5．一阶常微分方程

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2025.4.9

1 线性方程

定义 1.1 (一阶线性微分方程)**.**

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x), \tag{1}$$

在初等解法中, 假设 P, Q 总在 (a, b) 上连续. 特别地, $Q(x) \equiv 0$ 的方程为**齐次的** (homogeneous).

1.1 各类方程的求解方法

例题 1.1 (齐次情形)**.** 某质点 m 在运动时所受的空气阻力正比于速率: $f = -kv(k > 0)$. 设该质点的初速度为 $v_0(> 0)$, 计算其于 t 时刻的运动速度 $v = v(t)$.

注记 1.1. 齐次方程 $y' + P(x)y = 0$ 的通解可以写为函数族

$$y(x) = C \exp\left\{-\int^x P(t)\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{2}$$

证明方法是: 验证 $Y(x) \equiv y(x) \exp\left\{\int^x P(t)\,\mathrm{d}t\right\}$ 的导数恒为零, 即 $Y(x)$ 为常函数.

例题 1.2 (非齐次情形)**.** 设 $x > 0$. 求解初值问题

$$\begin{cases} x\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + 2y = \sin x, \\ y(\pi) = \frac{1}{\pi}. \end{cases} \tag{3}$$

注记 1.2. 对于非齐次方程 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)$, 我们使用*常数变易法* (variation of constant). 分为两个步骤:

1. 求解 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = 0$, 得到齐次部分的通解 y^0;
2. 将任意常数 C_1 换成 $u(x)$ 并回代原方程. 此时将很容易根据 u' 反解 u, 从而得到非齐次部分的特解 y^*.

一个非齐次方程的通解将等于齐次通解 y^0 与非齐次特解 y^* 之和, 可写为函数族

$$\begin{aligned} y(x) &= y^0 + y^* \\ &= \left(\int^x Q(t) \exp\left\{\int^t P(s)\,\mathrm{d}s\right\} \mathrm{d}t + C\right) \exp\left\{-\int^x P(t)\,\mathrm{d}t\right\}. \end{aligned} \tag{4}$$

例题 1.3 (Bernoulli 方程)**.** 求解初值问题

$$\begin{cases} \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + y = y^2(\sin x - \cos x), \\ y(0) = 1. \end{cases} \tag{5}$$

注记 1.3. 对常数 $\alpha \neq 1$, 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} + P(x)y = Q(x)y^\alpha$ 的方程称为 *Bernoulli 方程*. 若两边同除以 α, 并作代换 $z \equiv y^{1-\alpha}$, 则 Bernoulli 方程将被化为关于 $z = z(x)$ 的线性方程

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} + (1-\alpha)P(x)z = (1-\alpha)Q(x). \tag{6}$$

1.2 应用类问题

例题 1.4 (切线的几何关系)**.** 设曲线 $y = y(x)\,(x > 0)$ 经过点 $(1, 2)$, 该曲线上任意一点 $P(x, y)$ 到 y 轴的距离等于该点处的切线在 y 轴上的截距.

1. 求 $y(x)$;
2. 求函数 $f(x) = \int_1^x y(t)\,\mathrm{d}t$ 在 $(0, +\infty)$ 上的最大值.

例题 1.5 (周期解)**.** $P(x), Q(x)$ 是定义在 $\mathbb{R}$ 上以 $T > 0$ 为周期的函数. 若 $\int_0^T P(t)\,\mathrm{d}t \neq 0$, 证明: 一阶线性方程 $y' + P(x)y = Q(x)$ 存在唯一的以 T 为周期的解.

注记 1.4. 一阶线性方程存在通解公式, 所以解的唯一存在性证明可以用构造法完成.

2 其它解法 (I): 变量分离

定理 2.1 (可分离变量的一阶方程)**.** 设 $g(y) \neq 0$. 形如

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x)g(y) \tag{7}$$

的方程具有通积分

$$\int^y \frac{\mathrm{d}t}{g(t)} = \int^x f(t)\,\mathrm{d}t. \tag{8}$$

- 设若 $g(y)$ 存在零点 y_0, 则常函数 $y(x) \equiv y_0$ 将为该方程的**奇解** (singular solution).

