专题班讲义答案合集

SDS 高数小班课 (2025 春)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

1 无穷级数的审敛法

1.1 常数项级数

例题 1.1.1 (调和级数的发散性)**.** 证明: 调和级数 $S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ 发散.

解答. 考虑有限子序列的和

$$|S_{n+p} - S_n| = \sum_{k=n+1}^{n+p} \frac{1}{k}. \tag{1.1}$$

当 $p = n$ 时, 有

$$|S_{2n} - S_n| = \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{k} \geq \sum_{k=n+1}^{2n} \frac{1}{2n} = \frac{1}{2}. \tag{1.2}$$

根据 Cauchy 收敛准则, S_n 发散.

1.1.1 正项级数的比较审敛

例题 1.1.2 (以等比级数为比较基准)**.** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 的敛散性.

解答. 由于

$$\frac{n^n}{n!} = \frac{n \cdot n \cdots n}{n \cdot (n-1) \cdots 1} \geq 1, \tag{1.3}$$

而 $\sum_{n=1}^{\infty} 1$ 发散, 所以 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^n}{n!}$ 发散.

例题 1.1.3 (以 p-级数为比较基准)**.** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \ln\left(\cos \frac{\pi}{n}\right)$ 的敛散性.

解答. 记 $v_n \equiv \frac{1}{n^2}$, 则级数的一般项 $u_n \equiv \ln\left(\cos \frac{\pi}{n}\right)$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\left(\cos \frac{\pi}{n}\right)}{\frac{1}{n^2}} = \lim_{n\to\infty} \frac{-\frac{\pi^2}{2n^2}}{\frac{1}{n^2}} = -\frac{\pi^2}{2} > -\infty, \tag{1.4}$$

所以, 根据比较审敛法的极限形式, 以及 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 的收敛性, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

练习 1.1 (比较审敛与放缩法)**.** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)}$ 的敛散性.

解答. 由已知, 级数的一般项满足

$$u_n \equiv \frac{3\sqrt[5]{n}+1}{(\sqrt[4]{n}+n)(\sqrt[3]{n}+n)} < \frac{3\sqrt[5]{n}+\sqrt[5]{n}}{(0+n)(0+n)} = 4n^{-\frac{9}{5}}, \tag{1.5}$$

而级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 4n^{-\frac{9}{5}}$ 收敛, 所以级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例题 1.1.4 (基于等比级数的比较审敛法)**.** 讨论级数

$$\sqrt{2} + \sqrt{2-\sqrt{2}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}} + \sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{2}}}} + \cdots \tag{1.6}$$

的敛散性.

解答. 记 $a_n \equiv \sqrt{2+\sqrt{2+\cdots}}$ 满足递推关系

$$\begin{cases} a_n = \sqrt{2+a_{n-1}}, \\ a_0 = 1 \end{cases} \tag{1.7}$$

于是, 级数的一般项可写为 $u_n = \sqrt{2-a_n}$. 容易证明, $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递增且有上界, 其极限 $A=2$. 所以,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{2-a_{n+1}}}{\sqrt{2-a_n}} = \lim_{n\to\infty}\sqrt{\frac{2-a_{n+1}}{4-a_{n+1}^2}} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\sqrt{2+a_{n+1}}} = \frac{1}{2} < 1. \tag{1.8}$$

由 d'Alembert 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

例题 1.1.5 (基于 p-级数的比较审敛法)**.** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+p}}$ (其中 $p > \frac{3}{2}$) 的敛散性.

解答. 由已知, 级数的一般项 $u_n \equiv \frac{n!\mathrm{e}^n}{n^{n+p}}$ 满足

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = (n+1)\mathrm{e}\frac{n^{n+p}}{(n+1)^{n+1+p}} = \frac{\mathrm{e}}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^p}, \tag{1.9}$$

此时, d'Alembert 审敛法失效, 因为 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n} = 1$. 考虑 Raabe 审敛法:

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{u_n}{u_{n+1}} - 1\right) &= \lim_{n\to\infty} n\left(\frac{1}{\mathrm{e}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+p} - 1\right) \\ &= \lim_{x\to 0_+}\frac{\frac{1}{\mathrm{e}}(1+x)^{\frac{1}{x}+p} - 1}{x} \\ &= \lim_{x\to 0_+}\left(p + \frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2}\right) \\ &= p - \frac{1}{2} \\ &> 1. \end{aligned} \tag{1.10}$$

所以, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

练习 1.2 (d'Alembert 审敛法)**.** 求幂级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n^3}}{10^n}$ 的收敛域.

解答.

1. 考虑 d'Alembert 审敛法:

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right| = \frac{1}{10}\lim_{n\to\infty}|x|^{3n^2+3n+1} = \begin{cases} 0, & |x|<1, \\ \frac{1}{10}, & |x|=1, \\ +\infty, & |x|>1. \end{cases} \tag{1.11}$$

于是, 原级数的收敛半径 $R=1$, 收敛区间为 $(-1,1)$.

2. 当 $x=\pm 1$ 时, 我们有 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{|x|^{n^3}}{10^n} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{10^n} = \frac{1}{9}$. 此时, 原级数绝对收敛.

3. 综上, 原级数的收敛域为 $[-1,1]$.

练习 1.3 (Cauchy 审敛法)**.** 讨论级数 $\sum_{n=2}^{\infty}\left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2-n}$ 的敛散性.

解答. 由已知, 级数的一般项 $u_n \equiv \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n^2-n}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n-1}{n+1}\right)^{n-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1+\frac{2}{n-1}\right)^{n-1}} = \frac{1}{\mathrm{e}^2} < 1. \tag{1.12}$$

由 Cauchy 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

1.1.2 绝对收敛的任意项级数

例题 1.1.6 (绝对收敛级数)**.** 证明: $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$ 绝对收敛.

解答. 级数的一般项 $u_n \equiv (-1)^n \left(1-\cos\frac{1}{n}\right)$, 则 $|u_n| = 1-\cos\frac{1}{n}$. 于是,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|u_n|}{\frac{1}{n^2}} = \frac{1}{2} < +\infty, \tag{1.13}$$

从而由比较审敛法的极限形式以及 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ 的收敛性, 可知 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 绝对收敛.

1.1.3 条件收敛的任意项级数

例题 1.1.7 (Dirichlet-Abel 审敛法)**.** 判别级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(2n)}{n+\frac{1}{n}} \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 的敛散性.

解答. 记 $a_n \equiv \sin(2n), b_n \equiv \frac{1}{n+\frac{1}{n}}, c_n \equiv \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, 则原级数的一般项 $u_n = a_n b_n c_n$.

1. 首先证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛.

   (a) 注意到

   $$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \sin(2k) &= \frac{2\sin 1 \sum_{k=1}^{n} \sin(2k)}{2\sin 1} \\ &= \frac{\sum_{k=1}^{n} (\cos(2k-1) - \cos(2k+1))}{2\sin 1} \\ &= \frac{\cos 1 - \cos(2n+1)}{2\sin 1},\end{aligned} \tag{1.14}$$

   所以, 序列 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和有界.

