

$$V(k_0) = \sum_{t=0}^{\infty} [\beta^t \ln(1 - \alpha\beta) + \beta^t \alpha \ln k_t]$$

$$= \ln(1 - \alpha\beta) \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t + \alpha \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \ln k_0$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k_0 + \frac{\ln(1 - \alpha\beta)}{1 - \beta} + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta)$$

$$\begin{aligned} \text{左边} = V(k) &= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + \frac{\ln(1 - \alpha\beta)}{1 - \beta} + \frac{\alpha\beta}{(1 - \beta)(1 - \alpha\beta)} \ln(\alpha\beta) \\ &\triangleq \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + A \end{aligned}$$

$$\text{右边} = \max \{u(f(k) - y) + \beta V(y)\}$$

利用 FOC 和包络条件求解得到  $y = \beta k^\alpha$ , 代入求右边。

$$\text{右边} = \max \{u(f(k) - y) + \beta V(y)\}$$

$$= u(f(k) - g(k)) + \beta \left[ \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln g(k) + A \right]$$

$$= \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k + \beta \left[ \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + A \right]$$

$$= \ln(1 - \alpha\beta) + \alpha \ln k + \beta \left[ \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} [\ln \alpha\beta + \alpha \ln k] + A \right]$$

$$= \alpha \ln k + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \alpha \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + \ln(1 - \alpha\beta) + \frac{\alpha\beta}{1 - \alpha\beta} \ln \alpha\beta + \beta A$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + (1 - \beta)A + \beta A$$

$$= \frac{\alpha}{1 - \alpha\beta} \ln k + A$$

整理：陈传升

整理时间：December 23, 2018

Email: sheng\_ccs@163.com

所以，左边 = 右边，证毕。

# 目 录



写在前面	3
1 矢量	4
1.1 矢量与矩阵	4
1.2 矢量混合积	4
1.3 矢量二重叉积	5
1.4 Laplace 公式	5
1.5 Lagrange 公式	5
1.6 矢量的除法	5
2 矢量分析	7
2.1 标量函数和矢量函数	7
2.2 矢量函数的导数和微分	7
2.3 矢量导数的应用	8
2.4 矢量函数的积分	8
3 场	9
3.1 数量场	9
3.2 矢量场	9
3.3 Hamilton 算子	10
3.4 坐标单位矢	10
4 梯度	12
4.1 $\hat{l}$ 的方向余弦	12
4.2 方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$	13
4.3 梯度	13
A 常见矢量公式	14

# 写在前面



一直以来都想要好好的完善一下自己的数理知识，同时也愉快的使用一次  $\text{\LaTeX}$ ，经过了之前写 matlab 的使用熟悉了 GitHub。终于下定决心  $\text{\LaTeX}$  和 GitHub 结合一下，用这种方式记录下自己的第一个电子版的读书笔记。（嗯。其实手写的读书笔记也没有）

$\text{\LaTeX}$  的模板取自于 Elegant Note 模板，得到的作者的唯一联系方式是他的邮箱 [ddswhu@gmail.com](mailto:ddswhu@gmail.com) 特此感谢。

《矢算场论札记》梁昌洪著，书和“大佬”借的。选择这本书作为自己的一个开始，一个原因是学科需要，另一也是对梁老师有特殊的好感。有好感的原因呢，一是我女朋友也在西电，另一个则是因为梁昌洪老师的《简明微波》一书。

2018 年 12 月 09 日下载模板，2018 年 12 月 10 日，正式开始这个笔记的记录，不知道多年之后的自己看见了，会是什么感觉。

# 第 1 章

## 矢量



凡是与三个独立因素有关的物理量均可以采用三维矢量表示。由此物理量可以分为标量，矢量，二阶张量等。在三维空间中，一个二阶张量则有 9 个分量，可以表示为一个有序 9 元数组或  $3 \times 3$  阶的矩阵

### 1.1 矢量与矩阵

矢量

$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

对应矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

### 1.2 矢量混合积

表征平行六面体有向体积

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

#### Property 1.1

三个非零矢量混合积为 0 的充要条件是  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  三个矢量共面，对应有向体积为 0。



## 1.3 矢量二重叉积

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$

### Property 1.2

三个非零矢量混合积为 0 的充要条件是  $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$  三个矢量共面，对应有向体积为 0。

## 1.4 Laplace 公式

$$(\vec{A} \times \vec{B}) \cdot (\vec{C} \times \vec{D}) = (\vec{A} \cdot \vec{C})(\vec{B} \cdot \vec{D}) - (\vec{A} \cdot \vec{D})(\vec{B} \cdot \vec{C})$$

## 1.5 Lagrange 公式

$$|\vec{A} \times \vec{B}|^2 + |\vec{A} \cdot \vec{B}|^2 = |\vec{A}|^2 |\vec{B}|^2$$

## 1.6 矢量的除法

矢量的叉乘无法唯一性定义矢量的除法运算。只有利用 “ $\cdot$ ” 和 “ $\times$ ” 同时定义才可以。如下，已知  $\vec{a}, \vec{d}$  和标量  $c$ ，求解  $\vec{b}$

$$\begin{cases} \vec{a} \cdot \vec{b} = c \\ \vec{a} \times \vec{b} = \vec{d} \end{cases}$$

