讲义答案合集

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

1　二重积分

1.1　二重可积性

例题 1.1.1 (二重积分的中值定理)**.** 计算

$$\lim_{\rho\to 0_+}\frac{1}{\rho^2}\iint_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1.1}$$

其中 $f(x,y)$ 为二元连续函数.

解答. 记 $D_\rho\equiv\{(x,y):x^2+y^2\le\rho^2\}$. 根据积分中值定理, 存在点 $(x_\rho,y_\rho)\in D_\rho$

$$\iint_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\pi\rho^2 f(x_\rho,y_\rho). \tag{1.2}$$

所以,

$$\lim_{\rho\to 0_+}\frac{1}{\rho^2}\iint_{x^2+y^2\le\rho^2} f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\lim_{\rho\to 0_+}\frac{\pi\rho^2 f(x_\rho,y_\rho)}{\rho^2}=\pi f(0,0). \tag{1.3}$$

1.2　重积分与累次积分

1.2.1　积分次序的选择

例题 1.2.1 (“扫描” 的方向与积分次序)**.** 设 D 是由直线 $x=\frac{p}{2}$ 和抛物线 $y^2=2px$ 包围的区域, 且 $p>0$, 计算二重积分

$$I=\iint_D xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1.4}$$

解答. 记 D_0 为 D 上半平面内的部分, 对应的二重积分为 I_0. 由对称性 $I=2I_0$, 这里

$$\begin{aligned}
I_0&=\int_0^{\frac{p}{2}}\mathrm{d}x\int_0^{\sqrt{2px}} xy^2\,\mathrm{d}y\\
&=\int_0^{\frac{p}{2}}\left(\frac{1}{3}xy^3\right)_{y=0}^{y=2px}\mathrm{d}x\\
&=\frac{(2p)^{\frac{3}{2}}}{3}\int_0^{\frac{p}{2}} x^{\frac{5}{2}}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{(2p)^{\frac{3}{2}}}{3}\left(\frac{2}{7}x^{\frac{7}{2}}\right)_{x=0}^{x=\frac{p}{2}}\\
&=\frac{p^5}{42}.
\end{aligned} \tag{1.5}$$

所以, $I=\frac{p^5}{21}$.

例题 1.2.2 (运算简繁的区别)**.** 设 D 是由直线 $y=0,y=2,y=x,y=x+2$ 所围成的 $\mathbb{R}^2$ 中有界闭区域. 求二重积分

$$\iint_D\left(\frac{1}{2}x-y\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1.6}$$

解答. 我们展示两种积分次序的选择, 以示难易之别.

1. “横向扫描”: 先对 y 积分 (较为繁琐):

$$\begin{aligned} I &= \int_{-2}^{0} \mathrm{d}x \int_{0}^{x+2} \left(\frac{1}{2}x - y\right) \mathrm{d}y + \int_{0}^{2} \mathrm{d}x \int_{x}^{2} \left(\frac{1}{2}x - y\right) \mathrm{d}y \\ &= \int_{-2}^{0} \left(\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_{y=0}^{y=x+2} \mathrm{d}x + \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{2}xy - \frac{1}{2}y^2\right)\Bigg|_{y=x}^{y=2} \mathrm{d}x \\ &= \int_{-2}^{0} (-x-2)\,\mathrm{d}x + \int_{0}^{2} (x-2)\,\mathrm{d}x \\ &= \left(-\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Bigg|_{x=-2}^{x=0} + \left(\frac{1}{2}x^2 - 2x\right)\Bigg|_{x=0}^{x=2} \\ &= -4; \end{aligned} \tag{1.7}$$

2. “纵向扫描”: 先对 x 积分 (较为简便):

$$\begin{aligned} I &= \int_{0}^{2} \mathrm{d}y \int_{y-2}^{y} \left(\frac{1}{2}x - y\right) \mathrm{d}x \\ &= \int_{0}^{2} \left(\frac{1}{4}x^2 - xy\right)\Bigg|_{x=y-2}^{x=y} \mathrm{d}y \\ &= \int_{0}^{2} (-y-1)\,\mathrm{d}y \\ &= \left(-\frac{1}{2}y^2 - y\right)\Bigg|_{y=0}^{y=2} \\ &= -4. \end{aligned} \tag{1.8}$$

例题 1.2.3 (可积性的区别)**.** 设 D 是由曲线 $y=\sqrt{x}$ 与直线 $y=2, x=0$ 围成的区域. 计算二重积分

$$I = \iint_D \sin\left(y^3\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{1.9}$$

解答. 由已知,

$$I = \int_0^2 \mathrm{d}y \int_0^{y^2} \sin\left(y^3\right) \mathrm{d}x = \int_0^2 y^2 \sin\left(y^3\right) \mathrm{d}y = \frac{1-\cos 8}{3}. \tag{1.10}$$

1.2.2　简单的积分区域

例题 1.2.4 (矩形区域上的二重积分)**.** 设函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 证明:

$$\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{1.11}$$

解答. 考虑二重积分 $I \equiv \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{d}y\,(f(x)-f(y))^2$, 则

$$
\begin{aligned}
&0 \le I \\
&= \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b \mathrm{d}y - 2\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b f(y)\,\mathrm{d}y + \int_a^b \mathrm{d}x \int_a^b f^2(y)\,\mathrm{d}y \\
&= 2(b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x - 2\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2,
\end{aligned} \tag{1.12}
$$

所以 $\left(\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \le (b-a)\int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x$ 成立.

例题 1.2.5 (直角三角形区域上的二重积分)**.** 计算累次积分

$$
I = \int_0^{\pi} \mathrm{d}x \int_x^{\pi} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}y. \tag{1.13}
$$

解答. 记 $D = \{(x,y) | 0 \le x \le y \le \pi\}$, 则

$$
I = \iint_D \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^{\pi} \mathrm{d}y \int_0^{y} \frac{\sin y}{y}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\pi} \sin y\,\mathrm{d}y = 2. \tag{1.14}
$$

例题 1.2.6 (可分离变量的二重积分)**.** 设函数 $f(x)$ 是 $[0,1]$ 上的正值连续函数, 且最小值为 m, 最大值为 M. 证明:

$$
1 \le \left(\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{f(x)}\right) \le \frac{(m+M)^2}{4mM}. \tag{1.15}
$$

解答. 题设不等式中, 两定积分的乘积事实上等于矩形区域 $D \equiv [0,1]\times[0,1]$ 上的二重积分 $I \equiv \iint_D \frac{f(x)}{f(y)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$.

1. 一方面,

$$
\begin{aligned}
I &= \iint_D \frac{1}{2}\left(\frac{f(x)}{f(y)} + \frac{f(y)}{f(x)}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&\ge \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= 1;
\end{aligned} \tag{1.16}
$$

2. 另一方面, 若对原题直接运用基本不等式

$$
\begin{aligned}
I &= \left(\int_0^1 \frac{f(x)}{\sqrt{mM}}\,\mathrm{d}x\right)\left(\int_0^1 \frac{\sqrt{mM}}{f(x)}\,\mathrm{d}x\right) \\
&\le \frac{1}{4}\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{mM}}{f(x)} + \frac{f(x)}{\sqrt{mM}}\right)^2 \mathrm{d}x,
\end{aligned} \tag{1.17}
$$

则由于 $f(x) \in \left[\sqrt{\frac{m}{M}}, \sqrt{\frac{M}{m}}\right]$, 我们有

$$I \leq \frac{1}{4} \int_0^1 \left(\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}} \right)^2 \mathrm{d}x = \frac{(m+M)^2}{4mM}. \tag{1.18}$$

注记 1.1. 一个失败的尝试:

$$\begin{aligned} 2I + 2 &= \iint_D \left(\sqrt{\frac{f(x)}{f(y)}} + \sqrt{\frac{f(y)}{f(x)}} \right)^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &\leq \iint_D \left(\sqrt{\frac{m}{M}} + \sqrt{\frac{M}{m}} \right)^2 \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \frac{(m+M)^2}{mM}, \end{aligned} \tag{1.19}$$

于是,

$$I \leq \frac{m^2 + M^2}{2mM}. \tag{1.20}$$

但

$$\frac{(m+M)^2}{4mM} \leq \frac{m^2 + M^2}{2mM}. \tag{1.21}$$

失败的原因在于放缩过松, 我们不宜将 x, y 两个自由度在同一步骤放缩到常数.

1.2.3 复杂的积分区域

例题 1.2.7 (从边界条件确定积分限)**.** 两个半径为 a 的圆柱体, 其轴线相互垂直且交于一点 O. 求两圆柱体公共部分 (古称**牟合方盖**) 的体积.

解答. 图1给出了牟合方盖 (第一卦限) 内的几何示意图. 其中, 圆柱面 $x^2 + z^2 = a^2$ 与 $y^2 + z^2 = 1$ 相交, 其在 xOz 和 yOz 面上的截口曲线均为圆弧, 而在 xOy 及任意与之平行的平面上的截口曲线为正方形.

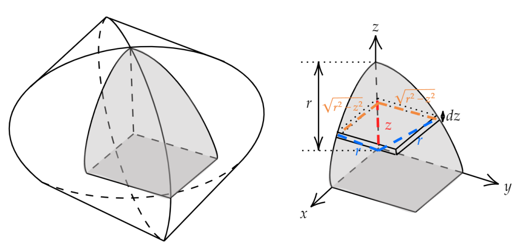

Figure 1: 牟合方盖示意图

考虑高度 $z \in [0, a]$, 截面积 $\sigma(z) = \sqrt{a^2 - z^2} \cdot \sqrt{a^2 - z^2} = a^2 - z^2$. 所以

$$V = 8 \int_0^a \sigma(z) \, \mathrm{d}z = \frac{16}{3} a^3. \tag{1.22}$$

例题 1.2.8 (分段积分)**.** 计算二重积分

$$I = \iint_D \left|x - y^2\right| \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{1.23}$$

其中 $D = [0,1] \times [-1,1]$.

解答. 记 $D_1 = \{(x,y) \in D | x > y^2\}$, $D_2 \subset D$ 为 D_1 的补集. 此时,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \iint_{D_1} (x - y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{y^2}^{1} (x - y^2)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \left(\frac{1}{2}y^4 - y^2 + \frac{1}{2}\right) \mathrm{d}y \\
&= \frac{8}{15}, \qquad (1.24) \\
I_2 &= \iint_{D_2} (y^2 - x)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_{-1}^{1} \mathrm{d}y \int_{0}^{y^2} (y^2 - x)\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{-1}^{1} \frac{1}{2}y^4\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{5}, \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

于是 $I = I_1 + I_2 = \frac{11}{15}$.

1.3 极坐标系下的二重积分

例题 1.3.1 (被积函数适宜极坐标代换)**.** 计算二重积分

$$\begin{aligned}
I &= \iint_D \ln\left(1 + x^2 + y^2\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \\
D &= \{(x,y) | x^2 + y^2 \le 1, x \ge 0, y \ge 0\}. \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

解答. 极坐标系下, 积分区域 $D \mapsto D' \equiv \left\{(\rho,\theta) | 0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{2}\right\}$. 此时

$$\begin{aligned}
I &= \iint_{D'} \rho \ln\left(1 + \rho^2\right) \mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta \\
&= \int_0^1 \rho \ln\left(1 + \rho^2\right) \mathrm{d}\rho \int_0^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \\
&= \frac{\pi}{2} \left(\frac{1}{2}\rho^2 \ln\left(1 + \rho^2\right) - \frac{1}{2}\rho^2 + \frac{1}{2}\ln\left(1 + \rho^2\right)\right)\Bigg|_{\rho=0}^{\rho=1} \\
&= \frac{\pi}{4}(2\ln 2 - 1). \qquad (1.27)
\end{aligned}$$

例题 1.3.2 (积分区域适宜极坐标代换)**.** 计算曲面 $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ 与 $x^2 + y^2 = 3z$ 所

围的空间区域在 $z \geq 0$ 部分的体积.

解答. 两曲面交于平面 $z = 1$ 上的曲线 $x^2 + y^2 = 3$. 记 $D \equiv \{(x, y)|x^2 + y^2 \leq 3\}$, 则所求体积

$$\begin{aligned} V &= \iint_D \left(\sqrt{4 - x^2 - y^2} - \frac{1}{3}(x^2 + y^2) \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \\ &= \int_0^{\sqrt{3}} \rho \, \mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \left(\sqrt{4 - \rho^2} - \frac{1}{3}\rho^2 \right) \mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \left(-\frac{1}{3}(4 - \rho^2)^{\frac{3}{2}} - \frac{1}{12}\rho^4 \right)_{\rho=0}^{\rho=\sqrt{3}} \\ &= \frac{19\pi}{6}. \end{aligned} \tag{1.28}$$

例题 1.3.3 (复杂的积分区域)**.** 计算二重积分 $I = \iint_D (x^2 + y^2)^{\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y$, 其中 D 由两个圆 $x^2 + y^2 = 1$ 和 $x^2 - 2x + y^2 = 0$ 的公共部分在第一象限内的区域.