2.1 各类方程的求解方法

例题 2.1 (变量分离)**.** 求下面常微分方程的所有解: $y' = xy + 3x + 2y + 6$.

例题 2.2 (线性代换)**.** 求下面常微分方程的所有解: $y' = (8x + 2y + 1)^2$.

注记 2.1. 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(ax + by + c)$ 的微分方程 $(b \neq 0)$, 可在代换 $z \equiv ax + by + c$ 后对新方程 $\frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x} - \frac{a}{b} = f(z)$ 应用分离变量法:

$$\int^z \frac{\mathrm{d}t}{a + bf(t)} = x + C, \tag{9}$$

并注意检验奇解 $a + bf(z) \equiv 0$.

例题 2.3 (齐次代换)**.** 求下面常微分方程的所有解: $xy' + y = 2\sqrt{xy}$.

注记 2.2. 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=h\left(\frac{y}{x}\right)$ 的微分方程, 可在代换 $u\equiv\frac{y}{x}$ 后对新方程 $x\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}x}+u=h(u)$ 应用分离变量法:

$$\int^u \frac{\mathrm{d}t}{h(t)-t}=\ln|x|+C, \tag{10}$$

并注意检验奇解 $x\equiv 0$ 与 $h(u)-u\equiv 0$.

例题 2.4 (线性分式代换: 线性相关)**.** 求下面常微分方程的所有解: $y'=\frac{2x+y+1}{4x+2y-3}$.

注记 2.3. 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{ax+by+c_1}{\lambda ax+\lambda by+c_2}\right)$ 的微分方程, 实质上是线性代换类方程的一种, 可在代换 $z\equiv ax+by$ 后对新方程 $\frac{1}{b}\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{a}{b}=f\left(\frac{z+c_1}{\lambda z+c_2}\right)$ 应用分离变量法:

$$\int^z \frac{\mathrm{d}t}{a+bf\left(\frac{z+c_1}{\lambda z+c_2}\right)}=x+C, \tag{11}$$

并注意检验奇解 $a+bf\left(\frac{z+c_1}{\lambda z+c_2}\right)=0$.

例题 2.5 (线性分式代换: 线性无关)**.** 求下面常微分方程的所有解: $y'=2\left(\frac{y+2}{x+y-1}\right)^2$.

注记 2.4. 形如 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}=f\left(\frac{a_1x+b_1y+c_1}{a_2x+b_2y+c_2}\right)$ 的微分方程, 其中 $\begin{vmatrix}a_1 & a_2\\ b_1 & b_2\end{vmatrix}\neq 0$, 实质上是齐次代换类方程的一种. 若解得分子、分母的零点分别为 (x_0,y_0), 则可在代换 $z\equiv\frac{v}{u}\equiv\frac{y-y_0}{x-x_0}$ 后对新方程 $u\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}u}+z=f\left(\frac{a_1+b_1z}{a_2+b_2z}\right)$ 应用变量分离法:

$$\int^z \frac{\mathrm{d}t}{f\left(\frac{a_1+b_1t}{a_2+b_2t}\right)-t}=\ln|u|+C. \tag{12}$$

2.2 应用类问题

例题 2.6 (切线的几何关系)**.** 假设平面直角坐标系第一象限中有一条曲线

$$L=\{(x,y(x))|x\geq 0\}, \tag{13}$$

其中 $y(0)=1$, $y(x)$ 是严格递减的、正的可导函数. 任取 L 上一点 M, L 在 M 点的切线交 x 轴于点 A. 假定从 M 到 A 的直线段的长度恒为 1. 求出 $y=y(x)$ 所满足的一阶常微分方程, 并且解出这个方程的初值问题 $y(0)=1$.

例题 2.7 (简单的变限积分方程)**.** 求出所有的可导函数 $f(x):\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, 满足

$$f(x)=\int_0^1\left(f(tx)+\frac{1}{f(tx)}\frac{1+(f(tx))^2}{1+t^2x^2}\right)\mathrm{d}t. \tag{14}$$

注记 2.5. 设 a,b 为常数. 形如

$$y(x)=\int_a^b F(tx)\,\mathrm{d}t \tag{15}$$

的积分方程, 若两边同时乘以 x 再取导数, 即可 (根据换元积分与变限积分求导公式) 得

到微分方程

$$xy' + y = F(ax) - F(bx). \tag{16}$$

3 其它解法 (II): 恰当微分

定义 3.1 (恰当微分方程)**.** 设 P, Q 为定义在一个区域 D 上的光滑函数. 若存在可微函数 u 使得 $\mathrm{d}u = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$, 则称微分方程

$$0 = P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y \tag{17}$$

为**恰当微分** (exact differential) 方程.

