10. 广义积分与含参积分 II: 应用

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2025.5.31

1 广义积分的计算: 常义方法

1.1 作为常义积分的极限

例题 1.1 (用无穷和计算瑕积分)**.** 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 每项 $a_n > 0$, T 是序列 $\{a_n\}$ 中的最大项. 对于每个实数 $x > 0$, 定义 $L(x)$ 是序列 $\{a_n\}$ 中大于 x 的项的个数.

1. 证明: 0 是 $L(x)$ 的瑕点;
2. 证明: 瑕积分 $\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 并且

$$\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{1}$$

例题 1.2 (用常义积分极限计算广义积分)**.** 设 $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ 是单调下降的连续函数 (没有假定 $(0, +\infty)$ 上导函数 $f'(x)$ 的存在), C 和 D 都是实数, $\lim_{x\to 0_+} f(x) = C$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = D$, $0 < a < b$. 求出广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

的值.

注记 1.1. 本题所证明的公式称为 *Frullani* 公式. 在 $f(x)$ 可导的情况下, 其证明借由积分号下的积分法很容易完成:

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{f(ax) - f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty} \mathrm{d}x \int_b^a f'(xy)\,\mathrm{d}y \\ &= \int_b^a \mathrm{d}y \int_0^{+\infty} f'(xy)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_b^a \frac{D - C}{y}\,\mathrm{d}y \\ &= (C - D)\ln\frac{b}{a}.\end{aligned} \tag{3}$$

但由于可导性不成立, 包括该方法在内的许多技巧性积分方法都无法应用, 我们只好 “回退” 到更原始的概念, 先按常义积分处理, 再对积分限取极限.

1.2 换元积分与分部积分

例题 1.3 (换元积分与分部积分)**.** 计算广义积分:

1. 无穷积分 $\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3}\,\mathrm{d}x$;
2. 瑕积分 $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}$.

注记 1.2. 将常义积分的 Newton-Leibniz 公式 $\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$ 中的积分限 a, b 替换为相应的无穷远点或瑕点, 就得到广义积分的 *Newton-Leibniz* 公式. 相应的换元积分、分部积分等技巧对广义积分 (只要保证收敛) 同样适用.

2 广义积分的计算: 参数化方法

2.1 含参积分号下的积分法

定理 2.1 (连续性、可积性)**.** 给定二元函数 $f(x,y)$.

- (无穷积分) 假设 $f(x,y)$ 在区间 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续, 且无穷积分 $g(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛. 则 $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续、可积 (和极限运算或积分运算对易):

$$\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y=\int_a^{+\infty}\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{4}$$

- (瑕积分) 假设 $f(x,y)$ 在区间 $(a,b]\times[c,d]$ 上连续, 且瑕积分 $g(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛. 则 $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上连续、可积 (和极限运算或积分运算对易):

$$\int_c^d g(y)\,\mathrm{d}y=\int_a^b\mathrm{d}x\int_c^d f(x,y)\,\mathrm{d}y. \tag{5}$$

例题 2.1 (含参积分法)**.** 设常数 $\omega>0$. 计算广义积分

$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}-\mathrm{e}^{-\beta x}}{x}\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x. \tag{6}$$

2.2 含参积分号下的微分法

定理 2.2 (可微性)**.** 给定二元函数 $f(x,y)$.

- (无穷积分) 假设 $f(x,y)$ 在区间 $[a,+\infty)\times[c,d]$ 上连续, 且无穷积分 $g(y)=\int_a^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上逐点收敛, 无穷积分 $\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛. 则 $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上可微 (和微分运算对易):

$$\frac{\mathrm{d}g(y)}{\mathrm{d}y}=\int_a^{+\infty}\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x. \tag{7}$$

- (瑕积分) 假设 $f(x,y)$ 在区间 $(a,b]\times[c,d]$ 上连续, 且瑕积分 $g(y)=\int_a^b f(x,y)\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上逐点收敛, 瑕积分 $\int_a^b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x$ 在 $[c,d]$ 上一致收敛. 则 $g(y)$ 在 $[c,d]$ 上可微 (和微分运算对易):

$$\frac{\mathrm{d}g(y)}{\mathrm{d}y}=\int_a^b\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

例题 2.2 (含参微分法的迭代)**.** 设 n 是正整数.

