Reading Notes

读《矢算场论札记》记

Institute for Advanced Study

Victory won't come to us unless we go to it.

整理：陈传升

整理时间：November 29, 2019

Email: sheng_ccs@163.com

Version: 1.00

目　　录

写在前面

一直以来都想要好好的完善一下自己的数理知识，同时也愉快的使用一次 LaTeX，经过了之前写 matlab 的使用熟悉了 GitHub。终于下定决心 LaTeX 和 GitHub 结合一下，用这种方式记录下自己的第一个电子版的读书笔记。(嗯。其实手写的读书笔记也没有)

LaTeX 的模板取自于 Elegant Note 模板，得到的作者的唯一联系方式是他的邮箱 ddswhu@gmail.com特此感谢。

《矢算场论札记》梁昌洪著，书和"大佬"借的。选择这本书作为自己的一个开始，一个原因是学科需要，另一也是对梁老师有特殊的好感。有好感的原因呢，一是因为我女朋友也在西电，另一个则是因为梁昌洪老师的《简明微波》一书。

2018 年 12 月 09 日下载模板，2018 年 12 月 10 日，正式开始这个笔记的记录，不知道多年之后的自己看见了，会是什么感觉。

现在已经是 2019 年 5 月 25 日了，根据 GitHub 的记录，上一次写这本读书笔记还是 2018 年 12 月 28 日，完成进度写到了4.3这一小节。

阶段性的完成了本科毕业论文的工作之后，可以闲下心来写一些自己的东西，希望能留下点什么。在完成了，适用于毕业论文的 word 排版技巧之后，终于拾起了这本搁置好久的读书笔记。希望能在毕业旅行之前，取得一定量的进展吧。

时光匆匆如流水，再一次打开已经是 2019 年 11 月 9 日了，仍然停留在了4.3, 真的可悲和可笑。如今的自己已经是一个正式的博士研究生了，希望尽快写完这哥小小的读书笔记吧。

第 1 章
矢量

凡是与三个独立因素有关的物理量均可以采用三维矢量表示。由此物理量可以分为标量，矢量，二阶张量等。在三维空间中，一个二阶张量则有 9 个分量，可以表示为一个有序 9 元数组或 3×3 阶的矩阵

1.1 矢量与矩阵

矢量

$$\vec{A} = A_x\widehat{i} + A_y\widehat{j} + A_z\widehat{k}$$

对应矩阵

$$A = \begin{bmatrix} A_x \\ A_y \\ A_z \end{bmatrix}$$

1.2 矢量混合积

表征平行六面体有向体积

$$\vec{A} \cdot \left(\vec{B} \times \vec{C}\right) = \vec{B} \cdot \left(\vec{C} \times \vec{A}\right) = \vec{C}$$

Property 1.1

三个非零矢量混合积为 0 的充要条件是 $\vec{A}, \vec{B}, \vec{C}$ 三个矢量共面，对应有向体积为 0。

1.3 矢量二重叉积

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$

Property 1.2

三个非零矢量混合积为 0 的充要条件是 $\vec{A},\vec{B},\vec{C}$ 三个矢量共面，对应有向体积为 0。

1.4 Laplace 公式

$$\left(\vec{A}\times\vec{B}\right)\cdot\left(\vec{C}\times\vec{D}\right)=\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{D}\right)-\left(\vec{A}\cdot\vec{D}\right)\left(\vec{B}\cdot\vec{C}\right)$$

1.5 Lagrange 公式

$$\left|\vec{A}\times\vec{B}\right|^2+\left|\vec{A}\cdot\vec{B}\right|^2=\left|\vec{A}\right|^2\left|\vec{B}\right|^2$$

1.6 矢量的除法

矢量的叉乘无法唯一性定义矢量的除法运算。只有利用“·”和“×”同时定义才可以。如下，已知 $\vec{a}$,$\vec{d}$ 和标量 c，求解 $\vec{b}$

$$\begin{cases}\vec{a}\cdot\vec{b}=c\\ \vec{a}\times\vec{b}=\vec{d}\end{cases}$$

构造

$$\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)=\vec{a}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)-\vec{b}\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)$$

易得

$$\vec{b}=\frac{\vec{a}\left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)-\vec{a}\times\left(\vec{a}\times\vec{b}\right)}{\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)}=\frac{\vec{a}c-\vec{a}\times\vec{d}}{\left(\vec{a}\cdot\vec{a}\right)}$$

从矢量除法的定义不难看出，矢量的“·”和“×”是相互关联且互为补充的。这

里退化到平面矢量（可作复数的对应），做出讨论。有

$$\begin{cases} \vec{a} = a_x\hat{i} + a_y\hat{j} = a_x + ia_y \\ \vec{b} = b_x\hat{i} + b_y\hat{j} = b_x + ib_y \end{cases}$$

于是有

$$\bar{a}b = \left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + i\left\{\vec{a} \times \vec{b}\right\}$$

