2. 一元函数的微积分

SDS 高数小班课 (2024 秋)

崔畅
北京大学化学与分子工程学院
CuiChang2022@stu.pku.edu.cn

2024-11-30

1 导数与微分的计算方法

1.1 微分与一阶导数

定义 1.1 (微分)**.** 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义. 若对任意增量 Δx, 相应的函数增量都可写为

$$\Delta y \equiv f(x_0+\Delta x) - f(x_0) = A\Delta x + o(\Delta x), \tag{1}$$

其中 A 为常数, 则称 $f(x)$ 在点 x_0 处**可微** (differentiable), 其**微分** (differential) 记为 $\mathrm{d}y \equiv A\,\mathrm{d}x$, 表示函数增量的线性近似.

定理 1.1 (可微与可导)**.** 实数域上一元函数可微等价于可导.

- 导数与微分的关系: $\mathrm{d}y = f'(x)\,\mathrm{d}x$;
- 求导操作 $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}$ 可以看成是对函数 $f(x)$ 施加的一种运算 (或映射).

- 复合函数 $y = f(\phi(x))$ 的**链式法则** (chain rule), 对应微分的**形式不变性** (invariance of differential form):

$$\mathrm{d}y = f'(u)\,\mathrm{d}u = f'(u)\phi'(x)\,\mathrm{d}x\,; \tag{2}$$

- 隐函数 $f(x,y)=0$ 的求导法则, 对应二元函数的**全微分** (total differential):

$$0 = \mathrm{d}F(x,y) \equiv G(x,y;\mathrm{d}x\,,\mathrm{d}y). \tag{3}$$

- 参数方程

$$\begin{cases} x &= x(t), \\ y &= y(t) \end{cases} \tag{4}$$

  的求导法则, 对应微分的比值:

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{y'_t}{x'_t}. \tag{5}$$

例题 1.1 (复合函数求导)**.** 计算导数:

$$f(x) = 2\arctan\frac{x^2-1}{\sqrt{2}x} - \ln\frac{x^2-\sqrt{2}x+1}{x^2+\sqrt{2}x+1}. \tag{6}$$

例题 1.2 (隐函数求导)**.** 求 $\mathbb{R}^2$ 中曲线 $e^{xy}+xy+y^2=2$ 在点 $(0,1)$ 处的切线方程.

例题 1.3 (化显为隐)**.** 计算导数:

$$f(x)=\left(\frac{x}{1+x}\right)^x. \tag{7}$$

例题 1.4 (参数方程求导)**.** 设 $a>0$. 计算由下列参数方程确定的函数 $y=f(x)$ 的一阶、二阶导数:

$$\begin{cases} x &= a\cos^3 t, \\ y &= a\sin^3 t. \end{cases} \tag{8}$$

1.2 高阶导数

定义 1.2 (n 阶导数)**.** 递归定义:

$$\frac{\mathrm{d}^n y}{\mathrm{d}x^n} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}\left(\frac{\mathrm{d}^{n-1} y}{\mathrm{d}x^{n-1}}\right), \tag{9}$$

其中 $\frac{\mathrm{d}^0}{\mathrm{d}x^0} \equiv \mathcal{I}$ (恒等映射).

定理 1.2 (Leibniz 公式)**.**

$$\mathrm{d}^n(uv) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \,\mathrm{d}^k u \,\mathrm{d}^{n-k} v, \tag{10}$$

$$\frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}(uv) = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{C}_n^k \frac{\mathrm{d}^k u}{\mathrm{d}x^k} \frac{\mathrm{d}^{n-k} v}{\mathrm{d}x^{n-k}}. \tag{11}$$

例题 1.5 (Leibniz 公式)**. Legendre 多项式**

$$P_n(x) \equiv \frac{1}{2^n n!} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left((x^2-1)^n\right) \tag{12}$$

满足方程 $0 = (1-x^2)P_n''(x) - 2xP_n'(x) + a_n P_n(x)$, 求 a_n.

