4. 曲面积分

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2025.3.30

1 两类曲面积分的计算

1.1 第一型曲面积分: 面积微元

定义 1.1. 设函数 $f(x,y,z)$ 在分片光滑的曲面 S 上有定义. 将 S 任意分割为 n 个互不重叠的小片, 第 i 片的面积记为 ΔS_i, 且在 ΔS_i 上任取点 (ξ_i,η_i,ζ_i). 令 $\lambda \equiv \max_{1\le i\le n} d(\Delta S_i)$. 若极限 $\lim_{\lambda\to 0_+}\sum_{i=1}^n f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ 存在且无关分割方法或取点方法, 则称此极限为函数 $f(x,y,z)$ 在曲面 S 上的**第一型曲面积分**, 记作 $\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S$.

例题 1.1 (对面积微元直接积分)**.** 设 $f(x)$ 为 $\mathbb{R}$ 上的连续函数, 证明:

$$\iint_S f(x+y+z)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\sqrt{3}\xi)\,\mathrm{d}\xi, \tag{1}$$

其中 S 为单位球面 $x^2+y^2+z^2=1$.

注记 1.1. 在单位球面 S 上成立 *Poisson* 公式

$$\iint_S f(ax+by+cz)\,\mathrm{d}S = 2\pi\int_{-1}^{1} f(\xi\sqrt{a^2+b^2+c^2})\,\mathrm{d}\xi. \tag{2}$$

定理 1.1 (投影到坐标平面)**.** 设曲面 S 由方程 $z=f(x,y),(x,y)\in D$ 给出, 且二元函数 $g(x,y)$ 在 D 上连续可微. 则

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(x,y,g(x,y))\sqrt{1+f_x^2+f_y^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{3}$$

例题 1.2 (投影到坐标平面)**.** 计算曲面积分

$$I = \iint_S \left(x^2y^2+y^2z^2+z^2x^2\right)\mathrm{d}S, \tag{4}$$

其中 S 为圆锥面 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 被柱面 $x^2+y^2=1$ 截下部分.

定理 1.2 (参数方程)**.** 若 S 由 $(x,y,z)=(x(u,v),y(u,v),z(u,v)),(u,v)\in D$ 给出, 则

$$\iint_S f(x,y,z)\,\mathrm{d}S = \iint_D f(x(u,v),y(u,v),g(u,v))\sqrt{J_{xy}^2+J_{yz}^2+J_{zx}^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v, \tag{5}$$

其中,

$$J_{xy}=\left|\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\right|,\ J_{yz}=\left|\frac{\partial(y,z)}{\partial(u,v)}\right|,\ J_{zx}=\left|\frac{\partial(z,x)}{\partial(u,v)}\right|. \tag{6}$$

例题 1.3 (参数方程)**.** 计算曲面积分 $I=\iint_S z\,\mathrm{d}S$, 其中 S 为螺旋面 $x=u\cos v, y=u\sin v, z=v, 0\le u\le a, 0\le v\le 2\pi$.

1.2 第二型曲面积分: 有向面积的投影

定义 1.2. 设 S 是分片光滑的双侧曲面, 在 S 上选定了一侧, 记其单位法向量为 $\mathbf{n}$. 向量值函数 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 在 S 上有定义. 将 S 任意分割为 n 个互不重叠的小片, 第 i 片的面积记为 ΔS_i, 且在 ΔS_i 上任取点 (ξ_i,η_i,ζ_i). 令 $\lambda\equiv\max_{1\le i\le n}\Delta s_i$. 若极限 $\lim_{\lambda\to0_+}\sum_{i=1}^n\mathbf{F}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\cdot\mathbf{n}(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta S_i$ 存在且无关分割方法或取点方法, 则称此极限为向量值函数 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 在曲面 S 上的**第二型曲面积分**, 记作 $\iint_S\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,\mathrm{d}S$ 或 $\iint_S\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}$.

- 两类曲面积分可由单位法向量的方向余弦 $\mathbf{n}\equiv(\cos\alpha,\cos\beta,\cos\gamma)$ 关联起来:

$$\begin{aligned}\iint_S\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}&=\iint_S(P\cos\alpha+Q\cos\beta+R\cos\gamma)\,\mathrm{d}S\\&\equiv\iint_S P\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\end{aligned}\tag{7}$$

其中, **有向投影面积**

$$\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y=\cos\gamma\,\mathrm{d}S\,,\ \ \mathrm{d}y\,\mathrm{d}z=\cos\alpha\,\mathrm{d}S\,,\ \ \mathrm{d}z\,\mathrm{d}x=\cos\beta\,\mathrm{d}S\,.\tag{8}$$

例题 1.4 (第二型曲面积分的计算)**.** 设 $R>r>0$. 计算曲面积分

$$I=\iint_S(y-z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z+(z-x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x+(x-y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y,\tag{9}$$

其中 S 为球面 $x^2+y^2+z^2=2Rx$ 被柱面 $x^2+y^2=2rx$ 所截曲面在 $z\ge0$ 的部分的外侧.