其中 $\bar{a}$ 表示 a 的共轭复数;$\{\}$ 符号表示不计算方向，只计算正负的叉积运算。
易得

$$\vec{b} = \frac{\vec{a}\left(\vec{a} \cdot \vec{b}\right) + ia\left(\vec{a} \times \vec{b}\right)}{|a|^2}$$

书中后面讨论的 Hamilton 算子 ∇、散度 $\nabla \cdot A$ 和旋度 $\nabla \times \vec{A}$ 也正好是一对运算。

第 2 章
矢量分析

2.1 标量函数和矢量函数

对于标量函数，标量 u 随着参量 t 的变化而变化, 即

$$u = u(t)$$

对于矢量 $\vec{A}$ 随参数 t 变化，即

$$\vec{A} = \vec{A}\,(t)$$

则称 $\vec{A}$ 为矢量函数。分量形式的表示为

$$\vec{A}\,(t) = A_x\,(t)\,\hat{i} + A_y\,(t)\,\hat{j} + A_z\,(t)\,\hat{k}$$

Property 2.1

一个矢量函数 $\vec{A}\,(t)$ 实际上是由三个**独立**有序的数量函数 $A_x\,(t)$,$A_y\,(t)$ 和 $A_y\,(t)$ 结合而成的。
这一点和复解析函数不同，复解析函数 $w = u + iv$ 也是由两个二元实函数结合而成，但 *u*，*v* 之间并不独立，收到 *Cauchy-Riemann* 条件约束。
关于 *Cauchy-Riemann* 条件，可以参考相关的复变函数书籍，或者是梁昆淼所著的《数学物理方法》一书。

2.2 矢量函数的导数和微分

Property 2.2

矢量函数的导数是一个矢量，它是矢端曲线的切线，并**始终**指向对应 t 增大的方向。

2.3 矢量导数的应用

2.4 矢量函数的积分

对于一个矢量表示成下面的形式

$$\vec{A}(t) = A_x(t)\,\hat{i} + A_y(t)\,\hat{j} + A_z(t)\,\hat{k}$$

则矢量函数的不定积分有

$$\int \vec{A}(t)\ dt = \hat{i}\int A_x(t)\ dt + \hat{j}\int A_y(t)\ dt + \hat{k}\int A_z(t)\ dt$$

Property 2.3

矢量函数的积分实质上是三个**独立有序**的数量函数的不定积分。

表 2.1: 矢量函数的基本性质

$\int k\vec{A}(t)\ dt = k\int \vec{A}(t)\ dt$
$\int \left[\vec{A}(t) \pm \vec{B}(t)\right]\ dt = \int \vec{A}(t)\ dt \pm \int \vec{B}(t)\ dt$
$\int \vec{a}u(t)\ dt = \vec{a}\int u(t)\ dt$
$\int \vec{a}\cdot\vec{A}(t)\ dt = \vec{a}\cdot\int \vec{A}(t)\ dt$
$\int \vec{a}\times\vec{A}(t)\ dt = \vec{a}\times\int \vec{A}(t)\ dt$

第 3 章
场

场是物理量的空间函数，时间函数。根据物理量的性质，场可以分为数量场，矢量场，张量场。

Property 3.1

场有两个显著的特点：
场是物理的客观存在，不以坐标系选取而变化。
场随时间空间联合变化，本章讨论的是不随时间变化的稳定场论。

3.1 数量场

数量函数 u 是点 M 的函数 $u = u(m)$。进一步写成

$$u = u(x, y, z)$$

重要的宏观特征：等值面。

3.2 矢量场

如果空间中任意点 M 对应一矢量函数

$$\vec{A} = \vec{A}(M)$$

则称 $\vec{A}$ 是此空间的一个矢量场，对于一个直角坐标系，有

$$\vec{A} = \vec{A}(x, y, z)$$

重要的宏观特征：矢量线，简称矢线。例如 Faraday 磁力线。

表 3.1: description

坐标系	$q_1\ q_2\ q_3$	$H_1\ H_2\ H_3$	∇
直角坐标系	$x\ y\ z$	1 1 1	2
圆柱坐标系	$\rho\ \phi\ z$	$1\ \rho\ 1$	1
球坐标系	$r\ \theta\ \phi$	$1\ r\ r\sin\theta$	17

3.3 Hamilton 算子

场的空间变化确定其细微的特征。它的研究方法是考虑场的空间微分和导数，并给出相应分析。为此在三维情况引入

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

表示场与空间相互作用的 Hamilton 矢量算子。

Property 3.2

∇ 表示一个运算符号，本身缺乏独立的意义。和场结合才有作用。
∇ 算子具有矢量和运算的双重特性，这是认识算子的一个极为重要的概念。

q_1，q_2 和 q_3 表示独立的正交坐标，$\hat{e}_1$，$\hat{e}_2$ 和 $\hat{e}_3$ 则表示其相应的单位切向矢。广义正交曲线坐标的 ∇ 算子的一般形式为，

$$\nabla = \hat{e}_1\frac{1}{H_1}\frac{\partial}{\partial q_1} + \hat{e}_2\frac{1}{H_2}\frac{\partial}{\partial q_2} + \hat{e}_3\frac{1}{H_3}\frac{\partial}{\partial q_3}$$