1. 任给常数 $a>0$. 证明: 含参变量 t 的无穷积分
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \tag{9}$$
在 $[a,+\infty)$ 上一致收敛;

2. 对于每个 $t\in(0,+\infty)$, 求出
$$\int_0^{+\infty}\frac{1}{(t+x^2)^n}\,\mathrm{d}x \tag{10}$$
的值.

例题 2.3 (参数的引入)**.** 证明: 广义积分
$$I(\alpha)=\int_0^1\frac{\ln(1-\alpha^2x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x \tag{11}$$
在 $\alpha\in[-1,1]$ 上连续、在 $\alpha\in(-1,1)$ (的任意闭子区间) 上可导, 并据此计算
$$\int_0^1\frac{\ln(1-x^2)}{x^2\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x. \tag{12}$$

注记 2.1. 对数函数项经过导数运算后转化为有理函数项, 这一技巧读者在学习分部积分法时并不陌生. 本题中, 直接的分部积分较为困难, 我们于是借助参数 α 的引入来实现这一目的. 注意: 计算过程应包含对每步操作 (例如积分号下求微分、极限外推) "合理性" 的论证, 而这一般由相关含参积分的 (一致) 收敛性来保证.

例题 2.4 (收敛因子法)**.** 证明和计算下列各题:

1. 证明 $I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛;
2. 证明 $I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 的任何闭子区间上可导, 即在 $(0,+\infty)$ 上可导;
3. 求出函数 $I(t)$, $t\in(0,+\infty)$;
4. 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的值.

注记 2.2. 若广义积分 $\int_0^{+\infty}f(x)\,\mathrm{d}x$ 自身难以计算, 在不改动 $f(x)$ 自身结构的情况下, 乘以收敛因子 $\phi(x,t)$ 是最直接的一种参数化方法. "收敛因子" 的概念得名于我们对它的要求: 使含参积分 $I(t)\equiv\int_0^{+\infty}f(x)\phi(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于参数 t 一致收敛. 此时, 我们将可以应用积分号下的微分法:
$$I'(t)=\int_0^{+\infty}f(x)\frac{\partial\phi(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x. \tag{13}$$
若构造得当, 该积分就有望比 $I(t)$ 更容易计算. 本题的收敛因子选为 $\phi(x,t)=\mathrm{e}^{-xt}$, 动机有二: (a) 作为强衰减量, 可以保证一致收敛性; (b) 写为 $\phi(x,t)\equiv\Phi(xt)$ 的形式, 求偏导后的因子 x 能将被积函数 $\frac{\sin x}{x}$ 中难处理的 $\frac{1}{x}$ 项消去.

3 特殊积分与特殊函数

3.1 两个特殊积分

定理 3.1 (Gauss 积分)**.** 从二元广义积分

$$I^2=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-x^2y^2}\,\mathrm{d}y \tag{14}$$

出发, 可以计算 **Gauss 积分**

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{15}$$

例题 3.1 (Gauss 积分的变体)**.** 计算广义积分:

1. $\int_{-\infty}^{+\infty}\mathrm{e}^{-(Ax^2+2Bx+C)}\,\mathrm{d}x$ (常数 A,B,C 满足 $A>0$ 且 $AC>B^2$);
2. $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\cos(\beta x)\,\mathrm{d}x$ (常数 α,β 满足 $\alpha>0$).

注记 3.1. 若进一步应用微分法, 还能得到一些衍生公式, 例如 ($\alpha>0$):

- $\int_0^{+\infty}x^2\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}$;
- $\int_0^{+\infty}x\mathrm{e}^{-\alpha x^2}\sin(\beta x)\,\mathrm{d}x=\frac{\beta}{4\alpha}\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\mathrm{e}^{-\frac{\beta^2}{4\alpha}}$.

注记 3.2. 若进一步应用积分法, 还能得到一些衍生公式, 例如 ($\alpha>0$):

- 由 $\frac{1}{1+x^2}=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-y(1+x^2)}\,\mathrm{d}y$, 可以计算 *Laplace 积分*

$$\int_0^{+\infty}\frac{\cos(\alpha x)\,\mathrm{d}x}{1+x^2}=\frac{\pi}{2\mathrm{e}^{\alpha}}. \tag{16}$$

  计算难点是 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-t^2-\frac{\alpha^2}{4t^2}}\,\mathrm{d}t$ (其中 $t\equiv\sqrt{y}$), 读者可尝试联立求解该积分与倒代换 $u\equiv\frac{\alpha}{2t}$ 所对应的积分.