解答. 两圆弧在第一象限交于 (极坐标) 点 $\rho = 1, \theta = \frac{\pi}{3}$. 由几何关系,

$$D = \left\{ (\rho, \theta) \middle| 0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{3}, 0 \leq \rho \leq 1 \right\} \cup \left\{ (\rho, \theta) \middle| \frac{\pi}{3} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}, 0 \leq \rho \leq 2\cos\theta \right\} \equiv D_1 \cup D_2. \tag{1.29}$$

于是,

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_0^{\frac{\pi}{3}} \mathrm{d}\theta \int_0^1 \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{\pi}{9}, \end{aligned} \tag{1.30}$$

$$\begin{aligned} I_2 &= \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \mathrm{d}\theta \int_0^{2\cos\theta} \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{8}{3} \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \, \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{16}{9} - \sqrt{3}. \end{aligned} \tag{1.31}$$

所以 $I = I_1 + I_2 = \frac{\pi + 16}{9} - \sqrt{3}$.

作业题

作业 1.1. 计算积分 $I = \iint_D (x + y + xy)^2 \, \mathrm{d}\sigma$, 其中 $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 \leq 1\}$.

解答. 作极坐标变换 $(x, y) \mapsto (\rho, \theta)$, 则 D 的边界曲线方程为 $\rho = 1, 0 \le \theta \le 2\pi$. 于是,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \rho \,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \,(\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + \rho^2\cos\theta\sin\theta)^2 \\
&= \int_0^1 \rho^3 \,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \left(1 + \rho^2\cos^2\theta\sin^2\theta + 2\cos\theta\sin\theta + 2\rho\cos^2\theta\sin\theta + 2\rho\cos\theta\sin^2\theta\right) \\
&= \int_0^1 \left(2\pi\rho^3 + \frac{\pi}{4}\rho^5\right) \mathrm{d}\rho \\
&= \frac{13}{24}\pi. \qquad (1.32)
\end{aligned}$$

作业 1.2. 计算积分 $I = \iint_D \left(\frac{3x^2\sin y}{y} + 2\mathrm{e}^{x^2}\right) \mathrm{d}\sigma$, 其中 D 由 $y = x, y = x^3$ 围成.

解答. 由已知,

$$\begin{aligned}
I_1 &= \int_0^1 \mathrm{d}x \int_{x^3}^{x} 2\mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 2(x - x^3)\mathrm{e}^{x^2} \,\mathrm{d}x \\
&= \mathrm{e} - 2; \qquad (1.33) \\
I_2 &= \int_0^1 \mathrm{d}y \int_y^{y^{\frac{1}{3}}} \frac{3x^2\sin y}{y} \,\mathrm{d}x \\
&= \int_0^1 (1 - y^2)\sin y \,\mathrm{d}y \\
&= 3 - 2\sin 1 - 2\cos 1. \qquad (1.34)
\end{aligned}$$

所以,

$$I = I_1 + I_2 = \mathrm{e} - 2(\sin 1 + \cos 1) + 1. \qquad (1.35)$$

2 高维空间的重积分

2.1 三重积分的计算

2.1.1 直角坐标系

例题 2.1.1 (地位对等的变量)**.** 设 V 是由平面 $x = 0, y = 0, z = 0, x + y + z = 1$ 所围成的四面体. 求三重积分 $\iiint_V \frac{1}{(1+x+y+z)^2} \,\mathrm{d}x \,\mathrm{d}y \,\mathrm{d}z$.

解答. 由于 x, y, z 地位均等, 不同的积分次序对应的难易程度是相当的. 我们以 “先二重积分、后一维积分” 的 “平面夹层法” 为例. 对给定的 $0 \le z_0 \le 1$, 平面 $z = z_0$ 将与

V 相交于平面闭区域 $D_{z_0}=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x+y\le 1-z_0, x\ge 0, y\ge 0\}$. 于是,

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^1 \mathrm{d}z\iint_{D_z}\frac{\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(1+x+y+z)^2}\\
&=\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{1-z}\mathrm{d}x\int_0^{1-z-x}\frac{\mathrm{d}y}{(1+x+y+z)^2}\\
&=\int_0^1 \mathrm{d}z\int_0^{1-z}\left(\frac{1}{1+x+z}-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}x\\
&=\int_0^1\left(\frac{1}{2}z-\ln(1+z)+\ln 2-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}z\\
&=\frac{3}{4}-\ln 2.
\end{aligned}\tag{2.1}$$

例题 2.1.2 (积分次序: 几何视角)**.** 计算三重积分 $I=\iiint_V xy^2z^3\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 V 是曲面 $z=xy$ 与平面 $y=x, x=1, z=0$ 所围的区域.

解答. 为了避免分段积分, 我们选择 "曲顶柱体法". 注意到 V 在 xOy 平面上的投影为 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|0\le y\le x\le 1\}$, 且对 D 内给定的一点 (x,y), 区域 V 将满足 $0\le z\le xy$. 于是,

$$\begin{aligned}
I&=\iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_0^{xy}xy^2z^3\,\mathrm{d}z\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\mathrm{d}y\int_0^{xy}xy^2z^3\,\mathrm{d}z\\
&=\int_0^1\mathrm{d}x\int_0^x\frac{1}{4}x^5y^6\,\mathrm{d}y\\
&=\int_0^1\frac{1}{28}x^{12}\,\mathrm{d}x\\
&=\frac{1}{364}.
\end{aligned}\tag{2.2}$$

例题 2.1.3 (积分次序: 代数视角)**.** 计算三重积分 $I=\iiint_\Omega(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是平面 $x+y+z=1$ 和三个坐标平面围成的四面体.

解答. 闭区域 Ω 在 yOz 平面上的投影 $D_{(y,z)}=\{(y,z)\in\mathbb{R}^2|y+z\le 1, y\ge 0, z\ge 0\}$. 对任给的 $(y,z)\in D_{(y,z)}$, 区域 Ω 将满足 $0\le x\le 1-y-z$. 于是,

$$\begin{aligned}
I&=\iint_{D_{(y,z)}}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\int_0^{1-y-z}(1-y)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}x\\
&=\iint_{D_{(y,z)}}(1-y)(1-y-z)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\
&=\int_0^1(1-y)\,\mathrm{d}y\int_0^{1-y}(1-y-z)\mathrm{e}^{-(1-y-z)^2}\,\mathrm{d}z\\
&=\frac{1}{2}\int_0^1(1-y)\left(1-\mathrm{e}^{-(1-y)^2}\right)\mathrm{d}y\\
&=\frac{1}{4\mathrm{e}}.
\end{aligned}\tag{2.3}$$

2.1.2 柱坐标系与球坐标系

例题 2.1.4 (柱坐标变换)**.** 计算三重积分

$$I = \iiint_{\Omega} (y^2 + z^2)\,\mathrm{d}V, \tag{2.4}$$

其中 $\Omega : 0 \le z \le x^2 + y^2 \le 1$.

解答. 作柱坐标变换, 则 $\Omega \mapsto \Omega' \equiv \{(\rho, \theta, z) | 0 \le z \le \rho^2 \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. 于是,

$$\begin{aligned}
I &= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_{\sqrt{z}}^1 (z^2 + \rho^2 \sin^2\theta)\rho\,\mathrm{d}\rho \\
&= \int_0^1 \mathrm{d}z \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{2}z^2(1-z) + \frac{1}{4}(1-z^2)\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\
&= \pi \int_0^1 \left(z^2(1-z) + \frac{1}{4}(1-z^2)\right)\mathrm{d}z \\
&= \frac{\pi}{4}.
\end{aligned} \tag{2.5}$$

例题 2.1.5 (球坐标变换)**.** 设 $R > 0$. 计算三重积分 $I = \iiint_{\Omega} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, 其中 Ω 是两个球 $x^2 + y^2 + z^2 \le R^2$ 与 $x^2 + y^2 + z^2 - 2Rz \le 0$ 围成的区域.

解答. 作球坐标变换, 则 $\Omega \mapsto \Omega' \equiv \Omega_1' \cup \Omega_2'$, 其中:

$$\Omega_1' : 0 \le \phi \le \frac{\pi}{3}, 0 \le \rho \le R, 0 \le \theta \le 2\pi; \tag{2.6}$$

$$\Omega_2' : \frac{\pi}{3} \le \phi \le \frac{\pi}{2}, 0 \le \rho \le 2R\cos\phi, 0 \le \theta \le 2\pi. \tag{2.7}$$

于是,

$$\begin{aligned}
I &= 2\pi \left(\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\phi\,\mathrm{d}\phi \int_0^R (\rho^2\cos^2\phi)\rho^2\,\mathrm{d}\rho + \int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\,\mathrm{d}\phi \int_0^{2R\cos\phi} (\rho^2\cos^2\phi)\rho^2\,\mathrm{d}\rho\right) \\
&= \pi R^5 \left(\frac{2}{5}\int_0^{\frac{\pi}{3}} \sin\phi\cos^2\phi\,\mathrm{d}\phi + \frac{64}{5}\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} \sin\phi\cos^7\phi\,\mathrm{d}\phi\right) \\
&= \frac{59\pi R^5}{480}.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2.2 重积分的物理意义

2.2.1 曲面的表面积

例题 2.2.1 (平面闭区域的面积)**.** 设 $a > 0$, 计算曲线 $(x^2+y^2)^2 = 2a^2(x^2-y^2), x^2+y^2 \ge a^2$ 所围区域的面积 S.

解答. 作极坐标变换, 则曲线方程为 $\rho^2 = 2a^2\cos 2\theta, \rho \ge a$. 根据对称性, 我们求其在第一象限的部分

$$D \equiv \left\{(\rho, \theta) | 0 \le \theta \le \frac{\pi}{6}, a \le \rho \le a\sqrt{2\cos 2\theta}\right\} \tag{2.9}$$

的面积 $\sigma(D)$, 则 $S=4\sigma(D)$. 由于

$$\begin{aligned}\sigma(D) &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \int_0^{\frac{\pi}{6}} \mathrm{d}\theta \int_a^{a\sqrt{2\cos 2\theta}} \rho\,\mathrm{d}\rho\\ &= a^2\int_0^{\frac{\pi}{6}}\left(\cos 2\theta-\frac{1}{2}\right)\mathrm{d}\theta\\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{\pi}{12}\right)a^2, \end{aligned} \tag{2.10}$$

则 $S=\left(\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}\right)a^2$.

例题 2.2.2 (空间曲面的表面积)**.** 设 $a>0$, 计算曲面 $az=xy$ 在圆柱面 $x^2+y^2=a^2$ 以内的部分的表面积 S.

解答. 我们考虑其在第一象限内的部分 Σ, 则 $S=4\sigma(\Sigma)$. 对 Σ 在 xOy 平面上的投影 D 作极坐标变换, 得 $D\mapsto D'\equiv\left\{(\rho,\theta)|0\le\rho\le a, 0\le\theta\le\frac{\pi}{2}\right\}$. 对于曲面 $z=\frac{xy}{a}$, 我们有 $z_x=\frac{y}{a}, z_y=\frac{x}{a}$. 所以,

$$\begin{aligned}\sigma(\Sigma) &= \iint_D\sqrt{1+\frac{x^2+y^2}{a^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &= \iint_{D'}\rho\sqrt{1+\frac{\rho^2}{a^2}}\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\theta\\ &= \frac{\pi a^2}{6}(2\sqrt{2}-1), \end{aligned} \tag{2.11}$$

从而 $S=\frac{2\pi a^2}{3}(2\sqrt{2}-1)$.

2.2.2 几何体的体积

例题 2.2.3 (直角坐标系)**.** 计算曲面 $z=x+y, z=xy, x+y=1, x=0, y=0$ 围成的几何体的体积.

解答. 所围几何体 Ω 在 xOy 平面上的投影 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x+y\le 1, x\ge 0, y\ge 0\}$. 且对给定的 $(x,y)\in D$, 我们有 $xy\le z\le x+y$. 所以,

$$\begin{aligned}V &= \iint_D \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\int_{xy}^{x+y}\mathrm{d}z\\ &= \int_0^1\mathrm{d}x\int_0^{1-x}(x+y-xy)\,\mathrm{d}y\\ &= \frac{1}{2}\int_0^1\left(-x^3+x^2-x+1\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{7}{24}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

例题 2.2.4 (柱坐标系与球坐标系)**.** 计算曲面 $x^2+y^2+z^2=2az, x^2+y^2\le z^2$ 所围区域的体积.

解答. 我们同时展示柱坐标变换与球坐标变换的计算方法.