式中，H_1，H_2 和 H_3 为 Lamè 系数。

3.4 坐标单位矢

同一矢量场在不同的坐标系下有不同的表象和形式。

Property 3.3

必须强调指出，三种坐标系中，只有直角坐标系的 $\hat{i}$，$\hat{j}$，$\hat{k}$ 和圆柱坐标系的 $\hat{e}_z$ 是不变单位矢，其他的各种单位矢，例如 $\hat{e}_\rho$,$\hat{e}_\phi$;$\hat{e}_r$，$\hat{e}_\phi$,$\hat{e}_\theta$ 均为**变单位矢**。换句话说，方向是时刻在变化的。**因此必须参与微分和积分**。 ♡

第 4 章 梯度

如果说等值面是数量场的宏观特征，那么场的空间变化就是其微观特征。

4.1 $\hat{l}$ 的方向余弦

数量场 $u=u\left(x,y,z\right)$ 的变化空间取一点 M_0，对应 $u_0=u\left(x_0,y_0,z_0\right)$, 研究此时场朝 $\hat{l}$ 方向的变化规律。

任取一段 $\Delta\hat{l}$, 写出

$$\Delta\hat{l}=\Delta x\hat{i}+\Delta y\hat{j}+\Delta z\hat{k}$$

式中 Δx，Δy，Δz 表示 $\Delta\hat{l}$ 在 x，y，z 轴的投影, 则可知这一方向的单位矢是

$$\hat{l}=\left(\frac{\Delta x}{\Delta l}\right)\hat{i}+\left(\frac{\Delta y}{\Delta l}\right)\hat{j}+\left(\frac{\Delta z}{\Delta l}\right)\hat{k}$$

则矢量 $\Delta\hat{l}$ 的长度（或模），具体有，

$$\Delta l=\sqrt{\left(\Delta x\right)^2+\left(\Delta y\right)^2+\left(\Delta z\right)^2}$$

定义

$$\cos\alpha=\frac{\Delta x}{\Delta l}\text{，}\quad\cos\beta=\frac{\Delta y}{\Delta l},\cos\gamma=\frac{\Delta z}{\Delta l}$$

分别表示单位矢 $\hat{l}$ 在 x，y，z 轴的方向余弦，最后得到

$$\hat{l}=\cos\alpha\hat{i}+\cos\beta\hat{j}+\cos\gamma\hat{k}$$

且满足等式

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma=1$$

4.2 方向导数 $\frac{\partial u}{\partial l}$

数量场 $u = u(x, y, z)$ 在 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 处可微，则 u 在 M_0 处沿 $\hat{l}$ 的方向导数必定存在，且有

$$\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma$$

4.3 梯度

重新观察上式，且将他写成两个矢量函数的点积形式，即

$$\begin{aligned}\left.\frac{\partial u}{\partial l}\right|_{M_0} &= \frac{\partial u}{\partial x}\cos\alpha + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\beta + \frac{\partial u}{\partial z}\cos\gamma \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\left(\cos\alpha\hat{i} + \cos\beta\hat{j} + \cos\gamma\hat{k}\right) \\ &= \left(\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}\right)\cdot\hat{l}\end{aligned}$$

上式清楚的表明：数量场的方向导数由两部分组成：一个是方向单位矢，一个是数量场的导数矢 $\frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}$ 如果考虑3.3所引入的 Hamilton 矢量算子 ∇,

$$\nabla = \hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

即可写出

$$\nabla u = \left(\hat{i}\frac{\partial}{\partial x} + \hat{j}\frac{\partial}{\partial y} + \hat{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)u$$

于是有

$$\frac{\partial u}{\partial l} = (\nabla u)\cdot\hat{l}$$

定义数量场 $u(x, y, z)$ 在点 M_0 处的梯度为

$$\nabla u = \frac{\partial u}{\partial x}\hat{i} + \frac{\partial u}{\partial y}\hat{j} + \frac{\partial u}{\partial z}\hat{k}$$

Property 4.1

梯度是一个矢量，且是数量场 $u(x, y, z)$ 在 M_0 处的**固有属性**，与方向 $\hat{l}$ 无关。 ♡

4.4 最速下降法

工程上碰到的最优化问题，大多数都是（多元）数量场的问题。因此把目标函数的等高线画出来，将负梯度作为搜索方向——就是最优化理论中的最速下降法了。

第 A 章
常见矢量公式

矢量混合积

$$\vec{A}\cdot\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\cdot\left(\vec{C}\times\vec{A}\right)=\vec{C}$$

矢量二重叉积

$$\vec{A}\times\left(\vec{B}\times\vec{C}\right)=\vec{B}\left(\vec{A}\cdot\vec{C}\right)-\vec{C}\left(\vec{A}\cdot\vec{B}\right)$$