【专题】无穷和 II: 应用

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2025.6.8

1 函数的幂级数展开

1.1 一致收敛级数的性质

定理 1.1 (点收敛: 与线性运算的对易性)**.** 收敛级数 $A \equiv \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ 与 $B \equiv \sum_{n=1}^{\infty} b_n$ 作线性运算后所得的新级数将收敛到和 A, B 的对应线性组合:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\lambda a_n + \mu b_n) = \lambda A + \mu B. \tag{1}$$

定理 1.2 (一致收敛: 与极限运算的对易性)**.** 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 若每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 则其和函数 $S(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 也在 $[a, b]$ 上连续.

- 对一致收敛且各项连续的函数项级数, 无穷和运算与极限运算彼此对易, 即

$$\lim_{x \to x_0} \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \lim_{x \to x_0} u_n(x). \tag{2}$$

定理 1.3 (一致收敛: 与积分运算的对易性)**.** 在区间 $[a, b]$ 上一致收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 若每一项 $u_n(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 则其和函数 $S(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可积, 且可逐项积分:

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b u_n(x) \, \mathrm{d}x. \tag{3}$$

定理 1.4 (一致收敛: 与微分运算的对易性)**.** 在区间 $[a, b]$ 上逐点收敛的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$, 若其导数的级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x)$ 在 $[a, b]$ 上一致收敛, 且每一项 $u_n'(x)$ 都在 $[a, b]$ 上连续, 则其和函数 $S(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 在 $[a, b]$ 上可导, 且可逐项求导:

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{\infty} u_n'(x), \tag{4}$$

且 $S'(x)$ 在 $[a, b]$ 上也连续.

例题 1.1 (一致收敛级数与可导性)**.** 定义函数项级数

$$S(x) \equiv \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n \sin \frac{x}{n!}, \tag{5}$$

证明:

1. $S(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛, 但在区间 $(0, \delta]$ 上一致收敛 ($\delta > 0$ 任意给定);
2. $S(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上有连续的导函数.

1.2 函数的 Taylor 级数展开

定义 1.1 (幂级数)**.** 形如

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n \tag{6}$$

的函数项级数称为**幂级数** (power series), 其中, 常数 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 为幂级数的**系数** (coefficients).

- 存在非负值 $0 \leq R \leq +\infty$, 使得幂级数在 $|x| < R$ 时绝对收敛、在 $|x| > R$ 时发散 (但 $|x| = R$ 的敛散性未知). 我们称 R 为**收敛半径** (convergent radius). 这时, 幂级数的收敛域为 $(-R, R)$ 及其端点的并 (若检验后发现在该端点处级数收敛).

定理 1.5 (内闭一致性)**.** 设幂级数 $S(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$. 则

1. 对任意正数 $b < R$, 幂级数 $S(x)$ 在闭区间 $[-b, b]$ 上一致收敛;
2. 若 $S(x)$ 在右端点 $x = +R$ 处收敛, 则它在 $[0, R]$ 上一致收敛;
3. 若 $S(x)$ 在左端点 $x = -R$ 处收敛, 则它在 $[-R, 0]$ 上一致收敛;

定理 1.6 (逐项积分与逐项求导)**.** 设幂级数 $S(x) \equiv \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径 $R > 0$. 则

1. $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内的任一闭区间上可积, 且可逐项积分:
$$\int_0^x S(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}; \tag{7}$$
2. $S(x)$ 在 $(-R, R)$ 内可导, 且可逐项求导:
$$S'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}. \tag{8}$$

例题 1.2 (幂级数展开: 加法)**.** 在 $(-1, 1)$ 上展开函数

$$f(x) = \arctan x + \frac{1}{2} \ln \frac{1+x}{1-x} \tag{9}$$

为幂级数.

注记 1.1. 在收敛区间 $(-1, 1)$ 上, 等比级数存在求和公式 $\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$. 通过逐项积分或逐项求导, 将幂级数展开或和函数计算 (可以看成 "互为逆运算") 向等比级数转化. 比较简洁的解题过程书写诀窍是, 和实际演算顺序相反.

例题 1.3 (幂级数展开: 乘法)**.** 求函数

$$f(x)=\frac{\sqrt{|x|}}{2}\ln\frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}} \tag{10}$$

在 $x=0$ 处的幂级数展开式, 并指出此幂级数的收敛域.

注记 1.2. 幂级数在 $(-R,R)$ 上绝对收敛, 所以可以对两个收敛的幂级数作乘法运算.