1. 柱坐标变换下,

$$\Omega' = \left\{ (\rho, \theta, z) \middle| 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \rho \leq a, \rho \leq z \leq a + \sqrt{a^2 - \rho^2} \right\}. \tag{2.13}$$

于是,

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^a \rho \, \mathrm{d}\rho \int_\rho^{a+\sqrt{a^2-\rho^2}} \mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^a \left(a\rho + \rho\sqrt{a^2 - \rho^2} - \rho^2 \right) \mathrm{d}\rho \\ &= \pi a^3. \end{aligned} \tag{2.14}$$

2. 球坐标变换下,

$$\Omega'' = \left\{ (\rho, \phi, \theta) \middle| 0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \frac{\pi}{4}, 0 \leq \rho \leq 2a\cos\phi \right\}. \tag{2.15}$$

于是,

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi \, \mathrm{d}\phi \int_0^{2a\cos\phi} \rho^2 \, \mathrm{d}\rho \\ &= \frac{16\pi a^3}{3} \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\phi \cos^3\phi \, \mathrm{d}\phi \\ &= \pi a^3. \end{aligned} \tag{2.16}$$

2.3 变量代换的一般理论

例题 2.3.1 (椭球坐标系)**.** 设 r 是正实数, $f : (-r, r) \to \mathbb{R}$ 连续, $f(0) = 0$, f 在 0 点可导, 对于每个 $t > 0$, 定义

$$V(t) = \left\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \middle| x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{25} \leq t^2 \right\}, \tag{2.17}$$

证明

$$\lim_{t\to 0} \frac{1}{t^5} \iiint_{V(t)} f\left(x^2 + 16y^2 + \frac{z^2}{25} \right) \mathrm{d}x \, \mathrm{d}y \, \mathrm{d}z = \pi f'(0). \tag{2.18}$$

解答. 作代换

$$\begin{cases} x = \rho \sin\phi \cos\theta, \\ y = \frac{1}{4}\rho \sin\phi \sin\theta, \\ z = 5\rho\cos\phi, \end{cases} \tag{2.19}$$

则其 Jacobian 行列式 $\det\{J\} = \frac{5}{4}\rho^2 \sin\phi$. 此时, $V(t) \mapsto V'(t) \equiv \{(\rho, \phi, \theta) | 0 \leq \rho \leq$

$t, 0 \le \phi \le \pi, 0 \le \theta \le 2\pi\}$. 于是,

$$\begin{aligned}\iiint_{V(t)} f\left(x^2+16y^2+\frac{z^2}{25}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \frac{5}{4}\iiint_{V(t)}\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\theta\int_0^{\pi}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi\int_0^t \rho^2 f(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho\\ &= 5\pi\int_0^t \rho^2 f(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho.\end{aligned}\tag{2.20}$$

由 l'Hôpital 法则及导数的定义可知,

$$\begin{aligned}\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^5}\iiint_{V(t)} f\left(x^2+16y^2+\frac{z^2}{25}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= \frac{5\pi}{t^5}\int_0^t \rho^2 f(\rho^2)\,\mathrm{d}\rho\\ &= \frac{\pi f(t^2)}{t^2}\\ &= \pi f'(0).\end{aligned}\tag{2.21}$$

例题 2.3.2 (变量代换与化简)**.** 计算二重积分 $I = \iint_D \left(\sqrt{\frac{y}{x}}+\sqrt{xy}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$, 其中 D 是由四条曲线 $xy=1, xy=9, y=x, y=4x$ 在第一象限围成的区域.

解答. 作代换

$$\begin{cases} u = xy,\\ v = \frac{y}{x},\end{cases}\tag{2.22}$$

则其 Jacobian 行列式

$$\det\left\{\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right\} = \begin{vmatrix}\frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & -\frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{3}{2}}\\ \frac{1}{2}u^{-\frac{1}{2}}v^{\frac{1}{2}} & \frac{1}{2}u^{\frac{1}{2}}v^{-\frac{1}{2}}\end{vmatrix} = \frac{1}{2v}.\tag{2.23}$$

此时, $D \mapsto D' \equiv \{(u,v)|1 \le u \le 9, 1 \le v \le 4\}$. 于是,

$$\begin{aligned} I &= \iint_{D'}(\sqrt{u}+\sqrt{v})\frac{\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v}{2v}\\ &= \frac{1}{2}\int_1^9\mathrm{d}u\int_1^4\left(u^{\frac{1}{2}}v^{-1}+v^{-\frac{1}{2}}\right)\mathrm{d}v\\ &= \frac{1}{2}\int_1^9\left(2u^{\frac{1}{2}}\ln 2+2\right)\mathrm{d}u\\ &= 8+\frac{52}{3}\ln 2.\end{aligned}\tag{2.24}$$

作业题

作业 2.1. 计算积分 $I = \iiint_\Omega \frac{(x+y+z)^2\sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)}\mathrm{d}V$, 其中 $\mathrm{d}V$ 即 $\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z$, Ω 是由曲面 $z=\sqrt{1+x^2+y^2}, z=\sqrt{3(1+x^2+y^2)}, x^2+y^2=1$ 所围成的区域.

解答. 作柱坐标变换, 则 $\Omega \mapsto \Omega' \equiv \{(\rho,\theta,z)|0 \le \rho \le 1, 0 \le \theta \le 2\pi, \sqrt{1+\rho^2} \le z \le$

$\sqrt{3(1+\rho^2)}\}$. 被积函数

$$u = \frac{(x+y+z)^2\sqrt{1+x^2+y^2}}{(x^2+y^2+z^2)(1+x^2+y^2+z^2)} = \frac{(\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+z)^2\sqrt{1+\rho^2}}{(\rho^2+z^2)(1+\rho^2+z^2)}. \tag{2.25}$$

于是,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho \int_{\sqrt{1+\rho^2}}^{\sqrt{3(1+\rho^2)}} \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{(\rho^2+z^2)(1+\rho^2+z^2)}\,\mathrm{d}z \int_0^{2\pi} (\rho\cos\theta+\rho\sin\theta+z)^2\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho \int_{\sqrt{1+\rho^2}}^{\sqrt{3(1+\rho^2)}} \frac{\sqrt{1+\rho^2}}{1+\rho^2+z^2}\,\mathrm{d}z \\ &= 2\pi \int_0^1 \rho\,\mathrm{d}\rho \int_1^{\sqrt{3}} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^2} \\ &= \frac{\pi^2}{12}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

3 曲线积分

3.1 两类曲线积分的计算

3.1.1 I 类曲线积分: 弧微元

例题 3.1.1 (对弧微元直接积分)**.** 计算 I 类曲线积分 $I = \int_L (x+y)\,\mathrm{d}s$, 其中 L 是以 $O(0,0), A(1,0), B(0,1)$ 为顶点的三角形围线.

解答. 我们分段计算,

$$\begin{aligned} I &= \int_{OA} s\,\mathrm{d}s + \int_{AB} \left(1 - \frac{s}{\sqrt{2}} + \frac{s}{\sqrt{2}}\right)\mathrm{d}s + \int_{BO} s\,\mathrm{d}s \\ &= 2\int_0^1 s\,\mathrm{d}s + \int_0^{\sqrt{2}} \mathrm{d}s \\ &= 1+\sqrt{2}. \end{aligned} \tag{3.1}$$

例题 3.1.2 (换元到坐标变量)**.** 计算 I 类曲线积分 $I = \int_L y^2\,\mathrm{d}s$, 其中 $L: y = \mathrm{e}^x, 0 \le x \le 1$.

解答. 由弧微分关系 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x = \sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x$. 所以,

$$I = \int_0^1 \mathrm{e}^{2x}\sqrt{1+\mathrm{e}^{2x}}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}\left((1+\mathrm{e})^{\frac{3}{2}} - 2\sqrt{2}\right). \tag{3.2}$$

例题 3.1.3 (参数方程: 平面曲线)**.** 设 E 是椭圆 $\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2 + \frac{y^2}{4} = 1, -1 \le x \le 1, -2 \le y \le 2\}$. 计算第一型曲线积分 $I = \int_E |xy|\,\mathrm{d}s$.

解答. 曲线 E 的参数方程为 $(x, y) = (cos\theta, 2\sin\theta), 0 \le \theta \le 2\pi$. 根据对称性,

$$\begin{aligned} I &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\sin\theta\cos\theta\sqrt{4\cos^2\theta + \sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\int_0^{\pi} \sqrt{\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos\phi}\sin\phi\,\mathrm{d}\phi \\ &= \frac{8}{9}\left(\left(\frac{5}{2} + \frac{3}{2}\cos\phi\right)^{\frac{3}{2}}\right)\Bigg|_{\phi=\pi}^{\phi=0} \\ &= \frac{56}{9}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

例题 3.1.4 (参数方程: 空间曲线)**.** 计算第一型曲线积分 $I = \int_L (x^2 + y^2 + z^2)\,\mathrm{d}s$, 其中 L 为一段螺旋线 $x = a\cos t, y = a\sin t, z = bt, 0 \le t \le 2\pi$.

解答. 由已知, $x'(t) = a\cos t, y'(t) = -a\sin t, z'(t) = b$. 所以,

$$I = \int_0^{2\pi} \left(a^2 + b^2t^2\right)\sqrt{a^2 + b^2}\,\mathrm{d}t = \frac{2\pi}{3}\left(3a^2 + 4\pi^2b^2\right)\sqrt{a^2 + b^2}. \tag{3.4}$$

3.1.2 II 类曲线积分: 向量值的投影

例题 3.1.5 (对弧微元直接积分)**.** 设 $R > 0$. 计算曲线积分 $I = \int_L x^2\,\mathrm{d}x - xy\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为从点 $A(R, 0)$ 到点 $B(0, R)$ 的圆弧 $x^2 + y^2 = R^2$ (逆时针方向).

解答. 给定弧长 $0 \le s \le \frac{\pi}{2}R$, 则 $x = R\cos\frac{s}{R}, y = R\sin\frac{s}{R}$. 于是,

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\frac{\pi}{2}R} \left(-R^2\sin\frac{s}{R}\cos^2\frac{s}{R} - R^2\sin^2\frac{s}{R}\cos\frac{s}{R}\right)\mathrm{d}s \\ &= -\frac{2}{3}R^3. \end{aligned} \tag{3.5}$$

例题 3.1.6 (参数方程: 平面曲线)**.** 计算曲线积分 $I = \int_L (x^2 - 2xy)\,\mathrm{d}x + (y^2 - 2xy)\,\mathrm{d}y$, 其中 L 为抛物线 $y = x^2, -1 \le x \le 1$ (沿 x 轴正方向).

解答. 由已知,

$$\begin{aligned} I &= \int_{-1}^{1} \left((x^2 - 2x^4) + 2x(x^4 - 2x^3)\right)\mathrm{d}x \\ &= 2\int_0^1 (x^2 - 4x^4)\,\mathrm{d}x \\ &= -\frac{14}{15}. \end{aligned} \tag{3.6}$$

例题 3.1.7 (参数方程: 空间曲线)**.** 设 $a > 0$. 计算曲线积分 $I = \oint_L y^2\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}y + x^2\,\mathrm{d}z$, 其中 L 为 *Viviani* 曲线

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 = a^2, \\ x^2 + y^2 = ax \end{cases} \tag{3.7}$$

在 $z \ge 0$ 处的分支. 从 Ox 轴的无穷远处 $(x > a)$ 看去, 取逆时针方向为正方向.

解答. 在球坐标系下, Viviani 曲线由球面 $\rho = a$ 与圆柱面 $\rho^2 \sin\phi = a^2 \cos\theta$ 相交而得. 所以, 它的 $z \geq 0$ 分支的参数方程为

$$\begin{cases} x = a\cos^2\theta, \\ y = a\cos\theta\sin\theta, \quad \theta \in \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]. \\ z = a\sin\theta, \end{cases} \tag{3.8}$$

于是,

$$\begin{aligned} I &= a^3 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left(-2\cos^3\theta\sin^3\theta + \sin^2\theta(\cos^2\theta - \sin^2\theta) + \cos^5\theta\right) \mathrm{d}\theta \\ &= a^3 \left(\frac{1}{8}\cos 2\theta - \frac{1}{24}\cos^3 2\theta - \frac{1}{4}\theta + \frac{3}{16}\sin 2\theta + \frac{1}{5}\sin^5\theta - \frac{2}{3}\sin^3\theta + \sin\theta\right)\Bigg|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} \\ &= -\frac{\pi a^3}{4}. \end{aligned} \tag{3.9}$$

3.2 Green 公式及其应用

3.2.1 对 Green 公式的理解

例题 3.2.1 (检查成立条件)**.** 计算曲线积分

$$I = \oint_{L^+} \frac{y\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}, \tag{3.10}$$

其中曲线 L 分别为:

1. 单位圆在第一象限部分所围成的弓形;
2. 单位圆.

解答. 记 $P(x, y) \equiv \frac{y}{x^2+y^2}, Q(x, y) \equiv -\frac{x}{x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}. \tag{3.11}$$

在单位圆面 D 内, $P(x, y)$ 与 $Q(x, y)$ 在除点 $(0, 0)$ 外的任意一点均具有连续的一阶偏导数.

1. 在曲线 L_1 所围成的弓形 D_1 内, P 与 Q 均具有连续的一阶偏导数. 所以, 我们可以直接应用 Green 公式:

$$I_1 = \iint_{D_1} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = 0. \tag{3.12}$$

2. 由于单位圆面 D_2 内含有奇点 $(0, 0)$, 在应用 Green 公式时应注意将该点排除在外. 我们演示这类问题的两种解法.

(a) 直接完成曲线积分. 注意到 L_2 具有参数方程 $(x,y)=(\cos\theta,\sin\theta)$. 所以

$$I_2=\int_0^{2\pi}(-\sin^2\theta-\cos^2\theta)\,\mathrm{d}\theta=-2\pi. \tag{3.13}$$

(b) 挖洞法. 任取顺时针方向的闭曲线 $L_R^-: x^2+y^2=r^2$, 其中 $0<r<1$, 由 L_r 与 L_2 围成的平面环形闭区域记为 D_R. 此时 P,Q 在 D_r 上具有连续一阶偏导数, 于是

$$I_2+\oint_{L_r^-}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\iint_{D_r}\left(\frac{\partial Q}{\partial x}-\frac{\partial P}{\partial y}\right)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0, \tag{3.14}$$

所以,

$$I_2=-\oint_{L_r^-}\frac{y\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y}{x^2+y^2}=\int_{2\pi}^{0}\frac{(-r^2\sin^2\theta-r^2\cos^2\theta)}{r^2}\,\mathrm{d}\theta=-2\pi. \tag{3.15}$$

这里挖洞法与直接曲线积分的难易程度完全等同. 但这种思想方法对处理复杂外围曲线的积分而言将非常有益, 在接下来的例题中会频繁应用.

