1. 极限的证明与计算

SDS 高数小班课 (2024 秋)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2024-11-23

1 定义: 从序列到函数

定义 1.1 (ϵ-N 语言)**.** 给定序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. 若存在 A, 使得: 对于任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $N = N(\epsilon) \in \mathbb{N}$, 使得 $|a_n - a| < \epsilon$ 对一切 $n > N$ 成立, 则我们说序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是**收敛** (convergent) 的, A 为其**极限** (limit). 记作 $\lim_{n\to\infty} a_n = A$.

定义 1.2 (ϵ-δ 语言)**.** 给定函数 $f(x)$ 与点 x_0, 并假设其在去心邻域 $U(x_0)/\{x_0\}$ 上有定义. 若存在 A, 使得: 对于任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, 使得 $|f(x) - A| < \epsilon$ 对一切 $0 < |x - x_0| < \delta$ 成立, 则我们说函数 $f(x)$ 在点 x_0 处是**收敛** (convergent) 的, A 为其**极限** (limit). 记作 $\lim_{x\to x_0} f(x) = A$.

- 左极限 $\lim_{x\to x_0^+} f(x)$、右极限 $\lim_{x\to x_0^-} f(x)$ 的定义可相应给出.

定义 1.3 (ϵ-L 语言)**.** 给定函数 $f(x)$ 与点 x_0, 并假设其在区间 $(-\infty, -x_0) \cup (x_0, +\infty)$ 上有定义. 若存在 A, 使得: 对于任给的 $\epsilon > 0$, 总存在 $L = L(\epsilon) > 0$, 使得 $|f(x) - A| < \epsilon$ 对一切 $|x| > L$ 成立, 则我们说函数 $f(x)$ 在无穷远点 ∞ 是**收敛** (convergent) 的, A 为其**极限** (limit). 记作 $\lim_{x\to\infty} f(x) = A$.

- 单侧无穷远的极限 $\lim_{x\to+\infty} f(x)$ 与 $\lim_{x\to-\infty} f(x)$ 的定义可相应给出.

- 自变量只要足够接近某点 x_0, 函数 $f(x)$ 就会足够接近任意小的误差限 ϵ. 自变量的范围在上述定义中分别用 N, δ, L 来描述.
- 从定义出发证明极限, 一般使用**放缩法**, 适当放大 $|f(x) - A|$, 直到得出关于 N, δ, L 的不等式.

例题 1.1. 证明正弦函数是**连续**的: $\lim_{x\to x_0} \sin x = \sin x_0$.

注记 1.1. 三角函数的**和差化积**公式:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{1}$$
$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2}, \tag{2}$$
$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}, \tag{3}$$
$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}. \tag{4}$$

例题 1.2. (Cauchy 命题) 若 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$, 则前 n 项的算术平均值也收敛于 A, 即:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}a_k=A. \tag{5}$$

注记 1.2. 绝对值放缩的有力工具: **三角形不等式** (triangle inequality):

$$|a\pm b|\le|a|+|b|. \tag{6}$$

2 存在性准则与两个重要极限

定理 2.1 (夹逼准则)**.** 若三个序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty},\{b_n\}_{n=1}^{\infty},\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ 满足 $b_n\le a_n\le c_n$, 且 $\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}c_n=A$, 则 $\lim_{n\to\infty}a_n=A$.

- 函数 $f(x)$ 的夹逼准则可相应给出.

- 通常, 我们希望 $\{b_n\}$ 或 $\{c_n\}$ 的其中之一是常数序列.

例题 2.1. 证明极限 $\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$.

注记 2.1. 对整次幂进行放缩的有力工具: **二项式定理** (binomial theorem):

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k a^k b^{n-k}, \tag{7}$$

其中, **组合数** (combinatorial number) 定义为

$$\mathrm{C}_n^k \equiv \frac{n!}{(n-k)!k!}. \tag{8}$$

定理 2.2 (重要极限 1)**.** $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.

例题 2.2. 求极限 $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

定理 2.3 (单调有界准则)**.** 单调增且有上界的序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 是收敛的.

- 同理, 单调减且有下界的序列也是收敛的.

- 单调性确保其不会 “反复震荡”, 有界性确保其不会 “狂野生长”.

例题 2.3. 计算极限 $\lim_{n\to\infty} \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{\cdots+\sqrt{2}}}}_{n\text{ 重根式}}$.

注记 2.2. 对递推关系极为有用的**数学归纳法** (mathematical induction): 设有关于整数的命题 $p(n)$. 如果我们能证明如下两个命题成立, 则 $p(n)$ 就对一切 $n > n_0$ 成立:

1. 归纳基例: $p(n_0)$ 成立;
2. 归纳递推: 任给 $k > n_0$, 当 $p(k)$ 成立时, $p(k+1)$ 成立.

定理 2.4 (重要极限 2)**.** $\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^x = \mathrm{e}$.