构造

$$\vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} (\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{b} (\vec{a} \cdot \vec{a})$$

易得

$$\vec{b} = \frac{\vec{a} (\vec{a} \cdot \vec{b}) - \vec{a} \times (\vec{a} \times \vec{b})}{(\vec{a} \cdot \vec{a})} = \frac{\vec{a} c - \vec{a} \times \vec{d}}{(\vec{a} \cdot \vec{a})}$$

从矢量除法的定义不难看出，矢量的 “ $\cdot$ ” 和 “ $\times$ ” 是相互关联且互为补充的。这



里退化到平面矢量（可作复数的对应），做出讨论。有

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x \hat{i} + a_y \hat{j} = a_x + ia_y \\ \vec{b} = b_x \hat{i} + b_y \hat{j} = b_x + ib_y \end{cases}$$

于是有

$$\bar{a}b = (\vec{a} \cdot \vec{b}) + i \{ \vec{a} \times \vec{b} \}$$

其中  $\bar{a}$  表示  $a$  的共轭复数;  $\{ \}$  符号表示不计算方向，只计算正负的叉积运算。

易得

$$\vec{b} = \frac{\vec{a} (\vec{a} \cdot \vec{b}) + ia (\vec{a} \times \vec{b})}{|a|^2}$$

书中后面讨论的 Hamilton 算子  $\nabla$ 、散度  $\nabla \cdot A$  和旋度  $\nabla \times \vec{A}$  也正好是一对运算。



## 第 2 章

### 矢量分析



#### 2.1 标量函数和矢量函数

对于标量函数，标量  $u$  随着参量  $t$  的变化而变化，即

$$u = u(t)$$

对于矢量  $\vec{A}$  随参数  $t$  变化，即

$$\vec{A} = \vec{A}(t)$$

则称  $\vec{A}$  为矢量函数。分量形式的表示为

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{i} + A_y(t)\hat{j} + A_z(t)\hat{k}$$

##### Property 2.1

一个矢量函数  $\vec{A}(t)$  实际上是由三个独立有序的数量函数  $A_x(t)$ ,  $A_y(t)$  和  $A_z(t)$  结合而成的。

这一点和复解析函数不同，复解析函数  $w = u + iv$  也是由两个二元实函数结合而成，但  $u$ ,  $v$  之间并不独立，收到 *Cauchy-Riemann* 条件约束。



#### 2.2 矢量函数的导数和微分

##### Property 2.2

矢量函数的倒数是一个矢量，它是矢端曲线的切线，并始终指向对应  $t$  增大的方向。



## 2.3 矢量导数的应用

## 2.4 矢量函数的积分

对于一个矢量表示成下面的形式

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\hat{i} + A_y(t)\hat{j} + A_z(t)\hat{k}$$

则矢量函数的不定积分有

$$\int \vec{A}(t) dt = \hat{i} \int A_x(t) dt + \hat{j} \int A_y(t) dt + \hat{k} \int A_z(t) dt$$

### Property 2.3

矢量函数的积分实质上是三个独立有序的数量函数的不定积分。



表 2.1: 矢量函数的基本性质

$$\begin{aligned} \int k\vec{A}(t) dt &= k \int \vec{A}(t) dt \\ \int [\vec{A}(t) \pm \vec{B}(t)] dt &= \int \vec{A}(t) dt \pm \int \vec{B}(t) dt \\ \int \vec{a}u(t) dt &= \vec{a} \int u(t) dt \\ \int \vec{a} \cdot \vec{A}(t) dt &= \vec{a} \cdot \int \vec{A}(t) dt \\ \int \vec{a} \times \vec{A}(t) dt &= \vec{a} \times \int \vec{A}(t) dt \end{aligned}$$





## 第 3 章

### 场



场是物理量的空间函数，时间函数。根据物理量的性质，场可以分为数量场，矢量场，张量场。

#### Property 3.1

场有两个显著的特点：

场是物理的客观存在，不以坐标系选取而变化。

场随时间空间联合变化，本章讨论的是不随时间变化的稳定场论。



### 3.1 数量场

数量函数  $u$  是点  $M$  的函数  $u = u(m)$ 。进一步写成

$$u = u(x, y, z)$$

重要的宏观特征：等值面。

### 3.2 矢量场

如果空间中任意点  $M$  对应一矢量函数

$$\vec{A} = \vec{A}(M)$$

则称  $\vec{A}$  是此空间的一个矢量场，对于一个直角坐标系，有

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$$

重要的宏观特征：矢量线，简称矢线。例如 Faraday 磁力线。

表 3.1: description

坐标系	$q_1$ $q_2$ $q_3$	$H_1$ $H_2$ $H_3$	$\nabla$
直角坐标系	$x$ $y$ $z$	1 1 1	2
圆柱坐标系	$\rho$ $\phi$ $z$	1 $\rho$ 1	1
球坐标系	$r$ $\theta$ $\phi$	1 $r$ $r \sin \theta$	17