- 恰当微分方程的通积分为 $u(x, y) = C$.

例题 3.1 (恰当微分方程)**.** 求下面常微分方程的所有解: $(1 + x\sqrt{x^2 + y^2})\,\mathrm{d}x + (-1 + \sqrt{x^2 + y^2})y\,\mathrm{d}y = 0$.

注记 3.1. 根据曲线积分的路径无关性, 微分式 $P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$ 为恰当微分的充要条件是 $Q_x = P_y$. 若满足该条件, 则根据计算原函数的 "两步法"

$$u(x, y) = \phi(y) + \int P(x, y)\,\mathrm{d}x, \tag{18}$$

$$\phi'(y) = Q(x, y) \tag{19}$$

即可给出原函数 $u(x, y)$, 进而给出通积分.

例题 3.2 (积分因子)**.** 求下面常微分方程的所有解: $(x^2 + y)\,\mathrm{d}x - x\,\mathrm{d}y = 0$.

注记 3.2. 对于单变量积分因子, 例如 $\mu(x)$, 我们可以对原方程 $0 = M\,\mathrm{d}x + N\,\mathrm{d}y$ 给出一个关于 $\mu(x)$ 的微分方程:

$$0 = \frac{\partial(\mu N)}{\partial x} - \frac{\partial(\mu M)}{\partial y} = \left(\frac{\partial N}{\partial x} - \frac{\partial M}{\partial y}\right)\mu(x) + N(x, y)\mu'(x). \tag{20}$$

若 $F(x) \equiv \frac{1}{N}(M_y - N_x)$ 为关于 x 的单变量函数, 即可解得

$$\mu(x) = \exp\left\{\int^x F(t)\,\mathrm{d}t\right\}. \tag{21}$$

此时, 原方程两边同乘 $\mu(x)$, 将给出一个恰当微分方程.

一阶微分方程的求解方法总览

1. 尝试将方程写为 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = f(x, y)$ 的形式.
2. 一些特殊情形的 $f(x, y)$...
    - 若关于 y 是线性函数: 使用一阶线性方程的通解公式;

- 若关于 y 仅含 y^α 一个非线性项: 为 *Bernoulli 方程*, 转化为线性方程;
- 若可以因式分解/变量分离: 采用*变量分离法* (线性代换、分式代换、……).

3. 若以上方法均不奏效, 则不妨尝试*恰当微分 (与积分因子) 法*.

Snacks

Brownian 运动、涨落与耗散 [Phys]

经过若干实验观察的数据积累后, Guoy 于 1888 年指出了关于 *Brownian 运动* (“花粉粒悬浮在水面上的运动”) 的一些事实, 例如轨迹曲线光滑可导、彼此独立、运动永不停息 (活性随着液体黏度减少、粒子半径减小、温度升高等因素而增大), 等等. 而 Langevin 提出的方程 (一维情形)

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\gamma v + f(t) \tag{22}$$

首次对其作出了动力学诠释. 其中, 质点的运动受到黏滞阻力 (大小为 γv, 反向于速度) 和一个我们 ‘‘几乎一无所知’’ 的随机力 $f(t)$.

Ornstein 与 Uhlenbeck 对随机力函数 $f(t)$ 定义了两条关键的统计性质. 令 $\beta \equiv \frac{\gamma}{m}, A(t) \equiv \frac{f(t)}{m}$, 我们给出 Langevin 方程的去量纲化版本

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -\beta v + A(t), \tag{23}$$

并规定 $A(t)$ 的两条性质: (1) 各向同性, 即均值函数 $\langle A(t)\rangle = 0$; (2) 短时相关性, 即自相关函数 $\langle A(t_1)A(t_2)\rangle \equiv \phi(t_2 - t_1)$ 随着 $|t_2 - t_1|$ 的增大而极快速地衰减. 这类微分方程因含有随机项而被称为*随机微分方程* (stochastic differential equation), 在许多自然科学与工程等领域应用广泛.

