6. 高阶常微分方程

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2025.4.12

1 降阶方法

1.1 各类方程的求解方法

例题 1.1 (不含 y 的二阶方程)**.** 求下面常微分方程的所有解: $(y')^2 = x^2 y''$.

注记 1.1. 对于不含 y 的二阶方程 $0 = F(x, y', y'')$, 作代换 $z \equiv y'$, 并先求解一阶方程 $0 = F(x, z, z')$. 得到通积分 $0 = \Phi(x, z, C_1)$ 后, 再求解一阶方程 $0 = \Phi(x, y', C_1)$ 即可.

例题 1.2 (不显含 x 的二阶方程)**.** 求下面常微分方程的所有解: $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

注记 1.2. 对于不显含 x 的二阶方程 $0 = F(y, y', y'')$, 作代换 $p \equiv y'$, 则由链式法则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$. 于是, 我们先求解一阶方程 $0 = F(y, p, pp'_y)$. 得到通积分 $0 = G(p, y, C_1)$ 后, 再求解一阶方程 $0 = G(y', y, C_1)$ 即可.

1.2 应用类问题

例题 1.3 (简单的常数限积分方程)**.** 求出所有的可导函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 满足

$$f'(x) = xf(x) + x\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t. \tag{1}$$

注记 1.3. 设 (a, b) 为常数. 形如 $F(x, y, y') = \int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t$ 的积分方程, 两边取导数, 即可 (根据定积分的常数性质) 得到微分方程 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}F(x, y, y') = 0$. 注意 "初值" 条件 $F(x, y, y') = \int_a^b G(t)\,\mathrm{d}t$ 的回代.

2 二阶常系数线性方程

定理 2.1 (解的结构)**.** 设函数 $p(x), q(x), f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续.

- 若 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 是齐次方程 $0 = y'' + p(x)y' + q(x)y$ 的两个线性无关解, 则方程的通解为 $C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x)$;
- 若 $C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x)$ 为齐次方程 $0 = y'' + p(x)y' + q(x)y$ 的通解, y^* 是非齐次方程 $f(x) = y'' + p(x)y' + q(x)y$ 的特解, 则非齐次方程的通解为 $C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x) + y^*$.

定理 2.2 (常系数齐次方程的通解公式)**.** 设 p, q 为常数. 考虑方程 $0 = y'' + py' + qy$, 其**特征方程** (characteristic equation) $0 = \lambda^2 + p\lambda + q$ 的两个 (复) 根记为 λ_1, λ_2. 则原方程的通解为

$$y = \begin{cases} C_1\mathrm{e}^{\lambda_1 x} + C_2\mathrm{e}^{\lambda_2 x}, & \lambda_1 \neq \lambda_2; \\ (C_1 + C_2 x)\mathrm{e}^{\lambda x}, & \lambda_1 = \lambda_2 \equiv \lambda. \end{cases} \tag{2}$$

例题 2.1 (特解公式)**.** 求二阶常微分方程 $y'' + 4y = \sin 3x$ 的通解.

注记 2.1. 非齐次部分 $f(x)$ 若为多项式族、指数族、三角函数族或其中数者的乘积, 则方程的特解也可以写为对应部分的函数族的乘积, 从而可以用待定系数法求出. 若待定系数法给出的方程是欠定的 (存在恒等式), 则证明齐次部分的特征根与非齐次部分的形式 "恰好匹配", 我们对应地将特解函数式乘以 x^t 即可 (t 为根的重数).

例题 2.2 (常数变易法)**.** 求方程 $y'' + y' - 2y = x + \mathrm{e}^x + \sin x$ 的满足条件 $y(0) = -\frac{7}{20}, y'(0) = \frac{38}{15}$ 的解.