定理 1.7 (幂级数展开的唯一性)**.** 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n$ 在区间 (x_0-R,x_0+R) 收敛到 $f(x)$, 则 $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ 被唯一地确定为

$$a_n=\frac{1}{n!}f^{(n)}(x_0),n\in\mathbb{N}, \tag{11}$$

此时, 该级数称为函数 $f(x)$ 的 **Taylor 级数** (Taylor series).

- 反之, 对一个任意阶可导的函数 $f(x)\in\mathcal{C}^{\infty}$, 若它的 Taylor 级数恰好收敛到这个函数, 则称其可展开为幂级数, 记作 $f(x)\in\mathcal{C}^{\omega}$.

定理 1.8 (两组 Taylor 级数)**.** 一般地, 成立如下的 Taylor 级数公式:

- 指数函数: 对 $-\infty<x+\infty$,

$$\mathrm{e}^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}; \tag{12}$$

- 三角函数: 可由复变指数的 Euler 公式: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}x}=\cos x+\mathrm{i}\sin x$ 导出;
- 幂函数: 对 $-1<x<+\infty$,

$$(1+x)^{\alpha}=1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!}x^n. \tag{13}$$

例题 1.4 (Taylor 展开与常项级数和)**.** 在 $[-1,1]$ 上, 将函数

$$f(x)=x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2} \tag{14}$$

展开成幂级数, 并据此计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-\frac{1}{4}\right)^n\frac{1}{2n+1}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \tag{15}$$

的和.

练习 1.1 (Taylor 展开)**.** 求函数

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3} \tag{16}$$

于 $x=1$ 处的 Taylor 展开式, 并计算 $f^{(2022)}(1), f^{(2023)}(1)$ 的值.

1.3 和函数的计算

例题 1.5 (和函数的计算)**.** 求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n \tag{17}$$

的收敛区间与和函数.

练习 1.2 (和函数的计算)**.** 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} \tag{18}$$

的收敛区间与和函数.

2 函数的 Fourier 级数展开

定理 2.1 (三角函数系的正交归一性)**.** 三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\right\} \tag{19}$$

对于 $x\in[-\pi,\pi]$ 具有**正交归一性** (orthonormality).

2.1 周期函数的 Fourier 级数展开

定义 2.1 (Fourier 级数)**.** 设函数 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期 $(l>0)$, 且在 $[-l,l]$ 上有界可积. 序列

$$\begin{cases} a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, & (n=0,1,\cdots), \\ b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, & (n=1,2,\cdots) \end{cases} \tag{20}$$

给出了函数 $f(x)$ 的 **Fourier 系数** (Fourier coefficients). 此时, 如下的三角级数

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{21}$$

称为 $f(x)$ 的 **Fourier 级数** (Fourier series).

定理 2.2 (Dirichlet 定理: 收敛条件)**.** 设函数 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期 ($l > 0$), 且在 $[-l, l]$ 上分段连续且分段单调, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在任意一点 $x \in \mathbb{R}$ 处均收敛到和函数

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}. \tag{22}$$

例题 2.1 (Fourier 级数及其和函数)**.** 解答下列问题.

1. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数, $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi]$ 上等于 e^x. 求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 并且求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x = \pi$ 处的和.
2. 求出级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \tag{23}$$
的和.

练习 2.1 (周期延拓与对称化延拓)**.** 求函数 $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ $(0 \le x \le 2\pi)$ 的正弦级数展开, 并给出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ 的值.

注记 2.1. 对定义在 $[0, l]$ 上的函数先作奇延拓或偶延拓, 再作周期延拓, 即可像周期函数那样研究它的 Fourier 级数展开与收敛性质.

例题 2.2 (Fourier 级数逼近)**.** 解答下列问题.

1. 设 p 是非整数的实数, $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上等于 $\cos(px)$. 求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 及其和函数.
2. 明确写出从上面 (1) 中的 $\cos(px)$ 的 Fourier 展开式推出下面等式的详细推导过程: 当 $t \in \mathbb{R}$, $\frac{t}{\pi}$ 不是整数时, 有
$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{t + n\pi} + \frac{1}{t - n\pi} \right). \tag{24}$$
3. 明确写出从上面 (2) 中 $\frac{1}{\sin t}$ 的展开式推出下面等式的详细推导过程:
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \, \mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}. \tag{25}$$

2.2 Parseval 等式

定理 2.3 (Parseval 等式: 渐近精确)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上有界可积, 则成立 **Parseval 等式**:

$$\frac{a_0^2}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n^2 + b_n^2) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f^2(x) \, \mathrm{d}x. \tag{26}$$

- 这表征了三角函数系的完备性: 特定条件下, 可以用三角函数系的线性组合表示任意有界可积函数.