例题 1.6 (数学归纳法)**.** 设 $f(x) = x^{n-1}\mathrm{e}^{\frac{1}{x}}$, 求 $f^{(n)}(x)$, 其中 $n \in \mathbb{N}_+$.

1.3 Taylor 多项式

定理 1.3 (局部 Taylor 公式)**.** 设函数 $f(x)$ 在点 x_0 的邻域内有定义, 且在点 x_0 处有 n 阶导数 $(n \in \mathbb{N}_+)$. 则对 x_0 附近的任意点 x 都成立

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + R_n, \tag{13}$$

其中, **Peano 余项** $R_n = o((x-x_0)^n)$. 特别地, 若 $f(x)$ 在包含 x_0 的某区间 (a, b) 内存在 $n+1$ 阶导数, 则对任意 $x \in (a, b)$, 都存在介于 x_0 与 x 之间的点 ξ, 使得

$$R_n = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}, \tag{14}$$

这称为 **Lagrange 余项**.

- 核心思想是**以多项式近似表达函数**, 其近似误差可根据 $|R_n|$ 进行估计.
- 几组常用的局部 Taylor 公式:

$$(1+x)^\alpha = \sum_{k=0}^{n} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-k+1)}{k!}x^k + o(x^n), \tag{15}$$

$$\mathrm{e}^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!}x^k + o(x^n), \tag{16}$$

$$\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}}{k}x^k + o(x^n), \tag{17}$$

  - 三角函数的 Taylor 公式可由 Euler 恒等式 $\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta} = \cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta$ 推导出.

例题 1.7 (局部 Taylor 公式)**.** 设正整数 $n \geq 2$. 求出

$$f(x) = \frac{1 - 2x + 5x^2}{(1-2x)(1+x^2)} \tag{18}$$

在 $x = 0$ 点的 $2n+1$ 阶局部 Taylor 公式.

2 微分学的应用

2.1 一阶信息: 单调性、极值与最值

定理 2.1 (单调性)**.** 若函数 $f(x)$ 在区间 $[a,b]$ 上连续, 在 (a,b) 上可导, 则 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上单调递增的充要条件是 $f'(x)\geq 0$ 对任意 $x\in(a,b)$ 成立.

定理 2.2 (Fermat 极值定理)**.** 设 $f(x)$ 在 (a,b) 上可导. 若 x_0 为 $f(x)$ 的一个极值点, 则 $f'(x_0)=0$. 即: 极值点必然是稳定点.

- 此为极值点的**一阶必要条件**. 随后, 通过分析 $f(x)$ 在各区间上的单调性, 即可从稳定点中找出极值点.

例题 2.1 (极值条件)**.** 求函数

$$f(x)=\begin{cases}\mathrm{e}^{-\frac{1}{|x|}}\left(\sqrt{2}+\cos\frac{1}{x}\right), & x\neq 0,\\ 0, x=0\end{cases} \tag{19}$$

的所有极值点与稳定点.

例题 2.2 (闭区间上函数的最值)**.** 求出闭区间 $[-1,1]$ 上的一元函数 $f(x)=x^{\frac{2}{3}}-(x^2-1)^{\frac{1}{3}}$ 达到最小值的所有 $[-1,1]$ 上的点.

注记 2.1. 最值问题的一般解题步骤:

1. 求导, 根据导函数的零点 (稳定点) 与符号 (单调性), 计算极值点与极值;
2. 计算区间端点值, 并与极值作比较.

例题 2.3 (最值的应用问题: 优化)**.** 从一张圆形滤纸中剪去一个扇形, 剩余部分可以围成一个圆锥状漏斗. 请给出使漏斗容积最大的剪法.