   (b) 注意到 $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$, 且

   $$\begin{aligned}b_{n+1}^{-1} - b_n^{-1} &= \left(n+1+\frac{1}{n+1}\right) - \left(n+\frac{1}{n}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{n(n+1)} \\ &\geq 0,\end{aligned} \tag{1.15}$$

   即 $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减. 由 Dirichlet-Abel 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 收敛.

   (c) 注意到 c_n 单调递增且有界 ($<\mathrm{e}$). 由 Dirichlet-Abel 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n c_n$ 也即 $\sum_{n=1}^{\infty}$ 收敛.

2. 下面证明 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 条件收敛, 即 $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散. 为此, 注意到

$$|\sin(2n)| \geq \sin^2(2n) = \frac{1-\cos(4n)}{2}, \tag{1.16}$$

从而

$$|u_n| \geq \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2\left(n+\frac{1}{n}\right)} - \frac{\cos(2n)}{2\left(n+\frac{1}{n}\right)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n. \tag{1.17}$$

其中, 由于

$$\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{\left(n+\frac{1}{n}\right)} \geq \frac{1}{n+\frac{1}{n}} \geq \frac{1}{n+n} = \frac{1}{2n}, \tag{1.18}$$

则 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}{2\left(n+\frac{1}{n}\right)}$ 发散. 用与 (1.14) 类似的方法, 不难证明 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{2\left(n+\frac{1}{n}\right)}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ 收敛. 所以, $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ 发散.

练习 1.4 (绝对收敛与条件收敛)**.** 设常数 $p > 0$, 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^p}$ 的敛散性 (绝对收敛、条件收敛).

解答. 当 $p > 1$ 时, 注意到

$$\left|\frac{\sin n}{n^p}\right| \leq \frac{1}{n^p}, \tag{1.19}$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 收敛, 则原级数绝对收敛. 当 $p \leq 1$ 时,

1. 一方面, $\{\sin n\}_{n=1}^{\infty}$ 的部分和有界, 且 $u_n = \frac{1}{n}$ 单调递减并满足 $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$, 则由 Dirichlet-Abel 审敛法, 原级数收敛.

2. 另一方面, 注意到

$$\frac{|\sin n|}{n^p} \geq \frac{\sin^2 n}{n^p} = \frac{1-\cos(2n)}{2n^p}, \tag{1.20}$$

且级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ 发散、$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(2n)}{n^p}$ 收敛, 则原级数不绝对收敛 (也即条件收敛).

综上, 原级数在 $p > 1$ 时绝对收敛, 在 $0 < p \leq 1$ 时条件收敛.

1.2 函数项级数的审敛

1.2.1 函数序列的一致收敛性

例题 1.2.1 (函数序列的一致收敛性)**.** 讨论函数序列 $f_n(x) = \left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{x^2}$, $n = 1, 2, \cdots$ 在 $x \in (0, +\infty)$ 上的一致收敛性.

解答. 显然, $f_n(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上收敛到极限函数 $f(x) \equiv 1$. 但若取点列 $x_n \equiv n^{\frac{1}{4}}$, 则

$$\lim_{n\to\infty} |f_n(x_n) - f(x_n)| = \lim_{n\to\infty} \left|\left(1-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\sqrt{n}} - 1\right| = 1 - \mathrm{e}^{-1} > 0, \tag{1.21}$$

所以 $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $(0, +\infty)$ 上不一致收敛.

1.2.2 函数项级数的逐点收敛

例题 1.2.2 (点审敛)**.** 讨论级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin^n x}{1+\sin^{2n} x}$, $x \in (-\infty, +\infty)$ 的绝对收敛性和条件收敛性.

解答. 1. 若 $x \in K_0 \equiv \{k\pi | k \in \mathbb{Z}\}$, 显然级数 $\sum_{n=1}^{\infty} 0 = 0$ 绝对收敛.

2. 若 $x \notin K_0$, 则注意到一般项 $u_n \equiv \frac{\sin^n x}{1+\sin^{2n} x}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{u_{n+1}}{u_n} \right| = \lim_{n\to\infty} |\sin x| \frac{1+\sin^{2n+2} x}{1+\sin^{2n} x} = |\sin x|. \tag{1.22}$$

   (a) 若 $x \in K_1 \equiv \left\{ \frac{\pi}{2} + k\pi \middle| k \in \mathbb{Z} \right\}$, 原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{nk}}{2}$, 发散.

   (b) 若 $x \notin K_1$, 此时 $|\sin x| < 1$, 由 d'Alembert 审敛法可知级数绝对收敛.

综上, 级数在 $x \in K_1$ 时发散, 在 $x \notin K_1$ 时绝对收敛, 无条件收敛之处.

练习 1.5 (点审敛)**.** 求函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n^x+2n}$ 的收敛域, 绝对收敛点 x 的全体, 条件收敛点 x 的全体.

解答. 1. 若 $x > 1$, 注意到 $\frac{1}{n^x+2n} < \frac{1}{n^x}$. 则由比较审敛法, 原级数绝对收敛.

2. 若 $x \le 1$, 因为 $b_n \equiv (-1)^n$ 的部分和有界, 而 $a_n \equiv \frac{1}{n^x+2n}$ 满足 $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. 下面我们进一步证明: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 在 n 充分大时单调递减. 从而由 Dirichlet-Abel 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n$ 条件收敛.

   (a) 对 $x \ge 0$, 结论显然;

   (b) 对 $x < 0$, 令 $y(t) = t^x + 2t$, 则 $y'(t) = xt^{x-1} + 2$. 所以, 只要 $n > \log_{1-x}(-\frac{x}{2})$, 就恒成立 $y'(n) > 0$, 此时 $y(n)$ 单调递增, 进而 $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ 单调递减.

综上, 原级数的收敛域为 $\mathbb{R}$, 全体绝对收敛点构成区间 $(1, +\infty)$, 全体条件收敛点构成区间 $(-\infty, 1]$.

1.2.3 函数项级数的一致收敛

例题 1.2.3 (强级数: 递推函数序列)**.** 对于每个 $x \in [0,1], n = 1, 2, \cdots$, 定义

$$f_1(x) = \int_0^x \sqrt{1+t^4}\,\mathrm{d}t,\ \ f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t, \tag{1.23}$$

证明: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

解答. 1. 首先, 我们用归纳法证明引理:

$$f_n(x) = \frac{1}{(n-1)!} \int_0^x \sqrt{1+t^4}(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t. \tag{1.24}$$

当 $n=1$ 时结论显然. 若结论对 n 成立, 则

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(x) &= \int_0^x f_n(t)\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^x \mathrm{d}t\int_0^t \sqrt{1+s^4}(t-s)^n\,\mathrm{d}s \\
&= \frac{1}{n!}\int_0^x \sqrt{1+s^4}\,\mathrm{d}s\int_s^x (t-s)^n\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{(n+1)!}\int_0^x \sqrt{1+s^4}(x-s)^{n+1}\,\mathrm{d}s, \qquad (1.25)
\end{aligned}$$

结论对 $n+1$ 也成立.