事实上, 我们可以将自相关函数写为常数 Γ 与*广义函数* (generalized function) 的乘积:

$$\phi(t_2 - t_1) \equiv \Gamma\delta(t_2 - t_1), \tag{24}$$

其中 $\delta(t)$ 看起来有些 ‘‘奇特”, 满足如下条件:

$$\begin{cases} \delta(x) = 0, & x \neq 0, \\ \delta(0) = +\infty, & x = 0, \end{cases} \tag{25}$$

且

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \delta(t)\,\mathrm{d}t = 1. \tag{26}$$

广义函数并不能按照通常意义上的函数去理解, 而应当理解为*函数序列的极限*. 这超出了高等数学 B 的课程要求, 我们在本节的讨论将直接不加证明或解释地使用上述结果.

根据常数变易法, 不难给出 (23) 在初值条件 $v(0) = v_0$ 时的特解

$$v(t) = v_0\mathrm{e}^{-\beta t} + \mathrm{e}^{-\beta t}\int_0^t \mathrm{e}^{\beta\tau}A(\tau)\,\mathrm{d}\tau. \tag{27}$$

两边平方并取 (随机力意义的) 平均值, 容易给出

$$
\begin{aligned}
\left\langle v^2(t)\right\rangle &= v_0^2\mathrm{e}^{-2\beta t}+\Gamma\mathrm{e}^{-2\beta t}\int_0^t \mathrm{d}\tau\int_0^t \mathrm{d}\eta\, \mathrm{e}^{\beta(\tau+\eta)}\delta(\tau-\eta) \\
&= v_0^2\mathrm{e}^{-2\beta t}+\frac{\Gamma}{2}\mathrm{e}^{-2\beta t}\int_0^{2t}\mathrm{e}^{\beta\xi}\,\mathrm{d}\xi\int_{-t}^{t}\delta(\zeta)\,\mathrm{d}\zeta \\
&= v_0^2\mathrm{e}^{-2\beta t}+\frac{\Gamma}{2\beta}\left(1-\mathrm{e}^{-2\beta t}\right).
\end{aligned} \tag{28}
$$

注意到

$$
\lim_{t\to+\infty}\left\langle v^2(t)\right\rangle=\frac{\Gamma}{2\beta}, \tag{29}
$$

则在长时极限下 Brownian 运动将维持稳定的速度. 这种稳定状态, 是 “生命力” (随机力, 由 Γ 表征) 和 “耗散力” (黏滞阻力, 由 β 表征) 二者相互对抗且达到平衡的结果, 是*涨落-耗散定理* (fluctuation-dissipation theorem) 的一种表述形式.

隐式神经网络 [AI]

多数我们熟悉的深度神经网络总是写为*显函数*

$$
f:\mathcal{X}\to\mathcal{Z}, f(\mathbf{x})=\mathbf{z} \tag{30}
$$

的形式 (例如 MLP、CNN、RNN, 给定从输入到输出的一系列显式运算). 而*隐式神经网络* (implicit neural networks) 以二元函数 $g:\mathcal{X}\times\mathcal{Z}\to\mathbb{R}^n$ 的方程来定义一个一元隐函数 $g(\mathbf{x},\mathbf{z})=\mathbf{0}$. 隐式映射相比于显式映射有如下两条优势:

- 将对映射的*定义方法与计算/求解方法*解耦, 求解器的选择更多样.
- 根据*隐函数定理*, 在进行梯度计算与参数优化时, 更节约内存.

基于微分方程

$$
\frac{\mathrm{d}\mathbf{y}}{\mathrm{d}t}=\mathbf{f}_\theta(\mathbf{y}(t),t) \tag{31}
$$

的隐式映射 $\mathbf{y}(0)\mapsto\mathbf{y}(T)$ 就是隐式神经网络的一个典型例子, 称为*神经常微分方程* (neural ODE). 其中, θ 为神经网络的可训练参数. 我们可以针对具体问题选择不同的数值求解器, 对同一神经网络架构给出不同的计算结果. 中间时刻 t 还可以给出从输入到输出的连续变换细节.