3. 【专题】微分中值定理

SDS 高数小班课 (2024 秋)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2024-12-7

1 Rolle 定理

定理 1.1 (Rolle 定理)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $f(a)=f(b)$. 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=0$.

例题 1.1 (相异中值)**. Legendre 多项式**

$$P_n(x)\equiv\frac{1}{2^n n!}\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right) \tag{1}$$

在区间 $(-1,1)$ 内存在 n 个相异的实根.

注记 1.1. 中值位于开区间上, 这产生了 "不等关系", 从而可以应用于区间的**包含**或**分割**, 找出**彼此相异**的中值.

1. 若有 $\zeta\in(a,\xi)$, 则 $\zeta\neq\xi$;
2. 若有 $\zeta_1\in(a,\xi),\zeta_2\in(\xi,b)$, 则 $\zeta_1\neq\zeta_2$.

2 辅助函数的构造

2.1 一般方法

例题 2.1 (因子补充). 1. 设 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可导, 在 (a,b) 上二阶可导, 满足 $f(a)=f(b)=0$ 且 $f'(a),f'(b)>0$. 证明:

(a) 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f'(\xi)=f''(\xi)$;

(b) 存在 $\xi\in(a,b)$, 使得 $f(\xi)=f''(\xi)$.

2. 设 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 满足 $f(1)=0$. 证明: 存在 $\xi\in(0,1)$, 使得 $f'(\xi)=-\frac{3f(\xi)}{\xi}$;

注记 2.1. 构造适当的辅助函数 $\phi(x)=g(x)f(x)$, 则其导数 $\phi'=f'g+fg'$ 可以沟通函数 f 不同阶次的导数, 尝试用于处理中值问题 $0=F(f,f^{(1)},\cdots,f^{(n)})$. 补充的因子 $g(x)$ 往往需要视具体问题而定.

- $g(x)=\mathrm{e}^{\pm x}$ 能够产生 $f\pm f'$ 或更高阶的类似等式:

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(\mathrm{e}^{\pm x}f(x)\right)=\mathrm{e}^x\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}(-1)^{n-i}f^{(i)}(x); \tag{2}$$

- $g(x)=x^k$ 能够产生**排列数** $(k+i)(k+i-1)\cdots(k+i-n+1)$ 以及阶次相配称的 x^{i+k-n} 作为系数 (假定 $n<k$):

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^kf(x)\right)=x^{-n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}(k+i)(k+i-1)\cdots(k+i-n+1)x^{k+i}f^{(i)}(x). \tag{3}$$

2.2 Lagrange 中值定理

定理 2.1 (Lagrange 中值定理)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则至少存在一点 $\xi\in(a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi). \tag{4}$$

- 曲线 $y=f(x)$ 的割线必然平行于割线段内某点处的切线.

例题 2.2 (Lagrange 定理的直接应用)**.** 任给 $x\in\mathbb{R}$, 存在 $\theta(x)\in(0,1)$, 使得

$$\arctan x=\frac{x}{1+(\theta(x))^2x^2}. \tag{5}$$

注记 2.2. 中值条件 $\xi \in (a,b)$ 可以等价地写为: 存在 $\theta \in (0,1)$, 使得 $\xi \equiv \theta a + (1-\theta)b$.

例题 2.3 (化割线为切线)**.** 设 $n \in \mathbb{N}$, 常数 $a \neq 0$. 计算极限

$$\lim_{n\to\infty} n^2 \left(\arctan\frac{a}{n} - \arctan\frac{a}{n+1}\right). \tag{6}$$

例题 2.4 (相异中值)**.** 已知函数 $f(x)$ 在 $[0,1]$ 上连续, 在 $(0,1)$ 上可导, 且 $f(0) = 0, f(1) = 1$. 证明:

1. 存在 $\xi \in (0,1)$, 使得 $f(\xi) = 1 - \xi$;
2. 存在两个不同的点 $\eta, \zeta \in (0,1)$, 使得 $f'(\eta)f'(\zeta) = 1$.

例题 2.5 (中值定理与不等式)**.** 证明: 反正切函数 $y = \arctan x$ 具有 **Lipschitz 连续性**

$$|\arctan a - \arctan b| \leq |a - b|. \tag{7}$$

2.3 Cauchy 中值定理

定理 2.2 (Cauchy 中值定理)**.** 设函数 $f(x), g(x)$ 均在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且在 (a,b) 上满足 $g'(x) \neq 0$. 则至少存在一点 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(\xi)}{g'(\xi)}. \tag{8}$$

- 参数方程曲线 $(x,y) = (f(t), g(t))$ 的割线必然平行于割线段内某点处的切线..
- 可用于 L'Hôpital 法则的证明.

例题 2.6 (Cauchy 定理的直接应用)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 且 $ab > 0$. 证明: 存在 $\xi \in (a,b)$, 使得

$$\frac{1}{a-b}\begin{vmatrix} a & b \\ f(a) & f(b) \end{vmatrix} = f(\xi) - \xi f'(\xi). \tag{9}$$

3 走向更高阶次

例题 3.1 (Lagrange 余项与不等式: 有界性与误差估计)**.** 设函数 $f(x)$ 具有二阶导数, 且 $f'(0) = f'(1)$, $|f''(x)| \leq 1$. 证明: 当 $x \in (0,1)$ 时,

$$|f(x) - f(0)(1-x) - f(1)x| \leq \frac{x(1-x)}{2}. \tag{10}$$

例题 3.2 (Lagrange 余项与不等式: 介值定理)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $[-a,a]$ 上具有二阶连续导数, 证明:

1. 若 $f(0) = 0$, 则存在 $\xi \in (-a,a)$, 使得

$$f''(\xi) = \frac{1}{a^2}(f(a) + f(-a)); \tag{11}$$

2. 若 $f(x)$ 在 $(-a,a)$ 内取得极值, 则存在 $\eta \in (-a,a)$, 使得

$$|f''(\eta)| \geq \frac{1}{2a^2}|f(a) - f(-a)|. \tag{12}$$

4 总结: 中值存在性问题的一般方法

- 根据开区间关系, 寻找一个 (或一组彼此相异的) 中值 $\boldsymbol{\xi}$, 或等价于寻找插值系数 $\boldsymbol{\theta}$, 其中 $0<\theta_i<1, \theta_i \neq \theta_j (i \neq j)$;
- 通过辅助函数的构造, 证明关于中值的等式或不等式 $E(\boldsymbol{\xi})$.
  - 注意因**修约**或**不等式放缩** (估计) 而被 "隐藏" 的一部分因子.
  - 对称的 Taylor 展开式往往可以极为高效地解决具有对称性的中值问题.