2. 由引理 (1.24) 可知,

$$\begin{aligned}
|f_n(x)| &= \frac{1}{(n-1)!}\int_0^x \sqrt{1+t^4}(x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&\le \frac{\sqrt{2}}{(n-1)!}\int_0^x (x-t)^{n-1}\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{\sqrt{2}x^n}{n!}, \qquad (1.26)
\end{aligned}$$

于是, 当 $x\in[0,1]$ 时, $|f_n(x)|\le\frac{\sqrt{2}}{n!}$. 而级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n!}$ 显然收敛, 于是, 由强级数审敛法, $\sum_{n=1}^{\infty}f_n(x)$ 在 $[0,1]$ 上一致收敛.

练习 1.6 (强级数: 内闭一致性)**.** 设 $\alpha>0$, 证明: 函数项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}n^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}$ 在 $(0,+\infty)$ 的任意闭子区间 $[r,+\infty)$ 上一致收敛 $(r>0)$.

解答. 级数的一般项记为 $u_n(x)\equiv n^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}$.

1. 取点列 $x_n\equiv\frac{1}{n}$, 则注意到 $\lim_{n\to\infty}|u_n(x_n)|=n^{\alpha}\mathrm{e}^{-1}=+\infty$, 即 $u_n(x)\rightrightarrows 0$ 的必要条件不满足. 所以, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛.

2. 对任给的 $r>0$, $u_n(x)$ 在区间 $[r,+\infty)$ 上满足

$$|u_n(x)|=n^{\alpha}\mathrm{e}^{-nx}\le n^{\alpha}\mathrm{e}^{-nr}\equiv a_n \qquad (1.27)$$

且由 d'Alembert 审敛法

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=\mathrm{e}^{-r}<1 \qquad (1.28)$$

可知, 正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛. 则由强级数审敛法, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $[r,+\infty)$ 上一致收敛.

例题 1.2.4 (Dirichlet 级数)**.** 若级数 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛, 证明: 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^x}$ 在 $[0,+\infty)$ 上一致收敛.

解答. 考虑函数序列 $\left\{b_n(x)\equiv\frac{1}{n^x}\right\}$.

1. 若 $x=0$, 原级数化为 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$, 为 (一致) 收敛级数.

2. 若 $x > 0$, 则注意到 $b_n(x)$ 在任意取定 x 后对 n 总是单调递减, 且由

$$|b_n(x)| = \frac{1}{n^x} \leq 1 \tag{1.29}$$

可知, $\{b_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ 在 $(0, +\infty)$ 上一致有界. 所以, 由 Dirichlet-Abel 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n(x)$ 一致收敛.

2 广义积分与含参积分的审敛法

2.1 广义积分的审敛

2.1.1 非负函数的比较审敛法

例题 2.1.1 (以 x^{-p} 为比较对象)**.** 讨论无穷积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^p}\,\mathrm{d}x$ (其中 $p > 0$) 的敛散性.

解答. 被积函数 $y = \frac{\ln(1+x)}{x^p}$ 当 $p > 1$ 时存在瑕点 $x = 0$.

1. 当 $x \to 0$ 时,

$$\lim_{x\to 0} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x^p}}{\frac{1}{x^{p-1}}} = 1, \tag{2.1}$$

所以, 当 $0 < p < 2$ 时, 原积分在 $x = 0$ 处收敛, 否则发散.

2. 当 $x \to +\infty$ 时, 注意到: 若 $p > 1$, 则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x^p}}{\frac{1}{x^{\frac{1+p}{2}}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln(1+x)}{x^{\frac{p-1}{2}}} = 0, \tag{2.2}$$

此时, 原积分在 $x \to +\infty$ 时收敛. 若 $0 < p \leq 1$, 则

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{\ln(1+x)}{x^p}}{\frac{1}{x^p}} = \lim_{x\to+\infty} \ln(1+x) = +\infty, \tag{2.3}$$

此时, 原积分在 $x \to +\infty$ 时发散.

综上, 原积分在 $1 < p < 2$ 时收敛, 否则发散.

2.1.2 乘积函数的 Dirichlet-Abel 审敛法

例题 2.1.2 (Dirichlet 积分)**.** 讨论广义积分 $\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的敛散性 (绝对收敛、条件收敛或发散).

解答. 当 $x \to +\infty$ 时, 一方面,

$$\left|\frac{\sin x}{x}\right| \geq \frac{\sin^2 x}{x} = \frac{1-\cos 2x}{x}, \tag{2.4}$$

而无穷积分 $\int_c^{+\infty} \frac{1-\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散 (这是因为 $\int_c^{+\infty} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x$ 发散但 $\int_c^{+\infty} \frac{\cos 2x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛), 所以原积分不绝对收敛. 另一方面, 函数 $y = \frac{1}{x}$ 在 $[c, +\infty)$ 上单调递减且当 $x \to +\infty$ 时收敛到 0, 且积分 $\int_c^A \sin x\,\mathrm{d}x$ (其中 $0 < c \leq A < +\infty$) 有界, 则由 Dirichlet-Abel 审敛法, 原积分收敛. 综上, 原积分条件收敛.

例题 2.1.3 (乘积因子的构造)**.** 定义函数 $\theta:[0,+\infty)\to[0,+\infty)$ 为

$$\theta(x)=\int_0^x\sqrt{(t+1)(t+2)(t+3)}\,\mathrm{d}t,\tag{2.5}$$

证明: 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\cos(\theta(x))\,\mathrm{d}x$ 收敛.

解答. 在 $[0,+\infty)$ 上, $\theta(x)$ 的导函数 $\theta'(x)=\sqrt{(x+1)(x+2)(x+3)}>0$ 单调递增. 我们考虑被积函数

$$f(x)\equiv\cos(\theta(x))=\frac{\cos(\theta(x))\theta'(x)}{\theta'(x)},\tag{2.6}$$

一方面, 积分 $\int_0^A\cos(\theta(x))\theta'(x)\,\mathrm{d}x=\sin(\theta(A))$ 对任给的 $A\geq 0$ 都有界; 另一方面, 函数 $y=\frac{1}{\theta'(x)}$ 在 $[0,+\infty)$ 上单调, 且当 $x\to+\infty$ 时收敛到 0. 则由 Dirichlet-Abel 审敛法, 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\cos(\theta(x))\,\mathrm{d}x$ 收敛.

练习 2.1 (Dirichlet-Abel 审敛法)**.** 讨论无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\arctan x\,\mathrm{d}x$ 的敛散性.

解答. 一方面, 函数 $y=\arctan x$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调有界; 另一方面, 积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 这是由于 $\frac{1}{\sqrt{x}}$ 在 $[1,+\infty)$ 上单调且收敛到 0, 且积分 $\int_1^A\sin x\,\mathrm{d}x=\cos A-\cos 1$ 有界. 所以, 由 Dirichlet-Abel 审敛法, 无穷积分 $\int_1^{+\infty}\frac{\sin x}{\sqrt{x}}\arctan x\,\mathrm{d}x$ 收敛.

