 \leq h < +\infty$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛蕴涵了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛;
2. 若 $0 < h \leq +\infty$, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散蕴涵了级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

例题 1.2 (以等比级数为比较基准)**.** 讨论下列级数的敛散性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$;
2. p-级数: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (其中 $p > 0$);

注记 1.1. 对 $a_1 \neq 0$ 及 $q > 0$ $(q \neq 1)$, 我们根据部分和 $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_1 q^k = \frac{a_1(1-q^n)}{1-q}$, 讨论等比级数 $\sum_{k=1}^{\infty} a_1 q^k$ 的敛散性:

1. 若 $0 < q < 1$, 则级数收敛到 $S \equiv S_\infty = \frac{a_1}{1-q}$;
2. 若 $q > 1$, 则级数发散.

例题 1.3 (以 p-级数为比较基准)**.** 讨论下列级数的敛散性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)}$;
2. $\sum_{n=1}^{\infty} n\left(2\sqrt{n} - \sqrt{n+1} - \sqrt{n-1}\right)$;
3. $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\cos\frac{\pi}{n}\right)$.

注记 1.2. 对 $p > 0$, 我们根据 p 的取值, 讨论 p-级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 的敛散性.

1. 若 $0 < p < 1$, 则由其与调和级数之间的比较审敛, 得到发散性;
2. 若 $p > 1$, 基于和式的重排与部分和有界定理可证, 级数收敛.

注记 1.3. 根据级数项的形式, 提炼出增长/衰减的 “主要部分”, 作为比较或放缩的依据. 许多复杂问题中, 不等式放缩的方向是从量级估计所得的猜想中得到启发的.

定理 1.5 (d'Alembert 审敛法: 以等比级数为基准)**.** 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $l = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$, 则 $l < 1$ 蕴涵级数收敛, $l > 1$ 蕴涵级数发散.

定理 1.6 (Cauchy 审敛法: 以等比级数为基准)**.** 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $l = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n}$, 则 $l < 1$ 蕴涵级数收敛, $l > 1$ 蕴涵级数发散.

例题 1.4 (基于等比级数的比较审敛法)**.** 讨论下列级数的敛散性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b^n}{n^\alpha}$ (其中 $\alpha > 0, b > 0$);
2. $\sqrt{2} + \sqrt{2 - \sqrt{2}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2}}} + \sqrt{2 - \sqrt{2 + \sqrt{2 + \sqrt{2}}}} + \cdots$;
3. $\sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2-n}$.

定理 1.7 (Raabe 审敛法: 以 p-级数为基准)**.** 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $R = \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right)$, 则 $R > 1$ 蕴涵级数收敛, $R < 1$ 蕴涵级数发散.

定理 1.8 (对数审敛法: 以 p-级数为基准)**.** 若正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 满足 $r = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln \frac{1}{u_n}}{\ln n}$, 则 $r > 1$ 蕴涵级数收敛, $r \leq 1$ 蕴涵级数发散.

- 并非课本定理, 应用时需要基于比较审敛法做简单的证明.

例题 1.5 (基于 p-级数的比较审敛法)**.** 讨论下列级数的敛散性:

1. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+p}}$ (其中 $p > \frac{3}{2}$);
2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln \ln n)^{\ln n}}$.

注记 1.4. 在级数的前面添加或删除有限个项, 不改变级数的敛散性.

注记 1.5. p-级数的衰减相较于等比级数要 “慢”, 是更为 “精细”、“温和” 的比较基准.

1.3 绝对收敛的任意项级数

定义 1.2 (绝对收敛)**.** 若 (正项) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 收敛, 则称 (任意项) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ (必然也收敛) 是**绝对收敛** (absolutely convergent) 的.

- 绝对收敛级数的和具有重排不变性 (permutation invariance), 改变各项的排列次序不影响和的值.

例题 1.6 (绝对收敛级数)**.** 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

例题 1.7 (和式的重排)**.** 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}$ 收敛.

