4. 向量代数与空间解析几何

SDS 高数小班课 (2024 秋)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2024-12-14

1 空间向量的基本运算

定义 1.1 (向量代数运算)**.** 对于空间向量 $\boldsymbol{a} \equiv (x_1, y_1, z_1), \boldsymbol{b} \equiv (x_2, y_2, z_2)$, 定义

- **加法** (addition): $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b} \equiv (x_1 + x_2, y_1 + y_2, z_1 + z_2)$;
- **数乘** (scalar multiplicatoin): $\lambda\boldsymbol{a} \equiv (\lambda x_1, \lambda y_1, \lambda z_1)$;
- **内积** (inner product): $\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b} \equiv x_1x_2 + y_1y_2 + z_1z_2$;
- **外积** (outer product):

$$\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b} \equiv \begin{vmatrix} \boldsymbol{e}_x & \boldsymbol{e}_y & \boldsymbol{e}_z \\ x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \end{vmatrix}. \tag{1}$$

定理 1.1 (夹角与内积、外积)**.** 记 θ 为向量 $\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}$ 的夹角, 则

1. 内积与夹角余弦满足下述关系:

$$\cos\theta = \frac{\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}, \tag{2}$$

   于是两向量正交的充要条件是内积为 0;

2. 外积与夹角正弦满足下述关系:

$$\sin\theta = \frac{|\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}|}{|\boldsymbol{a}||\boldsymbol{b}|}, \tag{3}$$

   于是两向量共线的充要条件是外积为 $\mathbf{0}$.

例题 1.1 (向量乘法的运算律)**.** 设 $(\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = 2$, 计算 $((\boldsymbol{a} + \boldsymbol{b}) \times (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{c})) \cdot (\boldsymbol{c} + \boldsymbol{a})$.

注记 1.1. 向量的**混合积**定义为

$$[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}] \equiv (\boldsymbol{a} \times \boldsymbol{b}) \cdot \boldsymbol{c} = \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix}. \tag{4}$$

由行列式的性质, 容易发现它具有交换反对称性.

例题 1.2 (向量乘积与几何测度)**.** 证明:

1. ΔABC 的面积 $S = \frac{1}{2}|\overrightarrow{AB} \times \overrightarrow{AC}|$;
2. 平行六面体 $ABCD$-$A_1B_1C_1D_1$ 的体积 $V = |[\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}, \overrightarrow{AA_1}]|$.

2 直线、平面及其位置关系

2.1 平面方程及其应用

定义 2.1 (平面的法向量)**.** 给定平面 Σ 的**一般式方程**: $Ax + By + Cz + D = 0$ 或**点法式方程**: $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$, 则它的一个**法向量** (normal vector) 为 (A, B, C). 法向量垂直于平面 Σ 内的任意一个向量.

例题 2.1 (点到平面的距离公式)**.** 点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 到平面 $\Sigma : Ax + By + Cz + D = 0$ 的距离为

$$d = \frac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}. \tag{5}$$

例题 2.2 (平面束)**.** 求过点 $(1,-2,0)$ 且过直线

$$l:\begin{cases}2x-y+z=3,\\ x+2y-z+1=0\end{cases} \tag{6}$$

的平面的一般式方程.

2.2 直线的方程及其应用

定义 2.2 (直线的方向向量)**.** 给定直线 l 的**标准方程**:

$$\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}, \tag{7}$$

则它的一个**方向向量** (direction vector) 为 (a,b,c). 方向向量共线于直线 l 上的任意一个向量.

例题 2.3 (点到直线的距离公式)**.** 点 $P(x_0,y_0,z_0)$ 到直线 $l:\frac{x-x_0}{a}=\frac{y-y_0}{b}=\frac{z-z_0}{c}$ 的距离为

$$d=\frac{|\boldsymbol{l}\times\overrightarrow{PP_l}|}{|\boldsymbol{l}|}, \tag{8}$$

其中, $\boldsymbol{l}$ 为直线 l 的方向向量, 点 P_l 在直线 l 上.

例题 2.4 (二面式方程)**.** 给出直线

$$l : \begin{cases} x - 3z + 5 = 0, \\ y - 2z + 8 = 0 \end{cases} \tag{9}$$

的标准方程.

2.3 直线与平面的位置关系

例题 2.5 (直线-直线的位置关系)**.** 已知直线

$$l_1 : \begin{cases} x + 2y + 5 = 0, \\ 2y - z - 4 = 0 \end{cases} \tag{10}$$

和直线

$$l_2 : \begin{cases} y = 0, \\ x + z = 2. \end{cases} \tag{11}$$

1. 判断 l_1, l_2 的位置关系;
2. 求 l_1, l_2 的公垂线的方程.

注记 2.1. 位置关系的两个要素:

- 延展取向, 由方向向量、法向量的位置关系判断;
- 交集, 由两个图形的联立方程组判断.