2.2 含参广义积分的审敛法

2.2.1 一致收敛的判别法

例题 2.2.1 (强函数审敛法)**.** 任意取定 $r>0$. 证明: 含参无穷积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy^2}\cos x\,\mathrm{d}x$ 对于 $y\in[r,+\infty)$ 是一致收敛的.

解答. 当 $y\geq r$ 时, 我们有

$$\left|\mathrm{e}^{-xy^2}\cos x\right|\leq\mathrm{e}^{-xy^2}\leq\mathrm{e}^{-r^2x},\tag{2.7}$$

而无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-r^2x}\,\mathrm{d}x=\frac{\sqrt{\pi}}{2r}\tag{2.8}$$

收敛. 则由强函数审敛法, 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy^2}\cos x\,\mathrm{d}x$ 在 $y\in[r,+\infty)$ 上一致收敛.

例题 2.2.2 (Dirichlet-Abel 审敛法)**.** 讨论积分 $I(\alpha)=\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\mathrm{e}^{-\alpha x}\,\mathrm{d}x$ 在 $\alpha\in[0,+\infty)$ 时的一致收敛性.

解答. 一方面, 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛 (从而关于 α 一致收敛); 另一方面, 函数 $y=\mathrm{e}^{-\alpha x}$ 在 $\alpha>0$ 时单调且一致有界 (因为 $|y|\leq 1$). 所以, $I(\alpha)$ 在 $\alpha\in[0,+\infty)$ 时一致收敛.

3 函数的幂级数展开

3.1 一致收敛级数的性质

例题 3.1.1 (一致收敛级数与可导性)**.** 定义函数项级数 $S(x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sin\frac{x}{n!}$. 证明:

1. $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上不一致收敛, 但在区间 $(0,\delta]$ 上一致收敛 (其中 $\delta>0$ 任意给定);
2. $S(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的导函数.

解答. 1. 取点列 $x_n=n!\frac{\pi}{2}$, 则原级数的一般项 $u_n(x)\equiv\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\sin\frac{x}{n!}$ 满足

$$|u_n(x)|=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\geq 1>0, \tag{3.1}$$

所以 $u_n(x)\rightrightarrows 0$ 不成立, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 不一致收敛. 但对任意给定的 $\delta>0$, 在区间 $|x|\leq\delta$ 上成立

$$|u_n(x)|\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{x}{n!}\leq\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{\delta}{n!}, \tag{3.2}$$

而正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 的一般项 $v_n\equiv\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\frac{\delta}{n!}$ 满足

$$\lim_{n\to\infty}\frac{v_{n+1}}{v_n}=\frac{1}{n+1}=0<1, \tag{3.3}$$

则由 d'Alembert 审敛法, 级数 $\sum_{n=1}^{\infty}v_n$ 收敛. 进而由强级数审敛法, $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,\delta]$ 上一致收敛.

2. (a) 由 d'Alembert 审敛法:

$$\left|\frac{u_{n+1}(x)}{u_n(x)}\right|=\frac{1}{n+1}=0<1, \tag{3.4}$$

可知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上逐点 (绝对) 收敛.

(b) 对一般项的导函数 $u_n'(x)=\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\cos\frac{x}{n!}$, 由强级数审敛法:

$$|u_n'(x)|\leq\frac{1}{n!}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \tag{3.5}$$

可知 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n'(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上一致收敛, 且每一项都显然在 $(0,+\infty)$ 上连续.

所以, $S(x)\equiv\sum_{n=1}^{\infty}u_n(x)$ 在 $(0,+\infty)$ 上有连续的导函数.

3.2 函数的 Taylor 级数展开

例题 3.2.1 (幂级数展开: 加法)**.** 在 $(-1,1)$ 上展开函数

$$f(x)=\arctan x+\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} \tag{3.6}$$

为幂级数.

解答. 对 $x \in (-1,1)$, 可以将 $\frac{1}{1+x^2} = \sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i x^{2i}$ 逐项积分, 得到

$$\arctan x = \int_0^x \frac{1}{1+t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{i=0}^{\infty} (-1)^i t^{2i}\right) \mathrm{d}t = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1}; \tag{3.7}$$

同理, 可将 $\frac{1}{1-x^2} = \sum_{j=0}^{\infty} x^{2j}$ 逐项积分, 得到

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+x}{1-x} = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = \int_0^x \left(\sum_{j=0}^{\infty} t^{2j}\right) \mathrm{d}t = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{x^{2j+1}}{2j+1}. \tag{3.8}$$

所以, 函数 $f(x)$ 的幂级数展开为

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1+(-1)^i}{2i+1} x^{2i+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{2}{4n+1} x^{4n+1}. \tag{3.9}$$

例题 3.2.2 (幂级数展开: 乘法)**.** 求函数

$$f(x) = \frac{\sqrt{|x|}}{2} \ln \frac{1+\sqrt{|x|}}{1-\sqrt{|x|}} \tag{3.10}$$

在 $x=0$ 处的幂级数展开式, 并指出此幂级数的收敛域.

解答. 在 $t \in (0,1)$ 内, 对幂级数 $\frac{1}{1-t^2} = \sum_{i=0}^{\infty} t^{2i}$ 逐项积分, 得到

$$\frac{1}{2}\ln\frac{1+t}{1-t} = \int_0^t \frac{\mathrm{d}u}{1-u^2} = \int_0^t \sum_{i=0}^{\infty} u^{2i}\,\mathrm{d}u = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{t^{2i+1}}{2i+1}. \tag{3.11}$$

此时, 令 $t = \sqrt{|x|}$, 其中 $x \in (-1,1)$, 并两边同乘 $\sqrt{|x|}$, 即得

$$f(x) = \sqrt{|x|} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\sqrt{|x|})^{2n+1}}{2n+1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{|x|^{n+1}}{2n+1}. \tag{3.12}$$

例题 3.2.3 (Taylor 展开与常项级数和)**.** 在 $[-1,1]$ 上, 将函数

$$f(x) = x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) - \sqrt{1+x^2} \tag{3.13}$$

展开成幂级数, 并据此计算级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(-\frac{1}{4}\right)^n \frac{1}{2n+1} \frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!} \tag{3.14}$$

的和.