注记 2.2. 一般地, 为了求出非齐次方程的一个特解, *常数变易法* (variation of constants) 将齐次部分的通解中所含的任意常数 $y = C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x)$ 改写为未知函数 $y = C_1(x)\phi_1(x) + C_2(x)\phi_2(x)$, 并联立方程组求解它们. 其中一个方程显然来自原始微分方程 $(y^*)'' + p(y^*)' + qy^* = f(x)$; 而另一方程则来自人为的指定: 为避免 $(y^*)''$ 带来未知函数的二阶导数, 我们在 $(y^*)'$ 中令其含有未知函数的一阶导数的部分为零: $C_1'(x)\phi_1(x) + C_2'(x)\phi_2(x) = 0$. 此时, 联立得到的方程组将是

$$\begin{cases} C_1'(x)\phi_1(x) + C_2'(x)\phi_2(x) = 0, \\ C_1'(x)\phi_1'(x) + C_2'(x)\phi_2'(x) = f(x). \end{cases} \tag{3}$$

例题 2.3 (Euler 方程)**.** 求方程 $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0\,(x > 0)$ 满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 1$ 的解.

注记 2.3. 设 $x > 0$. 形如

$$0 = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} x^k y^{(k)} \tag{4}$$

的微分方程称为 *Euler 方程*. 作代换 $x = \mathrm{e}^t$ 后, 可将其化为关于 y 和 t 的常系数齐次线性方程, 这是因为:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\mathrm{e}^{-t}, \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}x^2} &= \left(\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} - \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\right)\mathrm{e}^{-2t}, \\ &\cdots \\ \frac{\mathrm{d}^ky}{\mathrm{d}x^k} &= \left(\sum_{i=1}^{k} a_i \frac{\mathrm{d}^iy}{\mathrm{d}t^i}\right)\mathrm{e}^{-kt}, \end{aligned} \tag{5}$$

其中 $\{a_i\}$ 为常数.

3 解的结构

3.1 初值问题解的存在唯一性

定义 3.1 (Lipschitz 条件)**.** 对于函数 $f(x, y)$, 若在区域 D 内存在常数 L, 使得 $|f(x, y_1) - f(x, y_2)| \leq L|y_1 - y_2|$ 对任意 $(x, y_1), (x, y_2) \in D$ 成立, 则称 $f(x, y)$ 在区域 D 内满足 **Lipschitz 条件** (Lipschitz condition), L 称为 **Lipschitz 常数** (Lipschitz constant).

例题 3.1 (Lipschitz 条件的证明)**.** 设 D 是平面上的凸区域, 二元函数 $f(x,y)$ 在 D 上存在有界偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$. 证明: $f(x,y)$ 在 D 上对 y 满足 Lipschitz 条件. (凸区域的定义: 对任意 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in D$ 及 $\lambda \in \mathbb{R}$, 都有 $\lambda \mathbf{r}_1 + (1-\lambda)\mathbf{r}_2 \in D$.)

定理 3.1 (一阶初值问题: 局部唯一解的充分条件)**.** 设初值问题

$$\begin{cases} y' = f(x,y), \\ y(x_0) = y_0 \end{cases} \tag{6}$$

中的函数 $f(x,y)$ 在闭矩形区域 $R = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | |x-x_0| \le a, |y-y_0| \le b\}$ 上连续, 且对 y 满足 Lipschitz 连续性. 则初值问题 (6) 在闭区间 $[x_0-h, x_0+h]$ 上存在唯一解. 其中 $h \equiv \min(a, \frac{b}{M})$, 而 $M \equiv \max_{(x,y)\in R} |f(x,y)|$.

定义 3.2 (Picard 近似解序列)**.**

$$\begin{aligned} y_n(x) &\equiv y_0 + \int_{x_0}^{x} f\left(t, y_{n-1}(t)\right) \mathrm{d}t, \\ y_0(x) &\equiv y_0. \end{aligned} \tag{7}$$

- Picard 序列的极限 $\phi(x) \equiv \lim_{n\to\infty} y_n(x)$ 将成为初值问题 (6) 唯一存在的那个解, 也将是 (等价的) 积分方程

$$y = y_0 + \int_{x_0}^{x} f(t, y(t))\,\mathrm{d}t \tag{8}$$

  唯一存在的那个解.

例题 3.2 (Picard 序列)**.** 求出一阶常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = x + y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的 Picard 序列的前两项 y_1, y_2.