- 由 $\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2}{\sqrt{\pi}}\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy^2}\,\mathrm{d}y$ (其中 $x>0$), 可以计算 *Fresnel 积分*

$$\int_0^{+\infty}\sin\!\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \tag{17}$$

  以及

$$\int_0^{+\infty}\cos\!\left(x^2\right)\mathrm{d}x=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{18}$$

  计算难点是 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}y}{1+y^4}$, 读者可尝试联立求解该积分与倒代换 $v\equiv\frac{1}{t}$ 所对应的积分.

定理 3.2 (Dirichlet 积分)**.** 从含参广义积分

$$I(y)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x \tag{19}$$

出发, 可以计算 **Dirichlet 积分**

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}. \tag{20}$$

进一步地, 对实数 $\alpha\neq 0$, 成立 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin(\alpha x)}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}\mathrm{sgn}(\alpha)$.

例题 3.2 (Dirichlet 积分的变体)**.** 计算广义积分:

1. $\int_0^{+\infty}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^2\mathrm{d}x$;
2. $\int_0^{+\infty}\frac{\sin\left(x^2\right)}{x}\,\mathrm{d}x$.

3.2 两个特殊函数

定义 3.1 (Γ-函数)**.** 对 $\alpha>0$, 我们定义 **Γ-函数**

$$\Gamma(\alpha)\equiv\int_0^{+\infty}x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x. \tag{21}$$

定理 3.3 (Γ-函数的分析性质)**.** $\Gamma(\alpha)$ 在 $(0,+\infty)$ 上连续, 且具有连续的各阶导数.

定理 3.4 (Γ-函数的递推性质)**.** $\Gamma(\alpha+1)=\alpha\Gamma(\alpha)$. 由此, 可以导出一些特殊的 Γ 函数值:

- (整数) $\Gamma(n+1)=n!$;
- (半整数) $\Gamma\left(n+\frac{1}{2}\right)=\frac{(2n-1)!!}{2^n}\sqrt{\pi}$.

例题 3.3 (整值 Γ-函数)**.** 设 E 为实数.

1. 求出所有的实数 E, 使得

$$\int_0^{+\infty}\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \tag{22}$$

   收敛;

2. 求出所有的实数 E, 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^{+\infty}\left(\frac{(Ex)^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}\right)\mathrm{d}x \tag{23}$$

收敛.

例题 3.4 (半整值 Γ-函数)**.** 计算无穷积分 $\int_0^{+\infty}\sqrt{x^3}\mathrm{e}^{-x}\,\mathrm{d}x$.

定义 3.2 (B-函数)**.** 对 $p,q>0$, 我们定义 B-**函数**

$$\mathrm{B}(p,q)\equiv\int_0^1 x^{p-1}(1-x)^{q-1}\,\mathrm{d}x. \tag{24}$$

- 令 $x\equiv\cos^2\theta$, 得到基于三角函数积分的等价表示

$$\mathrm{B}(p,q)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2p-1}\theta\sin^{2q-1}\theta\,\mathrm{d}\theta. \tag{25}$$

- 令 $x\equiv\frac{t}{1+t}$, 得到基于有理函数积分的等价表示

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^{+\infty}\frac{t^{p-1}}{(1+t)^{p+q}}\,\mathrm{d}t. \tag{26}$$

定理 3.5 (B-函数的分析性质)**.** B-函数在 $(0,+\infty)\times(0,+\infty)$ 上连续, 且具有连续的各阶导数.

定理 3.6 (用 Γ-函数表示 B-函数)**.** $\mathrm{B}(p,q)=\frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}$.

例题 3.5 (用 B-函数表示广义积分)**.** 计算广义积分:

1. 瑕积分 $\int_0^1\sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\,\mathrm{d}x$;
2. 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4}$ (表达式中允许含 Γ-函数).