例题 2.4. 求极限 $\lim_{x\to 0}\frac{a^x-1}{x}$ 与 $\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^\alpha-1}{x}$. 其中, $a,\alpha>0$.

注记 2.3. 至此, 我们已掌握以下几组常用的**等价无穷小** (equivalent infinitesimal), 可用于代换和化简乘积中的某些复杂部分:

1. $x \sim \sin x \sim \tan x \sim \ln(1+x) \sim \frac{1}{\ln a}(a^x - 1) \sim \frac{1}{\alpha}((1+x)^\alpha - 1)$;
2. $x^2 \sim 2(1-\cos x)$.

例题 2.5. 计算极限

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{x}{x-1}\right)^{x-3}. \tag{9}$$

3 未定式极限的计算方法

3.1 等价无穷小的代换

例题 3.1 (2024 考研数学一; 等价无穷小代换)**.** 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{(1+x^2)^{\sin x} - 1}{x^3}. \tag{10}$$

注记 3.1. 处理指数型复合函数 $(1+f(x))^{g(x)}$ 的常用手段是作如下的恒等变形:

$$(1+f(x))^{g(x)}-1=\mathrm{e}^{g(x)\ln(1+f(x))}-1\sim g(x)\ln(1+f(x)), \tag{11}$$

只要 $g(x)\ln(1+f(x))\to 0$.

3.2 L'Hôpital 法则

定理 3.1 (L'Hôpital 法则)**.** 若函数 $f(x),g(x)$ 在点 x_0 附近有定义, 且满足如下条件:

1. $\lim_{x\to x_0}f(x)=\lim_{x\to x_0}g(x)=0$;
2. 当 $x\to x_0$ 时, $g'(x)\neq 0$ 且 $\lim_{x\to x_0}\frac{f'(x)}{g'(x)}$ 存在;

则

$$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{f'(x)}{g'(x)}. \tag{12}$$

- 以上是 $\frac{0}{0}$ 型的未定式; 对于 $\frac{\infty}{\infty}$ 型的未定式可相应得出.

例题 3.2 (L'Hôpital 法则)**.** 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-\sin x}{\sin^3 x}. \tag{13}$$

注记 3.2. L'Hôpital 法则通常伴随着不必要且较大的计算量 (参考例题 3.1, 涉及隐函数求导技巧), 使用前请三思, 或做一些必要的 "洛前准备" (例如等价无穷小代换, 等等)!

注记 3.3. 分子或分母如果是减式, 则不能随意 "拆开代换", 否则有可能违背极限四则运算法则的存在性前提.

3.3 含有 Peano 余项的 Taylor 展开式

- 用 x^n 作为最基本的 "砌块", **以多项式展开近似复杂函数**.

定理 3.2 (Taylor 中值定理 (Peano 余项)). 一个在点 x_0 处 n 次可微的函数 $f(x)$ 满足

$$f(x)=\sum_{k=0}^{n}\frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k+o((x-x_0)^n). \tag{14}$$

- 几组常用的 Tylor 展开式 (一般记忆前两项就足够):

$$\sin x = x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5+\cdots, \tag{15}$$

$$\cos x = 1-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{24}x^4+\cdots, \tag{16}$$

$$\mathrm{e}^x = 1+x+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{6}x^3+\cdots. \tag{17}$$

例题 3.3 (2021 期末; 等价无穷小代换、Taylor 展开). 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan^4 x}{\sqrt{1-\frac{x\sin x}{2}}-\sqrt{\cos x}}. \tag{18}$$

注记 3.4. 分母有理化对 "根式差" 的形式较为有用.

例题 3.4 (2022 模拟; 等价无穷小代换、Taylor 展开). 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{x^2}{2}+1-\sqrt{1+x^2}}{\sin(x^2)(\cos x-\mathrm{e}^{x^2})}. \tag{19}$$

例题 3.5 (2022 模拟; L'Hôpital 法则、变上限积分)**.** 计算极限

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{1+\int_0^x \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^x-1}-\frac{1}{\sin x}\right). \tag{20}$$

4 基本初等函数的导数

定义 4.1 (导数的定义)**.** 函数 $f(x)$ 在点 x_0 处的**导数** (derivative) 定义为

$$f'(x)\equiv\frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}. \tag{21}$$

- 对数、指数、幂函数:

$$(a^x)'=a^x\ln a, \tag{22}$$

$$(\log_a x)'=\frac{1}{x\ln a}, \tag{23}$$

$$(x^\alpha)'=\alpha x^{\alpha-1}; \tag{24}$$

- 三角函数:

$$(\sin x)' = \cos x, \tag{25}$$
$$(\cos x)' = -\sin x, \tag{26}$$
$$(\tan x)' = \sec^2 x; \tag{27}$$

- 反三角函数:

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{28}$$
$$(\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \tag{29}$$
$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}; \tag{30}$$