注记 1.6. 想要将给定的序列 $S \equiv \{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 重排为单调 (递增) 序列 $S' \equiv \{a_{\sigma_n}\}_{n=1}^{\infty}$, 方法显然是: 循环往复地挑选 S 中的最小元素 a, 将其剔除出 S、排入 S'. 所以, 重排是否可行, 取决于能否在每一轮循环中都能找到最小元素. 这涉及良序集 (well-ordered set) 的概念, 其定义是*任意非空 (无穷) 子集都存在最小元素*.

良序性的充要条件是*不存在严格递减的无穷子序列*. 本题, S 的良序性由 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$ 的收敛性保证.

1.4 条件收敛的任意项级数

定义 1.3 (条件收敛)**.** 若 (正项) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散但 (任意项) 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛, 则称级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 是**条件收敛** (conditionally convergent) 的.

定义 1.4 (Abel 变换)**.** 任给两组实数 $\{\alpha_k\}_{k=1}^{m}$ 与 $\{\beta_k\}_{k=1}^{m}$, 则成立 **Abel 变换**恒等式

$$\sum_{k=1}^{m}\alpha_k\beta_k=\sum_{k=1}^{m-1}(\alpha_k-\alpha_{k+1})B_k+\alpha_m B_m, \tag{4}$$

其中 $B_k\equiv\sum_{i=1}^{k}\beta_i$ 为序列 $\{\beta_k\}_{k=1}^{m}$ 的部分和.

例题 1.8 (Abel 变换与级数审敛)**.** 若序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和有界, 序列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $\lim_{n\to\infty}b_n=0$ 且级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|b_n-b_{n+1}|$ 收敛. 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

注记 1.7. 任意项级数的审敛, 一般包括两个步骤: (1) 验证绝对收敛性; (2) 对不绝对收敛 (或绝对收敛性难以验证) 的级数, 验证条件收敛性.

注记 1.8. 应用 Abel 变换处理形如 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 的级数, 动机是我们对某一序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的*差分* (difference) 和另一序列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和有所掌握. 此时, 可以对下述的绝对值不等式

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}a_kb_k\right|&=\left|\sum_{k=n+1}^{n+p-1}(a_k-a_{k+1})B_k+a_{n+p}B_{n+p}\right|\\&\le\sum_{k=n+1}^{n+p-1}|a_k-a_{k+1}||B_k|+|a_{n+p}||B_{n+p}|\end{aligned} \tag{5}$$

作进一步放缩, 并尝试应用 Cauchy 收敛准则完成收敛性的证明.

定理 1.9 (Dirichilet-Abel 审敛法)**.** 考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$.

1. (Dirichlet 审敛法) 若序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调且 $\lim_{n\to\infty}a_n=0$, 序列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛;

2. (Abel 审敛法) 若序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调且有界, 序列 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的级数 $\sum_{n=1}^{\infty}b_n$ 收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_nb_n$ 收敛.

例题 1.9 (Dirichlet-Abel 审敛法)**.** 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin(2n)}{n+\frac{1}{n}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的敛散性.

注记 1.9. 因子 $\sin(n\theta)$ 作为有界函数显然并不影响一般项的增长 "量级", 但根据其它因子的 "量级估计" 结果, 我们将需要在下述两个方向的不等式中选择一个进行放缩:

$$\frac{1-\cos(2n\theta)}{2}\equiv\sin^2(n\theta)\le|\sin(n\theta)|\le 1. \tag{6}$$

注记 1.10. Dirichlet-Abel 审敛法的难点是涉及和式的那个级数 b_n. 常用的选择包括:

- (Dirichlet 审敛) 符号级数 $b_n\equiv(-1)^n$, 三角级数 $b_n\equiv\sin(n\theta)$;

- (Abel 审敛) $b_n \equiv \frac{(-1)^n}{n^p}$ 或 $b_n \equiv \frac{\sin(n\theta)}{n^p}$ (其中, $p > 0$).

例题 1.10 (和式的重组)**.** 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{[\sqrt{n}]}}{n}$ 的敛散性.

注记 1.11. 收敛级数的和具有结合律, 增删括号形成的新级数仍收敛到原级数的和.

2 函数项级数的审敛

2.1 函数序列的收敛性

定义 2.1 (函数序列: 点收敛)**.** 给定 D 上的函数序列 $S \equiv \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, 我们称 S 在点 x_0 处**收敛** (convergent), 若 $\lim_{n\to\infty} f_n(x_0)$ 存在. 全体收敛点 x_0 构成的集合 X 称为该序列的**收敛域** (convergence domain). 在收敛域 X 中, 序列 S 定义了一个函数 $f(x) \equiv \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, 称为**极限函数** (limit function).