2 Gauss 公式及其应用

定理 2.1 (Gauss 公式)**.** 设空间区域 Ω 的边界 $S\equiv\partial\Omega$ 是分片光滑的闭曲面, 函数 $\mathbf{F}(x,y,z)$ 在 $\Omega\cup S$ 上有一阶连续偏导数, 则成立

$$\oint\!\!\!\oint_{S^+}\mathbf{F}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S}=\iiint_\Omega\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\,\mathrm{d}V,\tag{10}$$

其中 S^+ 为闭曲面 S 的外侧.

定义 2.1 (向量值函数的散度)**.** 向量值函数 $\mathbf{F}=(P,Q,R)$ 的**散度** (divergence) 定义为

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{F}\equiv\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}.\tag{11}$$

- Gauss 公式也常称为散度定理, 是 Green 公式 (的散度定理形式) 在三维空间中的自然推广, 揭示流量与散度的关系.

例题 2.1 (用 Gauss 公式计算第二型曲面积分)**.** 设 $\mathbb{R}^3$ 中的有界闭区域

$$V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^2 | x^2 + 2y^2 \le z \le 3 - 2x^2 - y^2\}, \tag{12}$$

S^- 是 V 的边界曲面的内侧. 计算第二型曲面积分

$$I = \oiint_{S^-} (x^2 + y\sin z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z - (2y + z\cos x)\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + (-2xz + x\sin y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y. \tag{13}$$

注记 2.1. 哪些情形下使用 Gauss 公式有望简化计算? a) 积分曲面就是或十分接近闭曲面; b) 散度 $\nabla \cdot \mathbf{F}$ 的表达式远远简洁于 $\mathbf{F}$ 本身, 此时三重积分易于计算.

- 由于第二型曲面积分的计算往往较为繁杂, 因此 Gauss 公式甚至可以成为解答应试试题时首先考虑的选项.

例题 2.2 (Gauss 公式; 增补曲面)**.** 计算曲面积分

$$I = \iint_{S^+} x^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y^2\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \tag{14}$$

其中, S 为圆锥面 $x^2 + y^2 = z^2 (0 \le z \le h)$ 的外侧.

例题 2.3 (Gauss 公式; 挖去奇点)**.** 设参数 $a, b, c > 0$. 计算曲面积分

$$I = \oiint_{S^+} \frac{x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z + y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x + z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y}{(ax^2 + by^2 + cz^2)^{\frac{3}{2}}}, \tag{15}$$

其中, S^+ 为单位球面 $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ 的外侧.

注记 2.2. 构造曲面 Σ 进行增补的动机可以是闭合或挖去奇点. 在 Σ 上, 曲面积分应能较为简便地: a) 直接计算; 或 b) 再次运用 Gauss 公式计算 (此时的奇异性将被去除).

3 Stokes 公式及其应用

定理 3.1 (Stokes 公式)**.** 设 S 为分片光滑的双侧曲面, 其边界 $L \equiv \partial S$ 为一条或几条分段光滑的闭曲线. 若 $\mathbf{F} \equiv (P, Q, R)$ 在 $S \cup L$ 上具有一阶连续偏导数, 则成立

$$\oint_{L^+} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \oiint_{S^+} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathrm{d}\mathbf{S}, \tag{16}$$

其中 L, S 的正方向按**右手定则**给出.

定义 3.1 (向量值函数的旋度)**.** 向量值函数 $\mathbf{F} = (P, Q, R)$ 的**旋度** (curl) 定义为

$$\nabla \times \mathbf{F} \equiv \begin{vmatrix} \mathbf{e}_x & \mathbf{e}_y & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix}. \tag{17}$$

- Stokes 是 Green 公式 “由平面到曲面” 的自然推广, 揭示功与旋度的关系.

例题 3.1 (用 Stokes 公式计算第二型曲线积分)**.** 设 L 为空间曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1, \\ x+z=1 \end{cases}$, 其正方向为自 z 轴正向看下来的逆时针方向. 计算积分

$$I=\oint_{L^+}(y-z+\sin^2 x)\,\mathrm{d}x+(z-x+\sin^2 y)\,\mathrm{d}y+(x-y+\sin^2 z)\,\mathrm{d}z. \tag{18}$$

Snacks

外微分运算 [Math]

考虑到面积微元的方向性, 我们不妨定义两个微分变元之间的外积 (outer product) 运算 $\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j$, 满足反交换律: $\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j=-\mathrm{d}x_j\wedge\mathrm{d}x_i$ 以及结合律、分配律. 它的几何意义是 "有向" 的面积/体积/测度.