例题 3.2.2 (等价形式: 散度定理)**.** 设函数 $P(x,y),Q(x,y)$ 在有界闭区域 D 上存在连续的一阶偏导数, 边界曲线 $L\equiv\partial D$ 分段光滑. 记 $\mathbf{n}$ 为曲线 L 的外法线方向的单位向量. 证明二维平面上的散度定理

$$\oint_{L^+}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s\equiv\oint_{L^+}P(x,y)\cos(\mathbf{n},x)\,\mathrm{d}x+Q(x,y)\cos(\mathbf{n},y)\,\mathrm{d}y=\iint_D\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \tag{3.16}$$

成立. 其中, $\mathbf{F}(x,y)\equiv(P(x,y),Q(x,y))$ 的散度 (divergence) 定义为

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y)\equiv\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}. \tag{3.17}$$

解答. 记正方向上的单位切向量 $\mathbf{t}=(\cos\alpha,\cos\beta)$. 由几何关系, 外法线上的单位向量

$$\mathbf{n}=(\cos(\mathbf{n},x),\cos(\mathbf{n},y))=(\cos\beta,-\cos\alpha). \tag{3.18}$$

于是,

$$\begin{aligned}\oint_{L^+}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s&=\oint_{L^+}(-Q(x,y)\cos\alpha+P(x,y)\cos\beta)\,\mathrm{d}s\\&=\oint_{L^+}-Q(x,y)\,\mathrm{d}x+P(x,y)\,\mathrm{d}y,\end{aligned} \tag{3.19}$$

则由 Green 公式,

$$\oint_{L^+}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}s=\iint_D\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3.20}$$

例题 3.2.3 (等价形式: 第二 Green 恒等式)**.** 设 $u(x,y),v(x,y)$ 在有界闭区域 D 上具有

连续的二阶偏导数, 边界曲线 $L^+ = \partial D$. 证明平面上的第二 *Green* 恒等式

$$\iint_D \begin{vmatrix} \nabla^2 u & \nabla^2 v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{L^+} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}s, \tag{3.21}$$

其中, $\frac{\partial}{\partial n}$ 为沿曲线 L 的外法线方向的的导数, 而 *Laplacian* 算符

$$\nabla^2 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}. \tag{3.22}$$

解答. L^+ 的单位切向量 $\mathbf{t} = (\cos\alpha, \cos\beta)$ 所对应的外法线单位向量 $\mathbf{n} = (\cos\beta, -\cos\alpha)$. 于是, 由 Green 公式,

$$\begin{aligned}
\oint_{L^+} \begin{vmatrix} \frac{\partial u}{\partial n} & \frac{\partial v}{\partial n} \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}s &= \oint_{L^+} \left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\cos\beta - \frac{\partial u}{\partial y}\cos\alpha \right) v - \left(\frac{\partial v}{\partial x}\cos\beta - \frac{\partial v}{\partial y}\cos\alpha \right) u \right) \mathrm{d}s \\
&= \oint_{L^+} \left(\frac{\partial v}{\partial y} u - \frac{\partial u}{\partial y} v \right) \mathrm{d}x + \left(\frac{\partial u}{\partial x} v - \frac{\partial v}{\partial x} u \right) \mathrm{d}y \\
&= \iint_D \left(\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} v - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} u \right) - \left(\frac{\partial^2 v}{\partial y^2} u - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} v \right) \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \iint_D \begin{vmatrix} \nabla^2 u & \nabla^2 v \\ u & v \end{vmatrix} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.
\end{aligned} \tag{3.23}$$

3.2.2 用 Green 公式计算第二型曲线积分

例题 3.2.4 (挖洞法)**.** 设 $E = \left\{ (x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| x^2 + \frac{y^2}{4} = 1 \right\}$, 取逆时针方向为正方向. 计算第二型曲线积分

$$I = \oint_E \frac{-y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y}{x^2 + y^2}. \tag{3.24}$$

解答. 记 $P(x,y) \equiv -\frac{y}{x^2+y^2}, Q(x,y) \equiv \frac{x}{x^2+y^2}$, 则

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{y^2 - x^2}{(x^2+y^2)^2}, \tag{3.25}$$

其中 P, Q 在 E 围成的平面闭区域 D 内除 $(0,0)$ 外的任意一点具有一阶连续偏导数. 对 $0 < r < 1$, 作顺时针方向的闭曲线

$$L_r = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + y^2 = r^2\}, \tag{3.26}$$

则我们对 L_r 与 E 围成的平面闭区域 D_r 应用 Green 公式,

$$\iint_{D_r} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \oint_{E+L_r} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y, \tag{3.27}$$

$$\begin{aligned}
0 &= I + I_r \\
&= I + \int_{2\pi}^{0} (\cos^2\theta + \sin^2\theta)\,\mathrm{d}\theta \\
&= I - 2\pi,
\end{aligned} \tag{3.28}$$

所以 $I=2\pi$.

例题 3.2.5 (挖洞法; 边界曲线的构造). 计算曲线积分

$$I=\oint_{\Gamma}\left(\frac{y^2+y+4x^2}{4x^2+y^2}+\sin(x^2)\right)\mathrm{d}x+\left(\frac{4x^2-x+y^2}{4x^2+y^2}+\sin(y^2)\right)\mathrm{d}y, \tag{3.29}$$

其中, Γ 是 $x^2+y^2=9(y\geq 0)$, $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}=1(y\leq 0)$ 所组成的闭曲线的逆时针方向.

解答. 记

$$P_1(x,y)\equiv\frac{y^2+y+4x^2}{4x^2+y^2}+\sin(x^2), \tag{3.30}$$

$$Q_1(x,y)\equiv\frac{4x^2-x+y^2}{4x^2+y^2}+\sin(y^2), \tag{3.31}$$

二者在 Γ 所围成的闭区域 D_Γ 内除 $(0,0)$ 外的一切点均具有一阶连续偏导数. 注意到

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}=\frac{4x^2-y^2}{(4x^2+y^2)^2}, \tag{3.32}$$

则若作逆时针方向的闭曲线 $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|4x^2+y^2=1\}$, 我们对 Γ,E 所围成的平面闭区域 D 应用 Green 公式,

$$\begin{aligned}I&=\oint_{E^+}\left(1+y+\sin(x^2)\right)\mathrm{d}x+\left(1-x+\sin(y^2)\right)\mathrm{d}y\\&=\iint_{4x^2+y^2\leq 1}-2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\&=-\pi.\end{aligned} \tag{3.33}$$

例题 3.2.6 (挖洞法; 重积分的中值估计). 计算曲线积分

$$I=\oint_L\frac{\mathrm{e}^y}{x^2+y^2}\left((x\sin x+y\cos x)\,\mathrm{d}x+(y\sin x-x\cos x)\,\mathrm{d}y\right), \tag{3.34}$$

其中 L 是椭圆 $\frac{x^2}{2}+y^2=1$ 的逆时针方向.

解答. 记

$$P_1(x,y)\equiv\frac{\mathrm{e}^y(x\sin x+y\cos x)}{x^2+y^2}, \tag{3.35}$$

$$Q_1(x,y)\equiv\frac{\mathrm{e}^y(y\sin x-x\cos x)}{x^2+y^2}, \tag{3.36}$$

于是

$$\frac{\partial P_1}{\partial y}=\frac{\partial Q_1}{\partial x}=\mathrm{e}^y\left(\frac{x\sin x+y\cos x}{x^2+y^2}+\frac{(x^2-y^2)\cos x-2xy\sin x}{(x^2+y^2)^2}\right). \tag{3.37}$$

对任给的 $0<r<1$, 作逆时针方向的闭曲线

$$L_r=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2=r^2\}, \tag{3.38}$$

则我们对 L_r 与 L 围成的平面闭区域 D 应用 Green 公式,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D 0\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \oint_{L_r^+} P_1\,\mathrm{d}x + Q_1\,\mathrm{d}y \\ &\equiv \frac{1}{r^2}\oint_{L_r^+} P_2\,\mathrm{d}x + Q_2\,\mathrm{d}y, \end{aligned} \tag{3.39}$$

其中,

$$P_2(x,y) = \mathrm{e}^y(x\sin x + y\cos x), \tag{3.40}$$

$$Q_2(x,y) = \mathrm{e}^y(y\sin x - x\cos x) \tag{3.41}$$

满足

$$\frac{\partial Q_2}{\partial x} - \frac{\partial P_2}{\partial y} = -2\mathrm{e}^y\cos x. \tag{3.42}$$

于是, 根据二重积分中值定理, 存在点 $(x_r, y_r) \in D_r : \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | x^2+y^2 \le r^2\}$, 使得

$$I = -2\frac{1}{r^2}\iint_{D_r} \mathrm{e}^y\cos x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = -2\pi\mathrm{e}^{y_r}\cos x_r. \tag{3.43}$$

由于 I 不依赖于 r 的取值, 我们令 $r\to 0_+$, 即得 $I = -2\pi$.

3.3　第二型曲线积分的路径无关性

3.3.1　路径无关性的充要条件

例题 3.3.1 (积分路径的重新选择)**.** 设 n 是正整数, 从点 $(0,0)$ 到点 $(n\pi, 0)$ 的有向曲线 $L_n = \{(t, |\sin t|) | 0 \le t \le n\pi\}$. 计算出下面的第二型曲线积分在 $n\to\infty$ 下的极限

$$\lim_{n\to\infty}\int_{L_n} \mathrm{e}^{y^2-x^2}\cos(2xy)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{y^2-x^2}\sin(2xy)\,\mathrm{d}y. \tag{3.44}$$

提示: 你能在推导极限值时不使用 Gaussian 积分 (其本质是广义积分) 的计算结果吗?

解答. 记 $P(x,y) = \mathrm{e}^{y^2-x^2}\cos(2xy), Q(x,y) = \mathrm{e}^{y^2-x^2}\sin(2xy)$, 则

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{\partial P}{\partial y} = 2\mathrm{e}^{y^2-x^2}(y\cos(2xy) - x\sin(2xy)). \tag{3.45}$$

根据第一象限区域的单连通性, 曲线积分

$$I_n \equiv \int_{L_n} \mathrm{e}^{y^2-x^2}\cos(2xy)\,\mathrm{d}x + \mathrm{e}^{y^2-x^2}\sin(2xy)\,\mathrm{d}y \tag{3.46}$$

与积分路径无关. 于是, 我们可以重新选择积分路径为 $X \equiv \{(x,0) | 0 \le x \le n\pi\}$, 得到

$$I_n = \int_0^{n\pi} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x. \tag{3.47}$$

为计算 I_n 及 $\lim_{n\to\infty} I_n$, 我们考察 $I_n^2 = \iint_{[0,n\pi]\times[0,n\pi]} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$. 根据二重积分的

保号性, 容易知道

$$\iint_{x^2+y^2\le n^2\pi^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \le I_n^2 \le \iint_{x^2+y^2\le(\sqrt{2}n)^2\pi^2} \mathrm{e}^{-(x^2+y^2)}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{3.48}$$

也即

$$\frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-n^2\pi^2}\right) \le I_n^2 \le \frac{\pi}{4}\left(1-\mathrm{e}^{-2n^2\pi^2}\right). \tag{3.49}$$

根据夹逼定理, 令 $n\to\infty$, 即得所求极限 $\frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

例题 3.3.2 (全微分的配凑)**.** 计算曲线积分

$$I=\int_L \left(1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}x+\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y, \tag{3.50}$$

其中 $L=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\middle|\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+(y-\pi)^2=\frac{1}{4}, y\ge\pi\right\}$, 取顺时针方向.

解答. 曲线 L 的起点为 $(1,\pi)$, 终点为 $(2,\pi)$. 记 $P(x,y)=1-\frac{y^2}{x^2}\cos\frac{y}{x}, Q(x,y)=\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}$. 于是, 由偏微分关系

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}=-\frac{2y}{x^2}\cos\frac{y}{x}+\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x} \tag{3.51}$$

可知, 存在可微函数 $u(x,y)$ 满足全微分关系 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$. 将函数 $Q(x,y)$ 对变量 y 作积分, 可知

$$\begin{aligned} u(x,y)&=\phi(x)+\int\frac{\partial Q}{\partial y}\,\mathrm{d}y\\ &=\phi(x)+\int\left(\sin\frac{y}{x}+\frac{y}{x}\cos\frac{y}{x}\right)\mathrm{d}y\\ &=\phi(x)+y\sin\frac{y}{x}. \end{aligned} \tag{3.52}$$

再由

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\phi'(x)-\frac{y^2}{x^3}\sin\frac{y}{x}=P(x,y) \tag{3.53}$$

可解得 $\phi(x)=x+C$. 于是, $P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$ 的一个原函数为

$$u(x,y)=x+y\sin\frac{y}{x}, \tag{3.54}$$

则所求曲线积分 $I=u(2,\pi)-u(1,\pi)=1+\pi$.

