2024-2025 学年高等数学 B2 期末参考解答

ccfrog

1. 讨论下列级数的敛散性:

   1. $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$;
   2. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}}$.

(14 分)

解答

1. 级数一般项 $u_n \equiv 2^n \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n^2}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} 2\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \frac{2}{\mathrm{e}} < 1, \tag{1}$$

   则由 Cauchy 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

2. 对任意正整数 $n \geq 2$, 成立不等式

$$\frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \geq \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}x}{x\sqrt{\ln x}} = 2\sqrt{\ln(n+1)} - 2\sqrt{\ln n}, \tag{2}$$

   而级数

$$\sum_{n=2}^{\infty} \left(2\sqrt{\ln(n+1)} - 2\sqrt{\ln n}\right) \tag{3}$$

   显然发散. 则由正项级数的比较审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散.

2. 判断下列级数是否收敛? 如果级数收敛, 是条件收敛还是绝对收敛?

   1. $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}$;
   2. $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}$.

(14 分)

解答

1. 注意到,

$$\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}+(-1)^n}\frac{\sqrt{n}-(-1)^n}{\sqrt{n}-(-1)^n}=\frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}+\frac{1}{n+1}. \tag{4}$$

由 Dirichlet-Abel 审敛法, $(-1)^n$ 的部分和有界, $\frac{\sqrt{n}}{n+1}$ 对于 $n \geq 1$ 单调且当 $n \to \infty$ 时收敛到 0, 则级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n\sqrt{n}}{n+1}$. 但级数 $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n+1}$ 发散, 所以原级数发散.

2. 原级数的一般项 $u_n = \frac{(-1)^{n-1}}{n^{1+\frac{1}{n}}}$. 其中, $(-1)^{n-1}$ 的部分和有界, 而

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}=0. \tag{5}$$

下面验证 $n^{1+\frac{1}{n}}$ 单调递增. 为此, 令

$$y=x^{1+\frac{1}{x}}\,(x\geq 1), \tag{6}$$

两边取对数后求导, 得到 (代入不等式 $\ln x < x$)

$$\frac{y'}{y}=\frac{1}{x}\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{\ln x}{x^2}>\frac{1}{x^2}>0. \tag{7}$$

所以, 由 Dirichlet-Abel 审敛法, 原级数收敛. 但对于 $|u_n| = \frac{1}{n^{1+\frac{1}{n}}}$, 由比较审敛法的极限形式,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n|}{\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}=1>0, \tag{8}$$

所以原级数并非绝对收敛, 而是条件收敛.

3. 求 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n+1}$ 的收敛半径、收敛区间、收敛域及和函数. (16 分)

解答 幂级数的一般项 $u_n(x) \equiv \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)}x^{2n+1}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=|x|^2\lim_{n\to\infty}\frac{(2n-1)(2n+1)}{(2n+1)(2n+3)}=|x|^2 \tag{9}$$

于是, 其收敛半径 $R = 1$, 收敛区间为 $(-1, 1)$. 而当 $x = \pm 1$ 时, 由 Dirichlet-Abel 审敛法容易得出, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pm(-1)^n}{4n^2-1}$ 收敛. 于是, 其收敛域为 $[-1, 1]$.

下面计算其和函数. 当 $x \in (-1, 1)$ 时, 对级数

$$\frac{1}{1+x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} x^{2n-2} \tag{10}$$

逐项求积分 $\int_0^x \mathrm{d}t$, 得到

$$\arctan x = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{2n-1} x^{2n-1}. \tag{11}$$

两边同乘 x 并再次逐项求积分 $\int_0^x \mathrm{d}t$, 即得

$$\frac{1}{2}\big((1+x^2)\arctan x - x\big) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)(2n+1)} x^{2n+1}. \tag{12}$$

4. 求积分 $I(a) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\big(a^2 \sin^2 x + \cos^2 x\big) \mathrm{d}x$, $a \neq 0$. (12 分)

解答 被积函数 $g(x,a) = \ln\big(a^2\sin^2 x + \cos^2 x\big)$ 在 $x \in \big(0, \frac{\pi}{2}\big)$ 时二元连续. 则由积分号下的微分法, 我们有

$$\begin{aligned} I'(a) &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\partial g(x,a)}{\partial a} \mathrm{d}x \\ &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{2a\sin^2 x}{a^2\sin^2 x + \cos^2 x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{a} - \frac{2}{a^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1-\sin^2 x}{\sin^2 x + \frac{1}{a^2}\cos^2 x} \mathrm{d}x \\ &= \frac{\pi}{a} + \frac{1}{a^2} I'(a) - \frac{2}{a^3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + \frac{1}{a^2}\cos^2 x}, \end{aligned} \tag{13}$$