- 根据极限函数的定义, 对任意给定的 $\epsilon > 0$, 都存在 $N \equiv N(x;\epsilon) \in \mathbb{N}_+$, 使得 $|f_n(x) - f(x)| < \epsilon$ 对任意 $n \geq N$ 及 $x \in X$ 成立.

定义 2.2 (函数序列: 一致收敛)**.** 特别地, 若收敛序列定义中的临界下标 $N \equiv N(\epsilon)$ 不依赖于 x, 则称序列 S 在收敛域 X 上**一致收敛** (uniformly converge) 到极限函数 $f(x)$, 记作 $f_n(x) \rightrightarrows f(x)\,(n \to \infty)$.

- 收敛速度可由 $N(\epsilon) \equiv \sup_{x\in X} N(\epsilon; x)$ 对 X 内所有点作 “统一的” 控制.

定理 2.1 (函数序列的一致收敛性)**.** 设函数序列 $S \equiv \{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 上收敛到极限函数 $f(x)$.

1. 若存在常数序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 及正整数 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得
$$|f_n(x) - f(x)| \leq a_n \,(\forall n \geq N) \tag{7}$$
对任给的 $x \in X$ 成立, 且 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$, 则 S 在 X 上一致收敛到 $f(x)$.

2. 若存在常数 $l > 0$ 及正整数 $N \in \mathbb{N}_+$, 使得
$$|f_n(x_n) - f(x_n)| \geq l \,(\forall n \geq N) \tag{8}$$
对 X 上的某点列 $\{x_n \in X\}_{n=1}^{\infty}$ 成立, 则 S 在 X 上不一致收敛. 一个等价的论断是 $\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| > 0$.

例题 2.1 (函数序列的一致收敛性)**.** 讨论函数序列 $f_n(x) = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}$, $n = 1, 2, \cdots$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

2.2 函数项级数的点收敛

例题 2.2 (点审敛). 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{1+\sin^{2n} x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

例题 2.3 (点审敛). 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x+2n}$ 的收敛域, 绝对收敛点 x 的全体, 条件收敛点 x 的全体.

2.3 函数项级数的一致收敛

定理 2.2 (一致收敛的 Cauchy 准则). 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在集合 X 上一致收敛的充要条件是: 对任给的 $\epsilon > 0$ 都存在对应的 (只依赖于 ϵ 的) $N \in \mathbb{N}$ 满足

$$|S_{n+p}(x) - S_n(x)| \equiv \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_n(x) \right| < \epsilon \, (\forall n \geq N, p \geq 1). \tag{9}$$

定理 2.3 (一致收敛: 必要条件). 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在集合 X 上一致收敛, 则 $u_n(x) \rightrightarrows 0$ $(x \in X, n \to \infty)$.

定理 2.4 (一致收敛: 强级数审敛法). 若函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 的一般项满足 $|u_n(x)| \leq a_n \, (\forall x \in X, n \in \mathbb{N}_+)$, 且正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ (称为强级数) 收敛, 则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 一致收敛.

例题 2.4 (强级数审敛: 内闭一致收敛). 设 $\alpha, \beta > 0$, 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\alpha} \mathrm{e}^{-n^{\beta} x}$ 在 $(0, +\infty)$ 上并非一致收敛; 但在 $[r, +\infty)$ 上一致收敛 (其中 $r > 0$ 任意给定).

例题 2.5 (强级数审敛: 递推函数序列). 对于每个 $x \in [0, 1], n = 1, 2, \cdots$, 定义

$$f_1(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4} \, \mathrm{d}t, \ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t) \, \mathrm{d}t, \tag{10}$$

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0, 1]$ 上一致收敛.

定理 2.5 (一致收敛: Dirichlet-Abel 审敛法). 考虑函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$.