3.3.2 原函数理论

例题 3.3.3 (原函数的连续性)**.** 1. 设 $D=\mathbb{R}^2-\{(x,0)|x\ge 0\}$. 写出一个函数 $T: D\to\mathbb{R}$ 满足 T 在 D 中每点可微, 并且

$$\frac{\partial T}{\partial x}=-\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial T}{\partial y}=\frac{x}{x^2+y^2}; \tag{3.55}$$

2. 设 $\Omega=\mathbb{R}^2-\{(0,0)\}$, 证明: 不存在函数 $U:\Omega\to\mathbb{R}$ 满足 U 在 Ω 中每点可微, 并

且

$$\frac{\partial U}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial U}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{3.56}$$

解答. 1. 我们验证

$$T(x,y) = \begin{cases} \pi - \arctan\left(\frac{x}{y}\right), & y > 0, \\ \frac{\pi}{2}, & y = 0, \\ -\arctan\left(\frac{x}{y}\right), & y < 0 \end{cases} \tag{3.57}$$

符合要求. 首先, 对一切 $(x, y > 0)$ 的点和 $(x, y < 0)$ 的点, $T(x,y)$ 显然总是可微的, 其偏导数为

$$\frac{\partial T}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2},\ \frac{\partial T}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}. \tag{3.58}$$

其次, 注意到 $T(x, 0_+) = T(x, 0_-) = \frac{\pi}{2} = T(x,0)$, 则 $T(x,y)$ 在点 $(x,0)$ 处连续. 更进一步地, 注意到对任意 $x_0 < 0$ 有

$$\begin{aligned} \lim_{(x,y)\to(x_0,0_+)} \frac{\pi - \arctan\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{\pi}{2} - \frac{y}{x_0}}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} &= \lim_{(x,y)\to(x_0,0_+)} \frac{\frac{y}{x} - \frac{y}{x_0} + o\left(\frac{y^2}{x^2}\right)}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} \\ &= \frac{1}{x_0^2} \lim_{(x,y)\to(x_0,0_+)} \frac{(x_0-x)y + o(y^2)}{\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}} \\ &= 0, \end{aligned} \tag{3.59}$$

则对 $y > 0$, 下述等式

$$\begin{aligned} T(x,y) &= T(x_0,0) + 0(x-x_0) + \frac{1}{x_0}(y-0) + o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}\right) \\ &= T(x_0,0) \\ &+ \left(-\frac{y}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{(x,y)=(x_0,0)} (x-x_0) + \left(\frac{x}{x^2+y^2}\right)\Bigg|_{(x,y)=(x_0,0)} (y-0) \\ &+ o\left(\sqrt{(x-x_0)^2+y^2}\right) \end{aligned} \tag{3.60}$$

表明 $T(x,y)$ 在 $y \geq 0$ 时都可微, 且偏导数均满足 (3.58). 对 $y \leq 0$ 同理可证.

2. 假设存在 U 符合题设. 此时, 由于 Ω 是单连通区域, 其内的任意一条简单闭曲线 L 都将满足

$$I = \oint_{L^+} \frac{x\,\mathrm{d}y - y\,\mathrm{d}x}{x^2+y^2} = 0. \tag{3.61}$$

但若我们取 L 为单位圆圆周, 容易计算得到 $I = 2\pi$, 这就构成了矛盾.

4 曲面积分

4.1 两类曲面积分的计算

4.1.1 第一型曲面积分: 面积微元

例题 4.1.1 (对面积微元直接积分)**.** 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 证明:

$$\iint_S f(x+y+z)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{3}\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{4.1}$$

其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

解答. 令 $\xi=\frac{x+y+z}{\sqrt{3}}$, 则 $-1\le\xi\le 1$. 且对给定的微元 $\mathrm{d}\xi$, 动平面 $x+y+z=\sqrt{3}\xi\mapsto\sqrt{3}(\xi+\mathrm{d}\xi)$ 截球面所得薄球壳的面积

$$\mathrm{d}S = 2\pi\sqrt{1-d^2(\xi)}\frac{\mathrm{d}\xi}{\sqrt{1-d^2(\xi)}} = 2\pi\,\mathrm{d}\xi\,, \tag{4.2}$$

其中,

$$d(\xi)=\frac{\left|\sqrt{3}\xi\right|}{\sqrt{3}}=|\xi| \tag{4.3}$$

为原点 O 到平面 $x+y+z=\sqrt{3}\xi$ 的距离. 于是, 根据第一型曲面积分的定义,

$$\iint_S f(x+y+z)\,\mathrm{d}S=\int_{-1}^{1} f(\sqrt{3}\xi)2\pi\,\mathrm{d}\xi = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{3}\xi)\,\mathrm{d}\xi. \tag{4.4}$$

例题 4.1.2 (投影到坐标平面)**.** 计算曲面积分

$$I=\iint_S\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\mathrm{d}S, \tag{4.5}$$

其中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 截下部分.

解答. 曲面 S 在 xOy 平面上的投影为 $D=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2|x^2+y^2\le 1\}$, 且满足方程 $z=\sqrt{x^2+y^2}$, 从而

$$z_x=\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}},\ z_y=\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}. \tag{4.6}$$

于是,

$$\begin{aligned} I &= \iint_D\left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\sqrt{1+z_x^2+z_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \sqrt{2}\int_0^1\rho^5\,\mathrm{d}\rho\int_0^{2\pi}\left(1+\cos^2\theta\sin^2\theta\right)\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{3\sqrt{2}\pi}{8}. \end{aligned} \tag{4.7}$$

例题 4.1.3 (参数方程)**.** 计算曲面积分 $I=\iint_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为螺旋面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v, 0\le u\le a, 0\le v\le 2\pi$.

解答. 由已知, $J_{xy}=u, J_{yz}=\sin v, J_{zx}=\cos v$. 于是,

$$\begin{aligned}
I&=\int_0^a \mathrm{d}u\int_0^{2\pi}\sqrt{J_{xy}^2+J_{yz}^2+J_{zx}^2}v\,\mathrm{d}v\\
&=\int_0^{2\pi} v\,\mathrm{d}v\int_0^a\sqrt{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\
&=\frac{\pi^2}{2}\left(\ln\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}+\frac{2\sin\theta}{\cos^2\theta}\right)\Bigg|_{\theta=0}^{\theta=\arctan a}\\
&=\pi^2\left(\ln\left(a+\sqrt{1+a^2}\right)+a\sqrt{1+a^2}\right).
\end{aligned}\tag{4.8}$$

4.1.2 第二型曲面积分: 有向面积的投影

例题 4.1.4 (第二型曲面积分的计算)**.** 设 $R>r>0$. 计算曲面积分

$$I=\iint_S (y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\tag{4.9}$$

其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx$ 所截曲面在 $z\geq 0$ 的部分的外侧.

解答. S 的单位法向量 $\mathbf{n}=\left(\frac{x-R}{R},\frac{y}{R},\frac{z}{R}\right)$. 所以,

$$\begin{aligned}
I&=\iint_S\left((y-z)\frac{x-R}{R}+(z-x)\frac{y}{R}-(x-y)\frac{1}{R}\right)\mathrm{d}S\\
&=\iint_{(x-r)^2+y^2\leq r^2}(z-y)\frac{R}{z}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\pi r^2R-\iint_{(x-r)^2+y^2\leq r^2}\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2-(x-R)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\
&=\pi r^2R.
\end{aligned}\tag{4.10}$$

其中, 根据对称性,

$$\iint_{(x-r)^2+y^2\leq r^2}\frac{y}{\sqrt{R^2-y^2-(x-R)^2}}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=0.\tag{4.11}$$

4.2 Gauss 公式及其应用

例题 4.2.1 (用 Gauss 公式计算第二型曲面积分)**.** 设 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域

$$V=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^2|x^2+2y^2\leq z\leq 3-2x^2-y^2\},\tag{4.12}$$

S^- 是 V 的边界曲面的内侧. 计算第二型曲面积分

$$I=\oiint_{S^-}(x^2+y\sin z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z-(2y+z\cos x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(-2xz+x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.\tag{4.13}$$

解答. 记

$$P=x^2+y\sin z, Q=-2y-z\cos x, R=-2xz+x\sin y.\tag{4.14}$$

则由 Gauss 公式 (注意积分曲面 S^- 是内侧),

$$\begin{aligned} I &= -\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= 2\iiint_V \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \end{aligned} \tag{4.15}$$

注意到区域 V 在 xOy 平面上的投影为 $x^2+y^2 \le 1$, 故

$$\begin{aligned} I &= 2\iint_{x^2+y^2\le 1} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \int_{x^2+2y^2}^{3-2x^2-y^2} \mathrm{d}z \\ &= 6\iint_{x^2+y^2\le 1} (1-x^2-y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= 6\int_0^{2\pi} \mathrm{d}\theta \int_0^1 (1-\rho^2)\rho\,\mathrm{d}\rho \\ &= 3\pi. \end{aligned} \tag{4.16}$$

例题 4.2.2 (Gauss 公式; 增补曲面)**.** 计算曲面积分

$$I = \iint_{S^+} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{4.17}$$

其中, S 为圆锥面 $x^2+y^2=z^2 (0 \le z \le h)$ 的外侧.

解答. 记 Σ^+ 为平面 $z=h$ 在 $x^2+y^2\le h^2$ 的部分的上侧. 由 Gauss 公式,

$$I + \iint_{\Sigma^+} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \iiint_V 2(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z. \tag{4.18}$$

其中,

$$\begin{aligned} \iint_{\Sigma^+} z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y &= h^2 \iint_{x^2+y^2\le h^2} \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \pi h^4, \end{aligned} \tag{4.19}$$

$$\begin{aligned} \iiint_V 2(x+y+z)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z &= 2\int_0^h \mathrm{d}z \int_0^z \rho\,\mathrm{d}\rho \int_0^{2\pi} (\rho\cos\theta + \rho\sin\theta + z)\,\mathrm{d}\theta \\ &= 2\pi \int_0^h z^3\,\mathrm{d}z \\ &= \frac{\pi}{2}h^4. \end{aligned} \tag{4.20}$$

所以 $I = -\frac{\pi}{2}h^4$.

例题 4.2.3 (Gauss 公式; 挖去奇点)**.** 设参数 $a,b,c>0$. 计算曲面积分

$$I = \oiint_{S^+} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{4.21}$$

其中, S^+ 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$ 的外侧.

解答. 记

$$P=\frac{x}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}},\ Q=\frac{y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}},\ R=\frac{z}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}},\tag{4.22}$$

则不难验证 $\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}=0$. 作曲面 $\Sigma^+:\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3|ax^2+by^2+cz^2=\varepsilon^2\}$ (取外侧), 其中 $\varepsilon\to 0_+$ 以确保其在球面 S^+ 的内部. 由 Gauss 公式

$$\begin{aligned}0&=I-\oiint_{\Sigma^+}\frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(ax^2+by^2+cz^2)^{\frac{3}{2}}}, &(4.23)\\ I&=\frac{1}{\varepsilon^3}\oiint_{\Sigma^+}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=\frac{3}{\varepsilon^3}\iiint_{ax^2+by^2+cz^2\le\varepsilon^2}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\\ &=\frac{4\pi}{\sqrt{abc}}. &(4.24)\end{aligned}$$

4.3 Stokes 公式及其应用

例题 4.3.1 (用 Stokes 公式计算第二型曲线积分)**.** 设 L 为空间曲线 $\begin{cases}x^2+y^2=1,\\ x+z=1\end{cases}$, 其正方向为自 z 轴正向看下来的逆时针方向. 计算积分

$$I=\oint_{L^+}(y-z+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x+(z-x+\sin^2 y)\,\mathrm{d}y+(x-y+\sin^2 z)\,\mathrm{d}z.\tag{4.25}$$

解答. 记 $P=y-z+\sin^2 x, Q=z-x+\sin^2 y, R=x-y+\sin^2 z$, 则

$$\boldsymbol{\nabla}\times(P,Q,R)=-2(\mathbf{e}_x+\mathbf{e}_y+\mathbf{e}_z).\tag{4.26}$$

取 S^+ 为 L 所围闭曲面 (实为平面 $x+z=1$ 被 $x^2+y^2=1$ 所截部分) 的上侧, 其单位法向量 $\mathbf{n}=\left(\frac{1}{\sqrt{2}},0,\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. 由 Stokes 公式,

$$\begin{aligned}I&=-2\iint_{S^+}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=-2\sqrt{2}\iint_S\mathrm{d}S\\ &=-4\iint_{x^2+y^2\le1}\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\\ &=-4\pi. &(4.27)\end{aligned}$$

5 一阶常微分方程

5.1 线性方程

5.1.1 各类方程的求解方法

例题 5.1.1 (齐次情形)**.** 某质点 m 在运动时所受的空气阻力正比于速率: $f=-kv(k>0)$. 设该质点的初速度为 $v_0(>0)$, 计算其于 t 时刻的运动速度 $v=v(t)$.

解答. 根据 Newton 运动方程, 容易写出初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}+kv=0,\\ v(0)=v_0.\end{cases} \tag{5.1}$$

其中, 通解

$$v(t)=\exp\left\{-\int^t(-k)\,\mathrm{d}\tau\right\}=C\mathrm{e}^{-kt}. \tag{5.2}$$

代入 $v(0)=v_0$, 解得 $C=v_0$. 于是, 符合题意的特解 $v(t)=v_0\mathrm{e}^{-kt}$.