例题 2.4 (最值的应用问题: 不等式)**.** 证明: 当 $x > 0$ 时,

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x} < \mathrm{e} < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+1}. \tag{20}$$

注记 2.2. 指对数不等式: 当 $t > 0$ 时,

$$\ln(1+t) < t < \mathrm{e}^{t} - 1. \tag{21}$$

这反映了对数函数、线性函数、指数函数三者增长 "量级" 的相对关系.

2.2 二阶信息: 凹凸性、拐点

定理 2.3 (凹凸性的充分条件)**.** 设函数 $f(x)$ 在 (a,b) 上二阶可导. 若 $f''(x)>0$ 对任意 $a<x<b$ 成立, 则 $f(x)$ 是**下凸函数** (convex function): 不等式

$$tf(x_1)+(1-t)f(x_2)\le f(tx_1+(1-t)x_2) \tag{22}$$

对任意 $x_1,x_2\in(a,b)$ 及 $t\in(0,1)$ 成立.

- 同理可以得到关于**上凸函数** (concave function) 的结论.

例题 2.5. 分析函数 $y=\frac{x^2(x-1)}{(x+1)^2}$ 的单调性、极值、凹凸性、拐点、渐近线.

注记 2.3. 函数 $f(x)$ 渐近线的计算方法:

- 垂直渐近线: 寻找 $f(x)\to\infty$ 的 (第二类) 间断点;
- 一般渐近线: 其方程为 $y=ax+b$, 其中

$$a=\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}, \tag{23}$$

$$b=\lim_{x\to\infty}(f(x)-ax). \tag{24}$$

3 定积分的计算方法

定义 3.1. 函数 $f(x)$ 在区间 I 上的一个**原函数** (反导数, anti-derivative) 定义为 $F(x)$, 若 $F'(x) = f(x)$ 在区间 I 上恒成立.

- 同一个函数的不同原函数之间可以加上不定常数 C, 这些原函数的全体称为 $f(x)$ 在区间 I 上的**不定积分** (indefinite integral), 记作

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = F(x) + C. \tag{25}$$

3.1 不定积分: 换元与分部

定理 3.1 (第一类换元法)**.** 设函数 $u = \phi(x)$ 可微, 则

$$\int f(\phi(x))\phi'(x)\,\mathrm{d}x = \int f(u)\,\mathrm{d}u = F(\phi(x)) + C. \tag{26}$$

- 通过 "吞入" 某些因式, 较为灵活地简化被积函数的形式.

定理 3.2 (第二类换元法)**.** 设函数 $x = \phi(t)$ 可微, 且 $\phi'(t) \neq 0$, 则

$$\int f(x)\,\mathrm{d}x = \int \frac{f(\phi(t))}{\phi'(t)}\,\mathrm{d}t = \Phi(\phi^{-1}(x)) + C. \tag{27}$$

- 常作三角代换以处理各种二次根式.

- 以形式不变性来记忆更方便: $\mathrm{d}u = \phi'(x)\,\mathrm{d}x$ 或 $\mathrm{d}x = \phi'(t)\,\mathrm{d}t$.

例题 3.1 (第二换元法)**.** 计算不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}}$, 其中 $a > 0$.

定理 3.3 (分部积分法)**.** 设函数 $u(x), v(x)$ 可微, 且 $u'v, v'u$ 都存在原函数, 则

$$\int u'v \,\mathrm{d}x = uv - \int v'u \,\mathrm{d}x. \tag{28}$$

- 若某个因子的导函数比原函数更易处理, 则可以考虑分部积分.

- 常常与第一换元法相结合. 以乘积微分来记忆更方便: $\mathrm{d}(uv) = u\,\mathrm{d}v + v\,\mathrm{d}u$.

例题 3.2 (第一换元与分部积分法)**.** 计算不定积分 $\int \frac{\mathrm{e}^{\arctan x}}{(1+x^2)^{\frac{3}{2}}}\,\mathrm{d}x$.