1. (Dirichlet 审敛法) 若函数序列 $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 上一致收敛到 0 且对任意给定的 $x \in X$ 都对 n 单调, 函数序列 $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和序列在 X 上一致有界, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 收敛;

2. (Abel 审敛法) 若函数序列 $\{a_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 X 上一致有界且对任意给定的 $x \in X$ 都对 n 单调, 函数序列 $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} b_n(x)$ 在 X 上一致收敛, 则级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ 收敛.

例题 2.6 (Dirichlet 级数). 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0, +\infty)$ 上一致收敛.

3 收敛级数的性质

定理 3.1 (点收敛: 与线性运算的对易性). 收敛级数 $A \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $B \equiv \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 作线性运算后所得的新级数将收敛到和 A, B 的对应线性组合:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda A + \mu B. \tag{11}$$

定理 3.2 (一致收敛: 与极限运算的对易性). 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 若每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 则其和函数 $S(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 也在 $[a, b]$ 上连续.

- 对一致收敛且各项连续的函数项级数, 无穷和运算与极限运算彼此对易, 即

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x). \tag{12}$$

例题 3.1 (一致收敛与连续性). 证明下列函数的连续性:

1. $f(x) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(n-x)^2}$, 其中 x 定义在某个不包含整数的闭区间 $[a, b]$ 上;
2. $f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|x-r_n|}{3^n}$, 其中 $x \in [0, 1]$, $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ 为 $[0, 1]$ 上的全体有理数.

例题 3.2 (一致收敛与无穷和极限). 计算极限 $\lim_{x \to 0_+} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n n^x}$.

定理 3.3 (一致收敛: 与积分运算的对易性). 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 若每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 则其和函数 $S(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且可逐项积分:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \, \mathrm{d}x. \tag{13}$$

定理 3.4 (一致收敛: 与微分运算的对易性). 在区间 $[a, b]$ 上逐点收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 若其导数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 且每一项 $u_n'(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 则其和函数 $S(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且可逐项求导:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{14}$$

且 $S'(x)$ 在 $[a, b]$ 上也连续.

例题 3.3 (一致收敛序列与可导性). 证明: 函数序列 $f_n(x) = x^2 + \frac{1}{n} \sin\left(n \left(x + \frac{\pi}{2}\right)\right)$ 在 $(-\infty, +\infty)$ 内一致收敛, 但 $[\lim_{n \to \infty} f_n(x)]' \neq \lim_{n \to \infty} f_n'(x)$.

注记 3.1. 一致收敛性只能传递可积性, 并不能传递可导性. 可以这样理解: 导函数的增长趋势通常难以由原函数的值进行控制.

例题 3.4 (一致收敛级数与可导性)**.** 定义函数项级数 $S(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \sin\frac{x}{n!}$. 证明:

1. $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但在区间 $(0,\delta]$ 上一致收敛 (其中 $\delta>0$ 任意给定);

2. $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的导函数.

Snacks

Riemann-zeta 函数

函数项级数

$$\zeta(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \tag{15}$$

定义为 *Riemann-ζ 函数*, 容易看出它实为 p-级数在实数域 $\mathbb{R}$ 上的推广. 在区间 $(1,+\infty)$ 上, ζ 函数有定义, 且具有连续的导函数

$$\zeta'(x) = -\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^x}. \tag{16}$$

其导函数的存在性与连续性无法在 $(1,+\infty)$ 上直接证明, 因为级数 (16) 不在 $(1,+\infty)$ 上满足一致收敛性. 但注意它在任意 $[1+\delta,+\infty)$ 上满足一致收敛性, 这也可以导出导函数 $\zeta'(x)$ 在 $(1,+\infty)$ 上的连续性. 反复应用可导性传递定理可知, $\zeta(x)$ 具有连续的各阶导数.

有趣的是, ζ 函数与自然数中素数的分布有着深刻的关联. 早在 18 世纪, Euler 就证明了下述定理 (其证明非常简单, 读者可以尝试自行完成): 设全体素数构成集合 $\mathcal{P}$, 则

$$\zeta(x) = \prod_{p\in\mathcal{P}} \frac{1}{1-p^{-x}}. \tag{17}$$

这启发了人们在数论中著名的 *Goldbach* 猜想与复分析领域的 *Riemann* 猜想之间建立联系. 可惜, 时至今日, 这两个猜想及其二者之间的关系都还没有被研究清楚.