例题 3.3 (一阶初值问题解的唯一性)**.** 二元函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上满足 Lipschitz 条件 (Lipschitz 常数为 L), 一元函数 $\phi(x), \psi(x)$ 为微分方程 $y' = f(x,y)$ 的两个解. 任给 $(x_0, y_0) \in D$, 证明:

$$|\phi(x) - \psi(x)| \le \mathrm{e}^{L|x-x_0|} |\phi(x_0) - \psi(x_0)|. \tag{9}$$

特别地, 初值问题 (6) 至多存在一个解.

注记 3.1. 对给定的初值问题 (6), 不等式右端恰好为零, 于是 $\phi(x) - \psi(x) \equiv 0$. 这就给出了解的唯一性.

定理 3.2 (二阶线性初值问题: 解的存在唯一性)**.** 设函数 $p(x), q(x), f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续. 则初值问题

$$\begin{cases} f(x) = y'' + p(x)y' + q(x)y, \\ y(a) = y_0, y'(a) = y_1 \end{cases} \tag{10}$$

在区间 $[a, b]$ 上存在唯一解.

例题 3.4 (二阶齐次线性初值问题解的唯一性)**.** 设函数 $p(x), q(x), f(x)$ 在区间 $[a, b]$ 上连续. 证明: 初值问题

$$\begin{cases} 0 = y'' + p(x)y' + q(x)y, \\ y(a) = y'(a) = 0 \end{cases} \tag{11}$$

存在唯一解 $y(x) \equiv 0$. 一般地, 初值问题 (10) 至多存在一个解.

注记 3.2. 对给定的初值问题 (10), 若存在两个解 $\phi(x), \psi(x)$, 则 $\omega(x) \equiv \phi(x) - \psi(x)$ 将成为初值问题 $\begin{cases} 0 = y'' + p(x)y' + q(x)y, \\ y(a) = y'(a) = 0 \end{cases}$ 的解, 于是 $\omega(x) \equiv 0$.

3.2 二阶线性齐次方程的基解

定义 3.3 (Wronskian 行列式)**.** 两个可导函数 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 的 **Wronskian 行列式** (Wronskian determinant) 定义为

$$W(x; \phi_1, \phi_2) \equiv \begin{vmatrix} \phi_1(x) & \phi_2(x) \\ \phi_1'(x) & \phi_2'(x) \end{vmatrix} = (\phi_1(x))^2 \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\phi_2(x)}{\phi_1(x)}\right) \tag{12}$$

- 两个可导函数 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 线性相关的充要条件是 $W(x; \phi_1, \phi_2) \equiv 0$;
- 若二阶线性齐次方程的两个解 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 线性无关, 则可称为**基解** (basis solutions), 二者的线性组合 $\{C_1\phi_1(x) + C_2\phi_2(x)\}$ 张成了完整的解空间.

例题 3.5 (基解的 Wronskian 行列式)**.** 设 $p(x), q(x) \in \mathcal{C}[a, b]$. 给定二阶线性齐次方程 $0 = y'' + p(x)y' + q(x)y$ 的两个解 $\phi_1(x), \phi_2(x)$, 证明:

$$W(x; \phi_1, \phi_2) = W(c; \phi_1, \phi_2) \exp\left\{-\int_c^x p(t)\,\mathrm{d}t\right\} \tag{13}$$

对任意 $c \in [a, b]$ 成立.

注记 3.3. 二阶线性齐次方程的两个解 $\phi_1(x), \phi_2(x)$ 的 Wronskian 行列式具有恒定的符号 (正、负或零). 特别地, 若 W 在某点 c 为零, 则 W 在 $[a, b]$ 上恒为零, 此即为线性相关的情形.

例题 3.6 (基解的互化)**.** 设 $p(x), q(x) \in \mathcal{C}[a, b]$, $\phi(x)$ 为二阶线性齐次方程 $0 = y'' +$

$p(x)y' + q(x)y$ 在 $[a, b]$ 上的非平凡解 (非零解), 证明:

$$\psi(x) = \phi(x) \int^{x} \frac{1}{(\phi(t))^2} \exp\left\{-\int^{t} p(s)\,\mathrm{d}s\right\} \mathrm{d}t \tag{14}$$

为与 $\phi(x)$ 线性无关的另一个解.