其中,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\mathrm{d}x}{\sin^2 x + \frac{1}{a^2}\cos^2 x} = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2 + \frac{1}{a^2}} = \frac{\pi}{2} a, \tag{14}$$

从而解得

$$I'(a) = \frac{\pi}{a+1}, \tag{15}$$

即 $I(a) = \pi \ln(a+1) + C$. 代入 $I(1) = 0$, 解得 $C = -\pi \ln 2$. 所以,

$$I = \pi \ln \frac{a+1}{2}. \tag{16}$$

5. 判断广义积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(\sin^2 x)^\alpha}$ $(0<\alpha<\frac{1}{2})$ 的敛散性. (12 分)

解答 被积函数的全体瑕点构成集合 $X\equiv\{k\pi|k\in\mathbb{N}\}$. 记

$$u_k\equiv\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)\sin^{2\alpha}x}. \tag{17}$$

1. 首先, 由于
$$\lim_{x\to k\pi}\frac{\frac{1}{(1+x^2)\sin^{2\alpha}x}}{(x-k\pi)^{2\alpha}}=\frac{1}{1+k^2\pi^2}<+\infty, \tag{18}$$
且当 $0<\alpha<\frac{1}{2}$ 时, 瑕积分 $\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{(x-k\pi)^{2\alpha}}$ 收敛, 所以, 由比较审敛法, 每个 u_k 都收敛.

2. 其次, 注意到对任给的 $k\in\mathbb{N}$, 我们有
$$u_k\le\frac{1}{1+k^2\pi^2}\int_{k\pi}^{(k+1)\pi}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2\alpha}x}=\frac{2}{1+k^2\pi^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2\alpha}x}\equiv\frac{2I}{1+k^2\pi^2}, \tag{19}$$
其中, $I\equiv\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\mathrm{d}x}{\sin^{2\alpha}x}<+\infty$ 为常数. 而级数 $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{2I}{1+k^2\pi^2}$ 显然收敛, 所以,
$$\int_0^{+\infty}\frac{\mathrm{d}x}{(1+x^2)(\sin^2 x)^\alpha}=\sum_{k=0}^{\infty}u_k \tag{20}$$
也收敛.

6. 讨论积分 $\int_1^{+\infty}t\mathrm{e}^{-tx}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 在区间 $0\le t<+\infty$ 上的一致收敛性. (12 分)

解答

1. 对任意实数 $A>1$, 积分 $\int_1^A\cos x\,\mathrm{d}x$ 一致有界.

2. 当 $t\ge0$ 时, 函数 $f_t(x)=\frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{x}$ 关于 x 单调递减. 下面证明: 当 $x\to\infty$ 时, $f_t(x)$ 一致收敛到 0. 这是因为, 对任给的 $\epsilon>0$, 只需 $x>\frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$, 即由不等式 $\mathrm{e}^{tx}>tx$ 得到
$$|f_t(x)-0|=\frac{t\mathrm{e}^{-tx}}{x}<\frac{1}{x^2}<\epsilon. \tag{21}$$

所以, 由 Dirichlet-Abel 审敛法, 积分 $\int_1^{+\infty}t\mathrm{e}^{-tx}\frac{\cos x}{x}\mathrm{d}x$ 在区间 $0\le t<+\infty$ 上一致收敛.

7. 设 $f(x)$ 是以 2π 为周期的函数, 且 $f(x)=|x|$, $x\in[-\pi,\pi]$. 求出 $f(x)$ 的傅氏级数及其和函数, 并求级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的和. (20 分)

解答 注意到, $f(x)$ 为偶函数, 不妨设其 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx), \tag{22}$$

于是, 对 $n>0$ 有

$$\begin{aligned} a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{2}{\pi}\int_0^{\pi}x\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\ &=\frac{2}{n^2\pi}\left((-1)^n-1\right)=\begin{cases}-\frac{4}{(2m-1)^2\pi}, & n=2m-1,\\ 0, & n=2m,\end{cases}\end{aligned} \tag{23}$$

且 $a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|\,\mathrm{d}x=\pi$. 所以, $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{\pi}{2}-\sum_{m=0}^{\infty}\frac{4}{(2m+1)^2\pi}\cos((2m+1)x). \tag{24}$$

因为 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且分段单调, 所以由 Dirichlet 定理, 其 Fourier 级数处处收敛到 $f(x)=|x|$.

由 Parseval 等式,

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|x|^2\,\mathrm{d}x=\frac{\pi^2}{2}+\frac{16}{\pi^2}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4}, \tag{25}$$

所以

$$\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4}=\frac{\pi^4}{96}, \tag{26}$$

进而

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\sum_{m=0}^{\infty}\frac{1}{(2m+1)^4}+\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{(2l)^4}=\frac{\pi^4}{96}+\frac{1}{16}\sum_{l=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}, \tag{27}$$

解得

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}=\frac{\pi^4}{90}. \tag{28}$$