2.4 立体几何平面公理

例题 2.6 (直线与线外一点)**.** 求过点 $(3,1,2)$ 与直线 $\frac{x-4}{1}=\frac{y+3}{2}=\frac{z}{1}$ 的平面的方程.

例题 2.7 (不共线的三点)**.** 给定不共线三点 $\{(x_i,y_i,z_i)\}_{i=1}^{3}$, 求过这三点的平面的方程.

3 曲面的几何性质

3.1 相切

定理 3.1 (曲面的法向量)**.** 曲面 $F(x,y,z)=0$ 在点 (x_0,y_0,z_0) 处的一个法向量 (垂直于所有切向量) 为 $(F_x,F_y,F_z)\big|_{(x_0,y_0,z_0)}$.

例题 3.1 (曲面的切平面、法线). 求曲面 $z = x + 2y + \ln(1 + x^2 + y^2)$ 在点 $(0, 0, 0)$ 处的切平面与法线.

例题 3.2 (隐函数曲面的切平面). 在椭球面 $\Gamma : \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ 上求一点, 使 Γ 上该点处的法线与各坐标轴所成的夹角相等.

定理 3.2 (曲线的切向量). 曲线 $x = x(t), y = y(t), z = z(t)$ 在点 x_0, y_0, z_0 处的一个切向量为 $(x'(t), y'(t), z'(t))\big|_{(x_0,y_0,z_0)}$.

例题 3.3 (曲线的切线、法平面). 在曲线 $C : x = t, y = t^2, z = t^3$ 上有一点 P, 曲线 C 在该点处的切线平行于平面 $x + 2y + z = 4$. 求曲线 C 在点 P 处的切线与法平面.

3.2 包络

定义 3.1 (曲面族的包络面)**.** 曲面族 $F(x,y,z;\alpha)=0$ 的**包络面** (envelope) Γ 使得曲面族中的每个曲面 S_α 都与 Γ 相切 (或说, S_α 与 Γ 存在公共切平面).

定理 3.3. 曲面族 $F(x,y,z;\alpha)=0$ 的包络面满足方程组

$$\begin{cases} F(x,y,z;\alpha)=0, \\ F_\alpha(x,y,z;\alpha)=0. \end{cases} \tag{12}$$

例题 3.4 (动球面的包络面)**.** 设 α,β,γ 为常数, t 为参数, 求球面族

$$(x-t\cos\alpha)^2+(y-t\cos\beta)^2+(z-t\cos\gamma)^2=1 \tag{13}$$

的包络面方程.

4 几类常见的二次曲面

定义 4.1 (球面、椭球面)**.** 椭球面的标准方程为

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1(a,b,c>0), \tag{14}$$

特别地, 若 $a=b=c\equiv R$, 则椭球面退化为球面

$$x^2+y^2+z^2=R^2. \tag{15}$$

例题 4.1 (球面的方程)**.** 设 $\mathbb{R}^3$ 中平面 $x+3y+2z=6$ 与 x 轴交于点 A, 与 y 轴交于点 B, 与 z 轴交于点 C.

1. 求 ΔABC 的面积;

2. 求过点 A, B, C, O 的球面的方程.

定义 4.2 (旋转面)**.** 将平面曲线 $z = f(x)(x \geq 0)$ 绕 z 轴旋转所得的曲面方程为 $z = f(\sqrt{x^2+y^2})$. 例如将直线 $z = kx(x \geq 0)$ 绕 z 轴旋转, 得到单叶双曲面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1(a, b, c > 0) \tag{16}$$

的特例.

例题 4.2 (旋转面的性质)**.** 旋转面 $z = f(\sqrt{x^2+y^2})(f' \neq 0)$ 的法线与 z 轴相交.

定义 4.3 (锥面)**.** 给定平面曲线 Γ 与面外一点 M, 连接 M 与曲线 Γ 上的所有点, 即形成一个锥面, Γ 称为**准线**, M 称为**顶点**. 例如椭圆锥面

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z^2}{c^2}(a, b, c > 0). \tag{17}$$

例题 4.3 (锥面的性质)**.** 锥面 $f\left(\frac{hx}{z},\frac{hx}{y}\right)=0$ 的切平面经过其顶点 O.

注记 4.1. 给定准线 $\Gamma:\begin{cases}f(x,y)=0,\\ z=h\end{cases}$ 与顶点 O, 可以根据在点 (x_0,y_0,h) 处的母线方程 $\frac{x}{x_0}=\frac{y}{y_0}=\frac{z}{h}$, 写出锥面的方程 $f\left(\frac{hx}{z},\frac{hy}{z}\right)=0$.

定义 4.4 (柱面)**.** 柱面的一般方程为 $0=f(x,y)$, 由平面曲线 Γ 沿 z 轴平移得到. 例如椭球柱面

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1(a,b>0). \tag{18}$$

例题 4.4 (圆柱面的截口曲线)**.** 将圆柱面 $x^2+y^2=1$ 在平面 $x+z=1$ 与 $z=0$ 之间的部分展开成平面图形, 求该图形的面积.