例题 2.3 (余弦级数; Parseval 等式)**.** 设 2π 周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上的表达式为 $f(x)=x^2$, 求 $f(x)$ 所对应的 Fourier 级数及其和函数, 并分别给出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2},\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4} \tag{27}$$

的值.

3 广义积分的计算

3.1 常义方法

3.1.1 作为常义积分的极限

例题 3.1 (无穷和)**.** 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$ 收敛, 每项 $a_n>0$, T 是序列 $\{a_n\}$ 中的最大项. 对于每个实数 $x>0$, 定义 $L(x)$ 是序列 $\{a_n\}$ 中大于 x 的项的个数.

1. 证明: 0 是 $L(x)$ 的瑕点;
2. 证明: 瑕积分 $\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 并且

$$\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x=\sum_{n=1}^{\infty}a_n. \tag{28}$$

例题 3.2 (常义积分的极限)**.** 设 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是单调下降的连续函数 (没有假定 $(0,+\infty)$ 上导函数 $f'(x)$ 的存在), C 和 D 都是实数, $\lim_{x\to 0_+}f(x)=C$, $\lim_{x\to+\infty}f(x)=D$, $0<a<b$. 求出广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x \tag{29}$$

的值.

注记 3.1. 本题所证明的公式称为 *Frullani* 公式. 在 $f(x)$ 可导的情况下, 其证明借由积分号下的积分法很容易完成:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty}\frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x&=\int_0^{+\infty}\mathrm{d}x\int_b^a f'(xy)\,\mathrm{d}y\\&=\int_b^a\mathrm{d}y\int_0^{+\infty}f'(xy)\,\mathrm{d}x\\&=\int_b^a\frac{D-C}{y}\,\mathrm{d}y\\&=(C-D)\ln\frac{b}{a}.\end{aligned} \tag{30}$$

但由于可导性不成立, 包括该方法在内的许多技巧性积分方法都无法应用, 我们只好 “回退” 到更原始的概念, 先按常义积分处理, 再对积分限取极限.

3.1.2 换元积分与分部积分

例题 3.3 (换元积分与分部积分)**.** 计算无穷积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3}\,\mathrm{d}x. \tag{31}$$

注记 3.2. 将常义积分的 Newton-Leibniz 公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ 中的积分限 a, b 替换为相应的无穷远点或瑕点, 就得到广义积分的 *Newton-Leibniz* 公式. 相应的换元积分、分部积分等技巧对广义积分 (只要保证收敛) 同样适用.

练习 3.1 (换元积分法)**.** 计算瑕积分

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}. \tag{32}$$

3.2 参数化方法

定理 3.1 (一致收敛积分的连续性与可积性)**.** 给定二元函数 $f(x, y)$.

- (无穷积分) 假设 $f(x, y)$ 在区间 $[a, +\infty) \times [c, d]$ 上连续, 且无穷积分 $g(y) = \int_a^{+\infty} f(x, y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c, d]$ 上一致收敛. 则 $g(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续、可积 (和极限运算或积分运算对易):

$$\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^{+\infty} \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y. \tag{33}$$

- (瑕积分) 假设 $f(x, y)$ 在区间 $(a, b] \times [c, d]$ 上连续, 且瑕积分 $g(y) = \int_a^b f(x, y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c, d]$ 上一致收敛. 则 $g(y)$ 在 $[c, d]$ 上连续、可积 (和极限运算或积分运算对易):

$$\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y = \int_a^b \mathrm{d}x \int_c^d f(x, y)\,\mathrm{d}y. \tag{34}$$

例题 3.4 (含参积分的积分法)**.** 设常数 $\omega > 0$. 计算广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x} \sin(\omega x)\,\mathrm{d}x. \tag{35}$$

定理 3.2 (一致收敛积分的可微性)**.** 给定二元函数 $f(x,y)$.

- (无穷积分) 假设 $f(x,y)$ 在区间 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续, 且无穷积分 $g(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上逐点收敛, 无穷积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛. 则 $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上可微 (和微分运算对易):
$$\frac{\mathrm{d}g(y)}{\mathrm{d}y}=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x. \tag{36}$$
- (瑕积分) 假设 $f(x,y)$ 在区间 $(a,b]\times[c,d]$ 上连续, 且瑕积分 $g(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上逐点收敛, 瑕积分 $\int_a^b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛. 则 $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上可微 (和微分运算对易):
$$\frac{\mathrm{d}g(y)}{\mathrm{d}y}=\int_a^{b}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x. \tag{37}$$

例题 3.5 (含参积分的微分法)**.** 设 b 是实数.