解答. 在 $[-1,1]$ 上, 对幂级数

$$\frac{1}{\sqrt{1+x^2}} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} x^{2n} \tag{3.15}$$

逐项求积分, 得到

$$\begin{aligned}\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right) &= \int_0^x \left(1+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}x^{2n}\right)\mathrm{d}t \\ &= x+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!(2n+1)}x^{2n+1}; \end{aligned} \tag{3.16}$$

同时, 注意到在 $[-1,1]$ 上有

$$\sqrt{1+x^2}=1+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!}x^{2n}; \tag{3.17}$$

所以:

$$\begin{aligned} f(x) &= x\ln\left(x+\sqrt{1+x^2}\right)-\sqrt{1+x^2} \\ &= -1+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(2n-3)!!}{(2n)!!(2n-1)}x^{2n} \\ &\equiv -1+\frac{1}{2}x^2+\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{(2n-1)!!}{(2n+2)!!(2n+1)}x^{2n+2} \end{aligned} \tag{3.18}$$

由此, 记所求级数的和为 S, 则有 $f\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{7}{8}+\frac{1}{4}S=\frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)-\frac{\sqrt{5}}{2}$, 解得

$$S=2\ln\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)+\frac{7}{2}-2\sqrt{5}. \tag{3.19}$$

练习 3.1 (Taylor 展开)**.** 求函数

$$f(x)=\frac{1}{x^2-2x-3} \tag{3.20}$$

于 $x=1$ 处的 Taylor 展开式, 并计算 $f^{(2022)}(1), f^{(2023)}(1)$ 的值.

解答. 在 $x=1$ 的邻域上, 我们有

$$f(x)=\frac{1}{(x-3)(x+1)}=\frac{-\frac{1}{2}}{1-\frac{x-1}{2}}\frac{\frac{1}{2}}{1+\frac{x-1}{2}}=-\frac{1}{4}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(x-1)^{2n}}{4^n}. \tag{3.21}$$

所以,

$$f^{(2022)}(1)=\left(-\frac{1}{4}\cdot(2n)!\frac{1}{4^n}\right)_{n=1011}=-\frac{2022!}{4^{1012}}, \tag{3.22}$$

$$f^{(2023)}(1)=0. \tag{3.23}$$

3.3 和函数的计算

例题 3.3.1 (和函数的计算)**.** 求幂级数

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n \tag{3.24}$$

的收敛区间与和函数.

解答. 收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)(n+2)}{(n+2)(n+3)}=1, \tag{3.25}$$

故收敛区间为 $(-1,1)$. 在收敛区间内, 首先对 $\sum_{n=0}^{\infty}x^{n+2}=\frac{x^2}{1-x}$ 逐项求导, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+2)x^{n+1}=\left(\frac{x^2}{1-x}\right)'=\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}; \tag{3.26}$$

再次逐项求导, 得到

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)(n+2)x^n=\left(\frac{2x-x^2}{(1-x)^2}\right)'=\frac{2}{(1-x)^3}. \tag{3.27}$$

练习 3.2 (和函数的计算)**.** 求幂级数

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2} \tag{3.28}$$

的收敛区间与和函数.

解答. 收敛半径

$$R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(-1)^n(2n+1)}{(-1)^{n-1}(2n-1)}\right|=1, \tag{3.29}$$

故收敛区间为 $(-1,1)$. 在收敛区间内, 对

$$\frac{x}{1+x^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}x^{2n-1} \tag{3.30}$$

逐项求导, 得到

$$\frac{1-x^2}{(1+x^2)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}(2n-1)x^{2n-2}. \tag{3.31}$$

4 函数的 Fourier 级数展开

4.1 周期函数的 Fourier 级数展开

例题 4.1.1 (Fourier 级数及其和函数)**.** 解答下列问题.

1. 设 $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ 是周期为 2π 的函数, $f(x)$ 在 $(-\pi,\pi]$ 上等于 e^x. 求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 并且求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数在 $x=\pi$ 处的和.

2. 求出级数
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \tag{4.1}$$
的和.

解答. 考虑 Fourier 级数展开
$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos(nx) + b_n \sin(nx)). \tag{4.2}$$

1. 由已知,
$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(nx) \, \mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{\pi} (\mathrm{e}^x \cos(nx))_{-\pi}^{\pi} + \frac{n}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x \sin(nx) \, \mathrm{d}x \\ &= (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{\pi} + \frac{n}{\pi} (\mathrm{e}^x \sin(nx))_{-\pi}^{\pi} - \frac{n^2}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \mathrm{e}^x \cos(nx) \, \mathrm{d}x \\ &= (-1)^n \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{\pi} - n^2 a_n, \end{aligned} \tag{4.3}$$
解得
$$a_n = \frac{(-1)^n (\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}. \tag{4.4}$$
同理可得
$$b_n = \frac{n(-1)^{n+1} (\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi})}{\pi(1+n^2)}. \tag{4.5}$$
于是, $f(x)$ 的 Fourier 级数为
$$f(x) \sim \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{1+n^2} (\cos(nx) - n \sin(nx)) \right). \tag{4.6}$$
由已知, $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上分段连续、分段单调, 则其在 $x = \pi$ 处的 Fourier 级数将收敛到
$$S(\pi) = \frac{f(\pi^+) + f(\pi^-)}{2} = \frac{\mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi}}{2}. \tag{4.7}$$

2. 在 Fourier 级数中令 $x = \pi$, 有
$$S(\pi) = \frac{\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi}}{\pi} \left(\frac{1}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} \right), \tag{4.8}$$
解得
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+n^2} = \frac{\pi(\mathrm{e}^{\pi} + \mathrm{e}^{-\pi})}{2(\mathrm{e}^{\pi} - \mathrm{e}^{-\pi})} - \frac{1}{2}. \tag{4.9}$$

练习 4.1 (周期延拓与对称化延拓)**.** 求函数 $f(x) = \frac{\pi - x}{2}$ $(0 \leq x \leq 2\pi)$ 的正弦级数展开, 并给出级数 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n}$ 的值.

解答. 我们对函数 $f(x)$ 作奇延拓

$$g(x) = \begin{cases} \frac{\pi - x}{2}, & |x| < 2\pi, x \neq 0, \\ 0, & x = 0 \end{cases} \tag{4.10}$$

与周期延拓, 得到以 2π 为周期的奇函数 $h(x)$. 设 $h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin(nx)$, 我们有

$$b_n = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \frac{\pi - x}{2} \sin(nx)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{n}. \tag{4.11}$$

于是,

$$h(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(nx)}{n}. \tag{4.12}$$

由于 $h(x)$ 分段连续且分段单调, 特别地在点 $x = 1$ 处连续, 所以,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n} = h(1) = \frac{\pi - 1}{2}. \tag{4.13}$$

例题 4.1.2 (Fourier 级数逼近)**.** 解答下列问题.