例题 3.3 (间接求积分)**.** 计算不定积分 $\int \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\,\mathrm{d}x$, 其中 $\alpha, \beta > 0$.

例题 3.4 (成对求积分)**.** 计算不定积分 $I = \int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^4}$ 与 $J = \int \frac{x^2\mathrm{d}x}{1+x^4}$.

3.2 不定积分: 有理函数专题

定理 3.4 (真分式的分解)**.** 若真分式 $\frac{R(x)}{P(x)Q(x)}$ 中 P, Q 互质, 则它必然存在分解式

$$\frac{R(x)}{P(x)Q(x)} = \frac{R(x)}{P(x)} + \frac{R(x)}{Q(x)}, \tag{29}$$

其中, $\frac{R(x)}{P(x)}$ 与 $\frac{R(x)}{Q(x)}$ 都是真分式.

- 一般地, 我们先将有理函数化为多项式与真分式之和, 再将真分式按**代数基本定理**作因式分解, 最后用真分式的分解定理将其分解为若干**部分分式**之和, 即可计算其积分.

例题 3.5 (待定系数分解)**.** 计算不定积分 $\int \frac{x^3+x^2+2}{(x^2+2)^2}\,\mathrm{d}x$.

例题 3.6 (根式代换)**.** 计算不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{\sqrt[3]{(x+1)^2(x-1)^4}}$.

注记 3.1. 一般推荐的根式代换形式为 $t = \sqrt[n]{ax+b}$ 或 $t = \sqrt[n]{\frac{ax+b}{cx+d}}$.

例题 3.7 (三角代换)**.** 计算不定积分 $\int \frac{\mathrm{d}x}{1+\epsilon\cos x}$, 其中, 常数 $\epsilon > 0$.

注记 3.2. 一般推荐的三角代换形式为**万能代换**: $t \equiv \tan\frac{x}{2}$.

3.3 定积分

定义 3.2 (Riemann 积分)**.**

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \equiv \lim_{\lambda\to 0_+} \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\Delta x_i, \tag{30}$$

其中, $\lambda \equiv \max_{i=1}^{n} \Delta x_i$.

定理 3.5 (Newton-Leibniz 公式)**.** 设函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上可积, 其原函数 $F(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续、在 (a,b) 上可微. 则

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a). \tag{31}$$

例题 3.8 (定积分的换元与分部; 递推求积分)**.** 计算定积分 $I_n = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\,\mathrm{d}x$, 其中 $n \in \mathbb{N}$.

3.4 变限积分函数

定理 3.6 (变限积分的导数)**.** 若函数 $f(x)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 则下述的**变限积分函数**

$$\Phi(x) \equiv \int_a^x f(u)\,\mathrm{d}u \tag{32}$$

在 $[a,b]$ 上可微, 且 $\Phi'(x) = f(x)$.

例题 3.9 (用变限积分研究积分不等式)**.** 证明 **Cauchy-Schwarz 不等式**:

$$\left(\int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}x\right)^2 \leq \int_a^b f^2(x)\,\mathrm{d}x \int_a^b g^2(x)\,\mathrm{d}x. \tag{33}$$

4 积分学的应用

例题 4.1 (弧长)**.** 计算抛物线 $y^2 = 2px(0 \leq x \leq x_0)$ 的弧长.

注记 4.1. 弧微分 $\mathrm{d}s = \sqrt{1+(y')^2}\,\mathrm{d}x$.

例题 4.2 (面积)**.** 计算椭圆 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1$ 的面积.

注记 4.2. 面元 $\mathrm{d}S = h(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $h(x)$ 为点 x 处的图形高度.

例题 4.3 (体积)**.** 计算曲线 $y=\mathrm{e}^{-x}\sqrt{\sin x}$ 绕 Ox 轴旋转所围成的旋转体体积.

注记 4.3. 体积元 $\mathrm{d}V = S(x)\,\mathrm{d}x$, 其中 $S(x)$ 为点 x 处的截面面积.