Snacks: 物理系统的熵增伴谬 [Phys]

一般地, 物理系统的微观状态 $(\mathbf{x};t)$ 服从特定概率分布 $\rho(\mathbf{x};t)$. 在经典力学框架下, 微观状态的坐标 (除时间外) 空间称为相空间, 其维度包括广义坐标和广义动量两部分. 相空间的概率分布服从 *Liouville* 定理 (相体积守恒):

$$0=\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}t}=\frac{\partial\rho}{\partial t}+\boldsymbol{\nabla}\cdot\dot{\mathbf{x}}(t). \tag{27}$$

进一步地, 对任意可微函数 $f(\rho)$, 我们有 $0=\frac{\mathrm{d}f(\rho)}{\mathrm{d}t}$.

给定概率密度后, 物理系统的熵 (entropy) 定义[1]为

$$S_t[\rho]\equiv-k_{\mathrm{B}}\mathbb{E}_\rho[\log\rho]=-k_{\mathrm{B}}\int_\Gamma\rho(\mathbf{x};t)\log\rho(\mathbf{x};t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}, \tag{28}$$

[1] 下文中, 凡涉及 $\mathbf{x}$ 的, 均理解为不含时的相空间坐标分量.

其中, k_{B} 为 *Boltzmann* 常数. 于是, 考虑 $f(\rho)=\rho\log\rho$, 我们得到

$$\frac{\mathrm{d}S_t}{\mathrm{d}t}=-k_{\mathrm{B}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Gamma f(\rho)\,\mathrm{d}\mathbf{x}=-k_{\mathrm{B}}\int_\Gamma\frac{\partial f(\rho)}{\partial t}\,\mathrm{d}\mathbf{x}=0, \tag{29}$$

从微观角度看, 熵是一个守恒量.

然而我们并不总是对物理系统中的每个分量 (自由度) 都感兴趣. 通常, 我们将那些感兴趣的、(通常是缓慢演化的) 自由度 $\mathbf{X}$ 从那些不感兴趣的、(通常是快速演化且随机性强的) 自由度 $\mathbf{Y}$ 区分出来, 并将 $\mathbf{Y}$ 积分 (或说 "粗粒化"). 此时, 边缘密度 $P(\mathbf{X};t)$ 显然不再和前述的 ρ 满足同一动力学方程. 我们以*扩散方程*

$$\frac{\partial P(\mathbf{X};t)}{\partial t}=D\frac{\partial^2P(\mathbf{X};t)}{\partial\mathbf{X}^2} \tag{30}$$

为例, 假定 P 及其各阶导数都随 $\mathbf{X}\to\infty$ 快速衰减, 则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}S_t}{\mathrm{d}t}&=-k_{\mathrm{B}}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_\Gamma P\log P\,\mathrm{d}\mathbf{X}\\&=-k_{\mathrm{B}}\int_\Gamma(1+\log P)\frac{\partial P}{\partial t}\,\mathrm{d}\mathbf{X}\\&=-k_{\mathrm{B}}D\int_\Gamma(1+\log P)\frac{\partial^2P}{\partial\mathbf{X}^2}\,\mathrm{d}\mathbf{X}\\&=k_{\mathrm{B}}D\int_\Gamma\frac{1}{P}\left(\frac{\partial P}{\partial\mathbf{X}}\right)^2\mathrm{d}\mathbf{X}\\&>0,\end{aligned} \tag{31}$$

于是, 熵随时间的演进而严格递增.

以扩散方程为代表的*连续介质动力学方程*, 是我们在研究粗粒化体系时所用的核心方程, 可以证明, 熵增现象普遍地存在于这些方程中. 而现实生活中, 我们观察任何物理系统都不可避免存在粗粒化的过程——我们对快运动、噪声、随机电流或次要因素取其平均 (显然这对应积分的过程), 捕捉慢运动、主干旋律、核心电信号或关键因素.

热力学领域的先贤们早已在统计力学等微观理论建立之前, 怀着对生产实践无比审慎又深刻的洞见, 写下了 "孤立系统熵增" 的铁律. 现代数学物理研究表明, 熵是涌现 (emergent) 现象 (许多小单元组合成大单元后显现出原本不具有的性质) 的体现, 无法以 (微观的) 相体积守恒方程一言蔽之. 当我们对系统作粗粒化时, 实际是*以丢失某些自由度的信息为代价*, 导出*符合宏观观测现象且计算成本可以容忍的结果*. 如上, 我们在扩散方程下得以窥见熵增定律之一隅.