11. Fourier 分析

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2025.6.7

定理 0.1 (三角函数系的正交归一性)**.** 三角函数系

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2}}, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, \cdots\right\} \tag{1}$$

对于 $x \in [-\pi, \pi]$ 具有**正交归一性** (orthonormality).

1 周期函数的 Fourier 级数展开

定义 1.1 (Fourier 级数)**.** 设函数 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期 $(l > 0)$, 且在 $[-l, l]$ 上有界可积. 序列

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, & (n = 0, 1, \cdots), \\ b_n = \frac{1}{l}\int_{-l}^{l} f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\,\mathrm{d}x, & (n = 1, 2, \cdots) \end{cases} \tag{2}$$

给出了函数 $f(x)$ 的 **Fourier 系数** (Fourier coefficients). 此时, 如下的三角级数

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{n\pi}{l}x + b_n\frac{n\pi}{l}x\right) \tag{3}$$

称为 $f(x)$ 的 **Fourier 级数** (Fourier series).

定理 1.1 (Dirichlet 定理: 收敛条件)**.** 设函数 $f(x)$ 以 $2l$ 为周期 $(l > 0)$, 且在 $[-l, l]$ 上分段连续且分段单调, 则 $f(x)$ 的 Fourier 级数在任意一点 $x \in \mathbb{R}$ 处均收敛到和函数

$$S(x) = \frac{f(x^+) + f(x^-)}{2}. \tag{4}$$

例题 1.1 (Fourier 级数及其和函数)**.** 解答下列问题.

1. 设 $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数, $f(x)$ 在 $(-\pi, \pi]$ 上等于 e^x. 求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 并且求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x = \pi$ 处的和.

2. 求出级数
$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{1+n^2} \tag{5}$$
的和.

例题 1.2 (奇偶性)**.** 设 2π 周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为 $f(x) = x^2$, 求 $f(x)$ 所对应的 Fourier 级数及其和函数, 并给出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}$ 的值.

例题 1.3 (周期延拓与对称化延拓)**.** 求函数 $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ $(0 \le x \le 2\pi)$ 的正弦级数展开, 并给出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n}{n}$ 的值.

注记 1.1. 对定义在 $[0, l]$ 上的函数先作奇延拓或偶延拓, 再作周期延拓, 即可像周期函数那样研究它的 Fourier 级数展开与收敛性质.

例题 1.4 (Fourier 级数逼近)**.** 解答下列问题.

1. 设 p 是非整数的实数, $(-\infty,+\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 它在 $[-\pi,\pi)$ 上等于 $\cos(px)$. 求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 及其和函数.
2. 明确写出从上面 (1) 中的 $\cos(px)$ 的 Fourier 展开式推出下面等式的详细推导过程: 当 $t\in\mathbb{R}$, $\frac{t}{\pi}$ 不是整数时, 有

$$\frac{1}{\sin t}=\frac{1}{t}+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\left(\frac{1}{t+n\pi}+\frac{1}{t-n\pi}\right). \tag{6}$$

3. 明确写出从上面 (2) 中 $\frac{1}{\sin t}$ 的展开式推出下面等式的详细推导过程:

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x=\frac{\pi}{2}. \tag{7}$$

2 Parseval 等式

定理 2.1 (Parseval 等式: 渐近精确)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上有界可积, 则成立 **Parseval 等式**:

$$\frac{a_0^2}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n^2+b_n^2)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{8}$$

- 这表征了三角函数系的完备性: 特定条件下, 可以用三角函数系的线性组合表示任意有界可积函数.

例题 2.1 (函数平方的积分)**.** 根据例题1.2的结果, 给出级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}$ 的值.