1. 设 p 是非整数的实数, $(-\infty, +\infty)$ 上的函数 $f(x)$ 以 2π 为周期, 它在 $[-\pi, \pi)$ 上等于 $\cos(px)$. 求出 $f(x)$ 的 Fourier 级数, 及其和函数.
2. 明确写出从上面 (1) 中的 $\cos(px)$ 的 Fourier 展开式推出下面等式的详细推导过程: 当 $t \in \mathbb{R}$, $\frac{t}{\pi}$ 不是整数时, 有

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{t + n\pi} + \frac{1}{t - n\pi} \right). \tag{4.14}$$

3. 明确写出从上面 (2) 中 $\frac{1}{\sin t}$ 的展开式推出下面等式的详细推导过程:

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}. \tag{4.15}$$

解答. 1. 注意到, $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi)$ 上为偶函数. 不妨设其 Fourier 级数为 $f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \cos(nx)$, 于是,

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \cos(px)\cos(nx)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} (\cos((n+p)x) + \cos((n-p)x))\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{(-1)^n}{\pi} \frac{2p}{p^2 - n^2} \sin(p\pi). \end{aligned} \tag{4.16}$$

所以, $f(x)$ 的 Fourier 级数为

$$f(x) \sim \frac{\sin(p\pi)}{p\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p(-1)^n \sin(p\pi)}{\pi(p^2-n^2)} \cos(nx), \tag{4.17}$$

其在 $x \in [-\pi, \pi]$ 上分段连续、分段单调. 由 Dirichlet 定理, 和函数为 $\cos(px)$.

2. 在 Fourier 级数展开式

$$\cos(px) = \frac{\sin(p\pi)}{p\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p(-1)^n \sin(p\pi)}{\pi(p^2-n^2)} \cos(nx) \tag{4.18}$$

中, 令 $x = 0$, 有

$$1 = \frac{\sin(p\pi)}{p\pi} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2p(-1)^n \sin(p\pi)}{\pi(p^2-n^2)}. \tag{4.19}$$

若 $t \equiv p\pi$ 使得 $p = \frac{t}{\pi}$ 不是整数, 则 $t \neq 0$, 此时上式等价于

$$\frac{1}{\sin t} = \frac{1}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \left(\frac{1}{t+n\pi} + \frac{1}{t-n\pi} \right). \tag{4.20}$$

3. 注意到对 $t \in (0, \pi)$ 及 $n > 1$ 有

$$\left| (-1)^n \sin t \left(\frac{1}{t+n\pi} + \frac{1}{t-n\pi} \right) \right| = \frac{2t|\sin t|}{n^2\pi^2 - t^2} \leq \frac{2\pi}{(n^2-1)\pi^2}, \tag{4.21}$$

则由强级数审敛法, (2) 中的展开式对 $t \in (0, \pi)$ 一致收敛, 因此可以逐项积分. 取积分 $\int_0^{\pi} \mathrm{d}t$, 有

$$\begin{aligned} \pi &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^{\pi} \left(\frac{\sin(t+n\pi)}{t+n\pi} + \frac{\sin(t-n\pi)}{t-n\pi} \right) \mathrm{d}t \\ &= \int_0^{\pi} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t + \sum_{n=1}^{\infty} \int_{(n-1)\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t \\ &= 2\int_0^{+\infty} \frac{\sin t}{t} \,\mathrm{d}t, \end{aligned} \tag{4.22}$$

于是,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} \,\mathrm{d}x = \frac{\pi}{2}. \tag{4.23}$$

4.2 Parseval 等式

例题 4.2.1 (余弦级数; Parseval 等式)**.** 设 2π 周期函数 $f(x)$ 在 $[-\pi, \pi]$ 上的表达式为 $f(x) = x^2$, 求 $f(x)$ 所对应的 Fourier 级数及其和函数, 并分别给出级数

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2}, \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} \tag{4.24}$$

的值.

解答. 在 $[-\pi,\pi]$ 上, 函数 $f(x)=x^2$ 是偶函数, 不妨设其 Fourier 级数为

$$f(x)\sim\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos(nx), \tag{4.25}$$

于是,

$$a_0=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\,\mathrm{d}x=\frac{2\pi^2}{3}, \tag{4.26}$$

且对一切 $n>0$ 有

$$\begin{aligned}a_n&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^2\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{n\pi}\left(x^2\sin(nx)\right)_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin(nx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{2}{n^2\pi}\left(x\cos(nx)\right)_{-\pi}^{\pi}-\frac{2}{n^2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\cos(nx)\,\mathrm{d}x\\&=\frac{4(-1)^n}{n^2}.\end{aligned} \tag{4.27}$$

所以,

$$f(x)\sim\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx). \tag{4.28}$$

由于函数 $f(x)$ 在 $\mathbb{R}$ 上连续, 且分段单调, 所以该级数在任一点 $x\in\mathbb{R}$ 处均收敛到 $f(x)=x^2$, 即

$$x^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\cos(nx) \tag{4.29}$$

- 令 $x=\pi$, 有

$$\pi^2=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}=\frac{\pi^2}{6}. \tag{4.30}$$

- 令 $x=0$, 有

$$0=\frac{\pi^2}{3}+4\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}\ \Rightarrow\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n^2}=-\frac{\pi^2}{12}. \tag{4.31}$$

- 由 Parseval 等式,

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}\left(\frac{2\pi^2}{3}\right)^2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{16}{n^4}&=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x^4\,\mathrm{d}x,\\\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^4}&=\frac{\pi^4}{90}.\end{aligned} \tag{4.32}$$

5 广义积分的计算

5.1 常义方法

5.1.1 作为常义积分的极限

例题 5.1.1 (无穷和). 设级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 收敛, 每项 $a_n > 0$, T 是序列 $\{a_n\}$ 中的最大项. 对于每个实数 $x > 0$, 定义 $L(x)$ 是序列 $\{a_n\}$ 中大于 x 的项的个数.

1. 证明: 0 是 $L(x)$ 的瑕点;
2. 证明: 瑕积分 $\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x$ 收敛, 并且

$$\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{5.1}$$

解答. 将序列 $\{a_n\}$ 重排为单调递减序列 $T = a_{\sigma_1} \geq a_{\sigma_2} \geq \cdots \geq a_{\sigma_n} \geq \cdots$, 其中, $(\sigma_1, \sigma_2, \cdots, \sigma_n, \cdots)$ 是 $(1, 2, \cdots, n, \cdots)$ 的一个排列. 则 $\{a_{\sigma_n}\}$ 成为区间 $[0, T]$ 上递减且收敛到左端点 0 的点列, 而新的 (正项) 级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_{\sigma_n}$ 也收敛到 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ 的和.