例题 5.1.2 (非齐次情形)**.** 设 $x>0$. 求解初值问题

$$\begin{cases}x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+2y=\sin x,\\ y(\pi)=\frac{1}{\pi}.\end{cases} \tag{5.3}$$

解答. 首先, 求解齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=0$, 得其通解

$$y=\exp\left\{-\int^x\frac{2}{t}\,\mathrm{d}t\right\}=C_1x^{-2}. \tag{5.4}$$

为求解非齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\frac{2}{x}y=\sin x$, 令 $y(x)=u(x)x^{-2}$, 代入得 $u'(x)x^{-1}=\sin x$. 于是,

$$u(x)=\int^x t\sin t\,\mathrm{d}t=\sin x-x\cos x+C, \tag{5.5}$$

从而得到通解 $y=\frac{1}{x^2}(\sin x-x\cos x+C)$. 代入初值条件 $y(\pi)=\frac{1}{\pi}$, 解得 $C=0$. 所以,

$$y=\frac{1}{x^2}(\sin x-x\cos x). \tag{5.6}$$

例题 5.1.3 (Bernoulli 方程)**.** 求解初值问题

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+y=y^2(\cos x-\sin x),\\ y(0)=1.\end{cases} \tag{5.7}$$

解答. 令 $z\equiv y^{-1}$, 则初值问题化为

$$\begin{cases}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-z=\sin x-\cos x,\\ z(0)=1.\end{cases} \tag{5.8}$$

作代换 $z(x) \equiv u(x)\mathrm{e}^x$, 代入得 $u'(x)\mathrm{e}^x = \sin x - \cos x$. 于是,

$$u(x) = \int^x \mathrm{e}^{-t}(\sin t - \cos t)\,\mathrm{d}t = -\mathrm{e}^{-x}\sin x + C, \tag{5.9}$$

从而得到通解 $z(x) = -\sin x + C\mathrm{e}^x$. 代入初值条件 $z(0) = 1$, 解得 $C = 1$. 所以 $z = -\sin x + \mathrm{e}^x$, 即

$$y(x) = \frac{1}{\mathrm{e}^x - \sin x}. \tag{5.10}$$

5.1.2 应用类问题

例题 5.1.4 (切线的几何关系)**.** 设曲线 $y = y(x)\,(x > 0)$ 经过点 $(1, 2)$, 该曲线上任意一点 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

1. 求 $y(x)$;
2. 求函数 $f(x) = \int_1^x y(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值.

解答. 给定点 $P(x_0, y_0)$ 后, 其到 y 轴的距离为 x_0, 切线 $y = y'(x_0)(x - x_0) + y_0$ 在 y 轴上的截距为 $y_0 - y'(x_0)x_0$. 于是, 曲线 $y = y(x)$ 的方程将由初值问题

$$\begin{cases} x = y - y'(x)x, \\ y(1) = 2 \end{cases} \tag{5.11}$$

给定.

1. 对 $x > 0$, 方程 (5.11) 等价于

   $$y'(x) - \frac{1}{x}y = -1. \tag{5.12}$$

   求解齐次方程 $y' - \frac{1}{x}y = 0$, 得其通解 $y = C_1 x$. 为求解非齐次方程 $y' - \frac{1}{x}y = -1$, 令 $y(x) = u(x)x$, 代入得 $u'(x)x = -1$. 于是,

   $$u(x) = -\int^x \frac{\mathrm{d}t}{t} = -\ln x + C, \tag{5.13}$$

   从而得到通解 $y(x) = -x\ln x + Cx$. 代入初值条件 $y(1) = 2$, 解得 $C = 2$. 所以

   $$y(x) = x(2 - \ln x). \tag{5.14}$$

2. 由 (1) 得

   $$f(x) = \int_1^x t(2 - \ln t)\,\mathrm{d}t = \left(t^2\left(\frac{1}{2}\ln t - \frac{1}{4}\right)\right)\Bigg|_{t=1}^{t=x} = \frac{5}{4}(x^2 - 1) - \frac{1}{2}x^2\ln x. \tag{5.15}$$

   令 $f'(x) = x(2 - \ln x) = 0$, 解得 $x = \mathrm{e}^2$. 当 $x > \mathrm{e}^2$ 时, $f'(x) < 0$; 当 $0 < x < \mathrm{e}^2$ 时, $f'(x) > 0$. 所以, $f(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值为

   $$f(\mathrm{e}^2) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^4 - 5\right). \tag{5.16}$$

例题 5.1.5 (周期解)**.** $P(x), Q(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上以 $T>0$ 为周期的函数. 若 $\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$, 证明: 一阶线性方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 存在唯一的以 T 为周期的解.

解答. 记 $F(x) \equiv \int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t, G(x) \equiv \int_0^x Q(t)\mathrm{e}^{\int_0^t P(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t$. 于是, 方程 $y'+P(x)y=Q(x)$ 的通解为

$$y(x)=\left(\int_0^x Q(t)\mathrm{e}^{\int_0^t P(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t+C\right)\exp\left\{-\int_0^x P(t)\,\mathrm{d}t\right\}=(G(x)+C)\mathrm{e}^{-F(x)}. \tag{5.17}$$

1. 首先由一个必要条件 $y(0)=y(T)=C$, 解得

$$C=\frac{G(T)}{\mathrm{e}^{F(T)}-1}, \tag{5.18}$$

于是, 原方程存在唯一解

$$y^*(x)=\left(G(x)+\frac{G(T)}{\mathrm{e}^{F(T)}-1}\right)\mathrm{e}^{-F(x)} \tag{5.19}$$

2. 下面证明: y^* 的确是以 T 为周期的周期函数. 为此, 注意到

$$\begin{aligned}F(x+T)&=\int_0^{x+T}P(t)\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}P(t)\,\mathrm{d}t\\&=F(T)+F(x), \qquad (5.20)\\G(x+T)&=\int_0^{x+T}Q(t)\mathrm{e}^{\int_0^t P(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\\&=\int_0^T Q(t)\mathrm{e}^{\int_0^t P(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t+\int_T^{x+T}Q(t)\mathrm{e}^{\int_0^t P(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t\\&=G(T)+\int_0^x Q(u)\mathrm{e}^{\int_0^{u+T}P(s)\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}u\\&=G(T)+G(x)\mathrm{e}^{F(T)}. \qquad (5.21)\end{aligned}$$

于是,

$$\begin{aligned}y^*(x+T)&=\left(G(x+T)+\frac{G(T)}{\mathrm{e}^{F(T)}-1}\right)\mathrm{e}^{-F(x+T)}\\&=\left(G(x)\mathrm{e}^{F(T)}+\frac{G(T)\mathrm{e}^{F(T)}}{\mathrm{e}^{F(T)}-1}\right)\mathrm{e}^{-F(T)-F(x)}\\&=\left(G(x)+\frac{G(T)}{\mathrm{e}^{F(T)}-1}\right)\mathrm{e}^{-F(x)}\\&=y^*(x). \qquad (5.22)\end{aligned}$$

5.2 其它解法 (I): 变量分离

5.2.1 各类方程的求解方法

例题 5.2.1 (变量分离)**.** 求下面常微分方程的所有解: $y' = xy + 3x + 2y + 6$.

解答. 原方程等价于 $y' = (x+2)(y+3)$.

1. 奇解 $y(x) \equiv -3$.
2. 若 $y(x) \neq 0$, 则可以将方程分离变量为 $\frac{\mathrm{d}y}{y+3} = (x+2)\,\mathrm{d}x$. 此时, 通积分

$$\int^{y} \frac{\mathrm{d}t}{t+3} = \int^{x} (x+2)\,\mathrm{d}t, \tag{5.23}$$

从而得到通解 $y(x) = C\exp\{\frac{1}{2}x^2 + 2x\} - 3$, 其中, $C = 0$ 的情形对应奇解.

于是, 原方程的所有解均可写为函数族

$$y(x) = C\exp\left\{\frac{1}{2}x^2 + 2x\right\} - 3. \tag{5.24}$$

例题 5.2.2 (线性代换)**.** 求下面常微分方程的所有解: $y' = (8x + 2y + 1)^2$.

解答. 作代换 $z(x) \equiv 8x + 2y(x) + 1$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 8 + 2\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 代入原方程, 得到 $\frac{\mathrm{d}z}{2\mathrm{d}x} - 4 = z^2$, 即

$$\frac{\mathrm{d}z}{z^2+4} = 2\,\mathrm{d}x\,. \tag{5.25}$$

于是, 原方程具有通积分 $\frac{1}{2}\arctan\frac{1}{2}z = 2x + C_1$, 即

$$\arctan\left(4x + y + \frac{1}{2}\right) - 4x = C. \tag{5.26}$$

这里 $C \equiv 2C_1$. 特别地, 本题不需要考虑奇解.

例题 5.2.3 (齐次代换)**.** 求下面常微分方程的所有解: $xy' + y = 2\sqrt{xy}$.

解答.

1. 若 $x \neq 0$, 作代换 $u(x) \equiv \frac{y(x)}{x}$, 则 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u$. 代入原方程, 得到 $x\left(x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} + u\right) + xu = 2x\sqrt{u}$, 即

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} = \frac{2(\sqrt{u} - u)}{x}. \tag{5.27}$$

   (a) 当 $u \neq 1$ 时, 上述方程化为

$$\frac{\mathrm{d}u}{2(\sqrt{u} - u)} = \frac{\mathrm{d}x}{x}, \tag{5.28}$$

   其通积分为 $-\ln|1 - \sqrt{u}| = \ln|x| + C_1$, 即:

$$x - \sqrt{xy} = C. \tag{5.29}$$

   这里 $C \equiv \pm\exp\{-C_1\} \neq 0$.

   (b) 当 $u = 1$ 时, 对应的特解为 $y = x$, 对应于通积分 (5.29) 取 $C = 0$ 的情形.

2. 特解 $x \equiv 0$ 对应于通积分 (5.29) 取 $C = 0$ 的情形.

综上, 原方程的通积分为 $x - \sqrt{xy} = C$, 其中 C 为任意常数.

例题 5.2.4 (线性分式代换: 线性相关)**.** 求下面常微分方程的所有解: $y' = \frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$.

解答. 作代换 $z \equiv 2x + y$, 则 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2 + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$. 代入原方程, 得到 $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = 2 + \frac{z+1}{2z-3}$, 即

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} = \frac{5(z-1)}{2z-3}. \tag{5.30}$$

1. 当 $z \neq 1$ 时, 上述方程化为

$$\frac{(2z-3)\,\mathrm{d}z}{5(z-1)} = \mathrm{d}x\,, \tag{5.31}$$

   其通积分为 $\frac{2}{5}z - 5\ln|z-1| = x + C_1$, 即

$$2x + y - 1 = C\mathrm{e}^{2y-x}, \tag{5.32}$$

   这里 $C \equiv \pm\mathrm{e}^{-5C_1} \neq 0$.

2. 奇解 $z \equiv 1$ (即 $y = 1 - 2x$) 对应于通积分中取 $C = 0$ 的情形.

综上, 原方程的通积分为 $2x + y - 1 = C\mathrm{e}^{2y-x}$, 其中 C 为任意常数.

例题 5.2.5 (线性分式代换: 线性无关)**.** 求下面常微分方程的所有解: $y' = 2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

解答. 注意到

$$\frac{y+2}{x+y-1} = \frac{0(x-3)+1(y+2)}{1(x-3)+1(y+2)}. \tag{5.33}$$

作代换 $(u, v) \equiv (x-3, y+2)$. 代入原方程, 得到

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = \frac{2v^2}{(u+v)^2}. \tag{5.34}$$

1. 若 $u \neq 0$, 作代换 $z \equiv \frac{v}{u}$, 则 $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}u} = u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u} + z$. 代入原方程, 得到如下的变量分离形式

$$-\frac{(1+z)^2\,\mathrm{d}z}{z(1+z^2)} = \frac{\mathrm{d}u}{u}, \tag{5.35}$$

   其通积分为 $-\ln|z| - 2\arctan z = \ln|u| + C_1$, 即

$$(y+2)\exp\left\{2\arctan\frac{y+2}{x-3}\right\} = C. \tag{5.36}$$

   这里 $C = \pm\mathrm{e}^{-C_1} \neq 0$.

2. 奇解 $u \equiv 0$ (即 $y \equiv -2$) 对应于通积分中取 $C = 0$ 的情形.

综上, 原方程的通积分为 $(y+2)\exp\left\{2\arctan\frac{y+2}{x-3}\right\} = C$, 其中 C 为任意常数.

5.2.2 应用类问题

例题 5.2.6 (切线的几何关系)**.** 假设平面直角坐标系第一象限中有一条曲线

$$L = \{(x, y(x)) | x \geq 0\}, \tag{5.37}$$

其中 $y(0) = 1$, $y(x)$ 是严格递减的、正的可导函数. 任取 L 上一点 M, L 在 M 点的切线交 x 轴于点 A. 假定从 M 到 A 的直线段的长度恒为 1. 求出 $y = y(x)$ 所满足的一阶常微分方程, 并且解出这个方程的初值问题 $y(0) = 1$.