1. 证明含参变量 b 的无穷积分
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}x\cos(2bx)\,\mathrm{d}x \tag{38}$$
在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.
2. 证明:
$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x=\mathrm{e}^{-b^2}\int_0^b\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{39}$$

例题 3.6 (收敛因子法)**.** 证明和计算下列各题:

1. 证明 $I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛;
2. 证明 $I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 的任何闭子区间上可导, 即在 $(0,+\infty)$ 上可导;
3. 求出函数 $I(t)$, $t\in(0,+\infty)$;
4. 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的值.

注记 3.3. 若广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 自身难以计算, 在不改动 $f(x)$ 自身结构的情况下, 乘以收敛因子 $\phi(x,t)$ 是最直接的一种参数化方法. “收敛因子” 的概念得名于我们对它的要求: 使含参积分 $I(t)\equiv\int_0^{+\infty}f(x)\phi(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于参数 t 一致收敛. 此时, 我们将可以应用积分号下的微分法:
$$I'(t)=\int_0^{+\infty}f(x)\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x. \tag{40}$$
若构造得当, 该积分就有望比 $I(t)$ 更容易计算. 本题的收敛因子选为 $\phi(x,t)=\mathrm{e}^{-xt}$, 动机有二: (a) 作为强衰减量, 可以保证一致收敛性; (b) 写为 $\phi(x,t)\equiv\Phi(xt)$ 的形式, 求偏导后的因子 x 能将被积函数 $\frac{\sin x}{x}$ 中难处理的 $\frac{1}{x}$ 项消去.

练习 3.2 (含参微分法的迭代)**.** 设 n 是正整数.

1. 任给常数 $a>0$. 证明: 含参变量 t 的无穷积分
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \tag{41}$$
在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛;
2. 对于每个 $t\in(0,+\infty)$, 求出
$$\int_0^{+\infty} \frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \tag{42}$$
的值.

3.3 特殊积分与特殊函数

3.3.1 两个特殊积分

定理 3.3 (Gauss 积分)**.** 从二元广义积分
$$I^2=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-x^2y^2}\,\mathrm{d}y \tag{43}$$
出发, 可以计算 **Gauss 积分**
$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{44}$$

定理 3.4 (Dirichlet 积分)**.** 从含参广义积分
$$I(y)=\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \tag{45}$$
出发, 可以计算 **Dirichlet 积分**
$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}. \tag{46}$$
进一步地, 对实数 $\alpha\neq 0$, 成立 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\alpha)$.

3.3.2 两个特殊函数

定义 3.1 (Γ-函数)**.** 对 $\alpha>0$, 我们定义 **Γ-函数**
$$\Gamma(\alpha)\equiv\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x. \tag{47}$$

定理 3.5 (Γ-函数的分析性质)**.** $\Gamma(\alpha)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 且具有连续的各阶导数.

定理 3.6 (Γ-函数的递推性质)**.** $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$. 由此, 可以导出一些特殊的 Γ 函数值:

- (整数) $\Gamma(n+1)=n!$;
- (半整数) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

例题 3.7 (整值 Γ-函数)**.** 设 E 为实数.

1. 求出所有的实数 E, 使得

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \tag{48}$$

   收敛;

2. 求出所有的实数 E, 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \tag{49}$$

   收敛.

练习 3.3 (半整值 Γ-函数)**.** 计算无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\sqrt{x^3}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x. \tag{50}$$

定义 3.2 (B-函数)**.** 对 $p,q>0$, 我们定义 B-**函数**

$$\mathrm{B}(p,q)\equiv\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x. \tag{51}$$

- 令 $x\equiv\cos^2\theta$, 得到基于三角函数积分的等价表示

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta. \tag{52}$$

- 令 $x\equiv\frac{t}{1+t}$, 得到基于有理函数积分的等价表示

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t. \tag{53}$$

定理 3.7 (B-函数的分析性质)**.** B-函数在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续, 且具有连续的各阶导数.

定理 3.8 (用 Γ-函数表示 B-函数)**.** $\mathrm{B}(p,q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

例题 3.8 (用 B-函数表示广义积分)**.** 计算瑕积分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\,\mathrm{d}x. \tag{54}$$