1. 任取 $N \in \mathbb{N}_+$, 此时, 必然存在 $\delta \equiv a_{\sigma_{N+1}} > 0$, 使得 $L(x) > N$ 对一切 $x \in (0, \delta)$ 成立. 所以, $\lim_{x\to 0} L(x) = +\infty$, 则 $x = 0$ 是 $L(x)$ 的瑕点.
2. 注意到 $L(x) = N$ 对任意 $x \in [a_{\sigma_{N+1}}, a_{\sigma_N}]$ 及 $N \in \mathbb{N}_+$ 成立. 现在, 我们任取 $\epsilon \in (0, T)$, 它必然落于 $[0, T]$ 的某个子区间 $[a_{\sigma_{N+1}}, a_{\sigma_N}]$ 内 (其中 $N \equiv N(\epsilon)$). 此时, 常义积分

$$\begin{aligned}\int_\epsilon^T L(x)\,\mathrm{d}x &= \int_\epsilon^{a_{\sigma_N}} L(x)\,\mathrm{d}x + \sum_{n=1}^{N-1} \int_{a_{\sigma_{n+1}}}^{a_{\sigma_n}} L(x)\,\mathrm{d}x \\ &= N(a_{\sigma_N} - \epsilon) + \sum_{n=1}^{N-1} n(a_{\sigma_n} - a_{\sigma_{n+1}}).\end{aligned} \tag{5.2}$$

代入区间条件 $a_{\sigma_{N+1}} \leq \epsilon \leq a_{\sigma_N}$, 得到

$$\sum_{n=1}^{N-1} n(a_{\sigma_n} - a_{\sigma_{n+1}}) \leq \int_\epsilon^T L(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{n=1}^{N} n(a_{\sigma_n} - a_{\sigma_{n+1}}). \tag{5.3}$$

考虑级数 $\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{\sigma_n} - a_{\sigma_{n+1}})$, 对其增删括号将不改变其敛散性, 于是

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} n(a_{\sigma_n} - a_{\sigma_{n+1}}) &= a_{\sigma_1} + (-1+2)a_{\sigma_2} + \cdots + (-n+1+n)a_{\sigma_n} + \cdots \\ &= a_{\sigma_1} + a_{\sigma_2} + \cdots + a_{\sigma_n} + \cdots \\ &= \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n}.\end{aligned} \tag{5.4}$$

由于当 $\epsilon \to 0_+$ 时 $N \to \infty$, 于是由夹逼定理,

$$\int_0^T L(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0_+}\int_\epsilon^T L(x)\,\mathrm{d}x = \sum_{n=1}^{\infty} a_{\sigma_n} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n. \tag{5.5}$$

例题 5.1.2 (常义积分的极限)**.** 设 $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ 是单调下降的连续函数 (没有假定 $(0,+\infty)$ 上导函数 $f'(x)$ 的存在), C 和 D 都是实数, $\lim_{x\to 0_+} f(x) = C$, $\lim_{x\to+\infty} f(x) = D$, $0<a<b$. 求出广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x \tag{5.6}$$

的值.

解答. 任取点 $\xi > 0$, 则

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_0^{\xi} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x + \int_\xi^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x. \tag{5.7}$$

一方面, 瑕积分 $\int_0^\xi \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{\epsilon\to 0_+}\int_\epsilon^\xi \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$, 而

$$\int_\epsilon^{\xi} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\epsilon a}^{\xi a} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{\epsilon b}^{\xi b} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u; \tag{5.8}$$

同理, 对无穷积分 $\int_\xi^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{A\to+\infty}\int_\xi^A \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x$, 我们有

$$\int_\xi^{A} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = \int_{\xi a}^{A a} \frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{\xi b}^{A b} \frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u. \tag{5.9}$$

于是,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x &= \lim_{\epsilon\to 0_+, A\to+\infty}\left(\int_{\epsilon a}^{Aa}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{\epsilon b}^{Ab}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right)\\ &= \lim_{\epsilon\to 0_+, A\to+\infty}\left(\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t - \int_{Aa}^{Ab}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u\right).\end{aligned} \tag{5.10}$$

由于 $f(t)$ 单调下降且大于 0, 所以

$$f(\epsilon a)\ln\frac{b}{a} = f(\epsilon a)\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t \le \int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t \le f(\epsilon b)\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = f(\epsilon b)\ln\frac{b}{a}. \tag{5.11}$$

由夹逼定理, $\lim_{\epsilon\to 0_+}\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}\frac{f(t)}{t}\,\mathrm{d}t = C\ln\frac{b}{a}$. 同理, $\lim_{A\to+\infty}\int_{Aa}^{Ab}\frac{f(u)}{u}\,\mathrm{d}u = D\ln\frac{b}{a}$. 所以,

$$\int_0^{+\infty} \frac{f(ax)-f(bx)}{x}\,\mathrm{d}x = (C-D)\ln\frac{b}{a}. \tag{5.12}$$

注记 5.1. 将积分限 $\int_{\epsilon a}^{Aa}$ 与 $\int_{\epsilon b}^{Ab}$ 交换为 $\int_{\epsilon a}^{\epsilon b}$ 与 $\int_{Aa}^{Ab}$, 是集散思想的体现: 我们将每个积分都局限在 $x=0$ 或 $x=+\infty$ 二者之一的附近小区间上.

5.1.2 换元积分与分部积分

例题 5.1.3 (换元积分与分部积分). 计算无穷积分

$$\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3}\,\mathrm{d}x. \tag{5.13}$$

解答.

$$\begin{aligned}\int_1^{+\infty} \frac{\arctan x}{x^3}\,\mathrm{d}x &= -\frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \arctan x\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{x^2}\right)\\ &= -\frac{1}{2}\left(\frac{\arctan x}{x^2}\right)_1^{+\infty} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}x}{x(1+x^2)}\\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\int_1^{+\infty}\left(\frac{1}{x^2} - \frac{1}{1+x^2}\right)\mathrm{d}x\\ &= \frac{\pi}{8} + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{x} - \arctan x\right)_1^{+\infty}\\ &= \frac{1}{2}; \end{aligned} \tag{5.14}$$

练习 5.1 (换元积分法). 计算瑕积分

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}}. \tag{5.15}$$

解答.

$$\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{(2-x)\sqrt{1-x}} = -2\int_0^1 \frac{\mathrm{d}\sqrt{1-x}}{1+(1-x)} = -2\left(\arctan\sqrt{1-x}\right)_0^1 = \frac{\pi}{2}. \tag{5.16}$$

5.2 参数化方法

例题 5.2.1 (含参积分的积分法). 设常数 $\omega > 0$. 计算广义积分

$$\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x}\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x. \tag{5.17}$$

解答. 注意到,

$$\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y = \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x} - \mathrm{e}^{-\beta x}}{x}, \tag{5.18}$$

而广义积分

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-xy}\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x = \frac{\omega}{\omega^2+y^2} \tag{5.19}$$

对 $y \in (0,+\infty)$ 一致收敛. 所以,

$$\begin{aligned}\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-\alpha x}-\mathrm{e}^{-\beta x}}{x}\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x &= \int_0^{+\infty}\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x\int_\alpha^\beta \mathrm{e}^{-xy}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_\alpha^\beta \mathrm{d}y\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xy}\sin(\omega x)\,\mathrm{d}x \\ &= \int_\alpha^\beta \frac{\omega}{\omega^2+y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \arctan\frac{\beta}{\omega}-\arctan\frac{\alpha}{\omega}. \end{aligned} \tag{5.20}$$

例题 5.2.2 (含参积分的微分法)**.** 设 b 是实数.

1. 证明含参变量 b 的无穷积分

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}x\cos(2bx)\,\mathrm{d}x \tag{5.21}$$

   在 $(-\infty,+\infty)$ 上一致收敛.