对给定的微分式 $\omega\equiv\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i$, 定义其外微分 (exterior differentiation)

$$\mathrm{d}\omega\equiv\sum_{i=1}^n \mathrm{d}f_i\wedge\mathrm{d}x_i, \tag{19}$$

其中 $\mathrm{d}f_i$ 为 f_i 的全微分. 以下是一些例子:

- 补充定义: $\mathbb{R}^n$ 上的零阶微分 $\omega=f$ 的外微分

$$\mathrm{d}\omega=\sum_{i=1}^n\frac{\partial f}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x_i. \tag{20}$$

- $\mathbb{R}^n$ 上的一阶微分 $\omega=\sum_{i=1}^n f_i\,\mathrm{d}x_i$ 的外微分

$$\begin{aligned}\mathrm{d}\omega&=\sum_{i=1}^n\mathrm{d}f_i\wedge\mathrm{d}x_i\\&=\sum_{i=1}^n\left(\sum_{j=1}^n\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\,\mathrm{d}x_j\right)\wedge\mathrm{d}x_i\\&=\sum_{1\le i<j\le n}\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}-\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)\mathrm{d}x_i\wedge\mathrm{d}x_j;\end{aligned} \tag{21}$$

- $\mathbb{R}^3$ 上的二阶外微分 $\omega=P\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z+Q\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}x+R\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y$ 的外微分

$$\mathrm{d}\omega=\left(\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}\right)\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}z\,. \tag{22}$$

以上几个外微分分别对应场论中的梯度、散度和旋度. 场论基本事实 "梯旋零"$\mathbf{0}=\boldsymbol{\nabla}\times(\boldsymbol{\nabla}f)$ 和 "旋散零"$0=\boldsymbol{\nabla}\cdot(\boldsymbol{\nabla}\times\mathbf{F})$ 也可以自然地推广为如下的 *Poincaré* 引理:

$$\mathrm{d}\,\mathrm{d}\Omega=0, \tag{23}$$

其中, Ω 为任意外微分形式.

在外微分的理论框架下, 三大积分公式可以统一为如下形式 (外微分的边界积分与体内积分的关系):

$$\int_{\partial\Sigma} \omega = \int_{\Sigma} \mathrm{d}\omega, \tag{24}$$

其中, 外微分 ω 在 $\Sigma \cup \partial\Sigma$ 上光滑. 该公式可以视为高维流形 (manifold, 粗浅的理解就是 "足够光滑、可以局域近似为平面的曲面") 上的微积分基本定理.

守恒律与连续性方程 [Phys]

流体密度的时空分布可由密度函数 $\rho(\mathbf{r};t)$ 给出, 其与速度场 $\mathbf{v} \equiv \dot{\mathbf{r}}$ 的乘积 $\mathbf{J} \equiv \rho\mathbf{v}$ 称为流 (flux), 物理意义是单位面积、单位时间上的流量. 任意给定闭区域 V 及其边界曲面 S, 该区域内流体量的变化率应为产生量减去流出量:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\iiint_V \rho(\mathbf{r};t)\,\mathrm{d}V &= \Sigma - \oiint_S \mathbf{J}\cdot\mathrm{d}\mathbf{S} \\ &= \Sigma - \iiint_V \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}\,\mathrm{d}V. \end{aligned}\tag{25}$$

其中, Σ 代表净产生速率. 由于上式对任意闭区域 V 均成立, 故也可以写成

$$\sigma = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \boldsymbol{\nabla}\cdot\mathbf{J}. \tag{26}$$

这称为连续性方程 (continuity equation). 特别地, 若 $\sigma = 0$, 则没有流体产生或消失, 连续性方程将成为某条守恒律 (law of conservation) 的结果.

在连续性方程 (26) 中, 对流体密度 ρ 的导数是时间偏导, 其物理图景是 "站在某个固定点观察流体". 现在, 考察其随流导数 (convective derivative, 随着流体上某个特定的质点的速度场而流动)

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \dot{\mathbf{r}}\cdot\boldsymbol{\nabla}\rho, \tag{27}$$

代入 (26) 有

$$\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = \sigma - \rho\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{r}}. \tag{28}$$

对于不可压缩的守恒流体, $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t} = 0$ 且 $\sigma = 0$, 则 $0 = \boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{r}}$. 由此, 速度场的散度直接决定了流体的可压缩性.

"流体" 不光可以是质量流, 也可以代表其它抽象的物理量, 只要对给定的物理量空间 $\{\mathbf{r}\}$ 定义 (含时) 密度函数 $\rho(\mathbf{r};t)$ 与对应的守恒律即可. 相空间就是一个典型的例子: 对 $\mathbf{r} \equiv (\mathbf{p},\mathbf{q})$, 容易根据 Hamilton 运动方程验证:

$$\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{r}} = \frac{\partial\dot{\mathbf{p}}}{\partial\mathbf{p}} + \frac{\partial\dot{\mathbf{q}}}{\partial\mathbf{q}} = \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}\partial\mathbf{q}} - \frac{\partial^2\mathcal{H}}{\partial\mathbf{p}\partial\mathbf{q}} = 0. \tag{29}$$

于是相空间内相点密度 $\rho(\mathbf{r};t)$ 的随流导数为零, 即: 任意一团相空间 "流体" 的体积都不随时间变化.