3.3 Hamilton 算子

场的空间变化确定其细微的特征。它的研究方法是考虑场的空间微分和导数，并给出相应分析。为此在三维情况引入

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

表示场与空间相互作用的 Hamilton 矢量算子。

Property 3.2

$\nabla$  表示一个运算符号，本身缺乏独立的意义。和场结合才有作用。  
 $\nabla$  算子具有矢量和运算的双重特性，这是认识算子的一个极为重要的概念。



$q_1, q_2$  和  $q_3$  表示独立的正交坐标， $\hat{e}_1, \hat{e}_2$  和  $\hat{e}_3$  则表示其相应的单位切向矢。广义正交曲线坐标的  $\nabla$  算子的一般形式为，

$$\nabla = \hat{e}_1 \frac{1}{H_1} \frac{\partial}{\partial q_1} + \hat{e}_2 \frac{1}{H_2} \frac{\partial}{\partial q_2} + \hat{e}_3 \frac{1}{H_3} \frac{\partial}{\partial q_3}$$

式中， $H_1, H_2$  和  $H_3$  为 Lamè 系数。

3.4 坐标单位矢

同一矢量场在不同的坐标系下有不同的表象和形式。



**Property 3.3**

必须强调指出，三种坐标系中，只有直角坐标系的  $\hat{i}$ ,  $\hat{j}$ ,  $\hat{k}$  和圆柱坐标系的  $\hat{e}_z$  是不变单位矢，其他的各种单位矢，例如  $\hat{e}_\rho, \hat{e}_\phi; \hat{e}_r, \hat{e}_\phi, \hat{e}_\theta$  均为变单位矢。换句话说，方向是时刻在变化的。因此必须参与微分和积分。



## 第 4 章

### 梯度



如果说等值面是数量场的宏观特征，那么场的空间变化就是其微观特征。

#### 4.1 $\hat{l}$ 的方向余弦

数量场  $u = u(x, y, z)$  的变化空间取一点  $M_0$ ，对应  $u_0 = u(x_0, y_0, z_0)$ ，研究此时场朝  $\hat{l}$  方向的变化规律。

任取一段  $\Delta \hat{l}$ ，写出

$$\Delta \hat{l} = \Delta x \hat{i} + \Delta y \hat{j} + \Delta z \hat{k}$$

式中  $\Delta x$ ， $\Delta y$ ， $\Delta z$  表示  $\Delta \hat{l}$  在  $x$ ， $y$ ， $z$  轴的投影，则可知这一方向的单位矢是

$$\hat{l} = \left( \frac{\Delta x}{\Delta l} \right) \hat{i} + \left( \frac{\Delta y}{\Delta l} \right) \hat{j} + \left( \frac{\Delta z}{\Delta l} \right) \hat{k}$$

则矢量  $\Delta \hat{l}$  的长度（或模），具体有，

$$\Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

定义

$$\cos \alpha = \frac{\Delta x}{\Delta l}, \quad \cos \beta = \frac{\Delta y}{\Delta l}, \quad \cos \gamma = \frac{\Delta z}{\Delta l}$$

分别表示单位矢  $\hat{l}$  在  $x$ ， $y$ ， $z$  轴的方向余弦，最后得到

$$\hat{l} = \cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}$$

且满足等式

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

## 4.2 方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$

数量场  $u = u(x, y, z)$  在  $M_0(x_0, y_0, z_0)$  处可微, 则  $u$  在  $M_0$  处沿  $\hat{l}$  的方向导数必定存在, 且有

$$\left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma$$

## 4.3 梯度

重新观察上式, 且将他写成两个矢量函数的点积形式, 即

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial u}{\partial l} \right|_{M_0} &= \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot (\cos \alpha \hat{i} + \cos \beta \hat{j} + \cos \gamma \hat{k}) \\ &= \left( \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k} \right) \cdot \hat{l} \end{aligned}$$

上式清楚的表明: 数量场的方向导数由两部分组成: 一个是方向单位矢, 一个是数量场的导数矢  $\frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k}$  如果考虑 3.3 所引入的 Hamilton 矢量算子  $\nabla$ ,

$$\nabla = \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z}$$

即可写出

$$\nabla u = \left( \hat{i} \frac{\partial}{\partial x} + \hat{j} \frac{\partial}{\partial y} + \hat{k} \frac{\partial}{\partial z} \right) u$$

于是有

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\nabla u) \cdot \hat{l}$$

定义数量场  $u(x, y, z)$  在点  $M_0$  处的梯度为

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x} \hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y} \hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z} \hat{k}$$

### Property 4.1

梯度是一个矢量, 且是数量场  $u(x, y, z)$  在  $M_0$  处的固有属性, 与方向  $\hat{l}$  无关。



# 第 A 章

## 常见矢量公式



矢量混合积

$$\vec{A} \cdot (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} \cdot (\vec{C} \times \vec{A}) = \vec{C} \cdot (\vec{A} \times \vec{B})$$

矢量二重叉积

$$\vec{A} \times (\vec{B} \times \vec{C}) = \vec{B} (\vec{A} \cdot \vec{C}) - \vec{C} (\vec{A} \cdot \vec{B})$$