2. 证明:

$$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}^{-b^2}\int_0^b \mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t. \tag{5.22}$$

解答. 1. 注意到, 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}x\,\mathrm{d}x=\left(\mathrm{e}^{-\frac{1}{2}x^2}\right)_{x=+\infty}^{x=0}=1$ 收敛, 而

$$\left|\mathrm{e}^{-x^2}x\cos(2bx)\right| \le \mathrm{e}^{-x^2}x, \tag{5.23}$$

   则由强函数审敛法知 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}x\cos(2bx)\,\mathrm{d}x$ 对任意 $b\in\mathbb{R}$ 一致收敛.

2. 注意到

$$\mathrm{e}^{-x^2}x\cos(2bx)=\frac{\partial}{\partial b}\left(\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\right), \tag{5.24}$$

   且无穷积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}x\cos(2bx)\,\mathrm{d}x$ 一致收敛、$\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x$ 逐点收敛 (这由 Dirichlet-Abel 审敛法容易得到). 令

$$F(b)\equiv\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-b^2}\int_0^b\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t, \tag{5.25}$$

   则

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}F(b)}{\mathrm{d}b} &= 2\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}x\cos(2bx)\,\mathrm{d}x-\mathrm{e}^{-b^2}\mathrm{e}^{b^2}+2b\mathrm{e}^{-b^2}\int_0^b\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= 2\left(\frac{1}{2}-b\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-x^2}\sin(2bx)\,\mathrm{d}x\right)-1+2b\mathrm{e}^{-b^2}\int_0^b\mathrm{e}^{t^2}\,\mathrm{d}t \\ &= -2bF(b). \end{aligned} \tag{5.26}$$

   代入初值条件 $F(0)=0$ 可知, 微分方程 $F'(b)=-2bF(b)$ 存在唯一解 $F(b)\equiv 0$,

此时待证等式成立.

例题 5.2.3 (收敛因子法)**.** 证明和计算下列各题:

1. 证明 $I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛;
2. 证明 $I(t)=\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 在 $(0,+\infty)$ 的任何闭子区间上可导, 即在 $(0,+\infty)$ 上可导;
3. 求出函数 $I(t)$, $t\in(0,+\infty)$;
4. 计算 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 的值.

解答. 记 $g(x,t)\equiv\mathrm{e}^{-xt}\frac{\sin x}{x}$.

1. 当 $x\geq 0$ 且 $t\geq 0$ 时, 积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\sin x}{x}\,\mathrm{d}x$ 收敛, 且 $|\mathrm{e}^{-xt}|\leq\mathrm{e}^0=1$ (单调且一致有界). 则由 Dirichlet-Abel 审敛法, $I(t)=\int_0^{+\infty}g(x,t)\,\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[0,+\infty)$ 一致收敛.
2. 注意到
$$\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}=-\mathrm{e}^{-xt}\sin x. \tag{5.27}$$
对任给的 $\delta>0$, 当 $t\in[\delta,+\infty)$ 时, $|\mathrm{e}^{-xt}\sin x|\leq\mathrm{e}^{-\delta x}$, 而无穷积分 $\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-\delta x}\,\mathrm{d}x$ 收敛. 则由强函数审敛法, 无穷积分 $\int_0^{+\infty}\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x$ 关于 $t\in[\delta,+\infty)$ 上一致收敛. 再由 $I(t)$ 的收敛性, 得到: $I(t)$ 在 $t\in[\delta,+\infty)$ 上可导.
3. 由含参广义积分的微分法,
$$\begin{aligned}I'(t)&=\int_0^{+\infty}\frac{\partial g(x,t)}{\partial t}\,\mathrm{d}x\\&=\int_0^{+\infty}-\mathrm{e}^{-xt}\sin x\,\mathrm{d}x\\&=\left(\mathrm{e}^{-xt}\cos x\right)_0^{+\infty}+t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\cos x\,\mathrm{d}x\\&=-1+t\left(\left(\mathrm{e}^{-xt}\sin x\right)_0^{+\infty}+t\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\sin x\,\mathrm{d}x\right)\\&=-1-t^2I'(t),\end{aligned} \tag{5.28}$$
解得
$$I'(t)=-\frac{1}{1+t^2}, \tag{5.29}$$
从而 $I(t)=-\arctan t+C$. 为计算常数 C, 我们注意
$$0\leq|I(t)|\leq\int_0^{+\infty}|g(x,t)|\,\mathrm{d}x<\int_0^{+\infty}\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}x=\frac{1}{t}, \tag{5.30}$$
于是, 由夹逼定理 $\lim_{t\to+\infty}I(t)=0$, 解得 $C=\frac{\pi}{2}$, 于是
$$I(t)=\frac{\pi}{2}-\arctan t. \tag{5.31}$$

4. 由 $I(t)$ 的一致收敛性可知, 它在 $t \in [0, +\infty)$ 上连续. 所以

$$I(0) = \lim_{t \to 0} I(t) = \frac{\pi}{2}. \tag{5.32}$$

5.3 特殊函数与特殊积分

5.3.1 两个特殊积分

5.3.2 两个特殊函数

例题 5.3.1 (整值 Γ-函数)**.** 设 E 为实数.

1. 求出所有的实数 E, 使得

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(Ex)^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} \right) \mathrm{d}x \tag{5.33}$$

收敛;

2. 求出所有的实数 E, 使得

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{(Ex)^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} \right) \mathrm{d}x \tag{5.34}$$

收敛.

解答.

1. 注意到,

$$\int_0^{+\infty} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{(Ex)^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} \right) \mathrm{d}x = \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{E-1} \, \mathrm{d}x, \tag{5.35}$$

所以, 使原式收敛的全体实数为 $E < 1$.

2. 注意到,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \int_0^{+\infty} \left(\frac{(Ex)^n}{n!} \mathrm{e}^{-x} \right) \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{E^n}{n!} \Gamma(n+1) = \sum_{n=0}^{\infty} E^n, \tag{5.36}$$

所以, 使原式收敛的全体实数为 $-1 < E < 1$.

练习 5.2 (半整值 Γ-函数)**.** 计算无穷积分

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x^3} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x. \tag{5.37}$$

解答.

$$\int_0^{+\infty} \sqrt{x^3} \mathrm{e}^{-x} \, \mathrm{d}x = \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{3\sqrt{\pi}}{4}. \tag{5.38}$$

例题 5.3.2 (用 B-函数表示广义积分)**.** 计算瑕积分

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}} \, \mathrm{d}x. \tag{5.39}$$

解答.

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \mathrm{B}\left(\frac{7}{2},\frac{1}{2}\right) = \frac{\Gamma\left(\frac{7}{2}\right)\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)}{\Gamma(4)}, \tag{5.40}$$

其中,

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) & && = \sqrt{\pi}, \\
\Gamma\left(\frac{7}{2}\right) &= \frac{5}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{\pi} && = \frac{15\sqrt{\pi}}{8}, \\
\Gamma(4) &= 3! && = 6.
\end{aligned} \tag{5.41}$$

于是,

$$\int_0^1 \sqrt{\frac{x^5}{1-x}}\,\mathrm{d}x = \frac{5\pi}{16}. \tag{5.42}$$