解答. 过点 $M(x_0, y_0)$ 的切线方程为 $y - y_0 = y'(x_0)(x - x_0)$. 所以, 点 $A\left(x_0 - \frac{y_0}{y'(x_0)}, 0\right)$. 由已知, $y = y(x)$ 满足常微分方程

$$1 = y^2 + \frac{y^2}{(y')^2}, \tag{5.38}$$

对于 $y > 0$ 且 $y' < 0$, 得到可分离变量的一阶常微分方程

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{y}{\sqrt{1 - y^2}}, \tag{5.39}$$

其通积分为

$$\begin{aligned} -x + C &= \int^y \frac{\sqrt{1 - t^2}}{t} \,\mathrm{d}t \\ &= \int^{\sqrt{1-y^2}} \left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{u - 1} - \frac{1}{u + 1}\right)\right) \mathrm{d}u \\ &= \sqrt{1 - y^2} + \ln \frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}}. \end{aligned} \tag{5.40}$$

代入初值条件 $y(0) = 1$, 解得 $C = 0$. 所以, 该初值问题的隐函数解为

$$x + \sqrt{1 - y^2} + \ln \frac{y}{1 + \sqrt{1 - y^2}} = 0. \tag{5.41}$$

例题 5.2.7 (简单的变限积分方程)**.** 求出所有的可导函数 $f(x) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 满足

$$f(x) = \int_0^1 \left(f(tx) + \frac{1}{f(tx)} \frac{1 + (f(tx))^2}{1 + t^2 x^2}\right) \mathrm{d}t. \tag{5.42}$$

解答. 令 $u \equiv tx$. 由已知,

$$x f(x) = \int_0^x \left(f(u) + \frac{1}{f(u)} \frac{1 + (f(u))^2}{1 + u^2}\right) \mathrm{d}u, \tag{5.43}$$

两边取对 x 的导数, 并令 $y \equiv f(x)$, 得到一阶微分方程

$$x \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{1}{y} \frac{1 + y^2}{1 + x^2}, \tag{5.44}$$

其具有变量分离形式

$$\frac{y\,\mathrm{d}y}{1+y^2}=\frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)},\tag{5.45}$$

其通积分为

$$\frac{1}{2}\ln\big(1+y^2\big)=\ln|x|-\frac{1}{2}\ln\big(1+x^2\big)+C_1,\tag{5.46}$$

即

$$(1+x^2)(1+y^2)=Cx^2,\tag{5.47}$$

这里 $C\equiv\mathrm{e}^{2C_1}>0$.

5.3 其它解法 (II): 恰当微分

例题 5.3.1 (恰当微分方程)**.** 求下面常微分方程的所有解: $(1+x\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}x+(-1+\sqrt{x^2+y^2})y\,\mathrm{d}y=0$.

解答. 记 $P(x,y)\equiv 1+x\sqrt{x^2+y^2}, Q(x,y)\equiv(-1+\sqrt{x^2+y^2})y$. 于是,

$$\frac{\partial P}{\partial y}=\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}},\tag{5.48}$$

则原方程为恰当微分方程, 存在可微函数 $u(x,y)$ 满足 $\mathrm{d}u=P\,\mathrm{d}x+Q\,\mathrm{d}y$. 将函数 $P(x,y)$ 对变量 x 作积分, 可知

$$\begin{aligned}u(x,y)&=\phi(y)+\int\frac{\partial P}{\partial x}\,\mathrm{d}x\\&=\phi(y)+x+\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}.\end{aligned}\tag{5.49}$$

再由

$$Q(x,y)=\frac{\partial u}{\partial y}=\phi'(y)+y\sqrt{x^2+y^2}\tag{5.50}$$

可知, 取 $\phi(y)=-\frac{1}{2}y^2$ 符合要求. 所以, 原方程的通积分为

$$x-\frac{1}{2}y^2+\frac{1}{3}(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}=C,\tag{5.51}$$

其中, C 为任意常数.

例题 5.3.2 (积分因子)**.** 求下面常微分方程的所有解: $(x^2+y)\,\mathrm{d}x-x\,\mathrm{d}y=0$.

解答. 记 $M(x,y)\equiv x^2+y, N(x,y)\equiv -x$. 于是

$$\frac{\partial N}{\partial x}-\frac{\partial M}{\partial y}=-2.\tag{5.52}$$

此时, $F(x)\equiv\frac{1}{N}(N_x-M_y)=\frac{2}{x}$ 是一个只含 x 的函数. 于是, 原方程存在一个只含 x 的

积分因子 $\mu(x)$, 满足

$$\begin{aligned}0 &= \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} \\ &= \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu(x) + N(x,y)\mu'(x) \\ &= -2\mu(x) - x\mu'(x),\end{aligned} \tag{5.53}$$

解得一个积分因子

$$\mu(x) = \exp\left\{-\int^x \frac{2}{t}\,\mathrm{d}t\right\} = \frac{1}{x^2}. \tag{5.54}$$

若 $x \neq 0$, 则原方程两边同乘 $\frac{1}{x^2}$, 即得到恰当微分方程

$$0 = \left(1 + \frac{y}{x^2}\right)\mathrm{d}x - \frac{1}{x}\,\mathrm{d}y = \mathrm{d}\left(x - \frac{y}{x}\right), \tag{5.55}$$

从而解出通积分为

$$x - \frac{y}{x} = C, \tag{5.56}$$

其中 C 为任意常数.

6 高阶常微分方程

6.1 降阶方法

6.1.1 各类方程的求解方法

例题 6.1.1 (不含 y 的二阶方程)**.** 求下面常微分方程的所有解: $(y')^2 = x^2y''$.

解答. 作代换 $z \equiv y'$, 则原方程化为 $z^2 = x^2z'$.

1. 若 $z \equiv 0$, 则给出特解 $y \equiv C$. 其中 C 为任意常数.
2. 若 $z \neq 0$, 得到分离变量形式

   $$\frac{\mathrm{d}x}{x^2} = \frac{\mathrm{d}z}{z^2}, \tag{6.1}$$

   其通积分为 $\frac{1}{z} = \frac{1}{x} + C_1$, 即

   $$z = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{x}{C_1x + 1}, \tag{6.2}$$

   其中 C_1 为任意常数.

   (a) 对于 $C_1 = 0$, 则给出特解 $y = \frac{1}{2}x^2 + C$, 其中 C 为任意常数.

   (b) 对于 $C_1 \neq 0$, 给出通解

   $$y = \frac{x}{C_1} - \frac{\ln|C_1x + 1|}{C_1^2} + C_2, \tag{6.3}$$

   其中 C_2 为任意常数.

例题 6.1.2 (不显含 x 的二阶方程)**.** 求下面常微分方程的所有解: $(y')^2 + 2yy'' = 0$.

解答. 作代换 $p \equiv y'$, 则 $y'' = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}x} = \frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = p\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y}$, 原方程化为

$$p^2 + 2py\frac{\mathrm{d}p}{\mathrm{d}y} = 0. \tag{6.4}$$

1. 若 $p \equiv 0$, 则给出特解 $y \equiv C$, 其中 C 为任意常数.
2. 若 $p \neq 0$, 得到分离变量形式

   $$\frac{\mathrm{d}p}{p} = -\frac{\mathrm{d}y}{2y}, \tag{6.5}$$

   其通积分为 $\ln|p| = -\frac{1}{2}\ln|y| + C_1''$, 即

   $$p = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{C_1'}{\sqrt{y}}, \tag{6.6}$$

   其中 $C_1' = \pm\frac{1}{2}\mathrm{e}^{C_1''} \neq 0$. 而 $C_1' = 0$ 的情形恰好对应特解 $y \equiv C$.

于是, 原方程的通解为

$$y = C_1(x + C_2)^{\frac{2}{3}}, \tag{6.7}$$

其中 $C_1 = \left(\frac{3}{2}C_1'\right)^{\frac{2}{3}}, C_2$ 均取任意常数.

6.1.2 应用类问题

例题 6.1.3 (简单的常数限积分方程)**.** 求出所有的可导函数 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, 满足

$$f'(x) = xf(x) + x\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t. \tag{6.8}$$

解答. 容易知道 $f'(0) = 0$. 当 $x \neq 0$ 时, 原方程等价于

$$\int_0^1 tf(t)\,\mathrm{d}t = \frac{f'(x)}{x} - f(x). \tag{6.9}$$

两边取导数, 得到

$$0 = -\left(\frac{1}{x^2} + 1\right)f'(x) + \frac{1}{x}f''(x), \tag{6.10}$$

于是, 函数 $f(x)$ 必为二阶微分方程

$$0 = y'' - \left(x + \frac{1}{x}\right)y' \tag{6.11}$$

的解. 作代换 $z \equiv y'$, 得到特解 $z \equiv 0$ (即 $y \equiv C$) 或变量分离形式的一阶微分方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{z} = \left(x + \frac{1}{x}\right)\mathrm{d}x\,, \tag{6.12}$$

其通积分为 $\ln|z| = \ln|x| + \frac{1}{2}x^2 + C_1'$ (其中 C_1' 为任意常数), 即

$$z = C_1 x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2}, \tag{6.13}$$

其中 $C_1 \equiv \pm \mathrm{e}^{C_1'} \neq 0$, 而 $C_1 = 0$ 的情形对应 $z \equiv 0$. 此时,

$$y = \int^x z(t)\,\mathrm{d}t = C_1\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + C_2\right), \tag{6.14}$$

其中 C_2 为任意常数. 此时, 条件 $f'(0) = 0$ 必然满足, 而由原方程知

$$\begin{aligned} C_1 x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} &= xC_1\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + C_2\right) + x\int_0^1 C_1 t\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}t^2} + C_2\right)\mathrm{d}t \\ &= C_1 x \mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} + C_1 x\left(\frac{3}{2}C_2 + (\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1)\right), \end{aligned} \tag{6.15}$$

从而

$$C_2 = -\frac{2}{3}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1). \tag{6.16}$$

所以, 所有符合原方程的函数

$$f(x) = C\left(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}x^2} - \frac{2}{3}(\mathrm{e}^{\frac{1}{2}} - 1)\right). \tag{6.17}$$

6.2 二阶常系数线性方程

例题 6.2.1 (待定系数法求特解)**.** 求二阶常微分方程 $y'' + 4y = \sin 3x$ 的通解.

解答. 1. 原方程的齐次部分 $y'' + 4y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + 4 = 0$, 其特征根 $\lambda = \pm 2\mathrm{i}$. 于是, 齐次部分的通解 $y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x$.

2. 设原方程的一个特解 $y^* = A\cos 3x + B\sin 3x$, 代入得

$$-5A\cos 3x - 5B\sin 3x = \sin 3x, \tag{6.18}$$

解得 $A = 0, B = -\frac{1}{5}$. 故 $y^* = -\frac{1}{5}\sin 3x$.

综上, 原方程的通解为

$$y = C_1 \sin 2x + C_2 \cos 2x - \frac{1}{5}\sin 3x. \tag{6.19}$$

例题 6.2.2 (常数变易法)**.** 求方程 $y'' + y' - 2y = x + \mathrm{e}^x + \sin x$ 的满足条件 $y(0) = -\frac{7}{20}, y'(0) = \frac{38}{15}$ 的解.

解答. 1. 原方程的齐次部分 $y'' + y' - 2y = 0$ 的特征方程为 $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$, 其特征根 $\lambda_1 = 1, \lambda_2 = -2$. 于是, 齐次部分的通解为

$$y = C_1 \mathrm{e}^x + C_2 \mathrm{e}^{-2x}. \tag{6.20}$$

2. 设原方程的一个特解为 $y^* = C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-2x}$. 于是

$$(y^*)' = C_1(x)e^x - 2C_2(x)e^{-2x} + \left(C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-2x}\right). \tag{6.21}$$

令

$$C_1'(x)e^x + C_2'(x)e^{-2x} = 0, \tag{6.22}$$

再次求导, 得

$$(y^*)'' = C_1(x)e^x + 4C_2(x)e^{-2x} + C_1'(x)e^x - 2C_2'(x)e^{-2x}. \tag{6.23}$$

代入原方程得

$$x + e^x + \sin x = C_1'(x)e^x - 2C_2'(x)e^{-2x}. \tag{6.24}$$

联立 (6.22) (6.24) 两式, 解得

$$\begin{cases} C_1'(x) = \frac{1}{3}e^{-x}(x + e^x + \sin x), \\ C_2'(x) = -\frac{1}{3}e^{2x}(x + e^x + \sin x). \end{cases} \tag{6.25}$$

所以, 符合条件的一组特解构造如下:

$$C_1(x) = \frac{1}{3}\left(x - e^{-x}\left(x + 1 + \frac{1}{2}(\sin x + \cos x)\right)\right), \tag{6.26}$$

$$C_2(x) = -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}e^{3x} + e^{2x}\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{5}(2\sin x - \cos x)\right)\right), \tag{6.27}$$

$$\begin{aligned} y^* &= C_1(x)e^x + C_2(x)e^{-2x} \\ &= -\frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}e^x\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{10}(3\sin x + \cos x). \end{aligned} \tag{6.28}$$

综上, 原微分方程的通解为 $y = C_1e^x + C_2e^{-2x} + y^*$. 代入初值条件, 有

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = \frac{1}{9}, \\ C_1 - 2C_2 = \frac{28}{9}, \end{cases} \tag{6.29}$$

解得 $C_1 = \frac{10}{9}, C_2 = -1$. 从而所求的解为

$$y = \frac{10}{9}e^x - e^{-2x} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{4} + \frac{1}{3}e^x\left(x - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{10}(3\sin x + \cos x). \tag{6.30}$$

例题 6.2.3 (Euler 方程)**.** 求方程 $x^2y'' - 3xy' + 4y = 0\,(x > 0)$ 满足条件 $y(1) = 1, y'(1) = 1$ 的解.

解答. 作代换 $t = \ln x$, 即 $x = e^t$ 于是

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx} = e^{-t}\frac{dy}{dt}, \tag{6.31}$$

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dx}\right) = \frac{d}{dt}\left(e^{-t}\frac{dy}{dt}\right)\frac{dt}{dx} = \left(\frac{d^2y}{dt^2} - \frac{dy}{dt}\right)e^{-2t}. \tag{6.32}$$

代入原方程, 得

$$0 = \frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} - 4\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + 4. \tag{6.33}$$

这是一个常系数齐次线性方程, 通解为 $y(t) = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{2t}$, 即

$$y(x) = (C_1 + C_2 \ln x)x^2. \tag{6.34}$$

代入初值条件, 有

$$\begin{cases} C_1 = 1, \\ 2C_1 + C_2 = 1, \end{cases} \tag{6.35}$$

解得 $C_1 = 1, C_2 = -1$. 从而所求的解为

$$y = (1 - \ln x)x^2. \tag{6.36}$$

6.3 解的结构

6.3.1 初值问题解的存在唯一性

例题 6.3.1 (Lipschitz 条件的证明)**.** 设 D 是平面上的凸区域, 二元函数 $f(x, y)$ 在 D 上存在有界偏导数 $\frac{\partial f}{\partial y}$. 证明: $f(x, y)$ 在 D 上满足 Lipschitz 条件. (凸区域的定义: 对任意 $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2 \in D$ 及 $\lambda \in \mathbb{R}$, 都有 $\lambda\mathbf{r}_1 + (1-\lambda)\mathbf{r}_2 \in D$.)

解答. 不失一般性, 假设 $y_1 \le y_2$. 任取两点 $(x_0, y_1), (x_0, y_2) \in D$, 令 $\phi(y) \equiv f(x_0, y)$, 其中 $y_1 \le y \le y_2$. 则 $\phi(y)$ 在区间 $[y_1, y_2]$ 上可导. 由 Lagrange 中值定理, 存在 $\lambda \in (0, 1)$, 即 $y_\lambda \equiv \lambda y_1 + (1-\lambda)y_2$, 使得

$$|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| = |\phi(y_1) - \phi(y_2)| = |\phi'(y_\lambda)||y_1 - y_2|. \tag{6.37}$$

由于 D 是凸区域, 所以 $(x_0, y_\lambda) \in D$. 根据 f_y 的有界性, 存在常数 $L \ge 0$, 使得

$$|\phi'(y_\lambda)| = \left| \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)_{(x,y)=(x_0,y_\lambda)} \right| \le L. \tag{6.38}$$

于是, Lipschitz 条件

$$|f(x_0, y_1) - f(x_0, y_2)| \le L|y_1 - y_2| \tag{6.39}$$

成立, Lipschitz 常数即为 $|f_y|$ 的上界 L.

例题 6.3.2 (Picard 序列)**.** 求出一阶常微分方程初值问题 $\begin{cases} y' = x + y^2, \\ y(0) = 0 \end{cases}$ 的 Picard 序列的前两项 y_1, y_2.

解答. 令 $y_0(x) \equiv 0$. 于是,

$$y_1(x) = 0 + \int_0^x \left(t + (y_0(t))^2\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2, \tag{6.40}$$

$$y_2(x) = 0 + \int_0^x \left(t + (y_1(t))^2\right) \mathrm{d}t = \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{20}x^5. \tag{6.41}$$

例题 6.3.3 (一阶初值问题解的唯一性)**.** 二元函数 $f(x,y)$ 在区域 D 上满足 Lipschitz 条件 (Lipschitz 常数为 L), 一元函数 $\phi(x),\psi(x)$ 为微分方程 $y'=f(x,y)$ 的两个解. 任给 $(x_0,y_0)\in D$, 证明:

$$|\phi(x)-\psi(x)|\le \mathrm{e}^{L|x-x_0|}|\phi(x_0)-\psi(x_0)|. \tag{6.42}$$

特别地, 初值问题 $\begin{cases} y'=f(x,y), \\ y(x_0)=y_0 \end{cases}$ 至多存在一个解.

解答. 函数 $\phi(x),\psi(x)$ 同时也将是积分方程 $y(x)=y_0+\int_{x_0}^x f(t,y(t))\,\mathrm{d}t$ 的解, 即

$$\phi(x)=\phi(x_0)+\int_{x_0}^x f(t,\phi(t))\,\mathrm{d}t, \tag{6.43}$$

$$\psi(x)=\psi(x_0)+\int_{x_0}^x f(t,\psi(t))\,\mathrm{d}t. \tag{6.44}$$

将 (6.43) (6.44) 两式相减, 得

$$\begin{aligned}
|\phi(x)-\psi(x)| &= \left|\phi(x_0)-\psi(x_0)+\int_{x_0}^x (f(t,\phi(t))-f(t,\psi(t)))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le |\phi(x_0)-\psi(x_0)|+\left|\int_{x_0}^x (f(t,\phi(t))-f(t,\psi(t)))\,\mathrm{d}t\right| \\
&\le |\phi(x_0)-\psi(x_0)|+\int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)} |f(t,\phi(t))-f(t,\psi(t))|\,\mathrm{d}t \\
&\le |\phi(x_0)-\psi(x_0)|+L\int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)} |\phi(t)-\psi(t)|\,\mathrm{d}t. \qquad (6.45)
\end{aligned}$$

(6.45) 是一个 “自洽” 的不等式.

1. 我们首先证明: 由 (6.45) 可以导出关于 $n\in\mathbb{N}$ 的不等式

$$|\phi(x)-\psi(x)|\le |\phi(x_0)-\psi(x_0)|\left(\sum_{k=0}^n \frac{L^k|x-x_0|^k}{k!}\right)+\frac{L^{n+1}}{n!}I_n(x), \tag{6.46}$$

$$I_n(x)\equiv \int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)} |\phi(t)-\psi(t)||x-t|^n\,\mathrm{d}t. \tag{6.47}$$

为此, 应用数学归纳法. $n=0$ 时, (6.46) 即为 (6.45); 假设 (6.46) 对 n 成立, 首先由 (6.45) 可得

$$\begin{aligned}
I_n &\le \int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)} \left(|\phi(x_0)-\psi(x_0)|+L\int_{\min(x_0,t)}^{\max(x_0,t)} |\phi(s)-\psi(s)|\,\mathrm{d}s\right)|x-t|^n\,\mathrm{d}t \\
&= |\phi(x_0)-\psi(x_0)|\frac{|x-x_0|^{n+1}}{n+1}+\frac{L}{n+1}\int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)} |\phi(s)-\psi(s)||x-s|^{n+1}\,\mathrm{d}s \\
&= |\phi(x_0)-\psi(x_0)|\frac{|x-x_0|^{n+1}}{n+1}+\frac{L}{n+1}I_{n+1}(x), \qquad (6.48)
\end{aligned}$$

于是,

$$
\begin{aligned}
|\phi(x)-\psi(x)| &\le |\phi(x_0)-\psi(x_0)|\left(\sum_{k=0}^{n}\frac{L^k|x-x_0|^k}{k!}\right)+\frac{L^{n+1}}{n!}I_n(x)\\
&\le |\phi(x_0)-\psi(x_0)|\left(\sum_{k=0}^{n+1}\frac{L^k|x-x_0|^k}{k!}\right)+\frac{L^{n+2}}{(n+1)!}I_{n+1}(x),
\end{aligned}\tag{6.49}
$$

即命题对 $n+1$ 也成立.

2. 随后, 我们证明 “余项” 收敛, 即

$$
\lim_{n\to\infty}\frac{L^{n+1}}{n!}I_n(x)\equiv 0.\tag{6.50}
$$

注意到, $|\phi(t)-\psi(t)|$ 在 x_0, x 组成的闭区间上连续, 于是存在上界 $M\ge 0$. 从而

$$
\begin{aligned}
0\le\frac{L^{n+1}}{n!}I_n(x) &\le \frac{L^{n+1}M}{n!}\int_{\min(x_0,x)}^{\max(x_0,x)}|x-t|^n\,\mathrm{d}t\\
&=\frac{L^{n+1}M|x-x_0|^{n+1}}{(n+1)!}.
\end{aligned}\tag{6.51}
$$

根据夹逼定理即可得证.

3. 最后, 令 $n\to\infty$, 根据 Taylor 公式, 即可得到

$$
\begin{aligned}
|\phi(x)-\psi(x)| &\le |\phi(x_0)-\psi(x_0)|\left(\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{L^k|x-x_0|^k}{k!}\right)\\
&=\mathrm{e}^{L|x-x_0|}|\phi(x_0)-\psi(x_0)|.
\end{aligned}\tag{6.52}
$$

注记 6.1. 本题待证的核心结论 (6.46) 源于对不等式 (6.45) “递归” 或 “自洽” 结构的思考. 多做两次迭代即可发现一般规律.

例题 6.3.4 (二阶齐次线性初值问题解的唯一性)**.** 设函数 $p(x), q(x), f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续. 证明: 初值问题

$$
\begin{cases}
0=y''+p(x)y'+q(x)y,\\
y(a)=y'(a)=0
\end{cases}\tag{6.53}
$$

存在唯一解 $y(x)\equiv 0$. 一般地, 初值问题 $\begin{cases} f(x)=y''+p(x)y'+q(x)y,\\ y(a)=y_0, y'(a)=y_1\end{cases}$ 至多存在一个解.

解答. 显然至少存在平凡解 $y(x)\equiv 0$. 对该问题的解 $y(x)$, 记 $u(x)\equiv (y(x))^2+(y'(x))^2$, 我们下面证明 $u(x)\equiv 0$. 为此, 首先证明: 存在常数 $K>0$, 使得 $u'(x)\le Ku(x)$. 这是

因为:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x} &= 2\left(y(x)+y''(x)\right)y'(x)\\ &= 2\left(y(x)-p(x)y'(x)-q(x)y(x)\right)y'(x)\\ &= (1-q(x))y(x)y'(x)+2p(x)(y'(x))^2\\ &\leq (1+|q(x)|)\left((y(x))^2+(y'(x))^2\right)+|p(x)|(y'(x))^2\\ &\leq K\left((y(x))^2+(y'(x))^2\right)\\ &= Ku(x),\end{aligned} \tag{6.54}$$

其中, $K \equiv 1+\max_{x\in[a,b]}(|q(x)|,2|p(x)|)$. 于是, 对函数 $F(x)\equiv u(x)\mathrm{e}^{-Kx}$, 我们有

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x} = \mathrm{e}^{-Kx}\left(\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}-Ku(x)\right) \leq 0, \tag{6.55}$$

从而对 $x\in[a,b]$ 有 $F(x)\leq F(a)=u(a)\mathrm{e}^{-Ka}=0$. 进而得到 $F(x)\equiv 0$, 也即 $u(x)\equiv 0$.

6.3.2 二阶齐次线性方程的基解

例题 6.3.5 (基解的 Wronskian 行列式)**.** 设 $p(x),q(x)\in\mathcal{C}[a,b]$. 给定二阶线性齐次方程 $0=y''+p(x)y'+q(x)y$ 的两个解 $\phi_1(x),\phi_2(x)$, 证明:

$$W(x;\phi_1,\phi_2) = W(c;\phi_1,\phi_2)\exp\left\{-\int_c^x p(t)\,\mathrm{d}t\right\} \tag{6.56}$$

对任意 $c\in[a,b]$ 成立.

解答. 我们验证: $W(x;\phi_1,\phi_2)$ 满足微分方程 $W'=-pW$. 这是因为:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}W(x;\phi_1,\phi_2)}{\mathrm{d}x} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\phi_1(x)\phi_2'(x)-\phi_2(x)\phi_1'(x)\right)\\ &= \phi_1(x)\phi_2''(x)-\phi_2(x)\phi_1''(x)\\ &= \phi_1(x)\left(-p(x)\phi_2''(x)-q(x)\phi_2(x)\right)-\phi_2(x)\left(-p(x)\phi_1''(x)-q(x)\phi_1(x)\right)\\ &= -p(x)W(x;\phi_1,\phi_2).\end{aligned} \tag{6.57}$$

所以, 对任意 $c\in[a,b]$, 成立

$$W(x;\phi_1,\phi_2) = W(c;\phi_1,\phi_2)\exp\left\{-\int_c^x p(t)\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{6.58}$$

例题 6.3.6 (基解的互化)**.** 设 $p(x),q(x)\in\mathcal{C}[a,b]$, $\phi(x)$ 为二阶线性齐次方程 $0=y''+p(x)y'+q(x)y$ 在 $[a,b]$ 上的非平凡解 (非零解), 证明:

$$\psi(x) = \phi(x)\int^x \frac{1}{(\phi(t))^2}\exp\left\{-\int^t p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t \tag{6.59}$$

为与 $\phi(x)$ 线性无关的另一个解.

解答. 对于基解 $\psi(x),\phi(x)$, 由例题6.3.5, 我们有

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\psi(x)}{\phi(x)}\right) &= \frac{1}{(\phi(x))^2}W(x;\phi,\psi)\\ &= \frac{1}{(\phi(x))^2}\exp\left\{-\int^x p(t)\,\mathrm{d}t\right\},\end{aligned} \tag{6.60}$$

从而

$$\psi(x)=\phi(x)\int^x \frac{1}{(\phi(t))^2}\exp\left\{-\int^t p(s)\,\mathrm{d}s\right\}\mathrm{d}t. \tag{6.61}$$